Управление обратной связи в задачах с бесконечным горизонтом

(1) Как и ранее,

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B_1 u_1(t) + B_2 u_2(t), \quad x(0) = x_0 \qquad (8.3.2)$$

$$J_i(x_0, u_1, u_2) = \lim_{T \to \infty} J_i(x_0, u_1, u_2, T) \qquad (8.3.1)$$

$$J_i(x_0, u_1, u_2, T) = \int_0^T \{x^T(t) Q_i x(t) + u_i^T(t) R_{ii} u_i(t) + u_j^T(t) R_{ij} u_j(t)\} dt$$

$j \neq i$,

$Q_i, R_{ij}, i, j = 1,2$ симметричные, R_{ii} – положит. опред.

Управления обратной связи предполагаются в виде $u_i = F_i x$, где F_i – постоянная матрица.

Главное дополнительное предположение состоит в требовании, что допустимыми являются только такие матрицы F_1, F_2, что $A + B_1 F_1 + B_2 F_2$ является устойчивой матрицей.

Таким образом, подразумевается некая согласованность в действиях игроков: есть множество допустимых пар, которые дают устойчивость системы, ситуацию равновесия по Нэшу можно выбирать только из таких пар. Но и при отклонении от выбранной пары (F_1^*, F_2^*), скажем, (F_1^*, F_2) или (F_1, F_2^*) должны обеспечивать устойчивость.

Совокупность пар, обеспечивающих устойчивость, обозначается $\mathcal{F}$:

$$\mathcal{F} = \{(F_1, F_2) \mid A + B_1 F_1 + B_2 F_2 \text{ is stable}\}.$$

Предположение о "согласованности" в выборе управлений обратной связи вызывает в приложениях много вопросов. Но без этого предположения не получается хорошей теории. Содержательный смысл: игроки в главном договариваются, а отклонения идут без нарушения о главном.

Записываем связанную систему алгебраических уравнений Риккати:

$$0 = -(A - S_2K_2)^T K_1 - K_1(A - S_2) + K_1S_1K_1 - Q_1 - K_2S_{21}K_2 \quad (8.3.3)$$

$$0 = -(A - S_1K_1)^T K_2 - K_2(A - S_1K_1) + K_2S_2K_2 - Q_2 - K_1S_{12}K_1 \quad (8.3.4)$$

Эта система повторяет (аналогична) системе (8.2.6) и (8.2.7) дифференциальных уравнений Риккати, которая использовалась на предыдущем занятии в задаче с конечным горизонтом. Символ $S_i = B_i R_{ii}^{-1} B_i^T$, символ $S_{ij} = B_i R_{ii}^{-1} R_{ji} R_{ii}^{-1} B_i^T$ (начало раздела 8.1, стр. 359).

Симметричными стабилизирующими решениями (symmetric stabilizing solutions) системы (8.3.3) и (8.3.4) называются такие симметричные матричные решения (K_1, K_2), для которых матрица $A - S_1K_1 - S_2K_2$ является устойчивой (стр. 372).

(2) Теорема о необходимых и достаточных условиях существования равновесия по Нэшу в управлениях обратной связи в задаче с бесконечным горизонтом.

Теорема 8.5, стр. 372.

1) Пусть (K_1, K_2) – симметричное стабилизирующее решение

уравнения Риккати (8.3.3) и (8.3.4). Положим $F_i^* = -R_{ii}^{-1} B_i^T K_i$, $i = 1, 2$. Тогда (F_1^*, F_2^*) — Нэшевское управление обратной связи. Более того, получаемая плата есть $x_0^T K_i x_0$, $i = 1, 2$.

2). Обратное. Если (F_1^*, F_2^*) — Нэшевские обратной связи, то $\exists$ симметричное стабилизирующее решение (K_1, K_2) уравнения (8.3.3) и (8.3.4) такое что $F_i^* = -R_{ii}^{-1} B_i^T K_i$.

Структура формулировки такая же, как и раньше. Надо обратить внимание, что об единственности ничего не говорится. Доказательство нетрудное. Опираться на решение задач управления. Доказательство разобрать.

Д.З. Верно ли, что управления могут меняться с изменением x_0?

3) Уточнение теоремы для антагонистической игры.

Следствие 8.6 (стр. 380). Динамика

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1 u(t) + B_2 u_2(t), \quad x(0) = x_0;$$

плата

$$J_1(u_1, u_2) = \int_0^\infty \{ x^T(t) Q x(t) + u_1^T(t) R_1 u_1(t) - u_2^T(t) R_2 u_2(t) \} dt$$

$$J_2(u_1, u_2) = -J_1(u_1, u_2),$$

матрицы Q и R_i, $i = 1, 2$, симметричны, R_i — положит.-опред.

Эта игра имеет для каждого x_0 Нэшевское равновесие по обратной связи тогда и только тогда, когда уравнение Риккати

$$-A^T K - KA + K(S_1 - S_2)K - Q = 0$$

имеет симметричное решение K такое, что матрица $A - S_1 K + S_2 K$ является стабильной. Более того, ситуация равновесия единственна. Равновесные управления и плата имеют вид $u_1^*(t) = -R_1^{-1} B_1^T K x(t)$, $u_2^*(t) = R_2^{-1} B_2^T K x(t)$, $x_0^T K x_0$ для первого игрока и $-x_0^T K x_0$ для второго.

Д.З. Доказательство на стр. 380 – 381 разобрать. Обратить внимание на то, за счёт чего происходит уточнение результата теоремы 8.5. Обратите внимание также на комментарий на стр. 381 – в чём состоит отличие с аналогичной формулировкой для задачи программного управления: а) матрица A не предполагается устойчивой, в) уравнение Риккати одно (в предложении 7.20 (стр. 293) были ещё два связанных уравнения Риккати).

(4) Примеры. В примере 8.6 установлено ∃ бесконечного числа управлений обратной связи, доставляющих Нэшевское равновесие. Посмотреть этот пример формально, без подробных выкладок.

В примере 8.7 показывается существенность предположения о стабильности матрицы $A - S_1K + S_2K$. Т.е. если игрок 2 придерживается управления Нэшевского равновесия, полученного в предположении устойчивости, а первый выходит из этого предположения, то первый получит

Д.З. более хороший для себя результат, но движение системы не будет устойчивым. Этот пример разобрать. Примеры 8.8 и 8.9 подобраны для скалярного случая и для функционала частного вида

$$J_i(x_0, u_1, u_2) = \int_0^\infty \{q_i\, x^2(t) + r_i u_i^2\}\, dt, \quad i = 1, 2.$$

Д.З. Они показывают, что может быть конечное число решений в неантагонистической игре. Разобрать эти примеры.