ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕХНИЧЕСКОЙ КИБЕРНЕТИКИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1968

ДЖ. ЛЕЙТМАН

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Перевод с английского
К. А. ЛУРЬЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1968

6П2. 15
Л 42
УДК 62-50

Введение в теорию оптимального управления, Л е й т м а н Дж., изд-во «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, М., 1968, 192 стр.

Книга содержит изложение основных фактов современной теории оптимального управления системами с конечным числом степеней свободы. Для вывода основных утверждений широко используются геометрические представления. Общие построения сопровождаются многочисленными и хорошо подобранными примерами. В главе 1 описывается постановка основной оптимальной задачи. Формулируется «принцип максимума», позволяющий выделить «экстремальные» управления, среди которых содержатся оптимальные. Приводится ряд примеров определения экстремальных и оптимальных управлений. Глава 2 посвящена исследованию оптимальных задач для линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. В главе 3 результаты главы 1 обобщаются на более сложные случаи. Рассматривается неинтегральный показатель качества, случай автономной системы, случай, когда ограничения на управления зависят от фазовых координат. Поставлена задача о синтезе оптимального управления. Глава 4 содержит развитие теории на случай, когда имеются ограничения на фазовые координаты. Результаты формулируются в виде «ограниченного принципа максимума». В приложениях дается подробная иллюстрация всех общих результатов; формулируются основные теоремы существования и указывается связь изложенных методов с методами вариационного исчисления. Табл. 2. Илл. 60. Библ. 38 назв.

GEORGE LEITMANN

Professor of Engineering Science University of California, Berkeley

AN INTRODUCTION TO OPTIMAL CONTROL

McGRAW-HILL BOOK COMPANY
NEW YORK SAN FRANCISCO ST. LOUIS TORONTO LONDON SYDNEY

3-3-14
126-68

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие автора к русскому изданию 8
Предисловие к американскому изданию 9
Указатель обозначений и символов 11

Глава 1. Геометрические вопросы теории оптимальных процессов; оптимальное управление при ограничениях на управляющие функции 13
1.1. Постановка задачи и основные допущения 13
1.2. Траектории в расширенном пространстве состояний 16
1.3. Предельные поверхности и поверхности равных оптимальных значений функционала 17
1.4. Некоторые свойства предельных поверхностей 18
1.5. Уравнения состояния и управление 23
1.6. Интегральный показатель качества 25
1.7. Некоторые свойства одного линейного преобразования 27
1.8. Преобразование касательной плоскости 29
1.9. Регулярные внутренние точки предельной поверхности 31
1.10. Регулярные оптимальные траектории 34
1.11. Условие трансверсальности в конце траектории . . . 36
1.12. Условие трансверсальности в начале траектории . . . 38
1.13. Принцип максимума 41
1.14. Связь между сопряженным вектором и вектором градиента 42
1.15. Экстремальное управление 44
1.16. Пример: оптимальное по быстродействию управление ускорением прямолинейно движущейся ракеты постоянной мощности 46
1.17. Пример: навигационная задача быстродействия . . . 51
1.18. Пример: минимальное расстояние до заданной кривой 56
Упражнения 58

Глава 2. Системы специального вида 60
2.1. Линейные уравнения состояния с постоянными коэффициентами 60
2.2. Функция переключений 61
2.3. Быстродействие и релейное управление 62
2.4. Число переключений 64
2.5. Пример: одномерный оптимальный по быстродействию регулятор 66

2.6. Пример: трехмерный оптимальный по быстродействию регулятор 73
2.7. Уравнение траектории, линейно зависящее от управлений; особое управление 76
2.8. Пример: максимум дальности полета ракеты с ограниченным ускорением 78
2.9. Пример: максимум дальности ракеты при горизонтальном полете 84
Упражнения 90

Глава 3. **Некоторые обобщения** 93
3.1. Неинтегральный показатель качества 93
3.2. Пример: экстремальное управление ракетой ограниченной величины тяги 98
3.3. Неавтономные системы и зависящие от времени концевые многообразия 104
3.4. Автономные системы с заданным временем перехода 109
3.5. Пример: задача о встрече для ракеты постоянной мощности при минимальном расходе топлива 110
3.6. Ограничения на управления, зависящие от переменных состояния 113
3.7. Пример: оптимальный по быстродействию регулятор с ограничением управления, зависящим от скорости . . . 118
3.8. Задачи с параметрами 124
3.9. Пример: задача оптимального управления с параметром 128
3.10. Связи в концевой точке, выражаемые неравенствами 129
3.11. Пример: задача оптимального управления с ограниченным значением параметра 132
3.12. Оптимальное управление при наличии обратной связи 140
3.13. Пример: оптимальное управление с обратной связью в задаче о встрече при минимальном расходе топлива 142
Упражнения 143

Глава 4. **Оптимальное управление при ограничениях на управляющие функции и переменные состояния** 147
4.1. Ограничения на переменные состояния 147
4.2. Ограничения на управления 148
4.3. Оптимальная траектория, лежащая на заданной границе 149
4.4. Ограниченное множество значений управления 151
4.5. Соотношение между нормалями 153
4.6. Ограниченный принцип максимума 158
4.7. Условие скачка 159
4.8. Некоторые свойства сопряженного уравнения 159
4.9. Пример: минимальное расстояние между двумя точками при наличии запрещенной области 161
Упражнения 167

Приложение А. **Иллюстрирующий пример** 169
А.1. Система, переход и оптимальность (пп. 1.1, 1.5 и 1.6) 169
А.2. Траектории (п. 1.2) 171
А.3. Поверхности Σ и S (п. 1.3) 172

A.4. Основное свойство поверхности Σ (п. 1.4) 173
A.5. Преобразование касательной плоскости (пп. 1.7 и 1.8) 173
A.6. Регулярная внутренняя точка Σ (п. 1.9) 174
A.7. Принцип максимума (п. 1.13) 175
A.8. Вектор градиента (п. 1.14) 175

Приложение Б. Существование оптимального управления 177

Приложение В. Связь с вариационным исчислением 179
B.1. Простейшая задача 179
B.2. Уравнение Эйлера — Лагранжа 181
B.3. Условие Лежандра 182
B.4. Условие Вейерштрасса 182
B.5. Условия в угловых точках 183
B.6. Условие трансверсальности 184
B.7. Естественное граничное условие 184

Литература 186

Предметный указатель 189

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

С большим удовольствием я принимаю приглашение д-ра К. А. Лурье написать несколько слов к его переводу этой небольшой книги. Испытываемое мною удовлетворение тем более велико, что моя книга удостоена чести быть переведенной в стране, где выполнены и выполняются столь многие важные исследования в области оптимального управления.

Беркли, Калифорния
Май 1967 г.

Дж. Лейтман

ПРЕДИСЛОВИЕ К АМЕРИКАНСКОМУ ИЗДАНИЮ

Эта небольшая книга имеет целью ввести читателя в круг вопросов, связанных с теорией оптимального управления динамическими системами. Я не буду следовать обычной практике использования предисловия с целью подчеркнуть большую важность излагаемого предмета и таким образом оправдать написание книги и, что еще важнее, ее чтение. Этот вопрос читатель должен решить без подсказки с моей стороны. Я хотел бы, однако, использовать эту возможность, чтобы сказать несколько слов о содержании книги и о предполагаемом круге читателей.

В книге дается вводное изложение теории оптимального управления детерминированными динамическими системами, поведение которых описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями. В этот класс попадают многие — но, конечно, не все — системы, встречающиеся в инженерной практике и в прикладных науках, включая социальные и биологические науки. Я уверен, что читатель найдет в области своих интересов множество задач, которые не охватываются в полной мере результатами, полученными или цитированными в этой книге.

Я надеюсь, однако, что он будет в достаточной степени стимулирован, чтобы пойти дальше предлагаемого здесь элементарного рассмотрения как в изучении предмета, так и в собственных исследованиях с тем, чтобы прийти в конце концов к нужным для себя результатам.

Нижеследующие рассуждения являются главным образом геометрическими по своему существу. Я избрал такой подход потому, что считаю геометрические понятия интуитивно ясными и в то же время сохраняющими строгий характер. Кроме того, подобные рассуждения можно распространить на

классы задач более сложных, чем те, которые в различных местах книги связываются с упрощающими предположениями.

Эта книга составлена по записям лекций по вариационному исчислению и оптимальному управлению, которые читались мною в продолжение ряда лет аспирантам первого года обучения на инженерном отделении в Беркли. Основываясь на этом опыте, я полагаю, что книга может быть использована читателями, чье математическое образование находится на уровне студента старших курсов инженерного отделения или факультета прикладных наук. Поэтому читатель может пропустить детали некоторых выводов, особенно в главах 1 и 4, и сосредоточить свое внимание на результатах и многочисленных иллюстрирующих примерах. Читатель, лучше подготовленный математически, но не имеющий необходимых сведений об элементах современной алгебры, может изучить выводы, основывающиеся на интуитивно ясных геометрических понятиях. В приложении А дается простой пример с целью проиллюстрировать и сделать более легко воспринимаемыми многие результаты главы 1.

Наконец, читатель с уровнем выпускника высшего учебного заведения может критически изучить написанное и пойти дальше в последующем освоении предмета. В первую очередь для такого читателя я составил список книг, которые считаю полезными для дальнейшего изучения излагаемых здесь вопросов.

Большая часть главы 1 основана на исследованиях, проведенных совместно с проф. А. Блакьером из Парижского университета. Я весьма ему обязан. Рассуждения главы 4 взяты из диссертации К. В. Саундерса; я благодарен ему за разрешение использовать их здесь. Я признателен также проф. Х. Халкину из Университета Сан-Диего (Калифорния) за критическое ознакомление с рукописью. Наконец, я хотел бы выразить свою благодарность Национальному научному фонду и Отделу морских исследований за поддержку некоторых работ, включенных в эту книгу.

Джордж Лейтман

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ И СИМВОЛОВ

Обозначения

Малые жирные буквы обозначают векторы: $\mathbf{x}$, $\boldsymbol{x}$, $\mathbf{u}$. Вектор может быть либо вектор-столбец, либо вектор-строка, но для экономии места все векторы будут векторами-строками: $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Строчная и столбцевая формы записи вектора никак не будут различаться. Если такое различие существенно, в тексте будет указано, какая форма вектора употребляется: например, вектор, умножающийся на матрицу слева, есть вектор-строка, тогда как вектор, умножающийся на матрицу справа, есть вектор-столбец.

Большие жирные буквы или жирно обозначенные частные производные суть матрицы: $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ или $\partial \mathbf{f}/\partial \boldsymbol{x}$ и $\partial \mathbf{f}/\partial \mathbf{u}$.

Скалярные или векторные функции скалярных или векторных переменных обозначаются заключением аргумента в скобки: $\boldsymbol{x}(t)$, $\mathbf{f}(\boldsymbol{x}, \mathbf{u})$, $x_0(t)$, $f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u})$. Те же символы используются для обозначения значения функции при данном значении независимой переменной (переменных); например, $\boldsymbol{x}(t')$ обозначает значение $\boldsymbol{x}(t)$ при $t = t'$. В общем случае функция указывается вместе с промежутком, на котором она определена: $\mathbf{u}(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$.

Точка обозначает скалярное (внутреннее) произведение двух векторов: например, $\boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{f}$ обозначает $\sum_{j=0}^{n} \lambda_j f_j$. Это определение скалярного произведения предполагает использование ортонормированного базиса для разложения векторов, например, $\boldsymbol{\lambda} = \lambda_0 \mathbf{e}_0 + \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \ldots + \lambda_n \mathbf{e}_n$, где $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 1$, если $i = j$, и $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0$, если $i \neq j$.

Фигурные скобки обозначают множество или семейство. Например, $\{e\}$ есть множество с производящим элементом e. Далее, $\{e : P\}$ есть множество с элементом e, имеющим свойство P.

Аргументы $t-0$ и $t+0$ обозначают левое и правое предельные значения функции от t: $x(t-0)=\lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon<0}} x(t+\varepsilon)$ и $x(t+0)=\lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} x(t+\varepsilon)$.

Символы

$\triangleq$	равно по определению; обозначает
$=$	равно, эквивалентно
$\neq$	не равно
$\equiv$	тождественно равно
$\not\equiv$	не тождественно равно
$\leqslant (\geqslant)$	меньше (больше) или равно
$< (>)$	меньше (больше)
$\forall$	для всех
$\exists$	существует
$\cup$	объединение
$\cap$	пересечение
$\subset$	является подмножеством
$\subseteq$	является подмножеством или совпадает
$\supset$	содержит
$\in$	является элементом (принадлежит)
$\notin$	не является элементом (не принадлежит)
$\times$	произведение
$\bullet$	скалярное произведение
$[t', t'']$	замкнутый промежуток $t' \leqslant t \leqslant t''$
(t', t'')	открытый промежуток $t' < t < t''$
$(t', t'']$	полуоткрытый промежуток $t' < t \leqslant t''$
$\lvert(\ )\rvert$	норма (евклидова длина) вектора ( ); $\lvert\mathbf{V}\rvert \triangleq \sqrt{\mathbf{V}\cdot\mathbf{V}}$ абсолютная величина скаляра ( )
$\varnothing$	пустое множество
$\sup\limits_{e}$	супремум (наименьшая верхняя грань) по всем e
$\inf\limits_{e}$	инфимум (наибольшая нижняя грань) по всем e
sgn	оператор сигнум: $\operatorname{sgn} e = \begin{cases} 1 & \text{при } e>0 \\ -1 & \text{при } e<0 \\ 0 & \text{при } e=0 \end{cases}$

ГЛАВА 1

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ; ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА УПРАВЛЯЮЩИЕ ФУНКЦИИ

1.1. Постановка задачи и основные допущения

Рассмотрим систему, описываемую конечным числом действительных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Значения этих переменных в любой момент времени t определяют *состояние* системы в этот момент времени. Мы будем представлять состояние системы точкой $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в n-мерном евклидовом пространстве E^n, называемом *пространством состояний или фазовым пространством*. Допустим, например, что система представляет собой ракету, идеализируемую как точка переменной массы, движущаяся в трех измерениях. Ее состояние представляется семью переменными: тремя компонентами каждого из векторов положения и скорости и массой.

Мы будем предполагать, что динамическое поведение системы, т. е. временна́я история ее состояний, определяется каким-либо правилом или *заданной совокупностью правил*. В данный момент нет необходимости конкретно указывать эту совокупность правил, хотя всякий раз мы будем иметь дело с системами, поведение которых определяется обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Например, поведение упомянутой выше ракеты описывается тремя обыкновенными дифференциальными уравнениями второго порядка и одним — первого порядка. Эти уравнения выражают три компоненты ускорения и скорость расхода массы соответственно как функции положения, скорости, массы, времени и тяги. При изменении зависимости тяги от времени эти правила изменяются, тем самым оказывая влияние на поведение ракеты или, как мы будем говорить, *управляя* ее поведением.

Всякому правилу или заданной совокупности правил соответствует определенная смена состояний системы во времени: состояние $\mathbf{x}$ есть функция времени $\mathbf{x}(t)$. Иными словами,

если задано правило r, то состояние совершает движение вдоль *пути* p в пространстве состояний.

В последующих рассуждениях мы будем рассматривать пути, соответствующие всем допустимым правилам, т. е. всем правилам из данной совокупности. В частности, мы коснемся задачи о переводе системы за конечный промежуток времени из заданного состояния $\mathbf{x}^0$ в некоторое состояние из заданной совокупности θ^1. В общем случае переходу из $\mathbf{x}^0$ в $\mathbf{x}^1 \in \theta^1$ соответствуют определенные правила; другие правила приведут к траекториям, которые заканчиваются состоянием $\overline{\mathbf{x}}^1 \notin \theta^1$.

Допустим, далее, что существует правило, которое ставит в соответствие некоторое (единственное) число каждому переходу, совершаемому по какому-либо из допустимых правил, управляющих поведением системы. Такое правило, или функционал, называется показателем качества, а число, которое ставится в соответствие переходу, называется значением функционала или *выигрышем*. В общем случае выигрыш при переходе из $\mathbf{x}^0$ в $\mathbf{x}^1$ или из $\mathbf{x}^0$ в $\overline{\mathbf{x}}^1$ зависит от правила r и от соответствующего пути p; по этой причине он будет обозначаться через $V(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^f; r, p)$, где $\mathbf{x}^f = \mathbf{x}^1$ или $\overline{\mathbf{x}}^1$.

Если говорить о нашем примере с ракетой, то таким функционалом мог бы быть интеграл от скорости расхода массы. Его значение представляет собой массу израсходованного топлива, соответствующую определенной программе изменения тяги при полете из известного начального состояния (положение, скорость, масса) в некоторое заданное множество конечных состояний. Интересующая нас задача состоит в том, чтобы определить такую программу изменения тяги, которая приводит к минимальному расходу топлива, т. е. *оптимальную* программу тяги.

Мы будем говорить, что правило r^* *оптимально* для перехода из $\mathbf{x}^0$ в θ^1, если соответствующий путь p^* из $\mathbf{x}^0$ достигает некоторого состояния $\mathbf{x}^{1*} \in \theta^1$ и выигрыш принимает при этом свое *минимальное* значение, т. е.

$$V(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^{1*}; r^*, p^*) \leqslant V(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1; r, p) \qquad (1.1)$$

для всех допустимых правил.

При данном начальном состоянии и заданном множестве конечных состояний может существовать более одного опти-

мального правила. Из определения (1.1), однако, следует, что *минимальный выигрыш единственный*; поэтому можем написать

$$V^*(\mathbf{x}^0;\ \theta^1) \triangleq V(\mathbf{x}^0,\ \mathbf{x}^{1*};\ r^*,\ p^*) \quad \forall r^*,$$

чтобы подчеркнуть, что для заданной системы конечных состояний минимальный выигрыш является функцией лишь начального состояния.

Переход из $\mathbf{x}^0$ в θ^1 может происходить либо по оптимальному, либо по неоптимальному правилу (рис. 1.1). Рассмотрим два подмножества пространства состояний E^n:

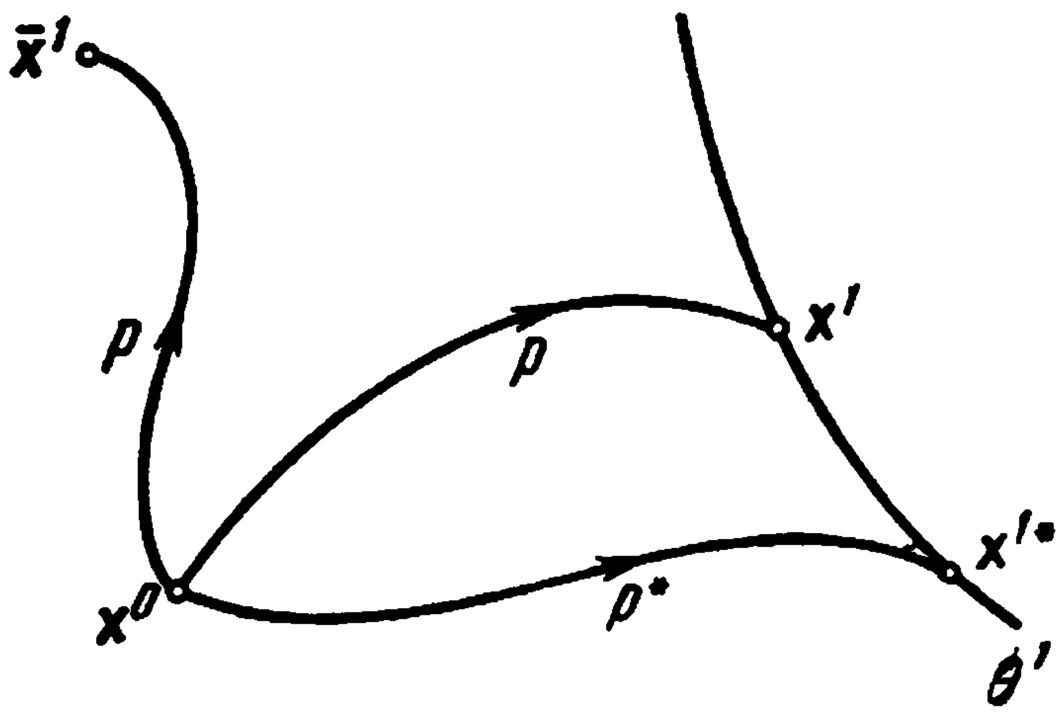

Рис. 1.1. Пути в пространстве состояний.

1) множество E всех точек, из которых можно провести траектории, оканчивающиеся на заданном множестве конечных состояний, т. е.

$$E \triangleq \{\mathbf{x}^0:\ \exists p \text{ из } \mathbf{x}^0 \text{ в } \theta^1\};$$

2) множество E^* всех точек, через которые проходят траектории, соответствующие оптимальным правилам, т. е.

$$E^* \triangleq \{\mathbf{x}^0:\ \exists p^* \text{ из } \mathbf{x}^0 \text{ в } \theta^1\}.$$

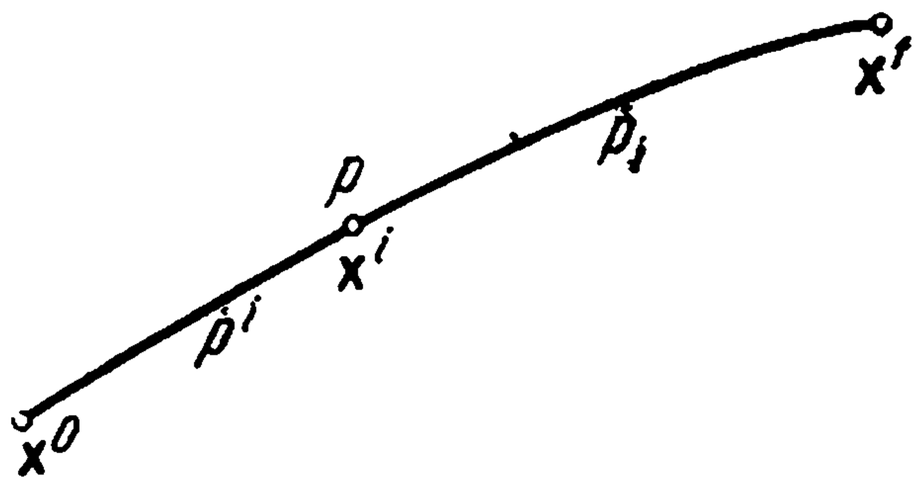

Рис. 1.2. Аддитивность выигрыша.

Естественно, каждое из этих множеств не обязано совпадать со всем пространством состояний. Иными словами, среди множества допустимых правил может и не оказаться оптимального правила и вообще даже какого-либо правила, которое переводит систему из состояния $\mathbf{x}^0$ в конечное множество θ^1. Если E^* или E не совпадают со всем пространством E^n, то эти множества обладают граничными точками.

Мы сделаем следующее допущение: выигрыш, связанный с переходом между точками траектории, соответствующей

Придавая различные значения параметру C в формуле (1.3), мы получаем однопараметрическое семейство траекторий, лежащих на поверхности цилиндра с образующей, параллельной оси x_0; эта поверхность пересекается с E^n по кривой p. Если путь p заканчивается в точке множества θ^1 конечных состояний, то геометрическое место соответствующих траекторий пересекает цилиндрическую поверхность $\Theta^1 \triangleq \theta^1 \times \{x_0\}$ по линии X^1, которая параллельна оси x_0 и пересекается с E^n в конечной точке $\mathbf{x}^1 = p \cap \theta^1$ (рис. 1.3). Аналогичные замечания относятся к уравнению (1.4).

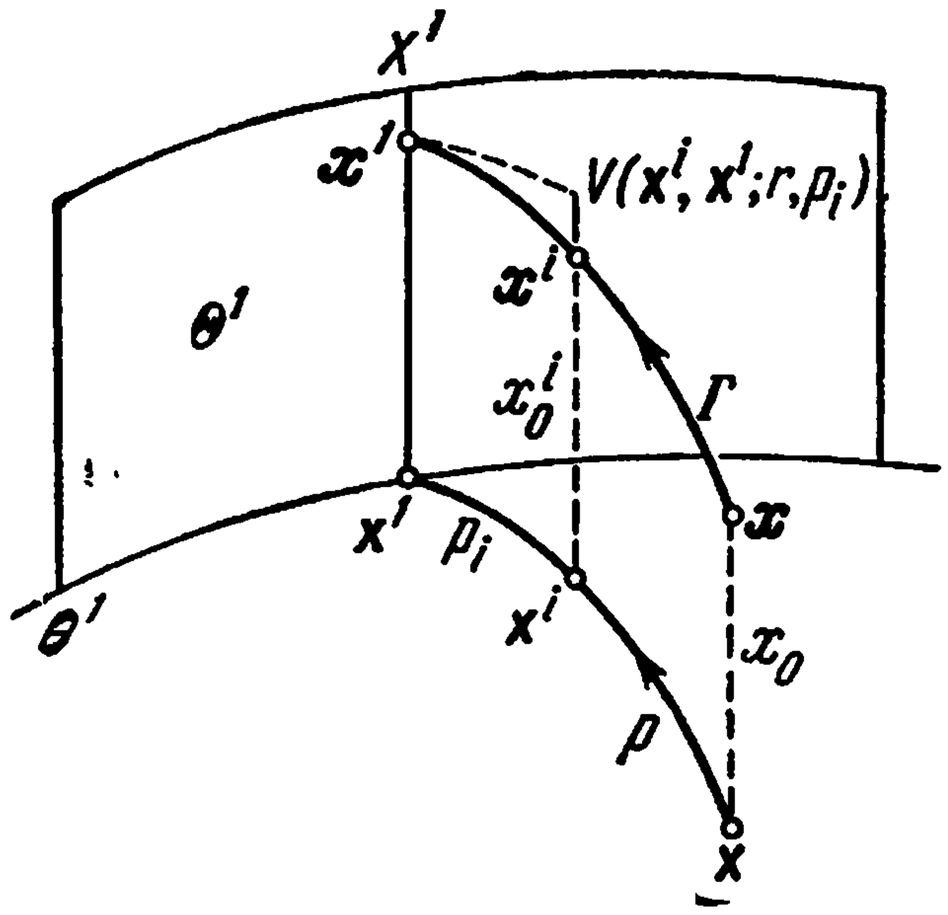

Рис. 1.3. Траектория в расширенном пространстве состояний.

Ясно, что выигрыш, получаемый при переходе из состояния $\mathbf{x}$ в $\mathbf{x}^f$ вдоль пути p, соответствующего правилу r, не зависит от выигрыша, получаемого при переходе в состояние $\mathbf{x}$. Можно считать значение x_0 в состоянии $\mathbf{x}$ выигрышем, достигаемым при переходе в $\mathbf{x}$; при этом C будет полным выигрышем, связанным с переходом в $\mathbf{x}^f$. Рассмотрим вновь пример с ракетой; пусть расход топлива будет показателем качества. Тогда $V(\mathbf{x}, \mathbf{x}^f; r, p)$ представляет количество топлива, израсходованного при полете ракеты из $\mathbf{x}$ в $\mathbf{x}^f$ вдоль пути p в пространстве состояний; x_0 есть топливо, затраченное для достижения состояния $\mathbf{x}$, а C — полный расход топлива, необходимый для достижения состояния $\mathbf{x}^f$.

1.3. Предельные поверхности и поверхности равных оптимальных значений функционала

Поскольку $V^*(\mathbf{x}^0; \theta^1)$ определено для $\mathbf{x}^0 \in E^*$, уравнение

$$x_0 + V^*(\mathbf{x}; \theta^1) = C, \tag{1.5}$$

где C — постоянный параметр, определяет однолистную поверхность Σ в пространстве E^{n+1}. Иными словами, Σ есть

поверхность, точки которой находятся в однозначном соответствии с точками E^*.

Функция $x_0 = C - V^*(\mathbf{x};\ \theta^1)$ определена на E^* и в общем случае *) обращается в нуль на поверхности S, уравнение которой имеет вид

$$V^*(\mathbf{x};\ \theta^1) = C. \tag{1.6}$$

При изменении значения параметра C уравнения (1.5) и (1.6) определяют два однопараметрических семейства поверхностей: $\{\Sigma\}$ в пространстве $\mathfrak{E}^* \triangleq E^* \times \{x_0\}$ и $\{S\}$ в пространстве E^*, которые мы будем называть соответственно *предельными поверхностями* и *поверхностями равных оптимальных значений функционала*. Первое из этих наименований основано на свойстве поверхностей Σ, которое будет обсуждаться в следующем пункте. Второе наименование является следствием определений поверхности S и минимального выигрыша $V^*(\mathbf{x}^0;\ \theta^1)$: заданная поверхность S есть геометрическое место всех начальных состояний $\mathbf{x}^0$, из которых система может быть переведена в заданное множество конечных состояний θ *с одним и тем же минимальным выигрышем* C.

1.4. Некоторые свойства предельных поверхностей

В этом пункте мы приведем вывод теоремы, имеющей фундаментальное значение для последующего изучения оптимальных процессов. Предварительно докажем несколько лемм относительно предельных поверхностей.

Лемма 1. *Любая оптимальная траектория* Γ^*, *пересекающая множество* Θ^1 *в точке* x^1, *целиком расположена на поверхности* Σ, *проходящей через* x^1 **).

Для доказательства леммы нужно убедиться, что

$$V(\mathbf{x}^i,\ \mathbf{x}^{1*};\ r^*,\ p_i) = V^*(\mathbf{x}^i;\ \theta^1)\ p_i \subset p^*. \tag{1.7}$$

В самом деле, в силу (1.4) и (1.5) значения x_0^i соответственно на Γ^* и на Σ совпадают для каждой точки $\mathbf{x}^i$ на

---

*) В исключительном случае, когда $V^*(\mathbf{x};\ \theta^1)$ не зависит от $\mathbf{x}$, можно показать, что $V^*(\mathbf{x},\ \theta^1) \equiv 0$. При этом поверхность S не определена.

**) Если $\mathbf{x}^1 \notin E^*$, то эта точка должна принадлежать границе E^* (см. пример п. 1.16 и случай 2 в примере п. 1.17). В этом случае точка x^1 принадлежит замыканию поверхности Σ в E^{n+1}.

соответствующем оптимальном пути от $\mathbf{x}^0$ до θ^1. Ясно, что это эквивалентно требованию, чтобы любая часть оптимального пути до данного множества конечных состояний сама по себе была оптимальным путем, приводящим к этому множеству. Из свойства аддитивности (1.2) вытекает, что

$$V^*(\mathbf{x}^0;\ \theta^1) \triangleq V(\mathbf{x}^0,\ \mathbf{x}^{1*};\ r^*,\ p^*) = \\ = V(\mathbf{x}^0,\ \mathbf{x}^i;\ r^*,\ p^i) + V(\mathbf{x}^i,\ \mathbf{x}^{1*};\ r^*,\ p_i)$$

для всех $\mathbf{x}^i \in p^*$, где $p^* = p^i \cup p_i$ и $\mathbf{x}^{1*} = p^* \cap \theta^1$.

Предположим, что (1.7) не имеет места, т. е.

$$V^*(\mathbf{x}^i;\ \theta^1) \triangleq V(\mathbf{x}^i,\ \mathbf{x}_i^{1*};\ r_i^*,\ p_i^*) < V(\mathbf{x}^i,\ \mathbf{x}^{1*};\ r^*,\ p_i),$$

где r_i^* — оптимальное правило для перехода из $\mathbf{x}^i$ в θ^1, p_i^* — соответствующий путь, а $\mathbf{x}_i^{1*} = p_i^* \cap \theta^1$. Тогда можно перевести систему из $\mathbf{x}^0$ в $\mathbf{x}^i$ вдоль пути p^i, пользуясь правилом r^*, и затем из $\mathbf{x}^i$ в θ^1 вдоль пути p_i^*, следуя правилу r_i^* (см. рис. 1.4). Обращаясь вновь к свойству аддитивности (1.2), напишем

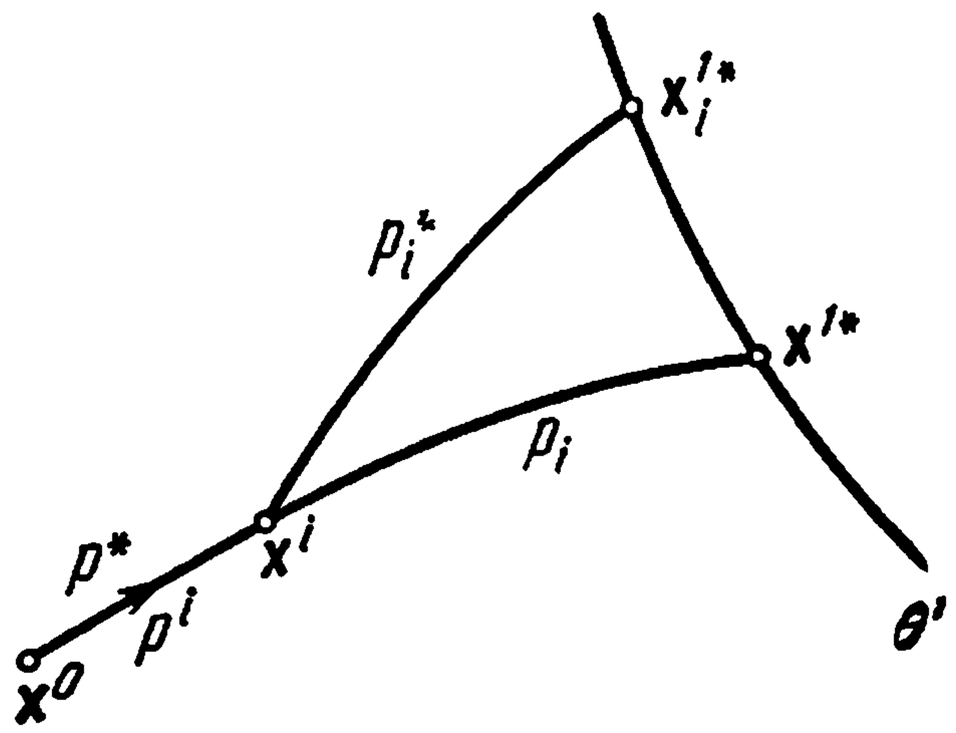

Рис. 1.4. Пути, рассматриваемые при доказательстве леммы 1.

$$V(\mathbf{x}^0,\ \mathbf{x}_i^{1*};\ r,\ p) = \\ = V(\mathbf{x}^0,\ \mathbf{x}^i;\ r^*,\ p^i) + \\ + V(\mathbf{x}^i,\ \mathbf{x}_i^{1*};\ r_i^*,\ p_i^*);$$

здесь r представляет собой правило, состоящее из r^* на участке от $\mathbf{x}^0$ до $\mathbf{x}^i$ и из r_i^* на участке от $\mathbf{x}^i$ до $\mathbf{x}_i^{1*}$, а $p = p^i \cup p_i^*$.

Таким образом, $V(\mathbf{x}^0,\ \mathbf{x}_i^{1*};\ r,\ p) < V(\mathbf{x}^0,\ \mathbf{x}^{1*};\ r^*,\ p^*)$.

Это неравенство противоречит оптимальности правила r^* и устанавливает, таким образом, справедливость уравнения (1.7) и всей леммы.

Рассмотрим теперь две предельные поверхности Σ_1 и Σ_2, отвечающие двум различным значениям полного выигрыша C_1 и C_2 соответственно. Пусть x_{01} и x_{02} будут значения x_0 на Σ_1 и Σ_2 при одном и том же состоянии $\mathbf{x}$. Тогда из (1.5) вытекает, что $x_{01} - x_{02} = C_1 - C_2 \quad \forall \mathbf{x} \in E^n$.

Отсюда следует, что представители однопараметрического семейства $\{\Sigma\}$ могут быть получены один из другого параллельным переносом вдоль оси x_0. Более того, эти поверхности располагаются вдоль оси x_0 в том же порядке, что и полный выигрыш C, т. е. чем «выше» поверхность Σ, тем больше полный выигрыш C (рис. 1.5). Поэтому через каждую

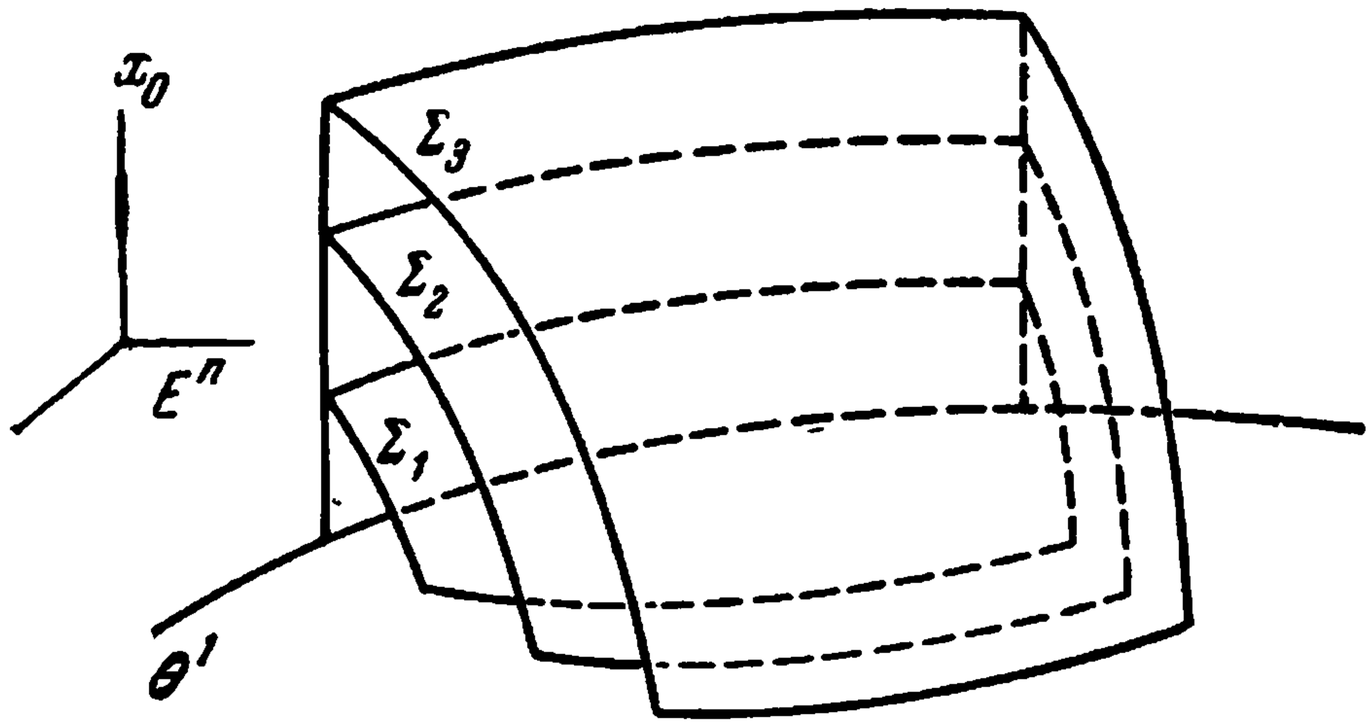

Рис. 1.5. Семейство предельных поверхностей.

точку пространства $\mathscr{E}^*$ проходит одна и только одна поверхность Σ. Это свойство вместе с леммой 1 приводит к следующему результату.

Лемма 2. *Оптимальная траектория* Γ^*, *имеющая одну точку на предельной поверхности* Σ, *целиком лежит на этой поверхности, иными словами, предельные поверхности* $\{\Sigma\}$ *являются геометрическим местом всех оптимальных траекторий.*

Введем некоторые обозначения. Заданная предельная поверхность Σ делит область $\mathscr{E}^*$ на две разделенные области *). Мы будем обозначать эти области через A/Σ («над» Σ) и B/Σ («под» Σ) соответственно.

Для поверхности Σ, соответствующей полному выигрышу C, мы имеем:

$$A/\Sigma \triangleq \{\boldsymbol{x}\colon x_0 > C - V^*(\mathbf{x};\ \theta^1)\}$$

и

$$B/\Sigma \triangleq \{\boldsymbol{x}\colon x_0 < C - V^*(\mathbf{x};\ \theta^1)\}.$$

*) То есть не имеющие общих точек.

Точка $x \in A/\Sigma$ будет называться A-точкой относительно Σ, а точка $x \in B/\Sigma$ — B-точкой относительно Σ (рис. 1.6).

Рассмотрим теперь поверхность Σ, отвечающую полному выигрышу C, точку $x \in \Sigma$, проекция которой на E^n есть $\mathbf{x}$,

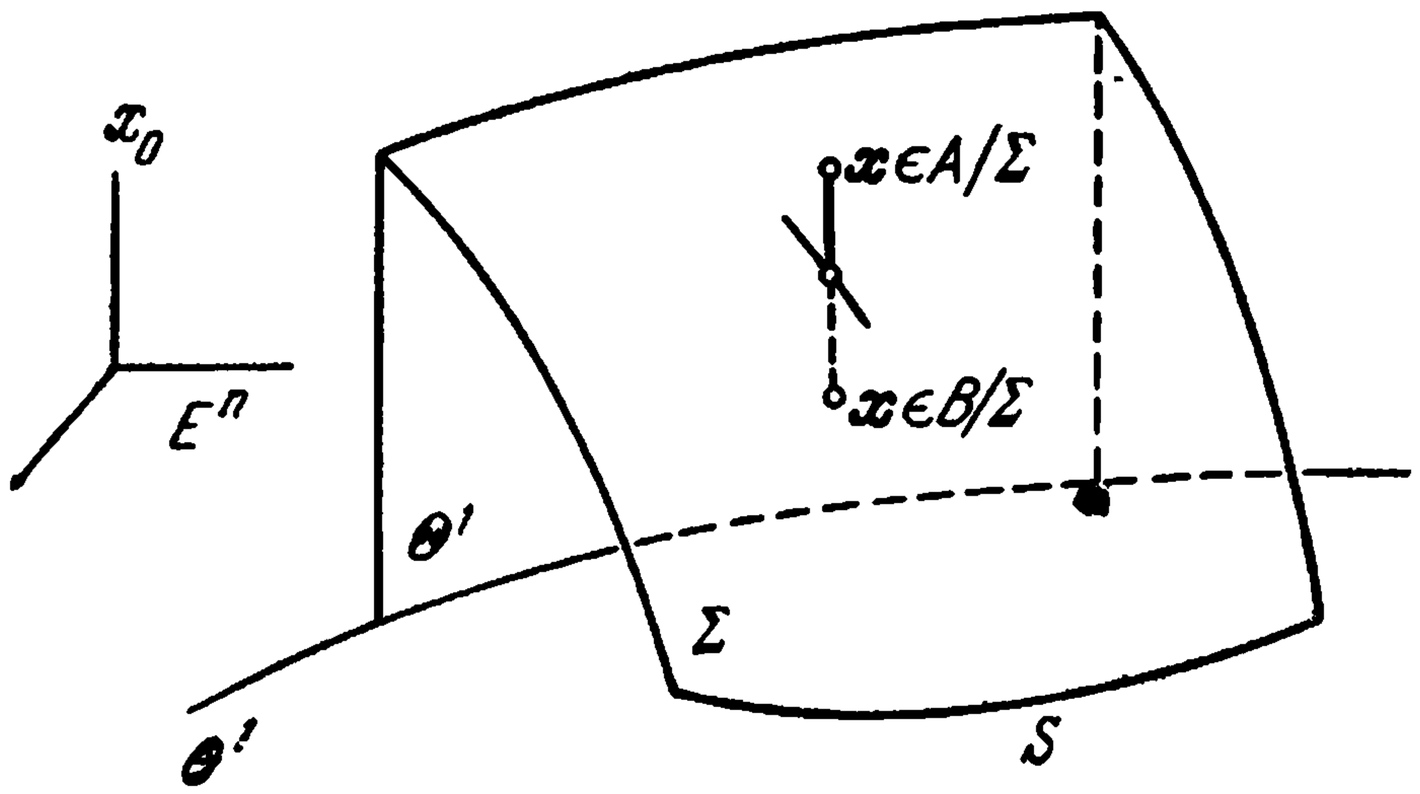

Рис. 1.6. A- и B-точки относительно поверхности Σ.

и неоптимальную траекторию Γ, которая соответствует полному выигрышу C', начинается в точке x и достигает Θ^1 в точке x^1. Уравнение поверхности Σ:

$$x_0 + V^*(\mathbf{x};\ \theta^1) = C,$$

тогда как координата x_0 кривой Γ дается уравнением

$$x_0^i + V(\mathbf{x}^i,\ \mathbf{x}^1;\ r,\ p_i) = C', \quad p_i \subset p,$$

где r — неоптимальное правило, порождающее путь p — проекцию Γ на E^n. Вследствие неоптимальности правила r

$$V(\mathbf{x},\ \mathbf{x}^1;\ r,\ p) > V^*(\mathbf{x};\ \theta^1),$$

так что $C' > C$.

Таким образом, неоптимальная траектория, достигающая множества Θ^1, пересекает его в A-точке относительно той предельной поверхности, на которой она начинается. Этот результат вместе с леммой 2 сразу же приводит к следующему утверждению.

Лемма 3. *Не существует траектории, которая, начинаясь на заданной предельной поверхности* Σ, *пересекает множество* Θ^1 *в* B*-точке относительно* Σ.

Пользуясь этой леммой, мы докажем теперь основное утверждение этого пункта.

Рассмотрим снова предельную поверхность, скажем Σ_1, соответствующую полному выигрышу C_1, и *неоптимальную* траекторию Г, которая выходит из точки x на Σ_1. Пусть теперь некоторая точка кривой Г, например x', есть B-точка относительно Σ_1. Пусть Σ_0 — предельная поверхность, которая проходит через точку x' и соответствует полному выигрышу C_0. Из (1.5) сразу следует, что

$$C_0 < C_1.$$

Таким образом, всякая точка $(C_0, \mathbf{x}^1)$, где $\mathbf{x}^1 \in \theta^1$, есть B-точка относительно Σ_1.

Рассмотрим теперь траекторию, которая состоит из части неоптимальной траектории Г, соединяющей x с x', и следующей за ней *оптимальной* траектории из x' в Θ^1 (рис. 1.7).

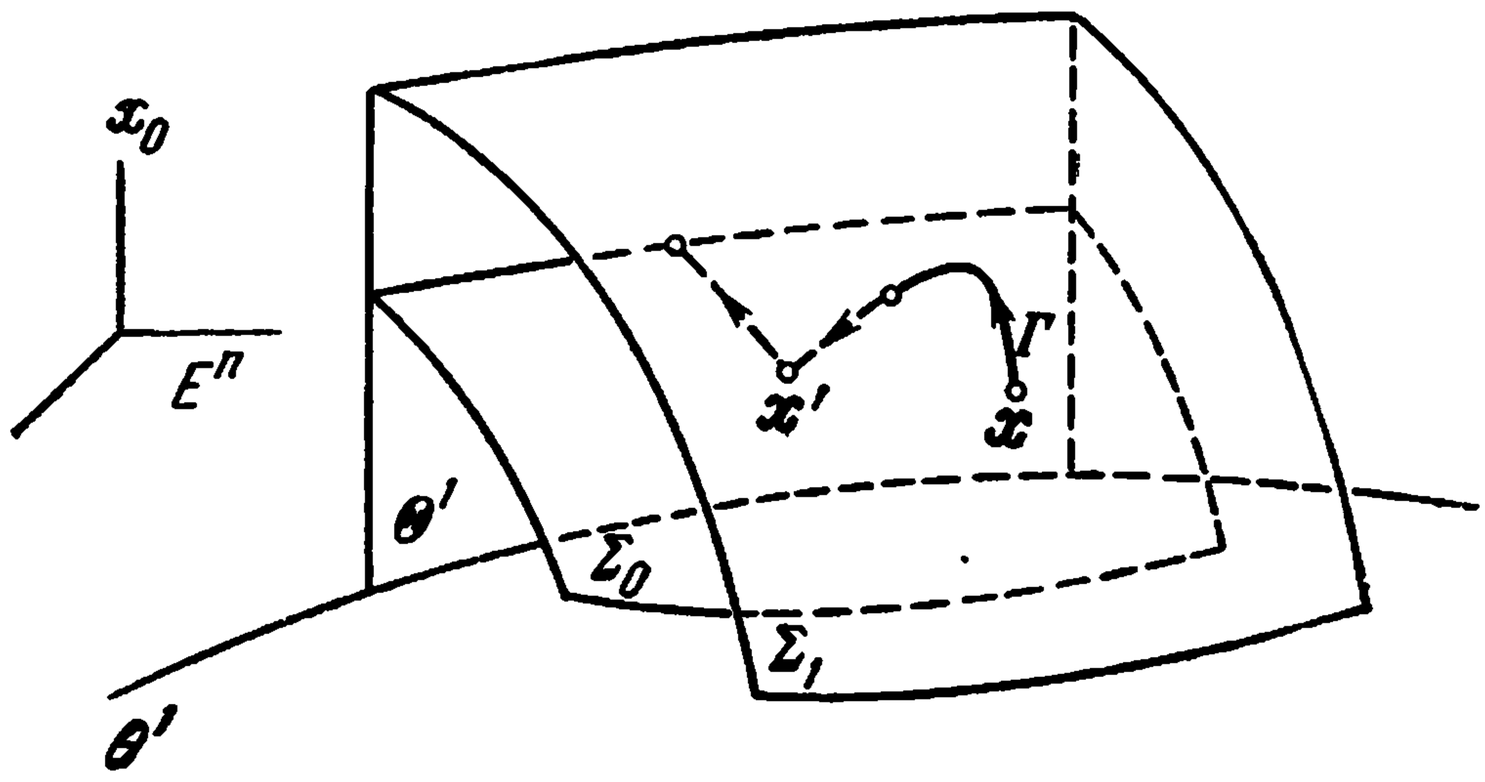

Рис. 1.7. Траектория, рассматриваемая при доказательстве теоремы 1.

Согласно лемме 2 оптимальная траектория, начинающаяся в x', лежит целиком в Σ_0 и, следовательно, пересекает Θ^1 в B-точке относительно Σ_1. С другой стороны, в силу леммы 3 не существует траектории, начинающейся на Σ_1 и пересекающей Θ^1 в B-точке относительно Σ_1.

Мы приходим к заключению, что неоптимальная траектория, которая начинается в точке на данной предельной поверхности Σ, не может иметь B-точек относительно Σ. Этот результат вместе с леммой 2 составляет содержание нашей первой теоремы.

Теорема 1. *Траектория (оптимальная или неоптимальная), начальная точка которой принадлежит задан-*

ной предельной поверхности Σ, *не может иметь B-точек относительно* Σ.

Эта теорема отражает предельное свойство поверхностей $\{\Sigma\}$: заданная поверхность принадлежит границе области, содержащей все траектории, начинающиеся на этой поверхности.

Эта характеристика предельных поверхностей, вместе с их свойством быть геометрическим местом всех оптимальных траекторий, играет фундаментальную роль при исследовании оптимального поведения динамических систем. Для получения дополнительных сведений следует обратиться теперь к специальной системе правил, определяющих поведение системы.

1.5. Уравнения состояния и управление

С этого момента наше внимание будет обращено на системы, переменные состояния которых являются функциями времени, удовлетворяющими *уравнениям состояния*

$$\frac{dx_j}{dt} = f_j(x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots, u_m), \qquad (1.8)$$

$$j = 1, 2, \ldots, n.$$

Здесь $u_1, u_2, \ldots, u_m$ представляют собой *управляющие переменные*, которые определяют точку $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$ в m-мерном евклидовом пространстве E^m. Мы будем называть $\mathbf{u}$ управляющим вектором или просто управлением.

Ясно, что задание управления как функции времени на некотором промежутке $[t_0, t_1]$ равносильно заданию правила, которое определяет поведение системы в течение этого промежутка времени. Если, таким образом, управление есть известная функция $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, то уравнения (1.8) принимают вид

$$\frac{dx_j}{dt} = g_j(\mathbf{x}, t), \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$

где $g_j(\mathbf{x}, t) \triangleq f_j(\mathbf{x}, \mathbf{u}(t))$. В нашем примере с ракетой управлением служит тяга ракеты. Здесь стоит отметить, что компоненты физического вектора, каким является тяга ракеты $\mathbf{T}$, являются компонентами алгебраического вектора, каким является управление $\mathbf{u}$; обратное, однако, не обязательно имеет место.

Например, можно задать вектор **T**:

(1) компонентами T_1, T_2, T_3 в физической координатной системе;

(2) абсолютной величиной T и двумя углами φ и ψ;

(3) абсолютной величиной T и тремя направляющими косинусами α, β и γ.

Соответствующие управляющие векторы таковы:

$$\text{(1)} \qquad \mathbf{u} = (T_1, T_2, T_3);$$

$$\text{(2)} \qquad \mathbf{u} = (T, \varphi, \psi);$$

$$\text{(3)} \qquad \mathbf{u} = (T, \alpha, \beta, \gamma).$$

Компоненты физического и алгебраического векторов совпадают только в случае (1). В самом деле, в случае (3) алгебраический вектор имеет четыре компоненты, тогда как физический — только три. Разумеется, не все компоненты $\mathbf{u}$ должны быть независимы: например, $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$.

Ограничения иного типа могут возникнуть по техническим причинам, таким, как ограниченность величины силы тяги:

$$0 \leqslant T \leqslant T_{\max},$$

где $T_{\max}$ — верхняя граница значений величины тяги, развиваемой ракетным двигателем данного типа.

В общем случае можно принять, что управление $\mathbf{u}$ принадлежит заданному множеству $U \subset E^m$. Множество U предполагается здесь постоянным, т. е. не зависящим от состояния $\mathbf{x}$ и времени t.

Будем говорить, что управляющая функция $\mathbf{u}(t)$ является *допустимой*, если:

1) $\mathbf{u}(t)$ определена и кусочно-непрерывна на некотором промежутке $[t_0, t_1]$;

2) $\mathbf{u}(t) \in U$ для всех $t \in [t_0, t_1]$.

В соответствии с условием 1) $\mathbf{u}(t)$ может иметь конечное число разрывов непрерывности на $[t_0, t_1]$. Чтобы подчеркнуть, что $\mathbf{u}(t)$ определена на всем интервале, мы положим $\mathbf{u}(t_c) = \mathbf{u}(t_c - 0)$, где t_c обозначает точку разрыва. Мы будем, кроме того, всегда считать $\mathbf{u}(t)$ непрерывной в t_0 и t_1. Ясно, что эти предположения не оказывают влияния на решение уравнений (1.8).

В отношении уравнений состояния (1.8) мы предположим, что функции $f_j(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ и $\partial f_j(\mathbf{x}, \mathbf{u})/\partial x_i$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$

определены и непрерывны на $E^n \times U$. Таким образом, для заданной допустимой управляющей функции $\mathbf{u}(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, и заданного начального условия $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0$ при $t = t_0$ существует единственное непрерывное решение уравнений (1.8) *).

Говоря языком п. 1.1, мы определяем путь, вдоль которого происходит движение системы в течение промежутка времени $[t_0, t_1]$.

Поскольку время t не входит явно в *компоненты скорости* $f_j(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, начальное значение t может быть выбрано произвольно. Иными словами, если управление $\mathbf{u}(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, переводит систему из $\mathbf{x}^0$ в $\mathbf{x}^f$, то это же осуществляется управлением $\mathbf{u}(t - \Delta t)$, $t_0 + \Delta t \leqslant t \leqslant t_1 + \Delta t$. В дальнейшем будут рассмотрены так называемые неавтономные системы, для которых скорость представляется явной функцией времени.

1.6. Интегральный показатель качества

До сих пор речь шла о правилах, которые, по предположению, определяют движение системы. Теперь мы рассмотрим правило, которое приписывает величину выигрыша совершаемому системой переходу. Здесь мы будем иметь дело с функционалом или показателем качества, заданным в форме интеграла

$$\int_{t_0}^{t_1} f_0(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))\, dt, \tag{1.9}$$

где $\mathbf{u}(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, — управление, которое переводит систему из заданного начального состояния $\mathbf{x}^0$ либо в известное множество θ^1, т. е. в некоторое состояние $\mathbf{x}^1 \in \theta^1$, либо в некоторое другое конечное состояние $\bar{\mathbf{x}}^1 \notin \theta^1$.

Для любого состояния $\mathbf{x}(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, выигрыш, полученный при переходе в состояние $\mathbf{x}(t_1)$, равен

$$V(\mathbf{x}^i, \mathbf{x}^f; r, p_l) = \int_t^{t_1} f_0(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau))\, d\tau.$$

---

*) При условии, конечно, что оно определено для всех $t \in [t_0, t_1]$. Например, если $\mathbf{u}(t)$ разрывно в точке $t = t_c$, мы рассматриваем решение с начальным условием $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$ на $[t_0, t_c]$; если $\mathbf{x}(t)$ определено на $[t_0, t_c]$, то значение $\mathbf{x}(t_c)$ берется в качестве начального для решения на $(t_c, t_1]$.

Как и в п. 1.1, вводим переменную x_0 при помощи соотношения

$$x_0(t) + \int_t^{t_1} f_0(\mathbf{x}(\tau),\ \mathbf{u}(\tau))\, d\tau = C,$$

где C — постоянный параметр. Таким образом,

$$\frac{dx_0}{dt} = f_0(\mathbf{x},\ \mathbf{u}). \tag{1.10}$$

О функциях $f_0(\mathbf{x},\ \mathbf{u})$ и $\partial f_0(\mathbf{x},\ \mathbf{u})/\partial x_j$, $j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$, мы сделаем те же предположения, что были сделаны ранее относительно функций $f_j(\mathbf{x},\ \mathbf{u})$ и $\partial f_j(\mathbf{x},\ \mathbf{u})/\partial x_j$.

Уравнения (1.8) и (1.10) образуют систему $n+1$ дифференциальных уравнений, решения которых определяют траектории в E^{n+1}. Мы запишем эти *уравнения траекторий* в векторной форме:

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{f}(x,\ \mathbf{u}), \tag{1.11}$$

где $\mathbf{f}(x,\ \mathbf{u}) = (f_0(\mathbf{x},\ \mathbf{u}),\ f_1(\mathbf{x},\ \mathbf{u}),\ \ldots,\ f_n(\mathbf{x},\ \mathbf{u}))$.

При заданном допустимом управлении $\mathbf{u}(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, и начальном условии $x = x^0$ в момент $t = t_0$ уравнение (1.11) имеет единственное непрерывное решение *)

$$x(t) \triangleq \mathbf{s}(t;\ t_0,\ x^0), \qquad t_0 \leqslant t \leqslant t_1. \tag{1.12}$$

Оптимальное управление $\mathbf{u}^*(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ реализует переход системы из заданного состояния $\mathbf{x}^0$ в некоторое состояние $\mathbf{x}^{1*} \in \theta^1$ таким образом, что интеграл (1.9) принимает минимальное значение. Поскольку начальное значение x_0 не оказывает влияния на величину интеграла (1.9), можно положить $x_0(t_0) = 0$. Таким образом, $\mathbf{u}^*(t)$ минимизирует значение $x_0(t_1)$. Соответствующее решение (1.11) будет обозначаться через $x^*(t)$.

Прежде чем продолжить наше обсуждение оптимальных переходов, осуществляемых системой, описываемой уравнениями (1.8), мы выведем одну лемму, относящуюся к некоторому линейному преобразованию, которое будет использовано в дальнейшем.

---

*) См. сноску на стр. 25.

1.7. Некоторые свойства одного линейного преобразования

Рассмотрим связанный вектор $\eta = (\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_n)$ в точке $x^*(t)$ оптимальной траектории Γ^*, соответствующей управлению $u^*(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$; компоненты $\eta_j = \eta_j(t)$ этого вектора удовлетворяют уравнениям *)

$$\frac{d\eta_j}{dt} = \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial f_j(x, u^*(t))}{\partial x_i}\Bigg|_{x=x^*(t)} \eta_i, \quad j = 0, 1, \ldots, n, \quad (1.13)$$

при заданных начальных условиях $\eta_j(t_0) = \eta_j^0$.

Уравнения (1.13) определяют линейное преобразование $A(t_0, t)$ вектора $\eta^0 = (\eta_0^0, \eta_1^0, \ldots, \eta_n^0)$ такое, что

$$\eta(t) = A(t_0, t)\eta^0. \quad (1.14)$$

Поскольку уравнения (1.13) линейны и однородны, это преобразование неособенное; иначе говоря, обратное преобразование $A^{-1}(t_0, t)$ такое, что $\eta^0 = A^{-1}(t_0, t)\eta(t)$ определено для t, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$.

Рассмотрим, далее, n-мерную плоскость $\Pi(x^*(t_0))$, содержащую точку $x^*(t_0)$ кривой Γ^*. Эта плоскость определяется векторами, проведенными из $x^*(t_0)$ в точки плоскости.

Пусть η^0 — какой-нибудь из этих векторов. Нас будет интересовать преобразование $\Pi(x^*(t))$ плоскости $\Pi(x^*(t_0))$, отвечающее линейному преобразованию η^0, задаваемому формулами (1.14).

Лемма 4. *Преобразование* $\Pi(x^*(t))$ *плоскости* $\Pi(x^*(t_0))$, *содержащей точку* $x^*(t_0)$ *оптимальной траектории* Γ^*, *происходящее при линейном преобразовании* $A(t_0, t)$, *обладает следующими свойствами*:

(а) $\Pi(x^*(t))$ *определена для всех* $t \in [t_0, t_1]$;

(б) $\Pi(x^*(t))$ *есть плоскость того же числа измерений, что и* $\Pi(x^*(t_0))$;

(в) *наклон плоскости* $\Pi(x^*(t))$ *есть непрерывная функция времени.*

Поскольку $\Pi(x^*(t_0))$ есть n-мерная плоскость, на ней существует базис, т. е. n линейно независимых векторов η_α^0,

---

*) Отметим, что $f_j(x, u) = f_j(x, u)$.

$\alpha = 1, 2, \ldots, n$, таких, что

$$\eta^0 = \sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha \eta_\alpha^0,$$

где c_α — постоянные, не все равные нулю.

Следовательно, преобразование η^0 совершается по формуле

$$\eta(t) = \sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha \eta_\alpha(t),$$

где согласно (1.14) $\eta_\alpha(t) = A(t_0, t)\eta_\alpha^0$, $\alpha = 1, 2, \ldots, n$.

Для доказательства пп. (а) и (б) леммы 4 нужно только показать, что векторы $\eta_\alpha(t)$, $\alpha = 1, 2, \ldots, n$, линейно независимы, т. е. что не существует не равных одновременно нулю постоянных b_α таких, что

$$\sum_{\alpha=1}^{n} b_\alpha \eta_\alpha(t) = 0.$$

Преобразование $A(t_0, t)$ линейно, поэтому

$$\sum_{\alpha=1}^{n} b_\alpha \eta_\alpha(t) = A(t_0, t) \sum_{\alpha=1}^{n} b_\alpha \eta_\alpha^0.$$

Далее, поскольку $A^{-1}(t_0, t)$ определено для всех t, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, мы имеем

$$\sum_{\alpha=1}^{n} b_\alpha \eta_\alpha^0 = A^{-1}(t_0, t) \sum_{\alpha=1}^{n} b_\alpha \eta_\alpha(t). \tag{1.15}$$

Но векторы η_α^0, $\alpha = 1, 2, \ldots, n$, линейно независимы, т. е. не существует постоянных b_α, одновременно не равных нулю и таких, что

$$\sum_{\alpha=1}^{n} b_\alpha \eta_\alpha^0 = 0.$$

Отсюда следует согласно (1.15), что не существует ненулевых постоянных b_α таких, что

$$\sum_{\alpha=1}^{n} b_\alpha \eta_\alpha(t) = 0.$$

Таким образом, векторы $\eta_\alpha(t)$, $\alpha = 1, 2, \ldots, n$, линейно независимы, и утверждения (а) и (б) леммы доказаны.

Утверждение (в) леммы непосредственно вытекает из непрерывности решений уравнений (1.13).

1.8. Преобразование касательной плоскости

Мы будем говорить, что точка x' есть *регулярная* точка n-мерной поверхности, если в точке x' определена касательная плоскость к этой поверхности, т. е. если радиус-вектор каждой точки x поверхности, расположенной в окрестности x', может быть представлен в форме

$$x = x' + \varepsilon\eta' + o(\varepsilon),$$

где $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} [o(\varepsilon)/\varepsilon] = 0$ и η' принадлежит n-мерной плоскости — касательной плоскости к поверхности в точке x'. Мы будем говорить, что x' — регулярная внутренняя точка поверхности, если, сверх сказанного, для достаточно малого $|\varepsilon|$ каждой точке $x' + \varepsilon\eta'$ касательной плоскости соответствует единственная точка x поверхности.

Пусть Γ^* — оптимальная траектория, порождаемая управлением $u^*(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, начальная точка $x^*(t_0)$ которой есть регулярная внутренняя точка предельной поверхности Σ. Согласно лемме 2 Γ^* целиком лежит на Σ.

Рассмотрим также окрестность точки $x^*(t_0)$ на Σ, обозначаемую через $\Delta(x^*(t_0))$ и такую, что

$$\Delta(x^*(t_0)) \triangleq \{x: x = x(t_0) \in \Sigma\},$$

где

$$x(t_0) \triangleq x^*(t_0) + \varepsilon\eta^0 + o(\varepsilon) \tag{1.16}$$

и

1) $$\lim_{\varepsilon \to 0} [o(\varepsilon)/\varepsilon] = 0,$$

2) η^0 лежит в касательной плоскости $T_\Delta(x^*(t_0))$ к поверхности $\Delta(x^*(t_0))$ или, что то же, к Σ в точке $x^*(t_0)$.

Нас будет интересовать преобразование окрестности $\Delta(x^*(t_0))$, сопровождающее движение вдоль траекторий системы (1.11), т. е. функция

$$\Delta(x^*(t')) \triangleq \{x: x = x(t')\} \quad \forall t' \in [t_0, t_1],$$

где $x(t)$ обозначает решение (1.11), отвечающее управлению $\mathbf{u} = \mathbf{u}^*(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, и начальному условию (1.16). Иными словами, $\Delta(x^*(t'))$ есть множество точек, принадлежащих в момент t' траекториям, отвечающим тому же самому управлению $\mathbf{u}^*(t)$ и выходящим из точек множества $\Delta(x^*(t_0))$ в момент t_0 (рис. 1.8).

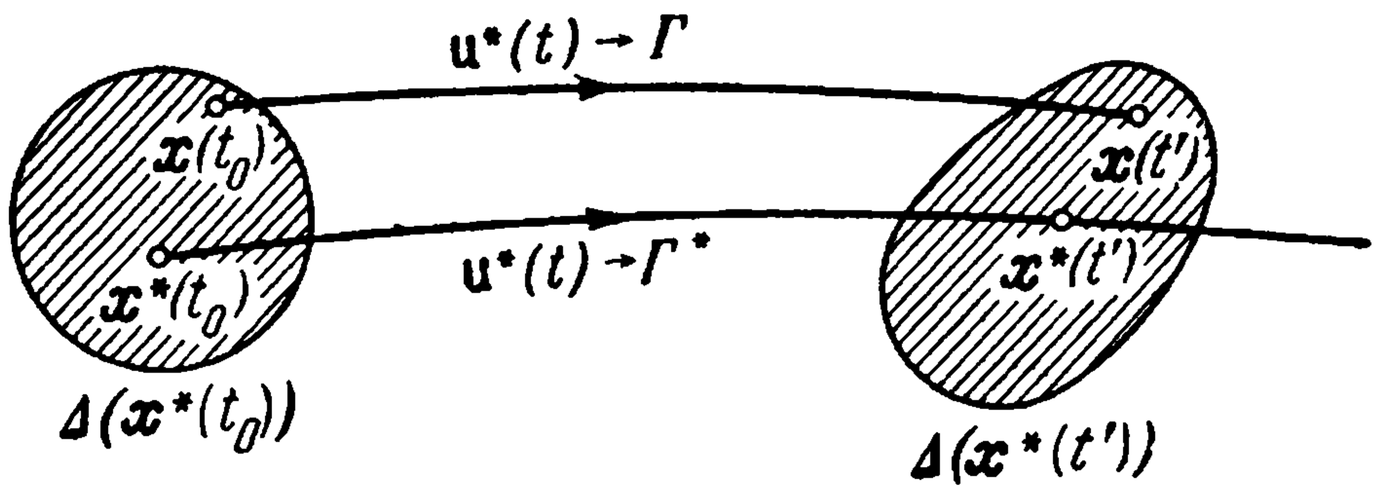

Рис. 1.8. Преобразование окрестности $\Delta(x^*(t_0))$.

Известная зависимость решений системы (1.11) от начальных условий при управлении $\mathbf{u} = \mathbf{u}^*(t)$ позволяет утверждать *), что

$$x(t') = x^*(t') + \varepsilon\eta(t') + \mathbf{o}(t', \varepsilon), \tag{1.17}$$

где $\mathbf{o}(t', \varepsilon)/\varepsilon$ стремится при $\varepsilon \to 0$ к нулю равномерно относительно t', а $\eta(t)$ есть решение *уравнений в вариациях* (1.13) при начальном условии $\eta(t_0) = \eta^0$, т. е.

$$\eta(t') = A(t_0, t')\eta^0.$$

Поскольку η^0 принадлежит n-мерной плоскости $T_\Delta(x^*(t_0))$, из пп. а) и б) леммы 4 следует, что $\eta(t')$ принадлежит некоторой n-мерной плоскости, скажем $T_\Delta(x^*(t'))$, которая содержит точку $x^*(t')$. Поэтому ввиду (1.17) множество $\Delta(x^*(t'))$ представляет собой n-мерную поверхность с касательной плоскостью $T_\Delta(x^*(t'))$ в точке $x^*(t')$. Далее, так как $x^*(t_0)$ предполагается регулярной *внутренней* точкой Σ и, следовательно, поверхности $\Delta(x^*(t_0))$ и поскольку линейное преобразование $A(t_0, t')$ неособенное, $x^*(t')$ оказывается регулярной *внутренней* точкой $\Delta(x^*(t'))$.

---

*) См., например, Л. С. Понтрягин, Обыкновенные дифференциальные уравнения, Физматгиз, Москва, 1961, стр. 179 и далее или Э. А. Коддингтон и Н. Левинсон, Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, ИЛ, Москва, 1958, стр. 22 и далее.

Предположим теперь, что $x^*(t')$ также регулярная внутренняя точка Σ, так что ее касательная плоскость $T_\Sigma(x^*(t'))$ определена. Поскольку $x^*(t')$—регулярная внутренняя точка Σ, из (1.17) следует, что все точки $\Delta(x^*(t'))$ принадлежат $\mathscr{E}^*$ при достаточно малых $|\varepsilon|$.

Вспомним теперь, что каждая точка $x(t')$ поверхности $\Delta(x^*(t'))$ принадлежит траектории, начальная точка $x(t_0)$ которой лежит на Σ. Из теоремы 1 следует, что никакая точка поверхности $\Delta(x^*(t'))$ не является B-точкой относительно Σ; иначе говоря, $\Delta(x^*(t')) \cap B/\Sigma = \varnothing$.

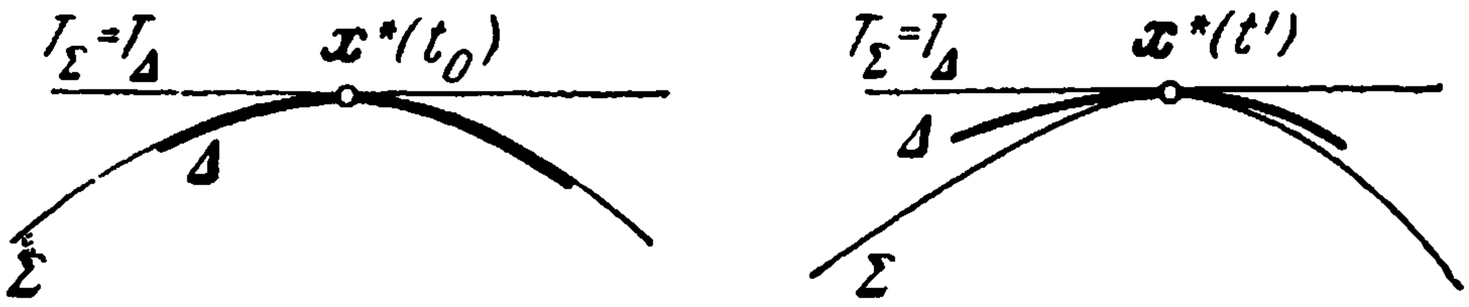

Рис. 1.9. Преобразование касательной плоскости к предельной поверхности.

Так как $x^*(t')$ является регулярной внутренней точкой обеих поверхностей Σ и $\Delta(x^*(t'))$ и поскольку указанные поверхности не пересекаются, они обладают в этой точке общей касательной плоскостью: $T_\Sigma(x^*(t')) = T_\Delta(x^*(t'))$ (см. рис. 1.9). Окончательно приходим к следующему результату.

Лемма 5. *Если точки $x^*(t_0)$ и $x^*(t')$, $t_0 \leqslant t' \leqslant t_1$, оптимальной траектории Γ^* являются регулярными внутренними точками Σ, то касательная плоскость к Σ в точке $x^*(t_0)$ преобразуется в касательную плоскость в точке $x^*(t')$ линейным преобразованием, определяемым дифференциальным уравнением* (1.13), *т. е.*

$$T_\Sigma(x^*(t')) = A(t_0, t')\, T_\Sigma(x^*(t_0)).$$

1.9. Регулярные внутренние точки предельной поверхности

Пусть $\mathbf{n}(x')$ обозначает единичный вектор, направленный по нормали к предельной поверхности Σ внутрь области B/Σ в регулярной внутренней точке x' поверхности Σ. Требование, чтобы $\mathbf{n}(x')$ было направлено внутрь B/Σ, означает, что существует положительное число α такое, что точка

$x' + \varepsilon \mathbf{n}(x')$ принадлежит B/Σ для всех ε в интервале $0 < \varepsilon < \alpha$. Иными словами,

$$n_0(x') \leqslant 0, \tag{1.18}$$

где $n_0(x')$ — компонента $\mathbf{n}(x')$ вдоль оси x_0.

Рассмотрим, далее, траекторию, которая выходит из точки x' в момент t' и отвечает допустимому управлению $\mathbf{u}(t)$, $t \geqslant t'$. Из определения производной dx/dt и (1.11) имеем

$$\Delta x \triangleq x(t' + \Delta t) - x' = \mathbf{f}(x', \mathbf{u}(t'))\,\Delta t + \mathbf{o}(\Delta t), \qquad \Delta t > 0,$$

где

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{o}(\Delta t)}{\Delta t} = 0.$$

Вспомним, что уравнение предельной поверхности Σ имеет вид

$$\Phi(x) \triangleq x_0 + V^*(\mathbf{x};\ \theta^1) = C.$$

Если существует $\operatorname{grad} \Phi(x')$, т. е. $n_0(x') \neq 0$, то сразу заключаем, что

$$\mathbf{n}(x') \cdot \mathbf{f}(x', \mathbf{u}(t')) \leqslant 0$$

и, поскольку $\mathbf{u}(t')$ может принимать любые значения в множестве U,

$$\mathbf{n}(x') \cdot \mathbf{f}(x', \mathbf{u}) \leqslant 0 \qquad \forall \mathbf{u} \in U. \tag{1.19}$$

В самом деле, как явствует из теоремы 1, точка $x' + \Delta x$ принадлежит области $A/\Sigma \cup \Sigma$, так что

$$\Phi(x' + \Delta x) - \Phi(x') = \operatorname{grad} \Phi(x') \cdot \Delta x + o(|\Delta x|) \geqslant 0,$$

где

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{o(|\Delta x|)}{\Delta t} = 0$$

и

$$\operatorname{grad} \Phi(x') = -k\mathbf{n}(x'), \qquad k > 0$$

(рис. 1.10).

В исключительном случае, когда $n_0(x') = 0$ и вектор $\operatorname{grad} \Phi(x')$ не существует, неравенство (1.19) может быть установлено в регулярной внутренней точке x'' поверхности Σ, где определен вектор $\operatorname{grad} \Phi(x'')$; после этого точку x'' устре-

Рассмотрим теперь точку $x' = x^*(t')$ оптимальной траектории Γ^*, отвечающей управлению $\mathbf{u}^*(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. Пользуясь леммой 2, согласно которой Γ^* лежит целиком на

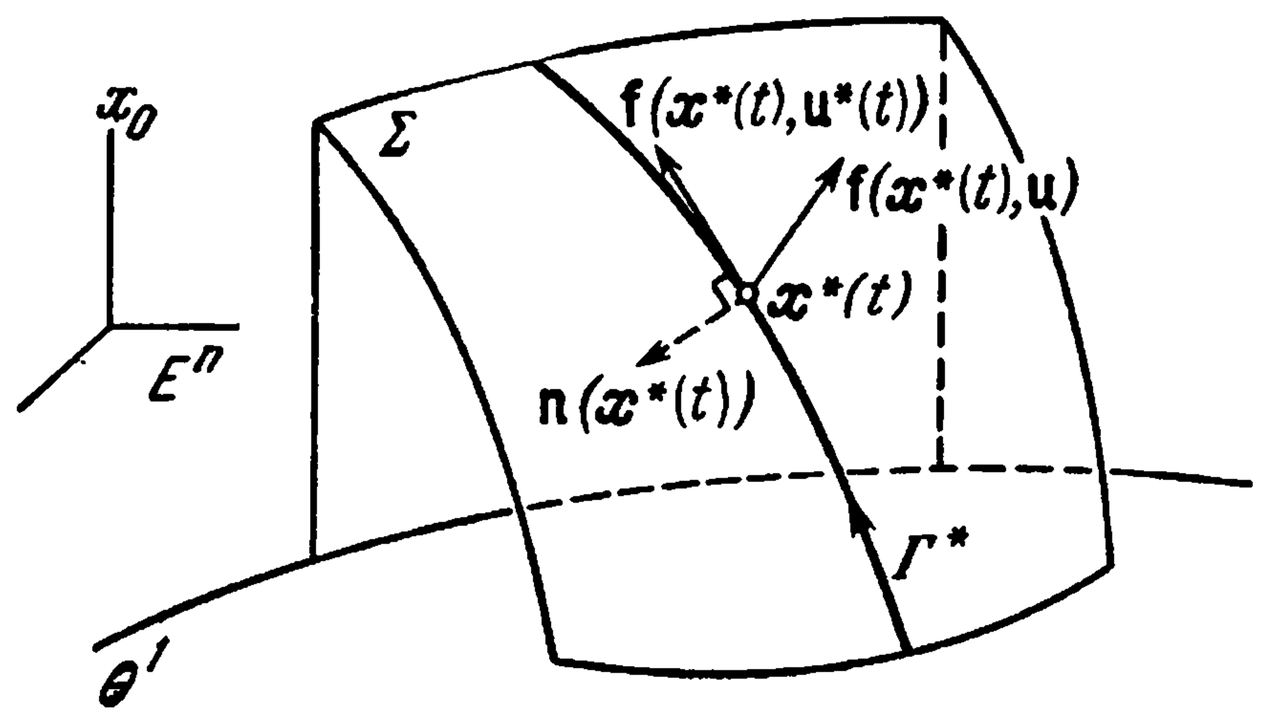

Рис. 1.12. Регулярная внутренняя точка предельной поверхности.

поверхности Σ, и рассуждая аналогично предыдущему, получаем равенство

$$\mathbf{n}(x^*(t')) \cdot \mathbf{f}(x^*(t'), \mathbf{u}^*(t')) = 0, \tag{1.20}$$

справедливое при всех t', $t_0 \leqslant t' \leqslant t_1$, для которых $x^*(t')$ является регулярной внутренней точкой Σ (рис. 1.12).

1.10. Регулярные оптимальные траектории

Предположим теперь, что Γ^* — *регулярная* оптимальная траектория, т. е. все точки Γ^* суть регулярные внутренние точки предельной поверхности Σ, на которой расположена Γ^*.

Рассмотрим касательную плоскость $T_\Sigma(x^*(t))$ к поверхности Σ в точке $x^*(t)$ регулярной оптимальной траектории Γ^*, соответствующей управлению $\mathbf{u}^*(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$; пусть η^0 будет вектор, лежащий в касательной плоскости $T_\Sigma(x^*(t_0))$.

Преобразованный вектор $\eta(t) = A(t_0, t)\eta^0$ имеет компоненты $\eta_j(t)$, $j = 0, 1, \ldots, n$, являющиеся решением уравнений в вариациях (1.13). Кроме того, согласно лемме 5 $\eta(t)$ лежит в касательной плоскости $T_\Sigma(x^*(t))$ для всех t в промежутке $[t_0, t_1]$. Чтобы использовать этот результат вместе с условиями (1.19) и (1.20), необходимо иметь выражение для вектора, нормального к поверхности Σ в точке $x^*(t)$.

Для этой цели мы обратимся к системе уравнений, *сопряженной системе уравнений* (1.13):

$$\frac{d\lambda_j}{dt} = -\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial f_i(x, \mathbf{u}^*(t))}{\partial x_j}\Big|_{x=x^*(t)} \lambda_i, \quad j = 0, 1, \ldots, n. \quad (1.21)$$

Решение этой системы $\lambda(t) = (\lambda_0(t), \lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t))$ при заданном начальном условии $\lambda(t_0) = \lambda^0$ единственно и непрерывно в промежутке $[t_0, t_1]$. Далее, так как уравнения (1.21) определяют неособенное линейное преобразование, $\lambda(t)$ отлично от нуля, если λ^0 не равно нулю.

Из (1.13) и (1.21) вытекает, что

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{j=0}^{n} \lambda_j(t)\,\eta_j(t)\right) = \frac{d}{dt}(\lambda(t)\cdot\eta(t)) = 0,$$

так что

$$\lambda(t)\cdot\eta(t) = \text{const} \qquad \forall t \in [t_0, t_1]. \quad (1.22)$$

Пусть вектор λ^0 (не равный нулю) нормален к Σ в точке $x^*(t_0)$ и направлен внутрь области B/Σ; таким образом, векторы λ^0 и $\mathbf{n}(x^*(t_0))$ одинаково направлены. Поскольку вектор η^0 лежит в плоскости $T_\Sigma(x^*(t_0))$, справедливо равенство $\lambda^0\cdot\eta^0 = 0$; из (1.22) заключаем теперь, что

$$\lambda(t)\cdot\eta(t) = 0 \qquad \forall t \in [t_0, t_1]. \quad (1.23)$$

В качестве η^0 можно взять любой из n линейно независимых векторов в касательной плоскости $T_\Sigma(x^*(t_0))$; при преобразовании этим векторам отвечают линейно независимые векторы в касательной плоскости $T_\Sigma(x^*(t))$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$; поэтому равенство (1.23) показывает, что вектор $\lambda(t)$ нормален к $T_\Sigma(x^*(t))$. Далее, вследствие непрерывности $\lambda(t)$ и $\mathbf{n}(x^*(t))$ в промежутке $[t_0, t_1]$, заключаем, что эти векторы одинаково направлены. Формулы (1.19) и (1.20) показывают, что

$$\lambda(t)\cdot\mathbf{f}(x^*(t), \mathbf{u}) \leqslant 0 \qquad \forall \mathbf{u} \in U \quad (1.24)$$

и

$$\lambda(t)\cdot\mathbf{f}(x^*(t), \mathbf{u}^*(t)) = 0 \quad (1.25)$$

для всех t в промежутке $[t_0, t_1]$.

Правые части сопряженных уравнений (1.21) не зависят от x_0; поэтому $\lambda_0(t) \equiv \text{const}$. Формула (1.18) показывает, что

$$\lambda_0(t) \equiv \text{const} \leqslant 0. \tag{1.26}$$

Прежде чем резюмировать полученные результаты, приведем условия, которые накладываются в концевых точках оптимальной траектории.

1.11. Условие трансверсальности в конце траектории

Вспомним, что мы имеем дело с оптимальным управлением, которое переводит систему с уравнениями состояния (1.8) и показателем качества (1.9) из заданного начального состояния $\mathbf{x}^0$ в момент t_0 в некоторое состояние из данного множества θ^1 в момент t_1. Время перехода $t_1 - t_0$ при этом не фиксируется.

Предположим, что θ^1 есть гладкое многообразие $n - q$ измерений, а именно многообразие, порождаемое пересечением q гладких поверхностей *)

$$\theta^1_\sigma(\mathbf{x}) = 0, \quad \sigma = 1, 2, \ldots, q. \tag{1.27}$$

Допустим, далее, что векторы $\operatorname{grad} \theta^1_\sigma(\mathbf{x})$, $\sigma = 1, 2, \ldots, q$, линейно независимы или, что то же, матрица

$$\frac{\partial \theta^1}{\partial \mathbf{x}} \triangleq \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \theta^1_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial \theta^1_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial \theta^1_q}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial \theta^1_q}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

имеет максимальный ранг, так что многообразие θ^1 обладает единственной касательной плоскостью $T_{\theta^1}(\mathbf{x}^1)$ в каждой точке $\mathbf{x}^1$, лежащей на θ^1.

Многообразие пересечения предельной поверхности Σ, соответствующей полному выигрышу C, с поверхностью $\Theta^1 \triangleq \theta^1 \times \{x_0\}$ имеет проекцией на пространство E^n часть поверхности θ^1, принадлежащую E^*. Отметим, что как θ^1, так и $\Sigma \cap \Theta^1$ суть $n - q$-мерные многообразия: первое в E^n, а второе в E^{n+1}.

---

*) Поверхность, задаваемая уравнением $\theta(\mathbf{x}) = 0$, называется *гладкой* в области, если $\theta(\mathbf{x})$ непрерывно дифференцируема и $\operatorname{grad} \theta(\mathbf{x})$ не обращается в нуль внутри области.

Касательная плоскость $T_{\Sigma \cap \Theta^1}(x^1)$ к поверхности $\Sigma \cap \Theta^1$ в точке $x^1 = (C, \mathbf{x}^1)$ есть множество всех точек вида $x = (C, \mathbf{x})$, где $\mathbf{x}$ принадлежит плоскости $T_{\Theta^1}(x^1)$. Касательная плоскость $T_{\Sigma \cap \Theta^1}(x^1)$ является $n-q$-мерной плоскостью в E^{n+1} и совпадает с касательной плоскостью $T_\Sigma(x^1)$ к поверхности Σ в точке x^1.

Пусть $x^1 = x^*(t_1) = (C, \mathbf{x}^{1*})$ будет концевой точкой оптимальной траектории Γ^* на поверхности Σ. Тогда решение

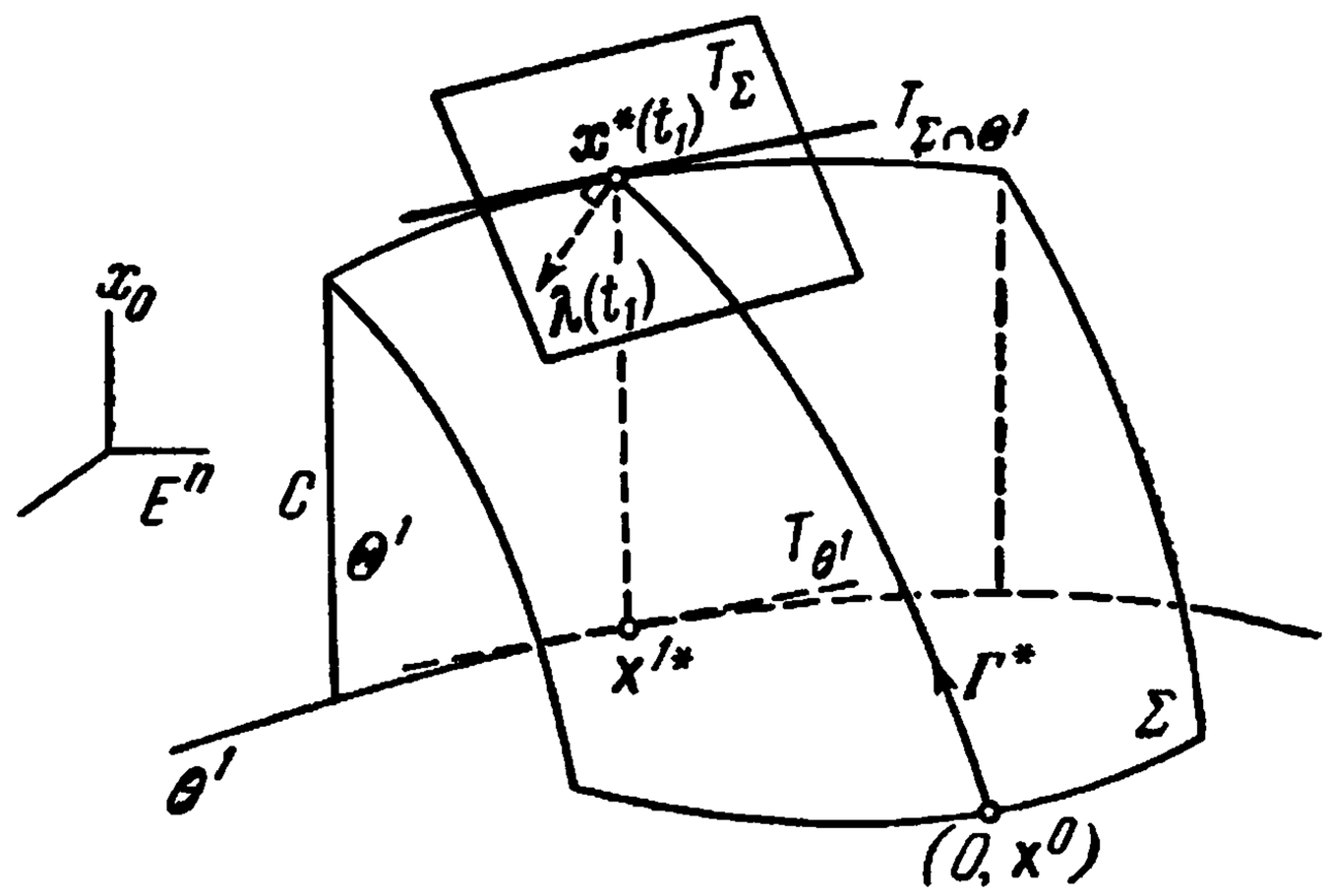

Рис. 1.13. Условие трансверсальности в концевой точке.

сопряженных уравнений (1.21), фигурирующее в условиях (1.24)—(1.26), таково, что $\lambda(t_1)$ нормален к $T_\Sigma(x^*(t_1))$ и, следовательно, к $T_{\Sigma \cap \Theta^1}(x^*(t_1))$ (рис. 1.13). Это условие ортогональности называется *условием трансверсальности в концевой точке*. Оно показывает, что вектор $\lambda(t_1)$ нормален к *любому* вектору, лежащему в плоскости $T_{\Sigma \cap \Theta^1}(x^*(t_1))$. Пусть $\eta^1 = (\eta_0^1, \eta_1^1, \ldots, \eta_n^1)$ — такой вектор; тогда

$$\lambda(t_1) \cdot \eta^1 = 0. \tag{1.28}$$

Поскольку в точках плоскости $T_{\Sigma \cap \Theta^1}(x^*(t_1))$ $x_0 = C$ и $\mathbf{x} \in T_{\Theta^1}(x^{1*})$, то

$$\left.\begin{aligned} &\eta_0^1 = 0, \\ &\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \theta_\sigma^1(\mathbf{x})}{\partial x_j}\Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{1*}} \eta_j^1 = 0, \qquad \sigma = 1, 2, \ldots, q. \end{aligned}\right\} \tag{1.29}$$

Согласно условию матрица $\partial\theta^1/\partial\mathbf{x}$ имеет максимальный ранг; поэтому написанные уравнения могут быть разрешены относительно $q+1$ компонент вектора $\boldsymbol{\eta}^1$; последние окажутся линейными комбинациями остальных $n-q$ компонент, значения которых *произвольны*. Коэффициенты при произвольных компонентах вектора $\boldsymbol{\eta}^1$ в равенстве (1.28) должны быть нулями; это дает $n-q$ условий на векторы $\boldsymbol{\lambda}(t)$ и $\mathbf{x}(t)$ в концевой точке Γ^*. Отметим, что в этих условиях не участвует $\lambda_0(t)$.

Таким образом, концевые условия (1.27) вместе с условием трансверсальности образуют систему n соотношений между $2n$ переменными.

1.12. Условие трансверсальности в начале траектории

До сих пор начальное состояние $\mathbf{x}^0$ предполагалось заданным. Допустим теперь, что начальное состояние фиксировано не полностью, но может быть выбрано среди известного множества состояний. В частности, пусть $\mathbf{x}^0$ принадлежит заданному начальному многообразию θ^0, определяемому как пересечение p гладких поверхностей, $1 \leqslant p \leqslant n$, уравнения которых имеют вид

$$\theta_\rho^0(\mathbf{x}) = 0, \qquad \rho = 1, 2, \ldots, p. \tag{1.30}$$

Таким образом, θ^0 является гладким $n-p$-мерным многообразием в пространстве E^n. Как и в случае с θ^1, мы предположим, что векторы $\operatorname{grad}\theta_\rho^0(\mathbf{x})$ $(\rho = 1, 2, \ldots, p)$ линейно независимы или, что то же, матрица

$$\frac{\partial\theta^0}{\partial\mathbf{x}} \triangleq \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\theta_1^0}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial\theta_1^0}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \dfrac{\partial\theta_p^0}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial\theta_p^0}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

имеет максимальный ранг, так что θ^0 имеет единственную касательную плоскость $T_{\theta^0}(\mathbf{x}^0)$ в каждой точке $\mathbf{x}^0$ на θ^0.

Как и в случае многообразия θ^1, рассмотрим цилиндрическую поверхность $\Theta^0 \triangleq \theta^0 \times \{x_0\}$ в пространстве E^{n+1}. Пересечение Θ^0 и E^* есть $n-p$-мерное многообразие в пространстве E^{n+1}.

Касательная плоскость $T_{\Theta^0 \cap E^*}(x^0)$ к многообразию $\Theta^0 \cap E^*$ в точке $x^0 = (0, \mathbf{x}^0)$ является множеством всех точек $(0, \mathbf{x})$ таких, что $\mathbf{x}$ принадлежит плоскости $T_{\theta^0}(\mathbf{x}^0)$.

Рассмотрим теперь две точки $\mathbf{x}_1^0$ и $\mathbf{x}_2^0$, каждая из которых принадлежит E^* и лежит на θ^0. Обозначим через Γ_1^* и Γ_2^* оптимальные траектории, начинающиеся соответственно в точках $x_1^0 = (0, \mathbf{x}_1^0)$ и $x_2^0 = (0, \mathbf{x}_2^0)$. Пусть Σ_1 (с выигрышем C_1)

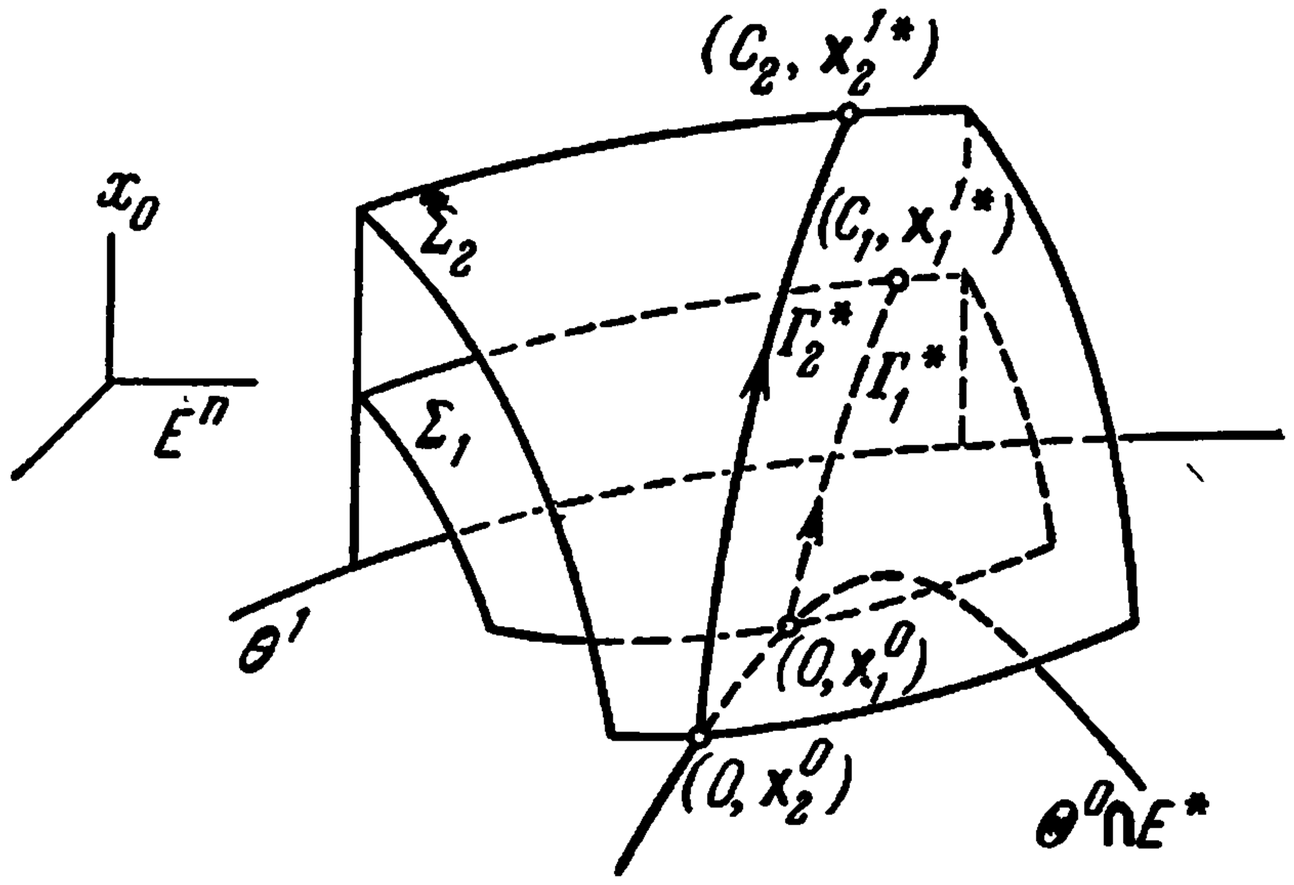

Рис. 1.14. Начальное многообразие.

и Σ_2 (с выигрышем C_2) — соответствующие предельные поверхности.

Предположим, что x_1^0 есть B-точка относительно Σ_2 (рис. 1.14). Тогда из определения предельных поверхностей следует, что $C_1 < C_2$, так что $V^*(\mathbf{x}_1^0;\ \theta^1) < V^*(\mathbf{x}_2^0;\ \theta^1)$.

Таким образом, если оптимальная траектория Γ^* начинается в точке $x^*(t_0) = (0, \mathbf{x}^{0*})$, лежит на предельной поверхности Σ и является *оптимальной по отношению ко всем начальным точкам* на θ_0, т. е.

$$V^*(\mathbf{x}^{0*};\ \theta^1) \leqslant V^*(\mathbf{x}^0;\ \theta^1) \qquad \forall \mathbf{x}^0 \in \theta^0,$$

то каждая точка множества $\Theta^0 \cap E^*$ лежит в области $A/\Sigma \cup \Sigma$. Иначе говоря, мы имеем

$$(\Theta^0 \cap E^*) \cap B/\Sigma = \varnothing.$$

Это соотношение показывает, что касательная плоскость $T_{\Theta^0 \cap E^*}(x^*(t_0))$ к $n - p$-мерному многообразию $\Theta^0 \cap E^*$ в точке $x^*(t_0)$ совпадает в этой точке с касательной плоскостью

$T_\Sigma(x^*(t_0))$ к поверхности Σ (рис. 1.15). Эта последняя касательная плоскость определена единственным образом в силу нашего предположения о том, что $x^*(t_0)$ — регулярная внутренняя точка Σ.

Поскольку $\lambda(t_0)$ — вектор, нормальный к $T_\Sigma(x^*(t_0))$, он нормален также и к $T_{\Theta^0 \cap E^*}(x^*(t_0))$. В этом заключается

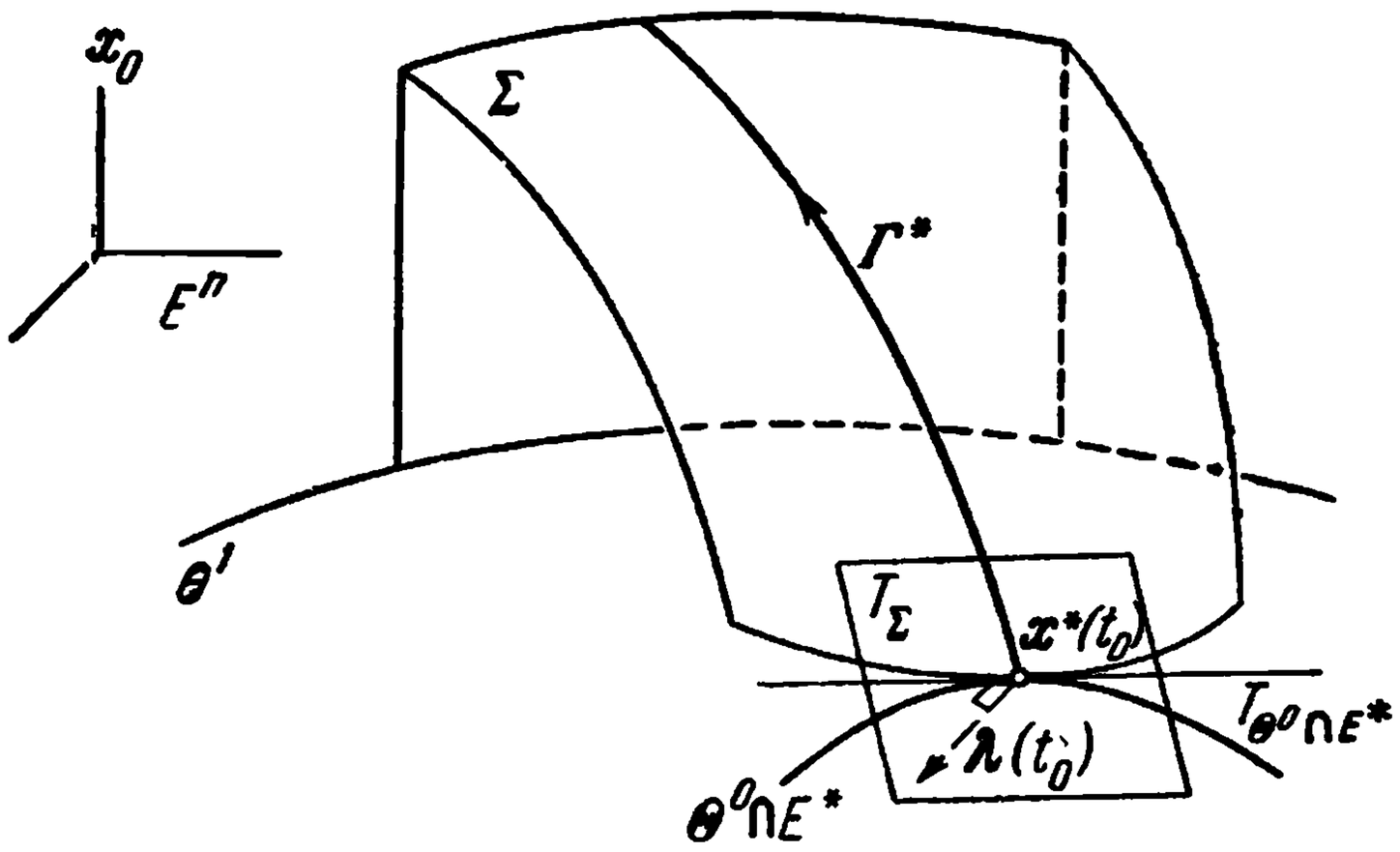

Рис. 1.15. Условие трансверсальности в начальной точке.

условие трансверсальности в начальной точке. Оно гласит, что

$$\lambda(t_0) \cdot \eta^0 = 0. \tag{1.31}$$

Здесь $\eta^0 = (\eta_0^0, \eta_1^0, \ldots, \eta_n^0)$ — *любой* вектор, лежащий в плоскости $T_{\Theta^0 \cap E^*}(x^*(t_0))$, т. е. такой, что

$$\left.\begin{aligned} &\eta_0^0 = 0, \\ &\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \theta_\rho^0(\mathbf{x})}{\partial x_j}\Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{0*}} \eta_j^0 = 0, \quad \rho = 1, 2, \ldots, p. \end{aligned}\right\} \tag{1.32}$$

Коэффициенты при $n - p$ произвольных компонентах вектора η^0 в (1.31) должны обращаться в нуль; это дает $n - p$ условий в начальной точке траектории Γ^*. Поскольку $\lambda_0(t_0)$ явно не входит в эти соотношения, начальные условия (1.30) вместе с условием трансверсальности образуют систему n соотношений между $2n$ переменными.

Очевидно, что поставленные краевые условия (1.27) и (1.30) вместе с обоими условиями трансверсальности достав-

ляют $2n$ соотношений, которые должны удовлетворяться краевыми (начальными и конечными) значениями переменных $x_j(t)$ и $\lambda_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, на оптимальной траектории Γ^*. В задаче с фиксированными концами, т. е.

$$\theta_\rho^0(\mathbf{x}) = 0, \qquad \rho = 1, 2, \ldots, n,$$
$$\theta_\sigma^1(\mathbf{x}) = 0, \qquad \sigma = 1, 2, \ldots, n,$$

оба условия трансверсальности удовлетворяются тривиальным образом.

1.13. Принцип максимума

В этом пункте мы резюмируем полученные выше результаты. Они относятся к задаче оптимального перехода системы, подчиненной уравнениям состояния (1.8) с показателем качества (1.9), из заданного начального многообразия θ^0 в момент t_0 на данное конечное многообразие θ^1 в момент t_1, причем разность $t_1 - t_0$ не фиксирована.

Соответствующие этой задаче условия даются формулами (1.24) — (1.26) и условиями трансверсальности.

Положим $H(\lambda, x, \mathbf{u}) \triangleq \lambda \cdot \mathbf{f}(x, \mathbf{u})$.

Теперь мы можем сформулировать следующую теорему.

Теорема 2. *Если* $\mathbf{u}^*(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, *— оптимальное управление (для поставленной выше задачи), то существует ненулевая непрерывная векторная функция* $\lambda(t)$, *являющаяся решением уравнений* (1.21) *и такая, что:*

$$\left.\begin{array}{l} \text{а) } \sup\limits_{\mathbf{u} \in U} \mathscr{H}(\lambda(t), x^*(t), \mathbf{u}) = \\ \qquad = \mathscr{H}(\lambda(t), x^*(t), \mathbf{u}^*(t)); \\ \text{б) } \mathscr{H}(\lambda(t), x^*(t), \mathbf{u}^*(t)) = 0; \\ \text{в) } \lambda_0(t) = \text{const} \leqslant 0; \end{array}\right\} \text{для всех } t \in [t_0, t_1]$$

г) *вектор* $(\lambda_1(t), \lambda_2(t), \ldots, \lambda_n(t))$ *направлен по нормали к концевым многообразиям* θ^0 *и* θ^1 *в моменты* $t = t_0$ *и* $t = t_1$ *соответственно* *).

Теорема 2 доказана нами только для регулярных траекторий. Рассмотрение оптимальных траекторий, некоторые точки которых не являются регулярными внутренними точками Σ

*) За исключением случая, когда $\theta^0 \cap \theta^1 \neq \varnothing$ и $\mathbf{x}^*(t_0) = \mathbf{x}^*(t_1)$; см. упражнение 1.5.

или являются граничными точками $\mathscr{E}^*$, выходит за рамки полученных выше результатов. Между тем обобщение введенных нами геометрических понятий позволяет доказать справедливость теоремы 2 для задач более общего типа *). Строгая трактовка принципа максимума, не связанная с концепцией предельных поверхностей, может быть основана на топологических соображениях **).

Отметим, что благодаря определению $\mathscr{H}(\lambda, x, u)$ уравнения траекторий (1.11) и сопряженные уравнения (1.21) могут быть записаны в следующей форме:

$$\frac{dx_j}{dt} = \frac{\partial \mathscr{H}(\lambda, x, u)}{\partial \lambda_j}, \quad \frac{d\lambda_j}{dt} = -\frac{\partial \mathscr{H}(\lambda, x, u)}{\partial x_j}, \quad (1.33)$$

где $j = 0, 1, \ldots, n$, $u = u^*(t)$, $x = x^*(t)$ и $\lambda = \lambda(t)$ для $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$.

1.14. Связь между сопряженным вектором и вектором градиента

Уравнение предельной поверхности Σ имеет вид

$$\Phi(x) \triangleq x_0 + V^*(x;\ \theta^1) = C;$$

отсюда находим

$$\operatorname{grad} \Phi(x) = \left(1, \frac{\partial V^*(x;\ \theta^1)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial V^*(x;\ \theta^1)}{\partial x_n}\right).$$

Этот вектор определен ***) в точке $x = x^*(t)$ оптимальной траектории Γ^*, если определены частные производные

$$\left.\frac{\partial V^*(x;\ \theta^1)}{\partial x_j}\right|_{x = x^*(t)}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Для этого необходимо, чтобы $x^*(t)$ была регулярной внутренней точкой предельной поверхности Σ, содержащей Γ^*; отметим, однако, что этого недостаточно, так как плоскость

---

*) См., например, A. Blaquiere and G. Leitmann, On the Geometry of Optimal Processes и H. Halkin, Mathematical Foundations of System Optimization (сб. «Topics in Optimization», G. Leitmann (ed.), Academic Press Inc., New York, 1966).

**) Л. С. Понтрягин и др., Математическая теория оптимальных процессов, Физматгиз, Москва, 1961.

***) То есть однозначен и конечен.

$T_\Sigma(x^*(t))$ может быть параллельна оси x_0, так что $\operatorname{grad}\Phi(x^*(t))$ не будет определен, даже если $x^*(t)$ является регулярной внутренней точкой Σ.

Если сформулированное условие выполнено, то вектор $\lambda(t)$ нормален к $T_\Sigma(x^*(t))$ и направлен внутрь области B/Σ. Кроме того, $n_0(x^*(t)) \neq 0$, так что $\lambda_0(t) \neq 0$. Поскольку оба вектора $\lambda(t)$ и $\operatorname{grad}\Phi(x^*(t))$ нормальны к $T_\Sigma(x^*(t))$ и их нулевые компоненты равны соответственно $\lambda_0(t)$ и 1, имеем соотношение $\lambda(t) = \lambda_0(t)\operatorname{grad}\Phi(x^*(t))$.

Сопряженные уравнения — однородные первой степени относительно λ и, кроме того, $\lambda_0(t) \neq 0$; поэтому можно считать $\lambda_0(t) \equiv -1$; будем иметь

$$\lambda(t) = -\operatorname{grad}\Phi(x^*(t)). \tag{1.34}$$

В частности,

$$\lambda_j(t) = -\frac{\partial V^*(\mathbf{x};\ \theta^1)}{\partial x_j}\Bigg|_{x=x^*(t)}, \quad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{1.35}$$

Таким образом, если (1.34) имеет место, то *главную линейную часть* приращения минимального выигрыша при переходе из $\mathbf{x}$ в θ^1 можно выразить через изменение начального *) состояния от $\mathbf{x}$ до $\mathbf{x}+\delta\mathbf{x}$ посредством соотношения

$$\delta V^* = -\sum_{j=1}^{n} \lambda_j(t)\,\delta x_j.$$

Используя (1.34) в утверждениях а) и б) теоремы 2, получаем функциональное уравнение динамического программирования **):

$$\inf_{\mathbf{u}\in U}\left[f_0(\mathbf{x},\ \mathbf{u}) + \sum_{j=1}^{n} f_j(\mathbf{x},\ \mathbf{u})\frac{\partial V^*(\mathbf{x};\ \theta^1)}{\partial x_j}\right]_{x=x^*(t)} = 0. \tag{1.36}$$

Если $x' = (x'_0,\ \mathbf{x}')$ — регулярная внутренняя точка Σ, то $V^*(\mathbf{x};\ \theta^1)$ непрерывна в $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$; частные производные $\partial V^*(\mathbf{x};\ \theta^1)/\partial x_j$, $j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$, могут, однако, претерпевать бесконечные разрывы в $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$. Поэтому для доказательства

---

*) Ясно, что любое «мгновенное» состояние $\mathbf{x} \in p^*$ можно взять в качестве начального по отношению к последующей части траектории перехода.

**) См., например, Р. Беллман, Динамическое программирование, ИЛ, Москва, 1960.

соотношения (1.34), а значит, и (1.35), (1.36) недостаточно предположения о том, что оптимальная траектория Γ^* регулярна. Требуется дополнительное предположение о том, что частные производные $\partial V^*(\mathbf{x}; \theta^1)/\partial x_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, определены вдоль проекции p^* траектории Γ^* на пространство E^n.

1.15. Экстремальное управление

Нужно отметить, что теорема 2 (принцип максимума) является необходимым условием оптимальности управления, так как, согласно ей, оптимальность управления требует выполнения определенных условий. С другой стороны, управление, для которого удовлетворяются условия принципа максимума, не обязательно является оптимальным. Будем называть *экстремальным* управление, для которого выполнены необходимые условия принципа максимума. Таким образом, оптимальное управление должно быть экстремальным, но экстремальное управление не обязательно оптимально.

Принцип максимума можно трактовать как средство, позволяющее отбирать управления, которые могут быть оптимальными. Если оптимальное управление существует, то оно принадлежит множеству экстремальных управлений: оптимальное управление есть наилучшее экстремальное, т. е. такое, которому соответствует минимальный выигрыш. Разумеется, оптимальным может быть более одного экстремального управления; иными словами, оптимальное управление может оказаться не единственным (см. п. 1.16).

Применяя принцип максимума для вывода оптимального управления, мы сталкиваемся с двумя задачами:

1. Доказать, что оптимальное управление существует.
2. Найти *все* экстремальные управления.

Первая из этих задач требует знания теорем существования оптимального управления. Получение таких теорем выходит за рамки нашего рассмотрения, хотя две из наиболее общих теорем существования приведены в приложении В. Если нет возможности применить к данной задаче какую-либо теорему существования, то следует примириться с нахождением наилучшего экстремального управления, основываясь на наших знаниях о задаче, подтверждающих уверенность (или по крайней мере надежду), что найденное управление оптимально.

Вторая задача заключается в решении системы (1.33) уравнений траекторий и сопряженных уравнений при заданных краевых условиях вместе с условиями трансверсальности в концевых точках, т. е. в решении смешанной краевой задачи. Успех этой попытки, как станет видно из дальнейшего, в большой мере зависит от того, можно ли получить «замкнутое» решение системы дифференциальных уравнений. Если решение в такой форме получить не удается, то следует обратиться к численным методам решения смешанной краевой задачи *).

Поскольку экстремальное управление заранее неизвестно, но определение его связано с нахождением супремума функции $\mathscr{H}(\boldsymbol{\lambda}(t), \boldsymbol{x}(t), \mathbf{u})$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, то мы должны сначала решить обыкновенную задачу на максимум при любых $t \in [t_0, t_1]$. Пусть

$$\sup_{\mathbf{u} \in U} \mathscr{H}(\boldsymbol{\lambda}(t), \boldsymbol{x}(t), \mathbf{u}) = \mathscr{H}(\boldsymbol{\lambda}(t), \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\lambda}(t), \boldsymbol{x}(t))),$$

где $\mathbf{u}(t) = \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\lambda}(t), \boldsymbol{x}(t))$ — экстремальное управление; далее необходимо решить систему

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_j}{dt} &= \frac{\partial \mathscr{H}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{x}, \mathbf{u})}{\partial \lambda_j}\Big|_{\mathbf{u}=\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{x})}, \\ \frac{d\lambda_j}{dt} &= -\frac{\partial \mathscr{H}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{x}, \mathbf{u})}{\partial x_j}\Big|_{\mathbf{u}=\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{x})}, \end{aligned}\right\} \tag{1.37}$$

$$j = 1, 2, \ldots, n.$$

Отметим, что x_0 не входит явно в правые части (1.37). Кроме того, $\lambda_0(t) \equiv \text{const} \leqslant 0$. Поэтому можно игнорировать уравнения для $x_0(t)$ и $\lambda_0(t)$ и решать систему $2n$ дифференциальных уравнений. Следует, однако, отметить, что обе возможности — $\lambda_0(t) \equiv 0$ и $\lambda_0(t) \equiv \text{const} \leqslant 0$ (и, если угодно,

---

*) См., например, W. Kipniak, Dynamic Optimization and Cortrol, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1961; Дж. Лейтман (ред.), Методы оптимизации с приложениями к механике космического полета, «Наука», Москва, 1965; A. V. Balakrishnan and L. W. Neustadt, Computing Methods in Optimization Problems, Academic Press Inc., New York, 1964; C. W. Merriam, Optimization Theory and the Design of Feedback Control Systems, McGraw-Hill Book Company, New York, 1964.

$\lambda_0(t) \equiv -1$) — должны быть рассмотрены при определении экстремального управления.

Прежде чем идти дальше, рассмотрим несколько простых примеров с целью иллюстрации полученных выше результатов.

1.16. Пример: оптимальное по быстродействию управление ускорением прямолинейно движущейся ракеты постоянной мощности

Уравнения прямолинейного движения ракеты, развивающей постоянную мощность, имеют вид *)

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= u, \\ \frac{dx_2}{dt} &= u^2. \end{aligned}\right\} \tag{1.38}$$

Здесь x_1 — скорость, x_2 — величина, обратно пропорциональная массе, u — ускорение силы тяги. Предположим, что это ускорение удовлетворяет ограничению (нормированному)

$$|u| \leqslant 1, \tag{1.39}$$

так что допускаются как положительные, так и отрицательные ускорения. Таким образом, имеем систему с вектором состояния (x_1, x_2), уравнениями состояния (1.38) и управляющим вектором (управляющей переменной) u; множество U значений управления определено неравенством (1.39).

Считая фиксированными начальные значения скорости и массы, мы желаем минимизировать время, потребное для достижения известной конечной скорости, затрачивая при этом заданное количество горючего. Коротко говоря, разыскивается допустимое управление $u^*(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, переводящее систему из состояния (x_1^0, x_2^0) в момент $t = t_0$ в состояние (x_1^1, x_2^1) в момент $t = t_1$ при минимальном времени перехода

$$\tau_1 \triangleq t_1 - t_0 = \int_{t_0}^{t_1} dt.$$

К этой задаче приложима теорема существования (см. приложение Б), поэтому наилучшее экстремальное управление оптимально. Найдем это управление.

---

*) См. Дж. Лейтман (ред.), Методы оптимизации с приложениями к механике космического полета, «Наука», Москва, 1965.

Чтобы воспользоваться принципом максимума, нужно составить функцию $\mathscr{H}$; она равна

$$\mathscr{H}(\lambda, x, u) = \lambda_0 + \lambda_1 u + \lambda_2 u^2,$$

так что сопряженные уравнения имеют вид

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = 0,$$

$$\frac{d\lambda_2}{dt} = 0,$$

откуда

$$\lambda_1(t) \equiv \text{const} = \lambda_1,$$
$$\lambda_2(t) \equiv \text{const} = \lambda_2^0.$$

Разыскивается управление, доставляющее супремум выражению

$$\mathscr{H}(\lambda(t), x(t), u) = \lambda_0 + \lambda_1^0 u + \lambda_2^0 u^2$$

при ограничениях (1.39). Все возможные случаи перечислены в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Экстремальное управление

Случай	Условие	Экстремальное управление
а	$\lambda_1^0 > 0 \quad \lambda_2^0 \geqslant 0$	$u(t) \equiv 1$
б	$\lambda_1^0 < 0 \quad \lambda_2^0 \geqslant 0$	$u(t) \equiv -1$
в*)	$\lambda_1^0 < 0 \quad \lambda_2^0 < 0$	$u(t) \equiv -\frac{1}{2}\lambda_1^0/\lambda_2^0$
г*)	$\lambda_1^0 > 0 \quad \lambda_2^0 < 0$	$u(t) \equiv -\frac{1}{2}\lambda_1^0/\lambda_2^0$
д	$\lambda_1^0 = 0 \quad \lambda_2^0 > 0$	$\lvert u(t)\rvert \equiv 1$
е	$\lambda_1^0 = 0 \quad \lambda_2^0 < 0$	$u(t) \equiv 0$

*) При условии, что $\left|-\frac{1}{2}\lambda_1^0/\lambda_2^0\right| \leqslant 1$; в противном случае $u(t) \equiv -1$ или 1 соответственно.

Отметим, что экстремальное управление не зависит от $\lambda_0(t)$; это, очевидно, имеет место всегда, когда $f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \equiv \text{const}$. Несмотря на различия между случаями а) — е), экстремальное управление оказывается одним из следующих двух типов:

(1) $|u(t)| \equiv 1$ (двухпозиционное) *),

(2) $u(t) \equiv \text{const}$.

Исключая тривиальный случай $(x_1^0, x_2^0) = (x_1^1, x_2^1)$, можем отбросить вариант, когда $u(t) \equiv 0$. Из второго уравнения состояния (1.38) тогда следует, что

$$dx_2 > 0. \qquad (1.40)$$

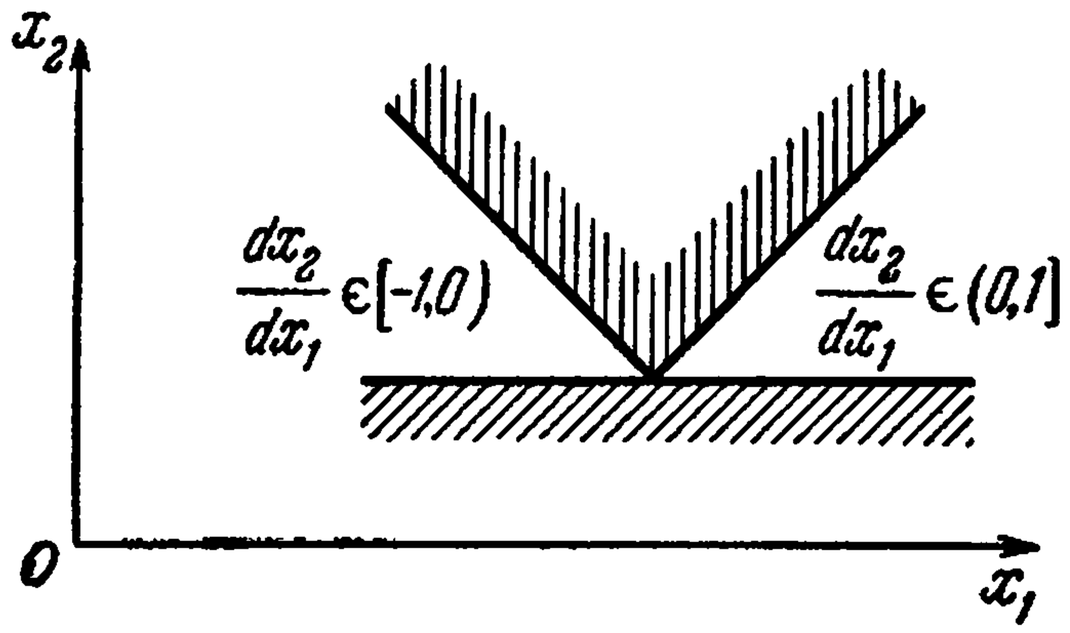

Рис. 1.16. Ограничение наклона экстремального пути (пример п. 1.16).

Соотношения (1.38) и (1.39) показывают также, что

$$\left|\frac{dx_2}{dx_1}\right| \leqslant 1.$$

Следовательно, наклон экстремального пути, т. е. пути, отвечающего экстремальному управлению, ограничен неравенствами

$$0 < \frac{dx_2}{dx_1} \leqslant 1, \qquad -1 \leqslant \frac{dx_2}{dx_1} < 0, \qquad (1.41)$$

как это показано на рис. 1.16.

Неравенство (1.40) показывает, что область **) начальных точек, из которых конечная точка (x_1^1, x_2^1) может быть достигнута вдоль экстремального пути, есть открытая полуплоскость $x_2 < x_2^1$. Далее, из неравенств (1.41) вытекает, что эта область начальных точек разделяется на три подобласти *I*, *II* и *III* лучами, имеющими наклон 1 и -1 соответственно (рис. 1.17).

Для начальных точек, находящихся в области *I*, только экстремальное управление $|u(t)| \equiv 1$ соответствует пути,

*) См. п. 2.3.

**) Эта область есть область E^* поскольку экстремальное управление, как станет далее ясно, оптимально.

ведущему в точку (x_1^1, x_2^1). Любое двухпозиционное управление, порождающее путь, приходящий в данную конечную точку, дает одно и то же значение времени перехода

$$\tau_1 = \int_{x_2^0}^{x_2^1} \frac{dx_2}{u^2(t)} = x_2^1 - x_2^0 \qquad (\text{где } u^2(t) \equiv 1)$$

и, следовательно, является оптимальным. Таким образом, для точек (x_1^0, x_2^0), лежащих в области I, оптимальное управление не является единственным.

Для начальных точек, лежащих в областях II и III, только экстремальное управление $u(t) \equiv \text{const}$ соответствует пути, ведущему в точку (x_1^1, x_2^1); при этом

$$u(t) = \frac{x_2^1 - x_1^0}{x_1^1 - x_1^0} = \text{const},$$

и соответствующее время перехода равно

$$\tau_1 = \frac{(x_1^1 - x_1^0)^2}{x_2^1 - x_2^0}.$$

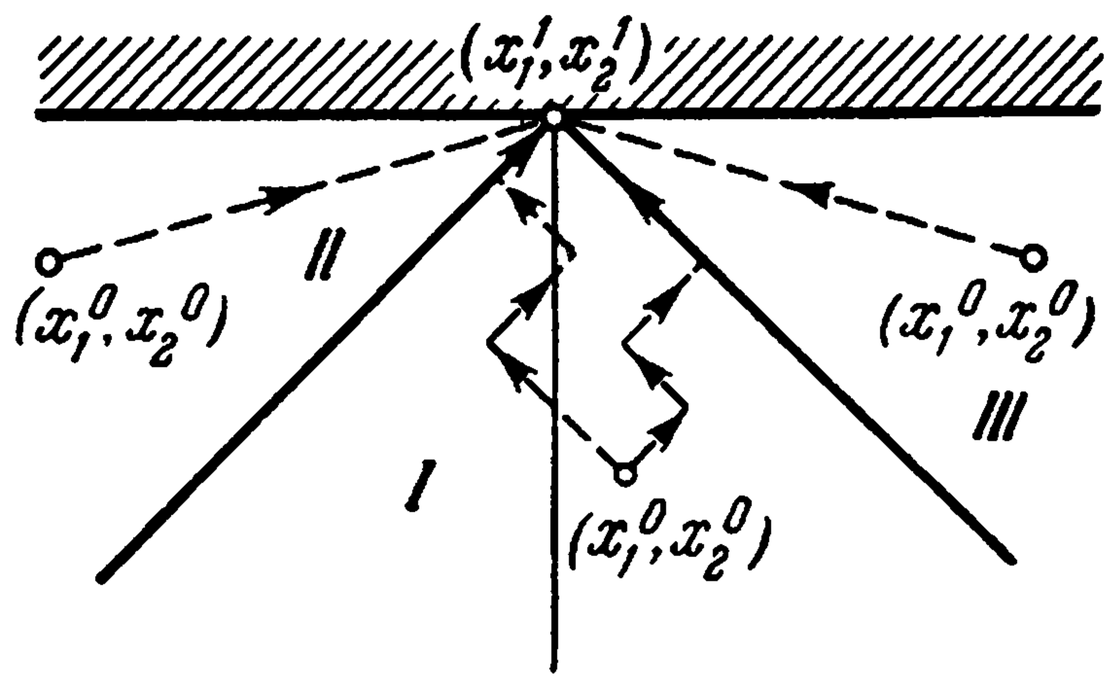

Рис. 1.17. Области начальных данных (пример п. 1.16).

Таким образом, для точек (x_1^0, x_2^0), принадлежащих областям II или III, экстремальное управление единственно и, следовательно, оптимально.

Исключая концевую точку, лежащую на границе области E^*, можно считать, что луч, разделяющий две области начальных значений, принадлежит любой из граничащих областей или обеим областям сразу. В этом последнем случае каждый оптимальный путь, начинающийся в области I, принадлежит полностью или частично разделяющему области лучу.

Для рассматриваемой задачи легко построить поверхность S равных оптимальных значений функционала, а также предельную поверхность Σ. Как уже было показано, минимальный выигрыш при переходе из любого состояния (x_1, x_2)

Легко видеть, что

$$\operatorname{grad}\Phi_{\mathrm{I}}(x)=(1,\ 0,\ -1),$$

$$\operatorname{grad}\Phi_{\mathrm{II},\ \mathrm{III}}(x)=\left(1,\ \frac{-2}{u^*(t)},\ \frac{1}{[u^*(t)]^2}\right).$$

Если точка $(x_1^0,\ x_2^0)$ лежит внутри области I, т. е. не на разделяющем луче, то оптимальное управление $u^*(t)$ должно переключаться со значения 1 на значение -1. Отсюда следует, что можно разрешить уравнение

$$\mathscr{H}(\lambda(t),\ x^*(t),\ u^*(t))=\lambda_0+\lambda_1^0u^*(t)+\lambda_2^0[u^*(t)]^2=0;$$

получаем $\lambda(t)=(-1,\ 0,\ 1)$, причем $\lambda_0=-1$. Подобно этому, если $(x_1^0,\ x_2^0)$ лежит внутри области II или III, находим

$$\left.\frac{d\mathscr{H}(\lambda(t),\ x^*(t),\ u)}{du}\right|_{u=u^*(t)}=0$$

и опять

$$\mathscr{H}(\lambda(t),\ x^*(t),\ u^*(t))=0,$$

откуда

$$\lambda(t)=\left(-1,\ \frac{2}{u^*(t)},\ -\frac{1}{[u^*(t)]^2}\right)$$

и $\lambda_0=-1$. Таким образом, соотношение (1.34) между $\lambda(t)$ и $\operatorname{grad}\Phi(x^*(t))$ соблюдается во внутренних точках Σ. В рассматриваемой задаче оно соблюдается даже в нерегулярных точках ребра Σ (см. упражнение 1.6). Это обстоятельство, однако, не имеет места в общем случае (см. упражнение 2.2).

1.17. Пример: навигационная задача быстродействия

В этом пункте мы разберем классическую навигационную задачу *). Рассмотрим корабль, движущийся со скоростью $\mathbf{v}$, постоянной по величине $v=1$ относительно течения, скорость которого $\mathbf{s}$ постоянна (см. рис. 1.19). Мы желаем определить программу управления рулями, при которой корабль достигает заданной конечной точки из заданного начального пункта за минимальное время.

*) E. Zermelo, Über das Navigationsproblem bei ruhender oder veränderlicher Windverteilung, Z. angew. Math. und Mech., Bd. 11, № 2, 1931, S. 114—124.

Пусть оси x_1 и x_2 соответственно параллельны и перпендикулярны скорости течения $\mathbf{s}$, и пусть ψ будет регулируемый угол между векторами $\mathbf{s}$ и $\mathbf{v}$. Уравнения движения корабля таковы:

$$\frac{dx_1}{dt} = s + \cos\psi, \qquad \frac{dx_2}{dt} = \sin\psi$$

или, в эквивалентной форме,

$$\frac{dx_1}{dt} = s + u_1, \qquad \frac{dx_2}{dt} = u_2, \tag{1.42}$$

причем

$$u_1^2 + u_2^2 = 1. \tag{1.43}$$

Таким образом, имеем систему с вектором состояния (x_1, x_2), уравнениями состояния (1.42), управляющим вектором (u_1, u_2) и множеством значений U управляющего вектора, определяемым равенством (1.43). Мы желаем определить допустимое управление $\mathbf{u}^*(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, которое переводит систему из точки (x_1^0, x_2^0) в момент $t = t_0$ в точку (x_1^1, x_2^1) в момент $t = t_1$, минимизируя при этом разность $\tau_1 \triangleq t_1 - t_0$.

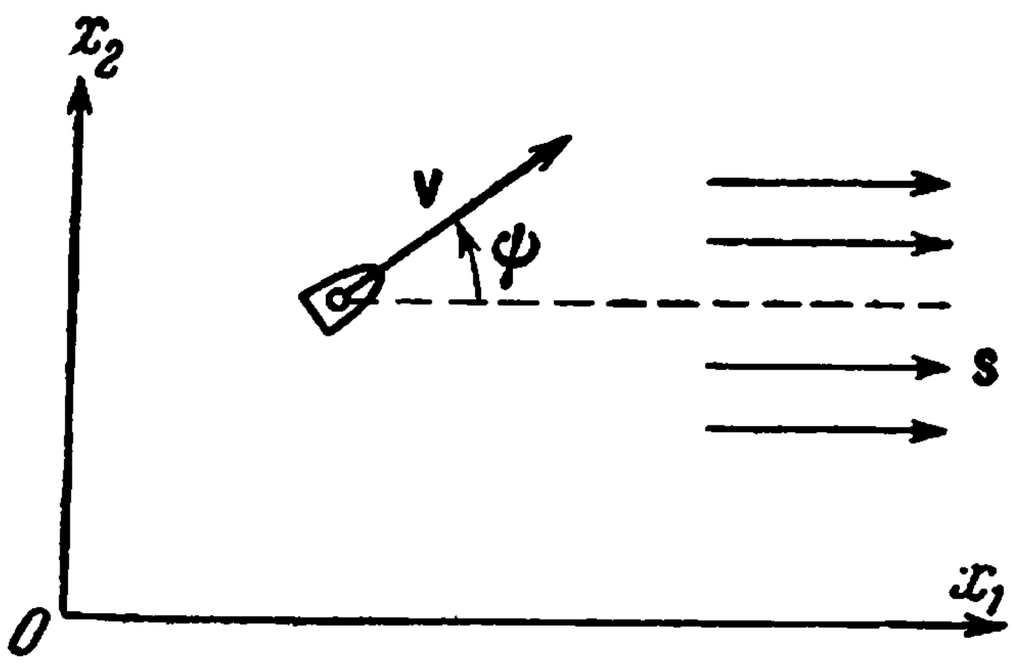

Рис. 1.19. Навигационная задача (пример п. 1.17).

Поскольку теорема существования (см. приложение Б) приложима к этой проблеме, вновь заключаем, что наилучшее экстремальное управление оптимально.

Функция $\mathscr{H}$ равна

$$\mathscr{H}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{x}, \mathbf{u}) = \lambda_0 + \lambda_1(s + u_1) + \lambda_2 u_2,$$

сопряженные уравнения имеют вид

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = 0, \qquad \frac{d\lambda_2}{dt} = 0,$$

так что

$$\lambda_1(t) \equiv \text{const} = \lambda_1^0, \qquad \lambda_2(t) \equiv \text{const} = \lambda_2^0.$$

Разыскивается управление, доставляющее супремум функции

$$\mathscr{H}(\boldsymbol{\lambda}(t), \boldsymbol{x}(t), \mathbf{u}) = \lambda_1^0 u_1 + \lambda_2^0 u_2 + \lambda_0 + \lambda_1^0 s \tag{1.44}$$

при ограничении (1.43). Ясно, что выражение (1.44) достигает супремума тогда, когда векторы (u_1, u_2) и $(\lambda_1^0, \lambda_2^0)$ одинаково направлены, т. е. если

$$\frac{u_i}{\sqrt{u_1^2+u_2^2}} = \frac{\lambda_i^0}{\sqrt{(\lambda_1^0)^2+(\lambda_2^0)^2}}, \qquad i = 1, 2.$$

Согласно (1.43) экстремальное управление оказывается равным

$$u_i(t) \equiv \frac{\lambda_i^0}{\sqrt{(\lambda_1^0)^2+(\lambda_2^0)^2}} = \text{const}, \qquad i = 1, 2. \qquad (1.45)$$

Иными словами, экстремальным оказывается постоянный угол ψ. Отсюда следует, что векторы относительной скорости $\mathbf{v}$ и полной скорости $\mathbf{s}+\mathbf{v}$ постоянны и каждый экстремальный путь прямолинеен (рис. 1.20). Соответствующее время перехода найдется из соотношения

$$\tau_1^2(1-s^2) + 2\Delta x_1 s\tau_1 - (\Delta x_1)^2 - (\Delta x_2)^2 = 0, \quad (1.46)$$

где $\Delta x_1 \triangleq x_1^1 - x_1^0$, $\Delta x_2 = x_2^1 - x_2^0$.

Для заданного времени перехода τ_1 экстремальное управление единственно:

$$u_1(t) = \frac{\Delta x_1 - \tau_1 s}{\tau_1},$$

$$u_2(t) = \frac{\Delta x_2}{\tau_1}. \qquad (1.47)$$

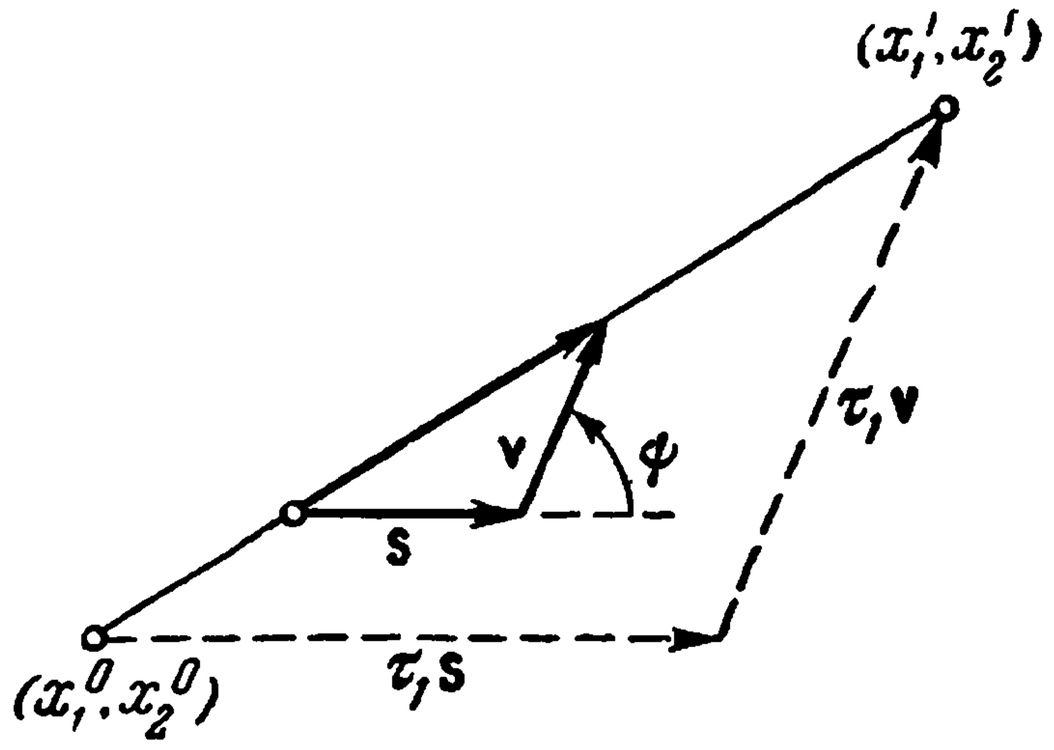

Рис. 1.20. Экстремальный путь (пример п. 1.17).

Найдем теперь наилучшее экстремальное управление (т. е. оптимальное) и определим область начальных состояний E^*. С этой целью следует различать следующие три случая:

(1) $s < 1$. Решая уравнение (1.46) и учитывая требование $\tau_1 \geqslant 0$, находим

$$\tau_1 = \frac{-\Delta x_1 s + \sqrt{(\Delta x_1)^2+(\Delta x_2)^2 - s^2(\Delta x_2)^2}}{1-s^2}. \qquad (1.48)$$

При заданных значениях Δx_1 и Δx_2 значение τ_1 единственно. Соответствующее экстремальное управление един-

ственно и, следовательно, оптимально. Поскольку (1.48) определяет вещественное число для всех значений Δx_1 и Δx_2, мы заключаем, что $E^* = E^2$, т. е. что оптимальные пути существуют из всех точек плоскости состояний.

(2) $s = 1$. Решение уравнения (1.46) единственно:

$$\tau_1 = \frac{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2}{2\Delta x_1}. \tag{1.49}$$

Снова заключаем, что экстремальное управление единственно и, значит, оптимально. Требование $0 \leqslant \tau_1 < \infty$ показывает, однако, что $\Delta x_1 > 0$. Следовательно, E^* является открытой полуплоскостью, которая задается неравенством $x_1 < x_1^1$.

(3) $s > 1$. В этом случае существуют два решения уравнения (1.46):

$$\tau_1 = \frac{\Delta x_1 s \pm \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 - s^2 (\Delta x_2)^2}}{s^2 - 1}; \tag{1.50}$$

оба корня вещественны и положительны, если

$$(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 - s^2 (\Delta x_2)^2 \geqslant 0. \tag{1.51}$$

Первое уравнение (1.42) и уравнение (1.43) показывают, что в рассматриваемом случае $\Delta x_1 \geqslant 0$. Поэтому ясно, что тот из корней (1.50), который соответствует знаку плюс, не может быть оптимальным. В самом деле, легко показать, что этот корень не отвечает даже экстремальному управлению. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим (1.44) совместно с (1.47) и (1.43) и воспользуемся пп. б) и в) теоремы 2, а именно тем, что $\mathscr{H}(\boldsymbol{\lambda}(t), \boldsymbol{x}(t), \mathbf{u}(t)) = 0$ и $\lambda_0(t) \leqslant 0$. Мы обнаружим, что

$$1 + su_1 \geqslant 0. \tag{1.52}$$

Если в (1.50) берется положительный знак, то получим *)

$$1 + su_1 = -\frac{\sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 - s^2 (\Delta x_2)^2}}{\tau_1} < 0,$$

что противоречит (1.52)—необходимому условию экстремаль-

*) За исключением тривиального случая, когда оба корня равны.

ности управления. Экстремальное управление снова единственно и, следовательно, оптимально.

Перейдем теперь к определению области E^* начальных состояний. Из (1.51) сразу следует, что вдоль оптимального пути

$$-(s^2-1)^{-1/2} \leqslant \frac{dx_2}{dx_1} \leqslant (s^2-1)^{-1/2}.$$

Далее, в силу первого из уравнений состояния (1.42) $dx_1 \geqslant 0$, так что E^* — замкнутая область в левой полуплоскости, ограниченная линиями с наклоном $\pm(s^2-1)^{-1/2}$ соответственно, пересекающимися в конечной точке (x_1^1, x_2^1).

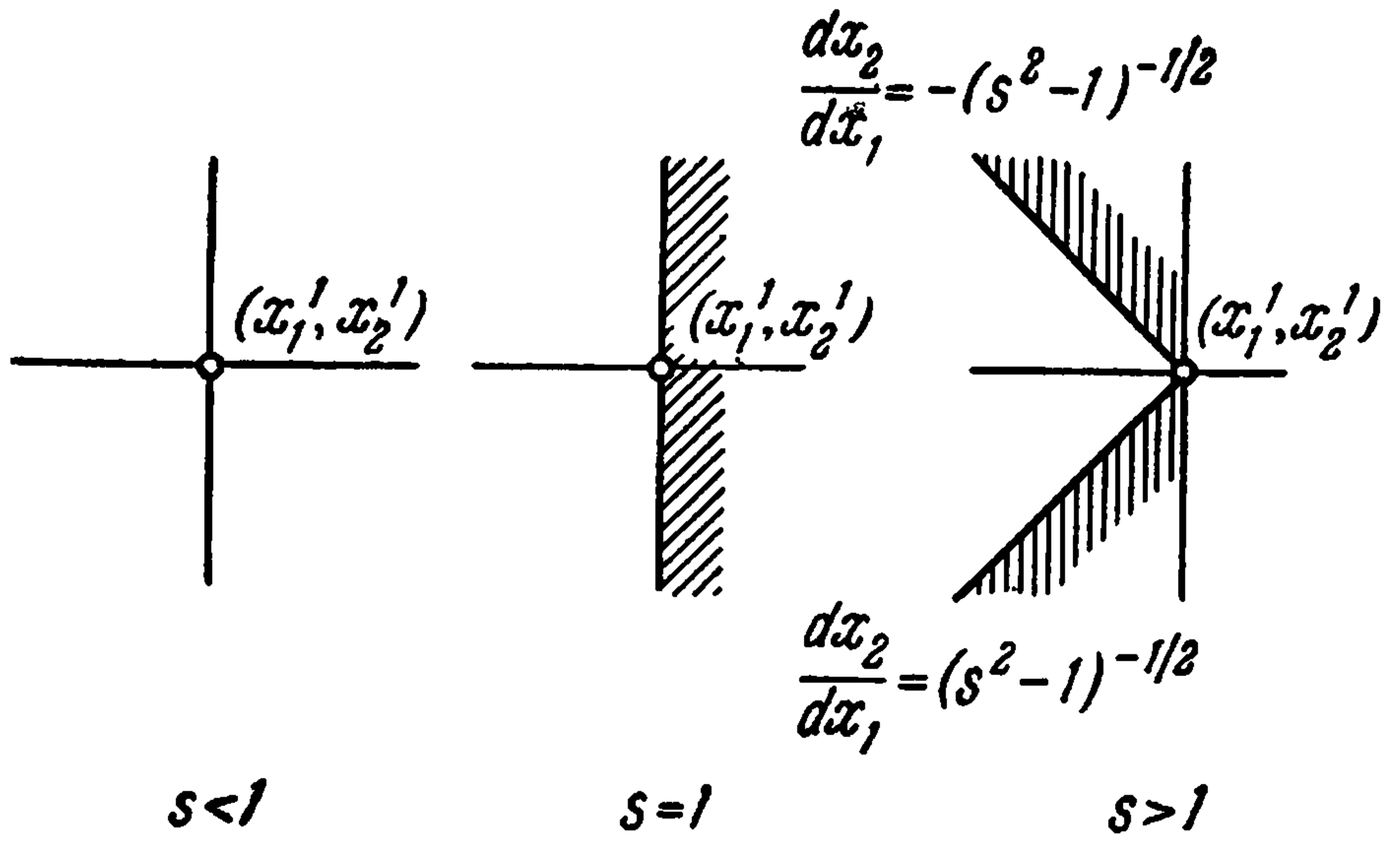

Рис. 1.21. Области начальных данных (пример п. 1.17).

Области начальных значений для случаев (1) — (3) указаны на рис. 1.21. Относительно случая (3) следует заметить, что оптимальные пути могут лежать на границе E^*, поскольку эта область замкнутая. Точки соответствующих оптимальных траекторий, очевидно, не являются регулярными *внутренними* точками поверхности Σ (см. упражнение 1.7). Легко, далее, убедиться, что $\lambda_0(t) \equiv 0$, если (x_1^0, x_2^0) и, значит, весь оптимальный путь расположены на границе E^*. Утверждение б) теоремы 2 вместе с уравнениями (1.42), (1.44) и (1.45) показывает, что

$$1 + su_1 = -\frac{\lambda_0}{\sqrt{(\lambda_1^0)^2 + (\lambda_2^0)^2}}.$$

. На границе E^* соотношение (1.51) справедливо со знаком равенства, так что из (1.50) получаем

$$\tau_1 = \frac{\Delta x_1 \, s}{s^2 - 1}.$$

Подставляя это значение τ_1 в (1.47) и составляя комбинацию $1 + su_1$, получим требуемый результат.

1.18. Пример: минимальное расстояние до заданной кривой

Рассмотренные до сих пор примеры были связаны с задачей перехода системы между заданными конечными состояниями. Чтобы проиллюстрировать применение условия трансверсальности (условияг) теоремы 2), мы рассмотрим в этом пункте очень простую задачу.

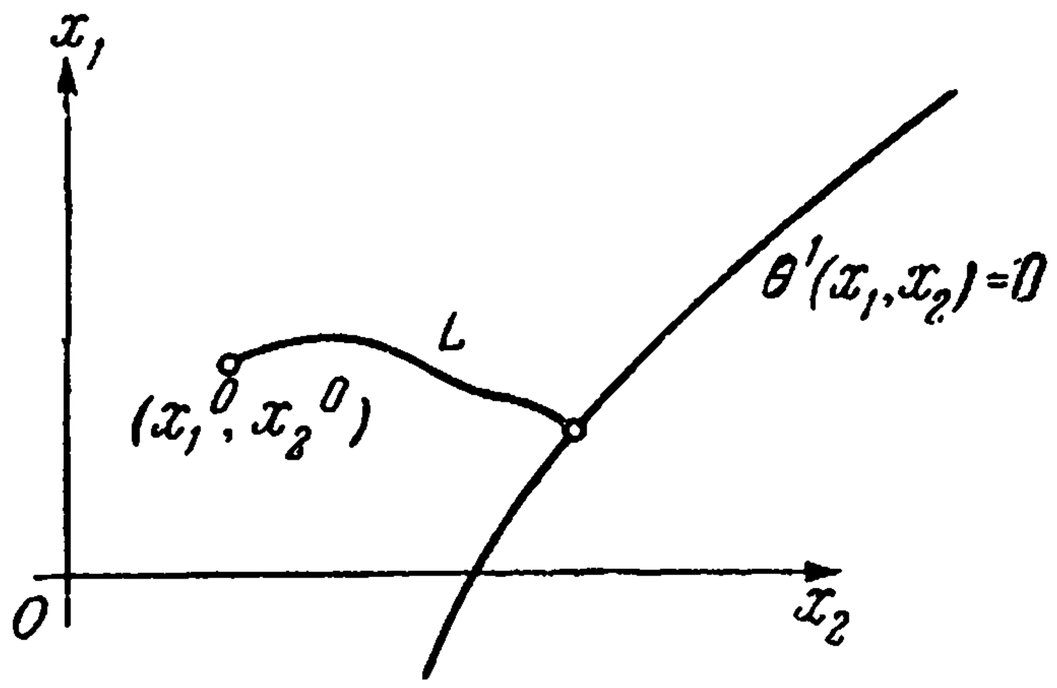

Рис. 1.22. Допустимая кривая (пример п. 1.18).

Требуется определить плоскую кривую минимальной длины, соединяющую заданную точку с точкой на заданной кривой в плоскости (x_1, x_2) (рис. 1.22). Иными словами, мы желаем найти кривую, соединяющую заданную точку (x_1^0, x_2^0) и точку на кривой $\theta^1(x_1, x_2) = 0$, причем так, чтобы интеграл

$$L = \int_0^L ds, \qquad ds \triangleq \sqrt{(dx_1)^2 + (dx_2)^2}$$

принимал минимальное возможное значение.

Эквивалентная оптимальная задача описывается уравнениями состояния

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= u_1, \\ \frac{dx_2}{dt} &= u_2 \end{aligned}\right\} \qquad (1.53)$$

и ограничением на управления

$$u_1^2 + u_2^2 = 1. \tag{1.54}$$

Требуется определить допустимое управление $\mathbf{u}^*(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, переводящее систему из заданного начального состояния (x_1^0, x_2^0) в состояние, лежащее на известном конечном многообразии

$$\theta^1: \ \theta^1(x_1, x_2) = 0 \tag{1.55}$$

и такое, что достигается минимальное значение времени перехода

$$\tau_1 = \int_{t_0}^{t_1} dt.$$

Функция $\mathscr{H}$ равна $\mathscr{H}(\lambda, x, \mathbf{u}) = \lambda_0 + \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$, так что

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = 0, \qquad \frac{d\lambda_2}{dt} = 0,$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1(t) &\equiv \text{const} = \lambda_1^0, \\ \lambda_2(t) &\equiv \text{const} = \lambda_2^0. \end{aligned}\right\} \tag{1.56}$$

Как в примере п. 1.17, экстремальное управление оказывается равным

$$u_i(t) \equiv \frac{\lambda_i^0}{\sqrt{(\lambda_1^0)^2 + (\lambda_2^0)^2}} = \text{const}, \qquad i = 1, 2. \tag{1.57}$$

Соответствующий путь в пространстве состояний является прямой линией.

Обратимся теперь к условию трансверсальности в конечной точке, имея в виду определить конечное состояние, соответствующее экстремальному управлению. Из уравнений (1.28) и (1.29), а также (1.55) и (1.56) выводим:

$$\lambda_1^0 \eta_1^1 + \lambda_2^0 \eta_2^1 = 0, \qquad \frac{\partial \theta^1}{\partial x_1} \eta_1^1 + \frac{\partial \theta^1}{\partial x_2} \eta_2^1 = 0,$$

откуда получаем

$$\lambda_1^0 \frac{\partial \theta^1}{\partial x_2} - \lambda_2^0 \frac{\partial \theta^1}{\partial x_1} = 0 \tag{1.58}$$

в конечном состоянии $\mathbf{x}^1 \in \theta^1$.

Используя (1.53), (1.57) и (1.58), приходим к равенству

$$\frac{x_2^1 - x_2^0}{x_1^1 - x_1^0} = \left.\frac{\partial\theta^1/\partial x_2}{\partial\theta^1/\partial x_1}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^1}. \tag{1.59}$$

Решая уравнения (1.55) и (1.59), можно теперь определить конечное состояние $\mathbf{x}^1$, соответствующее экстремальному управлению (1.57). Поскольку теорема существования (см. приложение Б) может быть применена к этой задаче, наилучшее экстремальное управление оптимально.

Например, если

$$\theta^1(x_1, x_2) \equiv x_1 - x_1^1 = 0, \tag{1.60}$$

где x_1^1 — заданное число, то из (1.58) вытекает, что $\lambda_2^0 \equiv 0$, так что экстремальное управление единственно и, следовательно, оптимально; таким образом,

$$u_1^*(t) \equiv \pm 1, \qquad u_2^*(t) \equiv 0.$$

Как и следовало ожидать, оптимальный путь есть прямая линия, перпендикулярная к линии, заданной уравнением (1.60).

Упражнения

1.1. Рассмотреть систему, поведение которой описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{dx_1}{dt} = u^2,$$

где функция $u = u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, кусочно-непрерывна и удовлетворяет ограничению $|u(t)| \leqslant 1$ $\forall t \in [t_0, t_1]$.

Каково множество допустимых правил, определяющих временну́ю историю состояний системы? Каков путь системы, если задано состояние в момент $t = t_0$? Пусть требуется перевести систему в состояние $x_1 = 0$; каково множество начальных состояний, из которых можно осуществить такой переход с помощью допустимого правила?

1.2. Пусть выигрыш, соответствующий переходу системы упражнения 1.1 из $x_1 = x_1^0$ в $x_1 = 0$, есть время перехода $t_1 - t_0$. Проверить справедливость свойства аддитивности (1.2). Какова траектория системы, если задано ее состояние в момент $t = t_0$? Найти путем подбора функцию $u = u^*(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, для которой выигрыш принимает наименьшее значение. Каково соответствующее оптимальное правило? Каков соответствующий оптимальный путь? Каково множество начальных состояний, из которых можно достиг-

нуть конечного состояния $x_1 = 0$ с помощью оптимального правила? Чему равен минимальный выигрыш? Определить уравнения предельной поверхности и поверхности равных оптимальных значений выигрыша. Проверить справедливость леммы 2 и теоремы 1.

1.3. В задаче упражнения 1.2 использовать принцип максимума (теорему 2) для определения экстремального управления. Разобрать его связь с оптимальным управлением, найденным путем подбора.

1.4. Найти плоскую кривую минимальной длины, соединяющую точку (0, 0) с точкой прямой линии $x_1 - x_2 + 3 = 0$.

1.5. Найти плоскую кривую минимальной длины, соединяющую точку на кривой $x_1^2 - x_2 = 0$ с точкой на кривой $x_1 - x_2 + 3 = 0$.

1.6. Для примера п. 1.16 показать, что соотношение (1.34) справедливо в нерегулярных точках ребер предельной поверхности Σ.

1.7. Для примера п. 1.17 получить уравнения предельных поверхностей и поверхностей равных оптимальных значений выигрыша. Проверить справедливость соотношения (1.34).

1.8. Рассмотреть следующую вариационную задачу: пусть

$$I \triangleq \int_{t_0}^{t_1} f(t, x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)\, dt,$$

где $\dot{x}_j \triangleq dx_j/dt$. Среди всех функций $x_j = x_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, имеющих кусочно-непрерывные первые производные в промежутке $[t_0, t_1]$ и удовлетворяющих равенствам

$$\theta_\rho^0(t_0, x_1(t_0), \ldots, x_n(t_0)) = 0, \quad \rho = 1, 2, \ldots, p \leqslant n+1,$$
$$\theta_\sigma^1(t_1, x_1(t_1), \ldots, x_n(t_1)) = 0, \quad \sigma = 1, 2, \ldots, q \leqslant n+1,$$

где θ_ρ^0, θ_σ^1 — заданные дифференцируемые функции, найти функции $x_j = x_j^*(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, доставляющие минимум интегралу I.

Применить теорему 2 для вывода уравнений Эйлера — Лагранжа, условий Лежандра и Вейерштрасса, условий Эрдмана в угловых точках и условий трансверсальности.

ГЛАВА 2

СИСТЕМЫ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

2.1. Линейные уравнения состояния с постоянными коэффициентами

В этой главе мы разберем ряд вопросов оптимального (или по крайней мере экстремального) управления некоторыми системами специального вида. Сначала мы сосредоточим внимание на системах, уравнения состояния которых линейны как по переменным состояния, так и по управлениям. В частности, рассмотрим линейные уравнения состояния с постоянными коэффициентами

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + \sum_{k=1}^{m} b_{ik} u_k, \qquad i = 1, 2, \ldots, n; \quad (2.1)$$

коэффициенты a_{ij} и b_{ik} суть заданные константы.

Систему (2.1) можно записать в иной, векторно-матричной форме:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad (2.2)$$

где

$$\mathbf{A} \triangleq \begin{bmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots \\ a_{n1} \ldots a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{B} \triangleq \begin{bmatrix} b_{11} \ldots b_{1m} \\ \ldots\ldots \\ b_{n1} \ldots b_{nm} \end{bmatrix}.$$

Будем предполагать, что множество U допустимых значений управления $\mathbf{u}(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, есть параллелепипед в пространстве E^m, т. е.

$$u_k^{\min} \leqslant u_k(t) \leqslant u_k^{\max} \qquad (k = 1, 2, \ldots, m) \quad (2.3)$$

при всех $t \in [t_0, t_1]$, причем $u_k^{\min}$ и $u_k^{\max}$ — известные постоянные.

Как и ранее, будем рассматривать интегральный показатель качества, но ограничимся лишь задачами, в которых подынтегральная функция $f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ не зависит явно от управления $\mathbf{u}$, т. е. функционалами

$$\int_{t_0}^{t_1} f_0(\mathbf{x}(t))\,dt. \tag{2.4}$$

Проблемы быстродействия охватываются этим кругом задач, так как для них $f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \equiv 1$.

Как и в гл. 1, разыскивается допустимое управление $\mathbf{u}^*(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, которое переводит систему из заданного начального многообразия θ^0 в заданное конечное многообразие θ^1 и при этом сообщает интегралу (2.4) минимальное возможное значение.

Поскольку уравнение состояния (2.1) того же типа, что и (1.8), показатель качества (2.4) того же типа, что и (1.9), и множество U значений управления постоянно, мы имеем оптимальную задачу, к которой приложим принцип максимума (теорема 2). Обратимся теперь к исследованию некоторых свойств экстремального управления для специального класса задач только что указанного типа.

2.2. Функция переключений

Чтобы применить принцип максимума, мы должны располагать выражением для функции $\mathscr{H}$; для класса задач, сформулированных в п. 2.1, эта функция имеет вид

$$\mathscr{H}(\lambda, x, \mathbf{u}) = \lambda_0 f_0(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\Lambda} \cdot \mathbf{A}\mathbf{x} + \boldsymbol{\Lambda} \cdot \mathbf{B}\mathbf{u}, \tag{2.5}$$

где $\boldsymbol{\Lambda} \triangleq (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, т. е. $\lambda = (\lambda_0, \boldsymbol{\Lambda})$.

Обозначим через $\mathbf{b}_k$ вектор, компонентами которого являются элементы k-го столбца матрицы $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{b}_k \triangleq (b_{1k}, b_{2k}, \ldots, b_{nk}).$$

Третье слагаемое правой части уравнения (2.5) можно теперь записать в форме

$$\boldsymbol{\Lambda} \cdot \mathbf{B}\mathbf{u} = \sum_{k=1}^{m} \boldsymbol{\Lambda} \cdot \mathbf{b}_k u_k. \tag{2.6}$$

●

Вспомним, что экстремальное управление $\mathbf{u}(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, доставляет супремум выражению $\mathscr{H}^*(\boldsymbol{\lambda}(t), \boldsymbol{x}(t), \mathbf{u})$ по отношению ко всем $\mathbf{u} \in U$. Ограничения (2.3) показывают, что допустимое управление $\mathbf{u}(t)$ экстремально при условиях:

$$\left.\begin{aligned} u_k(t) &= u_k^{\min}, \quad \text{если} \quad \sigma_k(t) < 0, \\ u_k(t) &= u_k^{\max}, \quad \text{если} \quad \sigma_k(t) > 0, \end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

где

$$\sigma_k(t) \triangleq \Lambda(t) \cdot \mathbf{b}_k = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(t) b_{jk}. \tag{2.8}$$

Скалярная функция $\sigma_k(t)$ называется *функцией переключений* для k-й управляющей переменной. Это наименование вытекает из условия (2.7): когда $\sigma_k(t)$ меняет знак, соответствующая управляющая переменная $u_k(t)$ *переключается* со значения $u_k^{\min}$ на значение $u_k^{\max}$ или наоборот. Поскольку $\Lambda(t)$ непрерывна в промежутке $[t_0, t_1]$, функция $\sigma_k(t)$ также непрерывна. Поэтому функция переключений проходит через нуль всякий раз, когда знак ее изменяется на обратный.

В последующем мы подробно исследуем поведение $\sigma_k(t)$ в промежутке $[t_0, t_1]$.

2.3. Быстродействие и релейное управление

Если функция переключений $\sigma_k(t)$ не равна тождественно нулю на какой-либо части промежутка $[t_0, t_1]$, то соответствующая управляющая переменная $u_k(t)$ принимает предельные значения $u_k^{\min}$ или $u_k^{\max}$ на всем промежутке $[t_0, t_1]$. Мы говорим, что k-я компонента управляющего вектора *релейна*.

В этом пункте мы рассмотрим линейную проблему *быстродействия* $f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \equiv 1$.

Чтобы исследовать вопрос о релейном характере управления, предположим, что

$$\sigma_k(t) \equiv 0 \tag{2.9}$$

в промежутке $[t', t'']$, $t_0 \leqslant t' < t'' \leqslant t_1$. Согласно определению (2.8) функция переключений $\sigma_k(t)$ есть линейная функция от $\Lambda(t)$ — вектора, удовлетворяющего сопряженному

уравнению *)

$$\frac{d\Lambda}{dt} = -\Lambda A. \tag{2.10}$$

Поскольку (2.10) — однородное линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, его решение $\Lambda(t)$ является аналитической функцией t в промежутке $[t_0, t_1]$.

Если в промежутке $[t', t'']$ имеет место тождество (2.9), то производные всех порядков от $\sigma_k(t)$ тождественно равны нулю в этом промежутке. Поскольку $\sigma_k(t)$ и все ее производные непрерывны на $[t_0, t_1]$, то они тождественно обращаются в нуль во всем промежутке $[t_0, t_1]$.

В частности,

$$\sigma_k(t) = \frac{d\sigma_k(t)}{dt} = \ldots = \frac{d^{n-1}\sigma_k(t)}{dt^{n-1}} \equiv 0 \tag{2.11}$$

на $[t_0, t_1]$.

Если учесть определение (2.8) и сопряженные уравнения (2.10), то тождества (2.11) дадут n однородных линейных уравнений относительно компонент $\lambda_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, n$ вектора $\Lambda(t)$:

$$\left.\begin{aligned} \Lambda(t)\cdot \mathbf{b}_k &= 0,\\ \Lambda(t)\,\mathbf{A}\cdot \mathbf{b}_k &= 0,\\ &\cdots\cdots\cdots\\ \Lambda(t)\,\mathbf{A}^{n-1}\cdot \mathbf{b}_k &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{2.12}$$

для всех $t \in [t_0, t_1]$. Если определитель матрицы коэффициентов (2.12) не равен нулю или, что то же, если векторы $\mathbf{b}_k, \mathbf{A}\mathbf{b}_k, \ldots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}_k$ линейно независимы, то единственным решением системы (2.12) будет тривиальное решение, т. е. $\lambda_j(t) \equiv 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Между тем согласно п. б) теоремы 2, если $\mathbf{u}(t)$ экстремальное управление, то

$$\mathscr{H}(\lambda(t), x(t), \mathbf{u}(t)) = 0 \qquad \forall t \in [t_0, t_1]$$

или

$$\lambda_0(t) + \Lambda(t)\cdot[\mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t)] = 0. \tag{2.13}$$

Формула (2.13) показывает, что равенство $\Lambda(t) = 0$ влечет за собой $\lambda_0(t) = 0$ и, следовательно, $\lambda(t) = 0$ для всех

---

*) Мы используем здесь только последние n уравнений сопряженной системы (1.21); следует добавить очевидное равенство $d\lambda_0/dt = 0$.

$t \in [t_0, t_1]$. Это, однако, находится в противоречии с теоремой 2, которая требует, чтобы существовало *ненулевое* решение $\boldsymbol{\lambda}(t)$ сопряженной системы (1.21). Мы приходим, таким образом, к следующему результату.

Лемма 6*). *Пусть* $u_k(t)$ — *компонента экстремального управления* $\mathbf{u}(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, *для системы с линейными уравнениями состояния* (2.1) *и множеством* U *значений управления, определяемым формулами* (2.3); *пусть* $\mathbf{x}(t)$ — *соответствующее решение уравнений* (2.1); *тогда управление* $u_k(t)$ *является релейным, если выполняются следующие условия:*

(а) $f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \equiv 1$,

(б) *определитель матрицы коэффициентов уравнений* (2.12) *не равен нулю.*

2.4. Число переключений

Рассмотрим теперь задачу быстродействия для линейной системы (2.1).

Лемма 7. *Пусть*

(а) *все собственные значения матрицы* $\mathbf{A}$ *из уравнения состояния* (2.2) *вещественны и*

(б) *компонента* $u_k(t)$ *экстремального управления* $\mathbf{u}(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, *релейна;*

тогда функция $u_k(t)$ *может испытывать не более* $n-1$ *переключений.*

Доказательство этой леммы ведется следующим образом. Если все собственные значения $\mathbf{A}$ вещественны, то каждая компонента $\lambda_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, решения $\boldsymbol{\Lambda}(t)$ уравнения (2.10) представляется в форме **)

$$\varphi_1(t)\, e^{\alpha_1 t} + \varphi_2(t)\, e^{\alpha_2 t} + \ldots + \varphi_\gamma(t)\, e^{\alpha_\gamma t}, \qquad (2.14)$$

где $\varphi_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, \gamma$, — полиномы от t и α_i — *различные* собственные значения матрицы $\mathbf{A}$.

Функция переключений $\sigma_k(t)$, определяемая формулой (2.8), является линейной комбинацией функций $\lambda_j(t)$ и имеет,

---

*) См. Л. С. Понтрягин и др., Математическая теория оптимальных процессов, Физматгиз, Москва, 1961.

**) См. W. Kaplan Ordinary Differential Equations, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1958 (стр. 224 и далее).

таким образом, ту же форму, что и (2.14). Чтобы показать теперь, что число нулей $\sigma_k(t)$ и, следовательно, число переключений $u_k(t)$ не может превышать $n-1$, достаточно убедиться в том, что функция (2.14) имеет самое большее $n-1$ нулей.

Сначала мы докажем, что число нулей функции (2.14) не может превышать $d_1+d_2+\ldots+d_\gamma+\gamma-1$, где d_i — степень полинома $\varphi_i(t)$. Для $\gamma=1$ это утверждение справедливо, так как функция (2.14) в этом случае равна $\varphi_1(t)e^{\alpha_1 t}$ и имеет, следовательно, максимум d_1 нулей. Чтобы доказать справедливость сказанного для $\gamma>1$, воспользуемся методом индукции, а именно покажем, что утверждение верно для суммы (2.14), содержащей γ слагаемых, если оно верно для суммы, содержащей $\gamma-1$ слагаемых.

Умножая (2.14) на $e^{-\alpha_\gamma t}$, получим

$$\varphi_1(t)e^{(\alpha_1-\alpha_\gamma)t}+\ldots+\varphi_{\gamma-1}(t)e^{(\alpha_{\gamma-1}-\alpha_\gamma)t}+\varphi_\gamma(t). \quad (2.15)$$

Функция (2.15) имеет, очевидно, те же нули, что и (2.14). Допустим теперь, что утверждение наше неверно, т. е. функция (2.14), и значит (2.15), имеет по меньшей мере $d_1+d_2+\ldots+d_\gamma+\gamma$ нулей. Между двумя последовательными нулями непрерывно дифференцируемой функции имеется по крайней мере один нуль ее производной. Следовательно, $(d_\gamma+1)$-я производная от (2.15) имеет по крайней мере $(d_1+d_2+\ldots+d_\gamma+\gamma)-(d_\gamma+1)$ нулей. Но $(d_\gamma+1)$-я производная от (2.15) имеет вид

$$\bar{\varphi}_1(t)e^{(\alpha_1-\alpha_\gamma)t}+\ldots+\bar{\varphi}_{\gamma-1}(t)e^{(\alpha_{\gamma-1}-\alpha_\gamma)t}, \quad (2.16)$$

где числа $\alpha_1-\alpha_\gamma$, $\alpha_2-\alpha_\gamma$, ..., $\alpha_{\gamma-1}-\alpha_\gamma$ различны и степень полинома $\bar{\varphi}_i(t)$ есть d_i. Иными словами, функция (2.16) представлена в той же самой форме, что и (2.14), но с $\gamma-1$ слагаемыми. Если для последней утверждение леммы справедливо, то оно справедливо и для (2.16); таким образом, (2.16) имеет самое большее $d_1+d_2+\ldots+d_{\gamma-1}+(\gamma-1)-1$ нулей. Предположение о том, что сделанное утверждение справедливо для функции (2.14) с $\gamma-1$ слагаемыми, но несправедливо для γ слагаемых, ведет к противоречию. Поскольку утверждение верно для $\gamma=1$, оно верно и для $\gamma>1$.

Если обозначить кратность собственного значения α_i через m_i, то можно написать

$$\sum_{i=1}^{\gamma} m_i = n.$$

С другой стороны, $d_i < m_i$, так что

$$d_1 + d_2 + \ldots + d_\gamma + \gamma - 1 = (d_1 + 1) + (d_2 + 1) + \ldots$$
$$\ldots + (d_{\gamma-1} + 1) - 1 \leqslant m_1 + m_2 + \ldots + m_\gamma - 1 \leqslant n - 1.$$

Этим завершается доказательство леммы 7 *).

Возвращаясь к обсуждению специальных систем, рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих полученные выше результаты.

2.5. Пример: одномерный оптимальный по быстродействию регулятор

Рассмотрим систему, подобную материальной точке, движущейся под действием ограниченной силы; уравнения ее состояния пусть будут

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= u \end{aligned}\right\} \qquad (2.17)$$

с ограничением на управление

$$|u| \leqslant 1. \qquad (2.18)$$

Мы желаем перевести систему из заданного начального состояния (x_1^0, x_2^0) в состояние покоя (0, 0) за наименьшее время, т. е. имеем проблему типа той, которая разбиралась в п. 2.1. Далее, к этой задаче можно применить теорему существования (см. приложение Б), так что наилучшее экстремальное управление оказывается оптимальным.

Чтобы найти экстремальное управление, мы вновь обращаемся к необходимым условиям, содержащимся в принципе максимума. Функция $\mathscr{H}$ нашей задачи такова:

$$\mathscr{H}(\lambda, x, u) = \lambda_0 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u,$$

*) См. также стр. 130 — 139 книги Л. С. Понтрягина и др.

Интегрирование уравнений состояния (2.17) дает

$$\left.\begin{aligned} x_2^2 &= 2x_1 + k, \qquad u(t) = 1, \\ x_2^2 &= -2x_1 + k', \quad u(t) = -1, \end{aligned}\right\} \tag{2.21}$$

где k и k' — постоянные интегрирования. Уравнения (2.21) определяют два однопараметрических семейства парабол (рис. 2.1). Второе уравнение состояния (2.17) показывает, что

$$\frac{dx_2}{dt} > 0, \qquad u(t) = 1,$$

$$\frac{dx_2}{dt} < 0, \qquad u(t) = -1.$$

Эти неравенства определяют направление движения изображающей точки вдоль экстремального пути; на рис. 2.1 это направление указано стрелками.

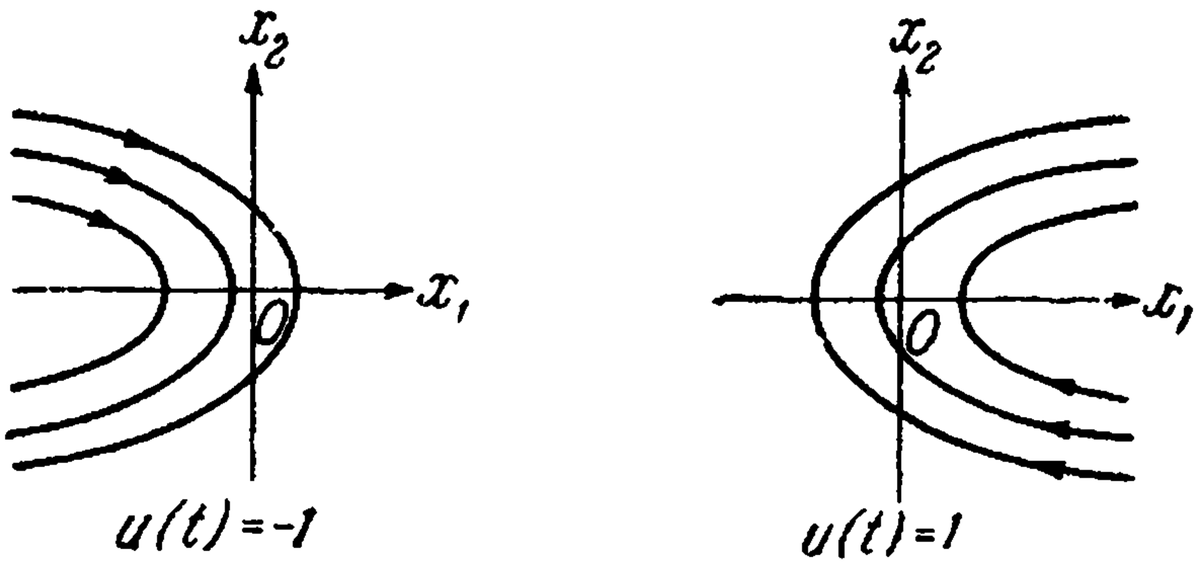

Рис. 2.1. Экстремальные пути (пример п. 2.5).

Поскольку может быть не более одного переключения, экстремальный путь состоит самое большее из двух параболических дуг, принадлежащих двум различным пересекающимся параболам, определяемым уравнениями (2.21). Далее, поскольку экстремальный путь заканчивается в начале координат пространства состояний, конечная дуга, т. е. вторая дуга, если таких дуг две, принадлежит одной из двух половин парабол, определяемых уравнениями

$$x_2^2 = 2x_1, \qquad \frac{dx_2}{dt} > 0,$$

$$x_2^2 = -2x_1, \qquad \frac{dx_2}{dt} < 0.$$

Эти ветви парабол, обозначенные через AO и BO на рис. 2.2, составляют *кривую переключений* в пространстве состояний, т. е. геометрическое место состояний, в которых происходит переключение экстремального управления. Кривая переключений разделяет пространство состояний на два открытых полупространства. Экстремальные пути, начинающиеся под кривой переключений, соответствуют последовательности $1 \to -1$ экстремальных управлений, а пути, начинающиеся над кривой переключений, соответствуют последовательности $-1 \to 1$. Разумеется, если начальная точка экстремального пути принадлежит кривой переключений, никакого переключения не происходит.

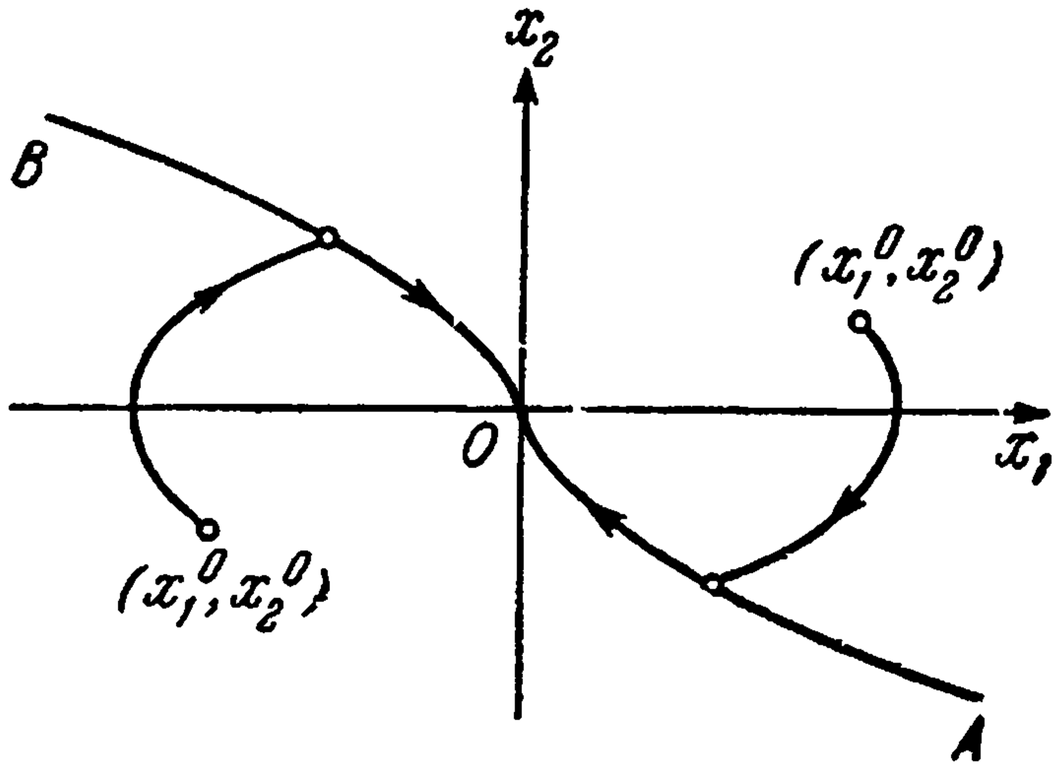

Рис. 2.2. Кривая переключений (пример п. 2.5).

Два обстоятельства являются совершенно очевидными. Во-первых, при заданном начальном состоянии экстремальное управление единственно и, следовательно, оптимально. Во-вторых, из каждой точки пространства состояний (x_1^0, x_2^0) можно провести оптимальный путь, т. е. $E^* \equiv E^2$.

Представляет некоторый интерес построение поверхностей равных оптимальных значений выигрыша (в данной задаче — изохрон), т. е. геометрических мест точек, для которых оптимальное управление приводит к одинаковому значению времени перехода τ_1. Интегрирование уравнений состояния (2.17) при двух участках оптимального управления дает

$$\left.\begin{aligned} 4x_1^0 + 2x_2^0\tau_1 - (x_2^0)^2 + \tau_1^2 = 0, \\ 4x_1^0 + 2x_2^0\tau_1 + (x_2^0)^2 - \tau_1^2 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2.22)$$

для случаев, когда начальная точка (x_1^0, x_2^0) расположена соответственно ниже и выше кривой AOB (см. рис. 2.2). Если (x_1^0, x_2^0) лежит на кривой переключений, то

$$\left.\begin{aligned} 2x_1^0 + 2x_2^0\tau_1 + \tau_1^2 = 0, \\ 2x_1^0 + 2x_2^0\tau_1 - \tau_1^2 = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (2.23)$$

если (x_1^0, x_2^0) лежит соответственно на AO и BO. Для оптимального по быстродействию перехода из состояния (x_1^0, x_2^0) в (0, 0) за время $\tau_1 = t_1 - t_0$ находим из (2.22), что соответствующая изохрона составляется из двух дуг, принадлежащих пересекающимся параболам

$$\left.\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2\tau_1 - x_2^2 + \tau_1^2 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2\tau_1 + x_2^2 - \tau_1^2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.24}$$

Эти параболы симмметричны относительно прямых $x_2 = \tau_1$ и $x_2 = -\tau_1$ соответственно. Дуга параболы, определяемой первым из уравнений (2.24), касается дуги AO кривой переключений; дуга параболы, определяемой вторым из уравнений (2.24), касается дуги BO кривой переключений (рис. 2.3).

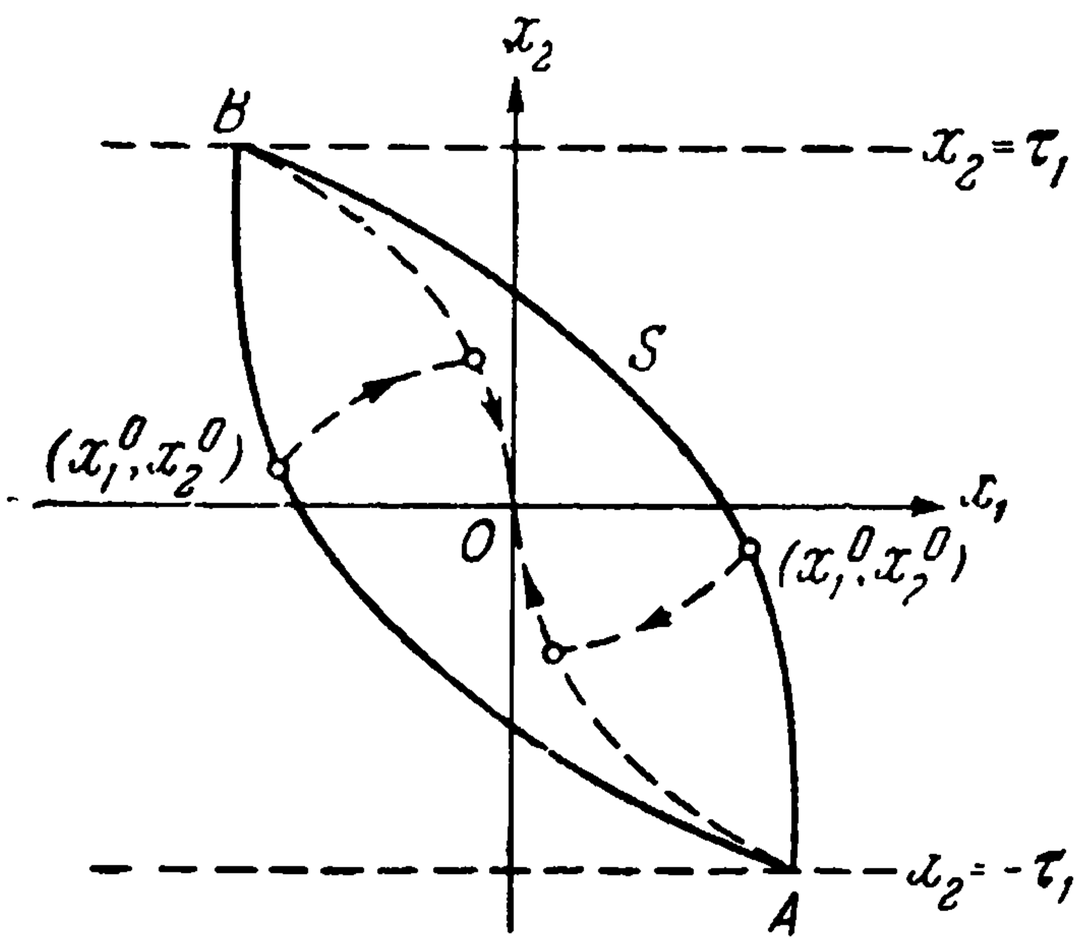

Рис. 2.3. Изохрона (пример п. 2.5).

Разберем вкратце связь (1.35) между $\lambda_j(t)$ и $\partial V^*/\partial x_j = \partial\tau/\partial x_j$, $j = 1, 2$, в точке $\mathbf{x}^*(t)$ оптимального пути, в которой $\tau = t_1 - t$.

Рассмотрим состояние $\mathbf{x}^*(t)$, которое не принадлежит кривой переключений, т. е. лежит либо под кривой AOB, либо над ней. Легко показать, что в этом случае $\lambda_0(t) \neq 0$. Поскольку согласно п. б) теоремы 2

$$\mathscr{H}(\boldsymbol{\lambda}(t), \boldsymbol{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)) = \lambda_0(t) + \lambda_1(t)\, x_2^*(t) + \sigma(t)\, u^*(t) = 0 \tag{2.25}$$

и $x_2^*(t_1) = 0$, заключаем, что тождество $\lambda_0(t) \equiv 0$ влечет за собой $\sigma(t_1) = 0$. Но ранее было показано, что функция переключений имеет самое большее один нуль. Поэтому, если $\lambda_0(t) \equiv 0$, то оптимальное управление не испытывает переключений. Это противоречит нашему предположению о том, что $\mathbf{x}^*(t)$ не принадлежит кривой переключения; отсюда следует необходимость еще в одном переключении.

Для точек $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(t)$, *не лежащих на кривой переключений* AOB, из (2.24) следует, что

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \tau}{\partial x_1} &= \frac{-2}{\tau + x_2}, \\ \frac{\partial \tau}{\partial x_2} &= \frac{x_2 - \tau}{x_2 + \tau}, \end{aligned}\right\} \tag{2.26}$$

если $\mathbf{x}^*(t)$ лежит под кривой AOB $[u^*(t) = 1]$, и

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \tau}{\partial x_1} &= \frac{2}{\tau - x_2}, \\ \frac{\partial \tau}{\partial x_2} &= \frac{\tau + x_2}{\tau - x_2}, \end{aligned}\right\} \tag{2.27}$$

если $\mathbf{x}^*(t)$ лежит над кривой AOB $[u^*(t) = -1]$.

Чтобы вычислить $\lambda_j(t)$, $j = 1, 2$, применим (2.25) к состояниям $\mathbf{x}^*(t)$ и $\mathbf{x}^*(t_1)$. Сразу находим, что соотношение (1.35) справедливо, т. е.

$$\lambda_j(t) = -\frac{\partial \tau}{\partial x_j}, \qquad j = 1, 2, \tag{2.28}$$

в точках оптимального пути, не лежащих на линии переключений.

Можно показать (см. упр. 2.1), что соотношение (2.28) не имеет места для состояний, расположенных на кривой переключений. В точке на кривой переключений значения $\partial\tau/\partial x_j$, $j = 1, 2$, не единственны: в этом легко убедиться, рассматривая односторонние значения частных производных, принимаемые ими при приближении к точке кривой переключений из двух областей, на которые эта кривая разделяет пространство состояний. В самом деле, одна из двух систем значений $\partial\tau/\partial x_j$, $j = 1, 2$, вообще не определена: это с очевидностью следует из того факта, что каждая параболическая дуга изохроны касается одной параболической дуги кривой переключений (см. рис. 2.3). Например, в состоянии $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(t)$ на BO имеем

$$\frac{\partial \tau}{\partial x_1} \to \infty, \quad \frac{\partial \tau}{\partial x_2} \to \infty$$

при приближении $\mathbf{x}^*(t)$ к *BO сверху* и

$$\frac{\partial \tau}{\partial x_1} \to -\frac{1}{x_2^*(t)}, \qquad \frac{\partial \tau}{\partial x_2} \to 0,$$

если $\mathbf{x}^*(t)$ приближается к *BO снизу*. Аналогичное положение имеет место и в точках дуги *AO*.

Легко показать (см. упр. 2.2), что предельная поверхность Σ составляется из двух частей, скажем Σ_{I} и Σ_{II}, пересекающихся по ребру (назовем его *ACB*) поверхности Σ. Проекция ребра *ACB* на пространство состояний E^2 принадлежит кривой переключений *AOB*. Если

$$\Phi_{\mathrm{I}}(x) = C, \quad \Phi_{\mathrm{II}}(x) = C$$

суть уравнения поверхностей Σ_{I} и Σ_{II} соответственно, то

$$\operatorname{grad} \Phi_{\mathrm{I}}(x) \neq \operatorname{grad} \Phi_{\mathrm{II}}(x)$$

в точке x ребра *ACB*. Действительно, $\operatorname{grad} \Phi_{\mathrm{I}}(x)$ не определен в точках одной половины ребра, скажем *AC*, а $\operatorname{grad} \Phi_{\mathrm{II}}(x)$ не определен в точках *BC*. Иными словами, касательные плоскости к Σ_{I} и Σ_{II} параллельны оси x_0. Поскольку каждая оптимальная траектория по крайней мере частично принадлежит ребру поверхности Σ, оптимальные траектории не являются регулярными.

Наконец, если начальная точка (x_1^0, x_2^0) принадлежит кривой переключений, то не представляется возможным доказать, что $\lambda_0(t) \neq 0$. В самом деле, легко убедиться (см. упр. 2.3), что при этом сопряженные уравнения не имеют единственного решения; именно, принцип максимума может быть применен при любом решении $\lambda(t)$, начальное значение которого равно

$$\lambda^0 = \left(-\alpha_1, \frac{\alpha_1}{x_2^0} + \alpha_2, -\alpha_2 x_2^0\right),$$

где α_1 и α_2 — неотрицательные постоянные, одновременно не равные нулю. Более того, соотношение (1.35) теперь не имеет места для $x = x^*(t)$, $t \in (t_0, t_1]$, даже тогда, когда вектор градиента определен.

2.6. Пример: трехмерный оптимальный по быстродействию регулятор

Рассмотрим теперь пример п. 2.5 в трехмерной постановке, т. е. систему из шести уравнений состояния

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= x_{i+3}, \\ \frac{dx_{i+3}}{dt} &= u_i, \\ i &= 1,\ 2,\ 3, \end{aligned}\right\} \tag{2.29}$$

где множество значений управлений U определено неравенствами

$$|u_i| \leqslant 1, \qquad i = 1,\ 2,\ 3. \tag{2.30}$$

Вновь разыскивается оптимальное управление $\mathbf{u}^*(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, т. е. допустимое управление, переводящее систему из состояния $x_j(t_0) = x_j^0$, $j = 1,\ 2,\ \ldots,\ 6$, в состояние покоя $x_j(t_1) = 0$, $j = 1,\ 2,\ \ldots,\ 6$, таким образом, чтобы время перехода $\tau_1 = t_1 - t_0$ было минимально.

Поскольку теорема существования приложима к этой проблеме (см. приложение Б), мы разыскиваем наилучшее экстремальное управление (или управления). Для рассматриваемой задачи быстродействия из (2.29) находим

$$\mathscr{H}(\lambda,\ x,\ \mathbf{u}) = \lambda_0 + \sum_{i=1}^{3} \lambda_i x_{i+3} + \sum_{i=1}^{3} \lambda_{i+3} u_i$$

и соответствующие сопряженные уравнения

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\lambda_i}{dt} &= 0, \\ \frac{d\lambda_{i+3}}{dt} &= -\lambda_i, \\ i &= 1,\ 2,\ 3, \end{aligned}\right\}$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} \lambda_i(t) &= \lambda_i(t_1), \\ \lambda_{i+3}(t) &= \lambda_{i+3}(t_1) + \lambda_i(t_1)(t_1 - t), \\ i &= 1,\ 2,\ 3. \end{aligned}\right\}$$

Таким образом,

$$\mathscr{H}(\boldsymbol{\lambda}(t),\ \boldsymbol{x}(t),\ \mathbf{u}) = \lambda_0 + \sum_{i=1}^{3} c_i x_{i+3}(t) + \sum_{i=1}^{3} (c_{i+3} - c_i t)\, u_i, \tag{2.31}$$

где $c_i \triangleq \lambda_i(t_1)$, $c_{i+3} \triangleq \lambda_i(t_1)\, t_1 + \lambda_{i+3}(t_1)$.

Функции переключений для трех компонент управляющего вектора равны $\sigma_i(t) = c_{i+3} - c_i t$, $i = 1, 2, 3$.

Поскольку каждая функция $\sigma_i(t)$ линейно зависит от времени, она не может быть тождественно равной нулю в промежутке ненулевой длины, если только не выполняются равенства $c_i = c_{i+3} = 0$. С другой стороны, $\mathbf{u}(t)$ — экстремальное управление; поэтому

$$\mathscr{H}(\boldsymbol{\lambda}(t),\ \boldsymbol{x}(t),\ \mathbf{u}(t)) = 0.$$

Случай, когда $\sigma_i(t) \equiv 0$, $i = 1, 2, 3$, можно отбросить, так как он приводит к тождествам $\lambda_j(t) \equiv 0$, $j = 0, 1, \ldots, 6$, что противоречит теореме 2. Это означает, что экстремальное управление всегда принадлежит границе заданного множества допустимых управлений, т. е. $\mathbf{u}(t) \in \partial U \ \forall t \in [t_0, t_1]$, поскольку по крайней мере одна из трех компонент управляющего вектора всегда равна 1 или —1.

Мы не можем доказать, что каждая из трех функций переключения может иметь самое большее один нуль в промежутке $[t_0, t_1]$, т. е. что все три компоненты управляющего вектора релейны. Это неудивительно, если иметь в виду то обстоятельство, что условие б) леммы 6 в данном случае не удовлетворяется.

Допустим на минуту, что мы рассматриваем систему, состоящую из трех *независимых* (не связанных) подсистем, каждая из которых описывается уравнением вида

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = u_i$$

при ограничениях $|u_i| \leqslant 1$ и переводится из состояния с заданными начальными значениями x_i и dx_i/dt в момент t_0 в состояние покоя в момент t_1^i таким образом, что минимизируется время перехода $\tau_1^i = t_1^i - t_0$.

Получающаяся задача быстродействия одна и та же для каждой подсистемы, и проблема такого рода обсуждалась в п. 2.5. Каждая подсистема имеет, таким образом, свое собственное релейное оптимальное управление $u^{i*}(t)$ и соот-

ветствующее значение времени перехода $\tau_1^i = t_1^i - t_0$. В действительности, однако, мы имеем дело с *одной-единственной* системой, имеющей единственное минимальное значение времени перехода τ_1. Таким образом, мы требуем, чтобы выполнялись условия совместности

$$\tau_1^1 = \tau_1^2 = \tau_1^3 = \tau_1,$$

что дает два уравнения для начальных значений x_j^0, $j = 1, 2, \ldots, 6$. Таким образом, обнаруживается, что наша гипотеза о *независимости* трех подсистем (которая привела нас в свою очередь к заключению о релейности всех трех компонент управляющего вектора) несостоятельна, поскольку она ведет к ограниченности области начальных состояний, из которых могут выходить экстремальные пути. Поскольку, с другой стороны, очевидно, что существует управление, переводящее систему из *любого* состояния в состояние покоя, наша гипотеза приводит к заключению, противоречащему теореме существования (приложение Б).

Для того чтобы разрешить альтернативу, возникающую при трактовке системы, как состоящей из трех *независимых* подсистем, остается только отметить, что минимальное значение времени перехода системы не может быть меньше, нежели наибольшее из трех минимальных значений времени перехода, соответствующих рассмотрению трех *независимых* подсистем. Например, если $\tau_1^1 > \tau_1^2$ и $\tau_1^1 > \tau_1^3$, то минимальное время перехода для всей системы равно $\tau_1 = \tau_1^1$.

В общем случае оптимальное управление теперь не единственно. Компонента $u_1^*(t) = u^{1*}(t)$ релейна и находится так, как указано в п. 2.5. Компоненты $u_2^*(t)$ и $u_3^*(t)$ могут быть любыми допустимыми функциями, осуществляющими требуемый переход за время $\tau_1 = \tau_1^1$. Чтобы удовлетворить условиям, содержащимся в принципе максимума, следует взять функцию $\mathscr{H}$ не зависящей от u_2 и u_3, т. е. положить $\sigma_2(t) = \sigma_3(t) \equiv 0$, что может быть достигнуто, если взять $c_2 = c_3 = c_5 = c_6$.

В общем случае $u_2^*(t)$ и $u_3^*(t)$ не единственны. Можно, например, взять их равными оптимальным по быстродействию (релейными) управлениям для несвязанных подсистем соответственно в промежутках $[t_0, t_1^2]$ и $[t_0, t_1^3]$ и равными нулю

впоследствии. Либо можно изменить порядок их изменения на обратный, считая $u_2^*(t)$ и $u_3^*(t)$ равными нулю в промежутках $[t_0,\ t_0+t_1^1-t_1^2]$ и $[t_0,\ t_0+t_1^1-t_1^3]$ соответственно.

Определение оптимального по быстродействию управления для системы в целом очень просто, так как оно связано с нахождением оптимального по быстродействию управления для каждой из трех *независимых* подсистем (эта задача целиком разобрана в п. 2.5). Рассуждение ведется следующим образом:

(1) Рассматриваются три независимые подсистемы, и для каждой из них находится оптимальное управление $u^{i*}(t)$ и соответствующее время перехода τ_1^i.

(2) Если $\tau_1^1=\tau_1^2=\tau_1^3$, то решение закончено, т. е. $u_i^*(t)=u^{i*}(t),\ i=1,\ 2,\ 3$.

(3) Если $\tau_1^1=\tau_1^2>\tau_1^3$, то управления $u^{1*}(t)$ и $u^{2*}(t)$, найденные в п. (1), сохраняются; $u_3^*(t)$ может быть любым допустимым управлением, осуществляющим требуемый переход за время $\tau_1^1=\tau_1^2$.

(4) Если $\tau_1^1>\tau_1^2$ и $\tau_1^1>\tau_1^3$, то управление $u^{1*}(t)$, найденное в п. (1), сохраняется; $u_2^*(t)$ и $u_3^*(t)$ могут быть любыми допустимыми управлениями, осуществляющими требуемый переход за время τ_1^1.

Следует, наконец, отметить, что оптимальное управление для системы с уравнениями состояния (2.29) резко отличается от только что указанного, если множество U определяется неравенствами $0\leqslant u_1^2+u_2^2+u_3^2\leqslant 1$, а не неравенством (2.30) (см. упр. 2.7).

2.7. Уравнение траектории, линейно зависящее от управлений; особое управление

Рассмотрим теперь систему, для которой уравнения состояния и показатель качества линейны относительно одной или большего числа управляющих функций, т. е. систему, траектория которой удовлетворяет уравнению вида

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\boldsymbol{a}(\mathbf{x},\ \mathbf{u}^n)+\mathbf{B}(\mathbf{x},\ \mathbf{u}^n)\,\mathbf{u}^l, \qquad (2.32)$$

где

$$\mathbf{u}^n \triangleq (u_1, u_2, \ldots, u_r),$$

$$\mathbf{u}^l \triangleq (u_{r+1}, u_{r+2}, \ldots, u_m),$$

т. е.

$$\mathbf{u} = (\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^l),$$

и где $\mathbf{a}(\mathbf{x}, \mathbf{u}^n)$ представляет $n+1$-мерный вектор, компоненты которого суть заданные функции $\mathbf{x}$ и $\mathbf{u}^n$, а $\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{u}^n)$ — $(n+1)\times(m-r)$-мерная матрица, элементами которой являются заданные функции $\mathbf{x}$ и $\mathbf{u}^n$.

Предположим, что множество U значений управления таково, что входящие линейно управления ограничены только неравенствами

$$u_i^{\min} \leqslant u_i \leqslant u_i^{\max}, \qquad i = r+1, r+2, \ldots, m, \quad (2.33)$$

где $u_i^{\min}$ и $u_i^{\max}$ — заданные постоянные.

Чтобы определить для этой задачи экстремальное управление, обратимся к принципу максимума. Мы имеем

$$\mathscr{H}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{x}, \mathbf{u}) = \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{a}(\mathbf{x}, \mathbf{u}^n) + \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{u}^n)\,\mathbf{u}^l. \quad (2.34)$$

Таким образом, если $\mathbf{u}(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, — экстремальное управление и $\mathbf{x}(t)$ — соответствующее решение уравнений состояния, то *функции переключений* для компонент $\mathbf{u}^l(t)$ запишутся в следующей форме:

$$\sigma_k(t) \triangleq \boldsymbol{\lambda}(t) \cdot \mathbf{b}_k(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}^n(t)) =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \lambda_j(t)\, b_{jk}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}^n(t)), \quad k = r+1, r+2, \ldots, m. \quad (2.35)$$

Иными словами, если $\sigma_k(t) > 0$, то $u_k(t) = u_k^{\max}$; если $\sigma_k(t) < 0$, то $u_k(t) = u_k^{\min}$.

Как и в случае линейных систем, разобранном в пп. 2.1—2.4, возникает вопрос о том, может ли функция переключений $\sigma_k(t)$ тождественно исчезать на промежутке времени ненулевой длительности.

Теперь, однако, у нас нет общего критерия, позволяющего дать ответ на этот вопрос. Если для отдельных задач (см., например, п. 2.8) и удается исключить возможность тождества $\sigma_k(t) \equiv 0$ на некотором подынтервале промежутка

$[t_0, t_1]$, то это не может быть сделано в общем случае. И действительно, может существовать такое экстремальное управление, что одна или большее число функций переключений исчезает в пределах временного интервала ненулевой продолжительности. Соответствующее экстремальное управление будем называть особым *) (см., например, п. 2.9).

2.8. Пример: максимум дальности полета ракеты с ограниченным ускорением

В этом пункте мы разберем задачу о максимизации дальности полета ракеты, величина тяги которой не может превысить заданного значения. При определении экстремального управления — в данном случае тяги ракеты — мы будем предполагать, что ускорение силы тяжести постоянно, аэродинамические эффекты пренебрежимо малы, и ограничимся задачей о полете в одной плоскости (см. рис. 2.4) **).

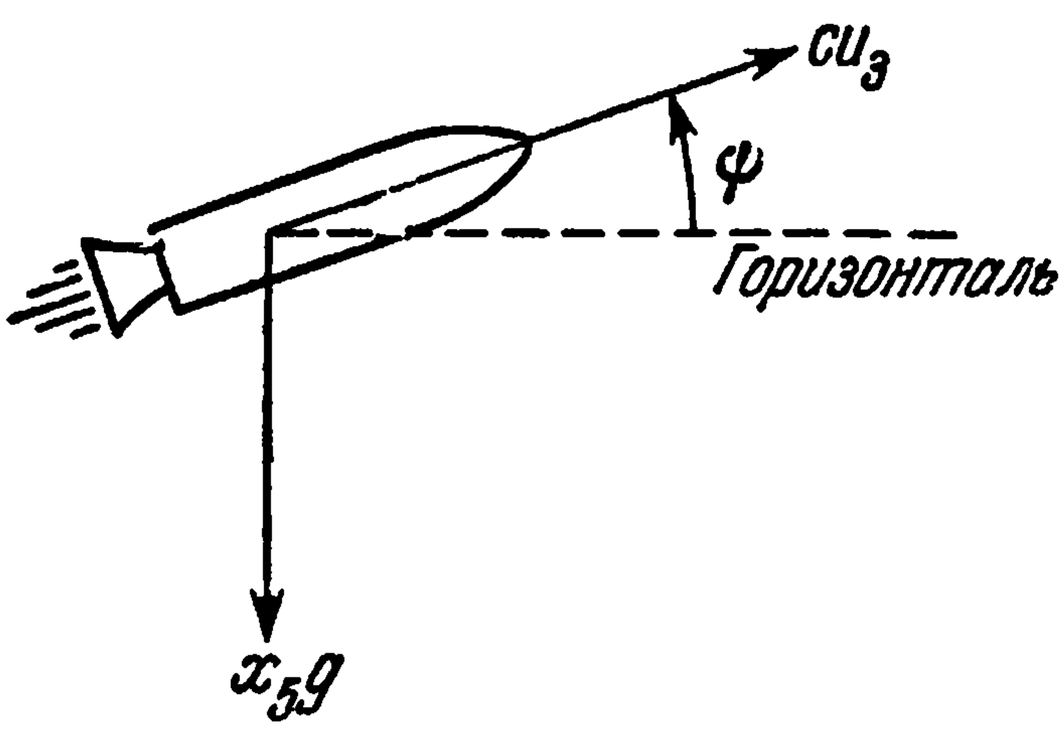

Рис. 2.4. К примеру п. 2.8.

Для дальнейшего введем следующие обозначения:

x_1, x_2 — декартовы координаты ракеты,

x_3, $x_4 \triangleq \frac{dx_1}{dt}$, $\frac{dx_2}{dt}$ — компоненты скорости,

x_5 — масса ракеты,

u_1, u_2 — направляющие косинусы вектора тяги,

$u_3 \triangleq -\frac{dx_5}{dt}$ — скорость расхода массы,

c — эффективная скорость истечения (положительная постоянная),

g — величина ускорения силы тяжести.

---

*) См. C. D. Johnson and J. E. Gibson, Singular Solutions in Problems of Optimal Control, Trans. IEEE Automatic Control, AC8, No. 1, 1963 (стр. 4 и далее).

**) См. G. Leitmann, Some Variational Problems in Rocket Flight, J. Aerospace Sci., vol. 26, No. 9, 1959 (стр. 58 и далее).

Уравнения состояния системы таковы:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_3, \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_4, \\ \frac{dx_3}{dt} &= \frac{c}{x_5} u_1 u_3, \\ \frac{dx_4}{dt} &= \frac{c}{x_5} u_2 u_3 - g, \\ \frac{dx_5}{dt} &= -u_3. \end{aligned}\right\} \tag{2.36}$$

Как сказано выше, мы рассматриваем ракету, тяга которой ограничена; величина тяги подчинена неравенству

$$0 \leqslant cu_3 \leqslant cu_3^{\max}.$$

Таким образом, множество U значений управлений определяется соотношениями

$$\left.\begin{aligned} u_1^2 + u_2^2 &= 1, \\ 0 \leqslant u_3 &\leqslant u_3^{\max}. \end{aligned}\right\} \tag{2.37}$$

Иначе говоря, множество U есть цилиндр радиуса 1 и высоты $u_3^{\max}$.

Требуется перевести ракету с известными начальными значениями координат, массы и компонент скорости в некоторое положение на данной высоте, израсходовав при этом известное количество топлива и таким образом, чтобы горизонтальная дальность полета была *максимальна*. Следовательно, разыскивается допустимое управление $\mathbf{u}^*(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, переводящее систему с начального многообразия, заданного равенствами

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_1^0 &= 0, \\ x_2 - x_2^0 &= 0, \\ x_3 - x_3^0 &= 0, \\ x_4 - x_4^0 &= 0, \\ x_5 - x_5^0 &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{2.38}$$

на конечное многообразие, определяемое соотношениями

$$\left.\begin{aligned} x_2 - x_2^1 &= 0, \\ x_5 - x_5^1 &= 0, \qquad 0 < x_5^1, \end{aligned}\right\} \tag{2.39}$$

причем так, чтобы функционал

$$-\int_{t_0}^{t_1} x_3\, dt \tag{2.40}$$

достигал *минимального* возможного значения.

Получили задачу указанного в п. 2.7 типа. В частности, управляющая переменная u_3 входит линейно в уравнения состояния и вовсе отсутствует в показателе качества.

Отметим также, что уравнения состояния не являются линейными ни относительно переменных состояния, ни относительно управляющих переменных. Поэтому мы не располагаем теоремой существования оптимального управления (см. приложение Б); нам придется примириться с тем, что будет получено лишь экстремальное управление.

Имея в виду уравнения состояния (2.36) и показатель качества (2.40), напишем:

$$\mathscr{H}(\lambda, x, \mathbf{u}) = u_3\left[\frac{c}{x_5}(\lambda_3 u_1 + \lambda_4 u_2) - \lambda_5\right] - \\ - \lambda_0 x_3 + \lambda_1 x_3 + \lambda_2 x_4 - \lambda_4 g; \tag{2.41}$$

сопряженная система имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\lambda_1}{dt} &= 0, \\ \frac{d\lambda_2}{dt} &= 0, \\ \frac{d\lambda_3}{dt} &= \lambda_0 - \lambda_1, \\ \frac{d\lambda_4}{dt} &= -\lambda_2, \\ \frac{d\lambda_5}{dt} &= \frac{c}{x_5^2}(\lambda_3 u_1 + \lambda_4 u_2)\, u_3. \end{aligned}\right\} \tag{2.42}$$

Первые четыре уравнения (2.42) легко интегрируются; получаем:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1(t) &= \lambda_1(t_1), \\ \lambda_2(t) &= \lambda_2(t_1), \\ \lambda_3(t) &= (\lambda_1(t_1) - \lambda_0)(t_1 - t) + \lambda_3(t_1), \\ \lambda_4(t) &= \lambda_2(t_1)(t_1 - t) + \lambda_4(t_1). \end{aligned}\right\} \tag{2.43}$$

Рассмотрим теперь условие трансверсальности в концевой точке траектории (п. (г) теоремы 2); в частности, пользуясь (1.28) и (1.29), получим:

$$\sum_{j=1}^{5} \lambda_j(t_1)\,\eta_j^1 = 0$$

и

$$\eta_2^1 = \eta_5^1 = 0;$$

множители η_1^1, η_3^1, η_4^1 произвольны. Отсюда следует, что

$$\lambda_1(t_1) = \lambda_3(t_1) = \lambda_4(t_1) = 0,$$

и равенства (2.43) принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1(t) &= 0, \\ \lambda_2(t) &= \lambda_2(t_1), \\ \lambda_3(t) &= -\lambda_0(t_1 - t), \\ \lambda_4(t) &= \lambda_2(t_1)(t_1 - t). \end{aligned}\right\} \tag{2.44}$$

Обратимся теперь к определению экстремального управления $\mathbf{u}(t)$; для этой цели нам требуется та часть выражения для $\mathscr{H}(\lambda(t), \boldsymbol{x}(t), \mathbf{u})$, которая зависит от $\mathbf{u}$, т. е.

$$u_3\left\{\frac{c}{x_5(t)}\left[\lambda_3(t)\,u_1 + \lambda_4(t)\,u_2\right] - \lambda_5(t)\right\}. \tag{2.45}$$

Если *) $u_3(t) \neq 0$, то из (2.45) и (2.37) сразу следует, что управления $u_1(t)$ и $u_2(t)$ экстремальны, если векторы (u_1, u_2) и (λ_3, λ_4) одинаково направлены, т. е. если

$$\frac{u_i}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} = \frac{\lambda_{i+2}}{\sqrt{\lambda_3^2 + \lambda_4^2}}, \qquad i = 1, 2.$$

*) Это условие существенно, так как направление вектора тяги не определено, если величина тяги равна нулю.

Вспоминая первое уравнение (2.37) и последние два уравнения (2.44), получаем:

$$\left.\begin{aligned} u_1(t) &\equiv \frac{-\lambda_0}{\sqrt{\lambda_0^2+\lambda_2^2(t_1)}} = \text{const}, \\ u_2(t) &\equiv \frac{\lambda_2(t_1)}{\sqrt{\lambda_0^2+\lambda_2^2(t_1)}} = \text{const}. \end{aligned}\right\} \tag{2.46}$$

Иначе говоря, *экстремальный вектор тяги имеет постоянное направление.*

Рассмотрим теперь вопрос о величине $cu_3(t)$ экстремального вектора тяги. Подставляя выражения (2.44) и (2.46) в формулу (2.45), найдем, что зависящая от управлений часть функции $\mathscr{H}$ равна $u_3\sigma_3(t)$, причем функция переключений выражается равенством

$$\sigma_3(t) \triangleq \frac{c}{x_5(t)}\sqrt{\lambda_0^2+\lambda_2^2(t_1)}\,(t_1-t)-\lambda_5(t). \tag{2.47}$$

Чтобы исследовать поведение $\sigma_3(t)$, рассмотрим ее производную. Принимая во внимание пятое уравнение сопряженной системы (2.42), получим

$$\frac{d\sigma_3(t)}{dt} = -\frac{c}{x_5(t)}\sqrt{\lambda_0^2+\lambda_2^2(t_1)}. \tag{2.48}$$

Если $d\sigma_3(t)/dt = 0$ в любой момент времени $t \in [t_0, t_1]$, то из (2.48) следует, что $\lambda_0 = \lambda_2(t_1) = 0$; учитывая (2.44), получаем $\lambda_j(t) \equiv 0$, $j = 1, 2, \ldots, 4$. С другой стороны, для экстремального управления $\mathbf{u}(t)$ справедливо равенство $\mathscr{H}(\boldsymbol{\lambda}(t), \boldsymbol{x}(t), \mathbf{u}(t)) \equiv 0$, так что одновременно $\lambda_5(t) \equiv 0$. Подобный вывод противоречит теореме 2; поэтому заключаем, что

$$\frac{d\sigma_3(t)}{dt} \neq 0 \qquad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Далее, поскольку $x_5^1 > 0$ и $u_3(t) \geqslant 0$, $x_5(t) > 0$ и справедливо неравенство

$$\frac{d\sigma_3(t)}{dt} < 0 \qquad \forall t \in [t_0, t_1]. \tag{2.49}$$

Таким образом, *экстремальное управление не является особым*. В самом деле, экстремальная скорость расхода массы $u_3(t)$ является релейной функцией, обладающей максимум одним переключением, происходящим по закону $u_3^{\max} \to 0$. В общем случае *величина экстремального вектора тяги сначала максимальна, а затем равна нулю.*

Следует сделать несколько замечаний относительно вычисления экстремального управления $\mathbf{u}(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. Промежуток времени, в течение которого действует тяга, — так называемое *время сгорания* $t_b - t_0$ — определяется путем интегрирования пятого уравнения состояния (2.36):

$$t_b - t_0 = \frac{x_5^0 - x_5^1}{u_3^{\max}}. \tag{2.50}$$

Таким образом, $u_3(t) = u_3^{\max}$ для всех $t \in [t_0, t_b]$ и $u_3(t) \equiv 0$ для всех $t \in (t_b, t_1]$, где $t = t_1$ при $x_2 = x_2^1$.

Представляется очевидным, что $\lambda_0 \neq 0$, поскольку равенство $\lambda_0 = 0$ влечет за собой $u_1(t) \equiv 0$; это в свою очередь означает, что $x_3(t_1) = 0$, т. е. наверняка не оптимальный результат. При $\lambda_0 \neq 0$ можно определить значение угла наклона экстремального вектора тяги к оси x_2; для этого нужно воспользоваться уравнениями (2.46) и равенством

$$\mathscr{H}(\lambda(t_1),\ x(t_1),\ \mathbf{u}(t_1)) = -\lambda_0 x_3(t_1) + \lambda_2(t_1)\, x_4(t_1) = 0.$$

Получаем

$$\psi(t) = \operatorname{arctg} \frac{-x_3(t_1)}{x_4(t_1)} = 0. \tag{2.51}$$

Интегрируя третье и четвертое уравнения состояния (2.36) по промежутку $(t_b, t_1]$, найдем

$$x_3(t_1) = x_3(t_b),$$

$$x_4(t_1) = -\left[x_4^2(t_b) - 2g\left(x_2(t_1) - x_2(t_b)\right)\right]^{1/2},$$

так что

$$\psi(t) = \operatorname{arctg} \frac{x_3(t_b)}{\left[x_4^2(t_b) - 2g\left(x_2^1 - x_2(t_b)\right)\right]^{1/2}}. \tag{2.52}$$

c — эффективная скорость истечения (положительная постоянная),

g — величина ускорения силы тяжести.

Сделаем следующие предположения:

(1) ускорение силы тяжести постоянно;

(2) вес ракеты уравновешивается *) подъемной силой L, т. е. $x_2 g = L$;

(3) аэродинамическое сопротивление выражается формулой

$$D = Ax_1^2 + \frac{BL^2}{g^2 x_1^2},$$

где A и B — положительные постоянные.

Учитывая (2), получаем

$$D \triangleq D(x_1, x_2) = Ax_1^2 + B\frac{x_2^2}{x_1^2} > 0. \qquad (2.54)$$

Считая скорость x_1 положительной ($x_1 > 0$), напишем следующие уравнения состояния:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{cu - D}{x_2}, \\ \frac{dx_2}{dt} &= -u; \end{aligned}\right\} \qquad (2.55)$$

множество U значений управления определяется неравенствами

$$0 \leqslant u \leqslant u^{\max}, \qquad (2.56)$$

где $u^{\max}$ — заданная постоянная.

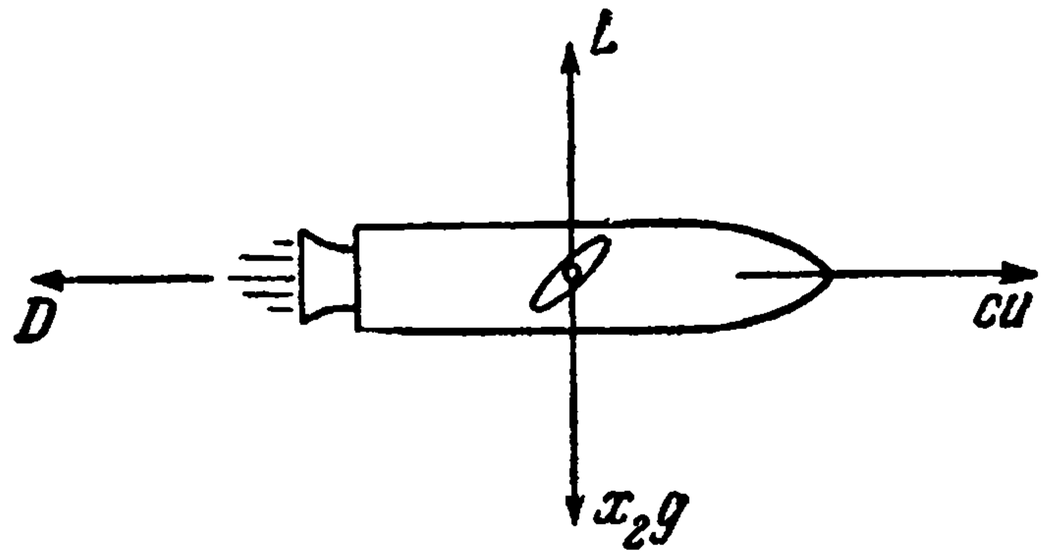

Рис. 2.5. Диаграмма сил (пример п. 2.9).

Требуется перевести ракету из одного состояния в другое состояние при известных значениях скорости и массы в обоих состояниях таким образом, чтобы дальность полета достигала максимума; иными словами, разыскивается допустимое управление $u^*(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, переводящее систему из состояния

---

*) Поскольку L пропорционально x_1^2, сделанное предположение справедливо для достаточно больших значений x_1^2. При этом, однако, мы не накладываем никаких ограничений на x_1, так как это вывело бы задачу за рамки рассматриваемого до сих пор класса; задачи с ограничениями на фазовые координаты изучаются в гл. 4.

(x_1^0, x_2^0) в момент $t = t_0$ в состояние (x_1^1, x_2^1) в момент $t = t_1$, причем $t_1 - t_0$ не фиксировано, и таким образом, чтобы функционал

$$-\int_{t_0}^{t_1} x_1\,dt \tag{2.57}$$

достигал минимального значения.

Поскольку u входит линейно в уравнения состояния (2.55), мы имеем дело с задачей типа п. 2.7.

Уравнения (2.55) и (2.57) дают

$$\mathscr{H}(\lambda, x, \mathbf{u}) = -\lambda_0 x_1 - \lambda_1 \frac{D}{x_1} + \left(\lambda_1 \frac{c}{x_2} - \lambda_2\right) u, \tag{2.58}$$

так что сопряженная система приобретает вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\lambda_1}{dt} &= \lambda_0 + \lambda_1 \frac{\partial D/\partial x_1}{x_2}, \\ \frac{d\lambda_2}{dt} &= \lambda_1 \left(\frac{cu - D}{x_2^2} + \frac{\partial D/\partial x_2}{x_2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{2.59}$$

Функция переключений для $u(t)$, как видно из (2.58), равна

$$\sigma(t) = \lambda_1(t) \frac{c}{x_2(t)} - \lambda_2(t). \tag{2.60}$$

Если $u(t)$ экстремально, то согласно (2.58) и (2.56)

$$\left.\begin{aligned} u(t) &= u^{\max}, \quad \text{если} \quad \sigma(t) > 0, \\ u(t) &= 0, \quad \text{если} \quad \sigma(t) < 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.61}$$

Далее следует рассмотреть возможность появления особого управления, что соответствует обращению в нуль $\sigma(t)$ на промежутке времени ненулевой продолжительности. Чтобы исследовать этот вопрос, вычислим производную $d\sigma(t)/dt$ при $\sigma(t) = 0$:

$$\left.\frac{d\sigma(t)}{dt}\right|_{\sigma(t)=0}.$$

Если управление $u(t)$ экстремально, то

$$\mathscr{H}(\lambda(t), x(t), \mathbf{u}(t)) =$$

$$= -\lambda_0 x_1(t) - \lambda_1(t) \frac{D(x_1(t), x_2(t))}{x_2(t)} + \sigma(t)\,u(t) = 0. \tag{2.62}$$

Используя (2.54), (2.55), (2.59) и (2.62), получим

$$\left.\frac{d\sigma(t)}{dt}\right|_{\sigma(t)=0} = \lambda_1(t)\,\mathscr{S}(x_1(t),\ x_2(t)), \tag{2.63}$$

где

$$\mathscr{S}(x_1(t),\ x_2(t)) \triangleq B\,\frac{3c+x_1}{x_1^3x_2^2}\left(\frac{A}{B}\,\frac{c+x_1}{3c+x_1}\,x_1^4 - x_2^2\right). \tag{2.64}$$

Легко показать, что $\lambda_0 \neq 0$, если $\sigma(t) \equiv 0$ для любого $t \in [t_0,\ t_1]$. Действительно, как показывают уравнение (2.62) и неравенство $D(x_1,\ x_2) > 0$, предположение $\lambda_0 = 0$ влечет за собой равенство $\lambda_1(t) \equiv 0$. Но тогда условие $\sigma(t) \equiv 0$ показывает, что одновременно и $\lambda_2(t) \equiv 0$, а это уже находится в противоречии с теоремой 2. Следовательно, если при любом $t \in [t_0,\ t_1]$ выполняется равенство $\sigma(t) \equiv 0$, то $\lambda_0 < 0$. В связи с этим укажем, что если $\lambda_0 = 0$, то $u(t) \equiv 0$ или $u(t) \equiv u^{\max}$.

Если $x_1(t) > 0$, $x_2(t) > 0$ и $\lambda_0 < 0$, то уравнение (2.62) показывает, что $\lambda_1(t) > 0$. Следовательно, знак производной

$$\left.\frac{d\sigma(t)}{dt}\right|_{\sigma(t)=0}$$

совпадает со знаком выражения $\mathscr{S}(x_1(t),\ x_2(t))$.

Если управление $u(t)$ особое, то $\sigma(t) \equiv 0$ в течение ненулевого промежутка времени. Геометрическим местом соответствующих точек является кривая $\mathscr{S}$, для которой

$$\mathscr{S}(x_1,\ x_2) = 0.$$

При $x_2 > 0$ уравнение этой кривой таково:

$$x_2 = x_1^2\sqrt{\frac{A}{B}\,\frac{c+x_1}{3c+x_1}}. \tag{2.65}$$

Кривая $\mathscr{S}$ делит квадрант $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ на две открытых области, обозначенные через *I* и *II* на рис. 2.6 и такие, что

$$\left.\begin{aligned}
&\left.\frac{d\sigma(t)}{dt}\right|_{\sigma(t)=0} = 0, && (x_1(t),\ x_2(t)) \in \mathscr{S},\\
&\left.\frac{d\sigma(t)}{dt}\right|_{\sigma(t)=0} < 0, && (x_1(t),\ x_2(t)) \in \text{области } I,\\
&\left.\frac{d\sigma(t)}{dt}\right|_{\sigma(t)=0} > 0, && (x_1(t),\ x_2(t)) \in \text{области } II.
\end{aligned}\right\} \tag{2.66}$$

Будучи непрерывной, функция $\sigma(t)$ проходит при перемене знака через нуль; в этот момент происходит переключение управления.

Как показывают условия (2.66), в каждой области может быть не более одного переключения. Возможная последовательность управлений при наличии переключений такова:

$$u^{\max} \to 0 \qquad \text{в области } I,$$
$$0 \to u^{\max} \qquad \text{в области } II.$$

Кроме того, согласно уравнениям состояния (2.55)

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &< 0, \quad \text{если} \quad u = 0, \\ \frac{dx_2}{dt} &< 0, \quad \text{если} \quad 0 < u \leqslant u^{\max}. \end{aligned}\right\} \tag{2.67}$$

Соответствующие ситуации проиллюстрированы на рис. 2.6, где стрелками показано направление возрастания времени.

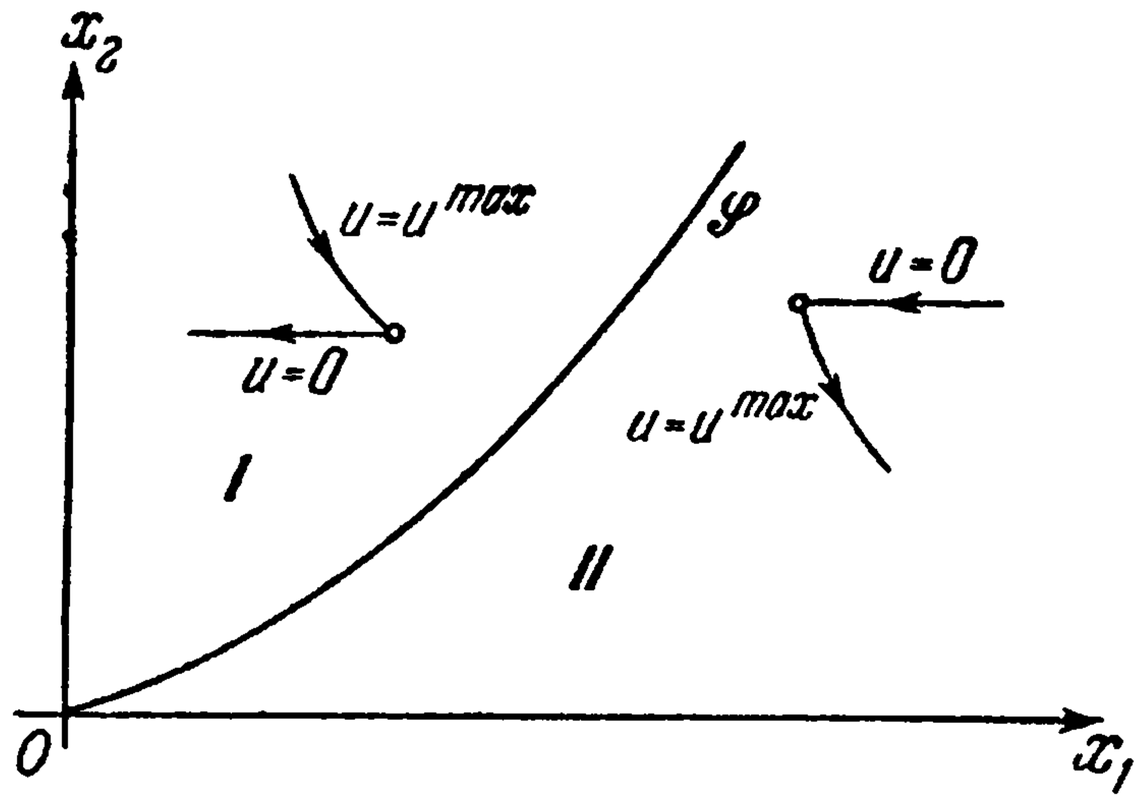

Рис. 2.6. Последовательность переключений (пример п. 2.9).

Поскольку особые управления должны быть допустимыми, они должны удовлетворять ограничению (2.56). Пользуясь уравнениями состояния (2.55) и принимая во внимание (2.65), легко найти управление, соответствующее пути вдоль кривой $\mathcal{S}$. Обозначим это управление через $u(t) \triangleq \mathcal{K}(x_1(t), x_2(t))$. Вид функции $\mathcal{K}(x_1, x_2)$ показывает, что $u(t)$ — допустимое и, следовательно, особое управление, если максимальное значение величины тяги достаточно велико, например, если $cu^{\max} \geqslant D(x_1, x_2)$ для $(x_1, x_2) \in \mathcal{S}$.

Допуская, что тяга достаточно велика, т. е. что особое управление существует, мы можем доказать теперь, что *экстремальное управление единственно*. Прежде чем это сделать, рассмотрим область E начальных точек, откуда заданная конечная точка может быть достигнута с помощью допустимых управлений. Из уравнений (2.55) находим

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-ux_2}{cu - D}. \quad (2.68)$$

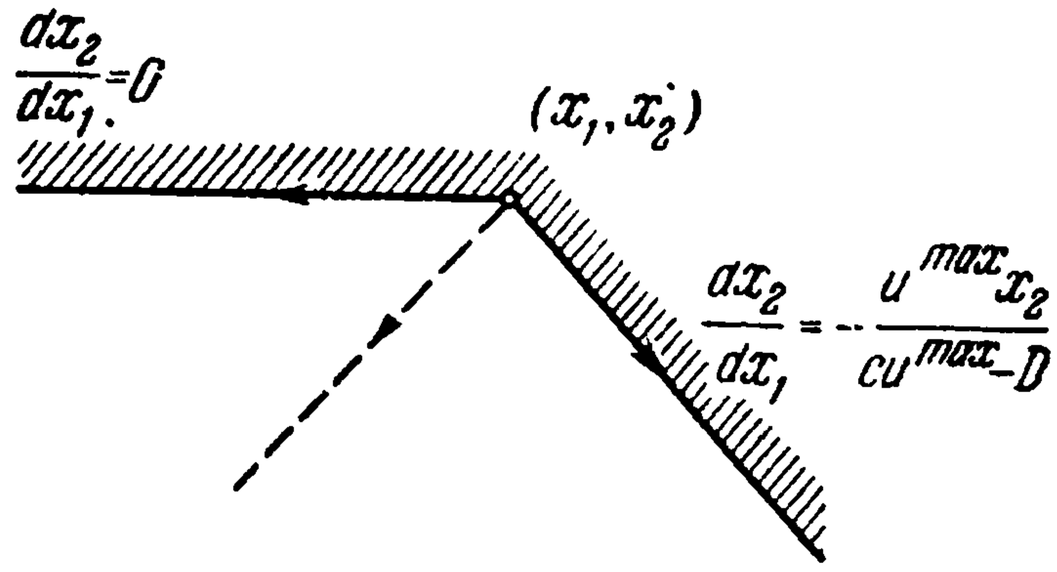

Рис. 2.7. Область возможных значений наклона пути (пример п. 2.9).

Это соотношение вместе с ограничением (2.56) на управление и условиями (2.67) показывает, что наклон $\frac{dx_2}{dx_1}$ принадлежит замкнутой области, показанной на рис. 2.7.

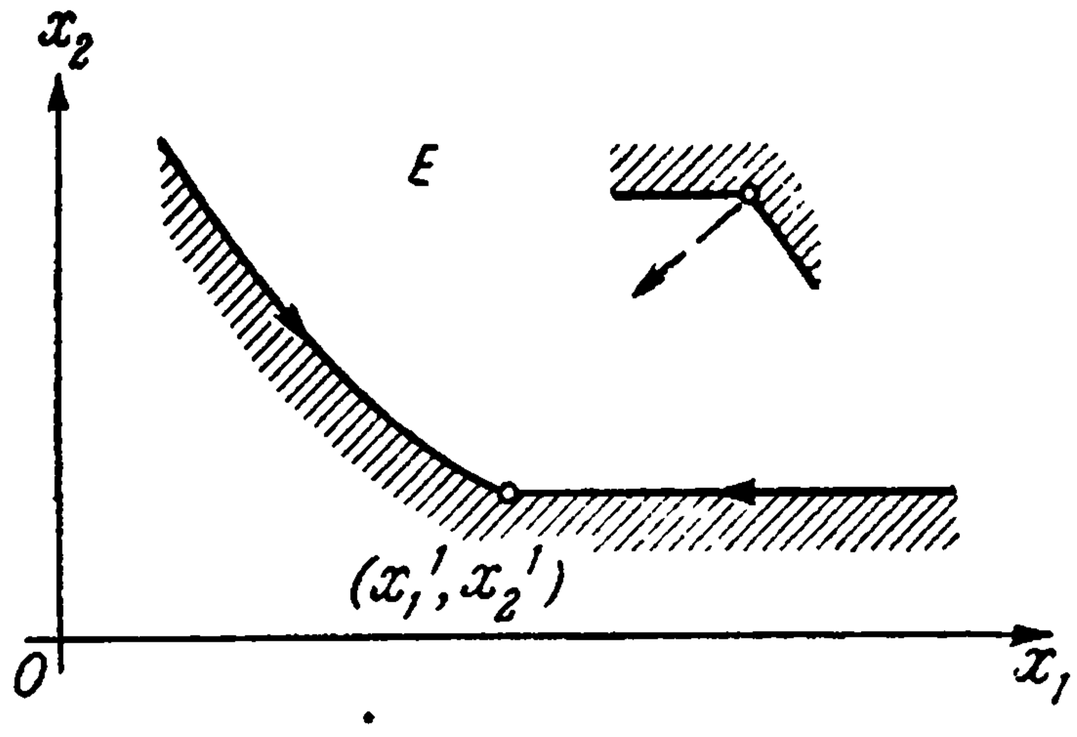

Рис. 2.8. Область начальных данных (пример п. 2.9).

Граница области E поэтому находится путем обратного интегрирования *) уравнения (2.68) при $u = 0$ и $u = u^{\max}$ соответственно.

---

*) При $u = 0$ интегрирование тривиально, но для $u = u^{\max}$ решение в замкнутой форме получить не удается. Легко, однако, видеть, что при

$$D/cu^{\max} \to 0$$

соответствующая граница области E превращается в экспоненциальную кривую.

Типичная область E начальных состояний представлена на рис. 2.8. Наконец, на рис. 2.9 указаны единственные

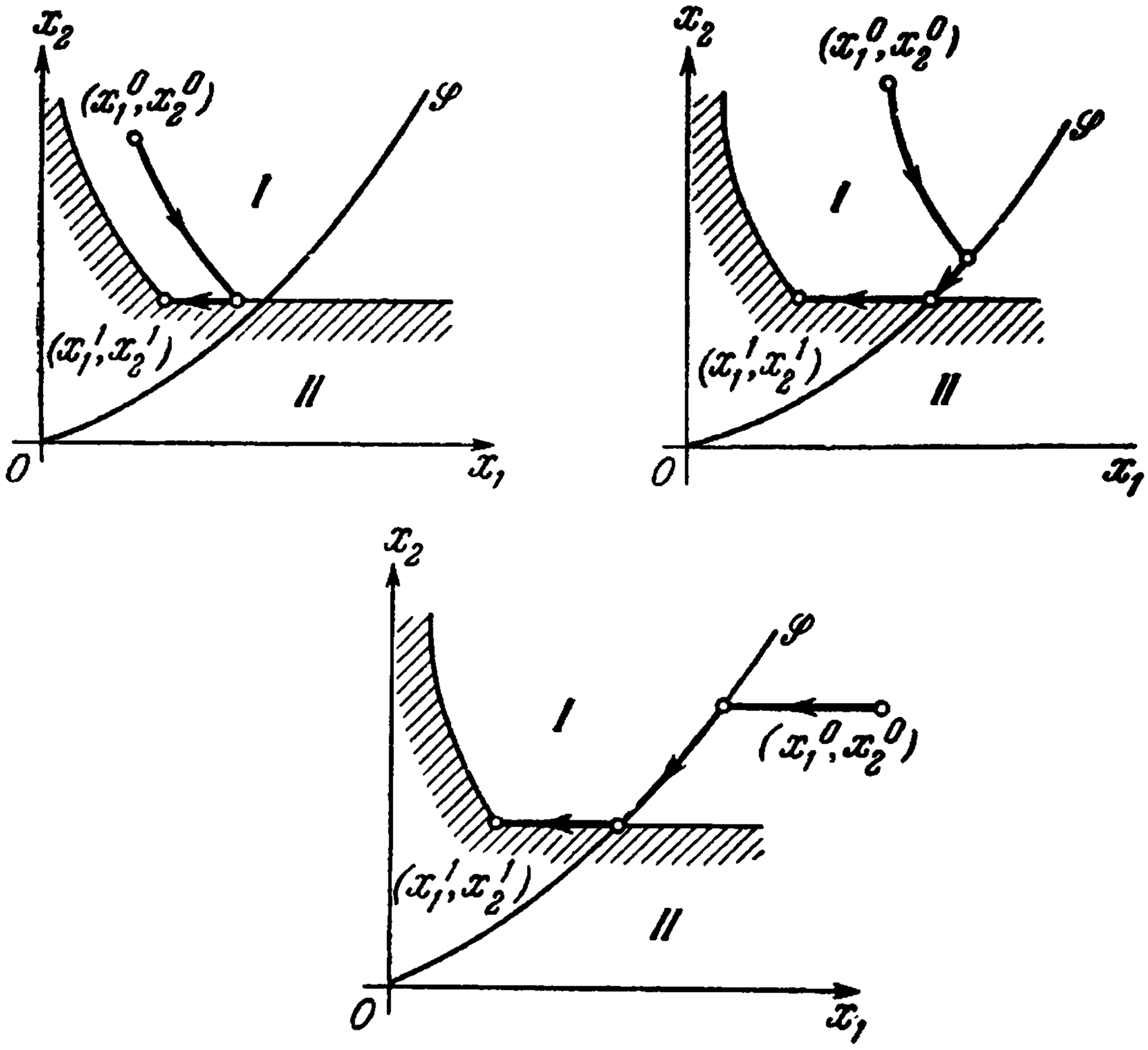

Рис. 2.9. Экстремальные пути (пример п. 2.9).

экстремальные пути в случае, когда конечная точка лежит в области I. Подобные пути существуют и тогда, когда точка (x_1^1, x_2^1) расположена в области II.

Упражнения

2.1. Для примера, разобранного в п. 2.5, проверить, что соотношение (2.28) не имеет места в точках, принадлежащих кривой переключений.

2.2. Для примера п. 2.5 вывести уравнения предельных поверхностей и поверхностей равных оптимальных значений выигрыша. Убедиться в справедливости соотношения (1.34) для регулярных внутренних точек предельной поверхности. Удовлетворяется ли соотношение (1.34) для точек, находящихся на ребре предельной поверхности?

2.3. Для примера п. 2.5 показать, что принцип максимума применим к любому решению $\lambda(t)$ сопряженных уравнений с начальным условием

$$\lambda(t_0) = \left(-\alpha_1, \frac{\alpha_1}{x_2^0} + \alpha_2, -\alpha_2 x_2^0\right), \quad \alpha_1 \geqslant 0, \quad \alpha_2 \geqslant 0$$

(оба не равны нулю одновременно), если начальное состояние $\left(x_1^0, x_2^0\right)$ принадлежит кривой переключений.

2.4. Для системы п. 2.5 рассмотреть задачу оптимального быстродействия при переходе из состояния $\left(x_1^0, x_2^0\right)$ в состояние на линии $x_1 = x_1^1$, а также на линии $x_2 = x_2^1$.

2.5. Дана система с уравнениями состояния

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + u,$$

где $|u| \leqslant 1$. Рассмотреть задачу оптимального быстродействия при попадании из $\left(x_1^0, x_2^0\right)$ в $(0, 0)$.

2.6. Дана система с уравнениями состояния

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 + u_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + u_2,$$

где $|u_1| \leqslant 1$ и $|u_2| \leqslant 1$. Рассмотреть задачу оптимального управления при попадании из $\left(x_1^0, x_2^0\right)$ в $(0, 0)$.

2.7. Дана система, уравнения состояния которой таковы:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= x_{i+3}, \\ \frac{dx_{i+3}}{dt} &= u_i \\ (i &= 1, 2, 3) \end{aligned}\right\}$$

с ограничением на управления

$$0 \leqslant \sum_{i=1}^{3} u_i^2 \leqslant 1.$$

Рассмотреть задачу оптимального быстродействия при попадании из $\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_6^0\right)$ в $(0, 0, \ldots, 0)$.

2.8. Дана система с уравнениями состояния

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 + u, \quad \frac{dx_2}{dt} = -u,$$

где $|u| \leqslant 1$. Требуется перевести систему из $\left(x_1^0, x_2^0\right)$ в $(0, 0)$, минимизируя показатель качества

$$\int_{t_0}^{t_1} x_1^2(t)\, dt.$$

Найти экстремальное управление.

2.9. Полет самолета в одной плоскости приближенно описывается следующими уравнениями состояния:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 u, \quad \frac{dx_2}{dt} = F(x_1, x_2) - u,$$

где $F(x_1, x_2)$ — непрерывно дифференцируемая функция и $|u| \leqslant 1$. Требуется перевести систему из $\left(x_1^0, x_2^0\right)$ в $\left(x_1^1, x_2^1\right)$, минимизируя время перехода. Найти экстремальное управление.

2.10. Полет ракеты по горизонтальной прямой при учете силы тяжести описывается следующими уравнениями:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = u,$$

где $|u| \leqslant 1$. Требуется минимизировать расход топлива

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + u^2(t)}\, dt$$

при переходе из $\left(x_1^0, x_2^0\right)$ в $(0, 0)$. Найти экстремальное управление.

2.11. Поведение некоторой гидравлической системы описывается следующими уравнениями состояния:

$$\frac{dx_1}{dt} = -\alpha x_1^2 \operatorname{sgn} x_1 - \beta x_2 + \gamma, \quad \frac{dx_2}{dt} = \delta(x_1 - u),$$

где α, β, γ и δ — положительные постоянные, а управление u ограничено неравенствами $0 \leqslant u \leqslant u^{\max}$, $u^{\max}$ — заданная постоянная. Требуется минимизировать время перехода из $\left(x_1^0, x_2^0\right)$ в $\left(x_1^1, x_2^1\right)$. Найти экстремальное управление.

2.12. Дана система упражнения 2.11. На этот раз требуется перевести систему из $\left(x_1^0, x_2^0\right)$ в состояние на линии $x_1 = x_1^1$, минимизируя функционал

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{1 + c\left[x_2(t) - x_2^1\right]^2\right\} dt,$$

где $c > 0$ и x_2^1 — заданные числа.

ГЛАВА 3

НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ

3.1. Неинтегральный показатель качества

В этой главе мы рассмотрим некоторые обобщения теории, развитой в предыдущих главах. Первое из этих обобщений относится к показателю качества. До сих пор мы имели дело с показателем качества интегрального типа. Имеется, однако, много интересных задач, где требуется минимизировать величину, которая зависит от конечного состояния системы и не представляется в форме интеграла.

Например, в задаче об оптимальном по быстродействию регуляторе (п. 2.5) может оказаться желательным отбросить требование о том, чтобы конечным состоянием было состояние покоя. Вместо этого мы могли бы потребовать только, чтобы конечное состояние характеризовалось нулевой скоростью, т. е. $x_2(t_1) = 0$, и при этом взвешенная сумма времени перехода и ошибки в концевом значении координаты была бы минимальна, так что показатель качества оказался бы представлен в форме

$$\int_{t_0}^{t_1} dt + \alpha x_1^2(t_1),$$

где α — заданная постоянная (см. упр. 3.1).

В последующем мы будем иметь дело с системами типа рассмотренных в пп. 1.5 и 1.6, с единственным исключением, состоящим в том, что показатель качества (1.9) заменится выражением

$$\int_{t_0}^{t_1} f_0(\mathbf{x}(t),\ \mathbf{u}(t))\, dt + G(\mathbf{x}(t_1)), \tag{3.1}$$

где $G(\mathbf{x})$ — функция класса C^1 в E^n, т. е. $G(\mathbf{x})$ и $\partial G(\mathbf{x})/\partial x_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, существуют и непрерывны в E^n.

Напоминаем, таким образом, что речь будет идти о системе, описываемой уравнениями состояния

$$\frac{dx_j}{dt} = f_j(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.2}$$

Эту систему требуется перевести между начальным и конечным состояниями, расположенными на многообразиях

$$\theta^0: \theta^0_\rho(\mathbf{x}) = 0, \quad \rho = 1, 2, \ldots, p, \tag{3.3}$$

$$\theta^1: \theta^1_\sigma(\mathbf{x}) = 0, \quad \sigma = 1, 2, \ldots, q, \tag{3.4}$$

с помощью кусочно-непрерывного управления $\mathbf{u}(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, удовлетворяющего ограничению

$$\mathbf{u}(t) \in U \quad \forall t \in [t_0, t_1]. \tag{3.5}$$

В частности, требуется определить оптимальное управление $\mathbf{u}^*(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, которое осуществляет такой переход системы, что показатель качества (3.1) достигает минимального возможного значения.

Чтобы воспользоваться полученными ранее результатами, а именно принципом максимума, сформулированным в теореме 2, увеличим число измерений пространства состояний и пространства управлений на единицу каждое и рассмотрим систему с состоянием

$$\tilde{\mathbf{x}} \triangleq (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = (\mathbf{x}, x_{n+1})$$

и управлением

$$\tilde{\mathbf{u}} \triangleq (u_1, u_2, \ldots, u_{m+1}) = (\mathbf{u}, u_{m+1}).$$

В частности, нас будет интересовать система с уравнениями состояния

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_j}{dt} &= f_j(x, u), \\ \frac{dx_{n+1}}{dt} &= u_{m+1}, \\ j &= 1, 2, \ldots, n, \end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

переводимая между состояниями, расположенными на концевых многообразиях

$$\tilde{\theta}^0: \begin{cases} \theta_\rho^0(\mathbf{x}) = 0, & \rho = 1, 2, \ldots, p, \\ x_{n+1} = 0, \end{cases}$$
$$\tilde{\theta}^1: \begin{cases} \theta_\sigma^1(\mathbf{x}) = 0, & \sigma = 1, 2, \ldots, q, \\ x_{n+1} - G(\mathbf{x}) = 0, \end{cases} \tag{3.7}$$

с помощью допустимого управления $\tilde{\mathbf{u}}(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, причем

$$\left.\begin{array}{r} \mathbf{u}(t) \in U, \\ |u_{m+1}(t)| < \infty \end{array}\right\} \forall t \in [t_0, t_1]. \tag{3.8}$$

Иначе говоря, $\tilde{\mathbf{u}}(t) \in \tilde{U} \subset E^{m+1}$, где $\tilde{U}$ задается формулами (3.8). Мы желаем определить оптимальное управление $\tilde{\mathbf{u}}^*(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, которое реализует требуемый переход, сообщая минимальное значение *интегральному* показателю качества

$$\int_{t_0}^{t_1} [f_0(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) + u_{m+1}(t)]\, dt. \tag{3.9}$$

Эта новая задача, очевидно, полностью эквивалентна исходной проблеме, сформулированной в начале этого пункта. Далее, в своей новой форме эта задача принадлежит типу задач, рассмотренных в гл. 1; поэтому мы можем непосредственно применить теорему 2.

Положим

$$\tilde{\lambda} \triangleq (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}) = (\lambda, \lambda_{n+1}),$$
$$\tilde{x} \triangleq (x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}) = (x, x_{n+1})$$

и

$$\tilde{\mathscr{H}} \triangleq \mathscr{H} + \lambda_0 u_{m+1} + \lambda_{n+1} u_{m+1}, \tag{3.10}$$

где, как и ранее,

$$\mathscr{H} \triangleq \sum_{j=0}^{n} \lambda_j f_j.$$

Соответствующие сопряженные уравнения таковы:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\lambda_0}{dt} = 0, \\ &\frac{d\lambda_j}{dt} = -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial x_j}, \\ &\frac{d\lambda_{n+1}}{dt} = 0, \\ &j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \end{aligned}\right\} \tag{3.11}$$

Согласно теореме 2, если $\tilde{\mathbf{u}}^*(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, — оптимальное управление, то существует ненулевое непрерывное решение $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}(t)$ сопряженных уравнений (3.11) такое, что

$$\sup_{\tilde{\mathbf{u}} \in \tilde{U}} \tilde{\mathscr{H}}\,(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}(t),\ \tilde{\boldsymbol{x}}^*(t),\ \tilde{\mathbf{u}}) = \tilde{\mathscr{H}}\,(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}(t),\ \tilde{\boldsymbol{x}}^*(t),\ \tilde{\mathbf{u}}^*(t)) = 0 \tag{3.12}$$

и

$$\lambda_0(t) = \text{const} \leqslant 0 \tag{3.13}$$

для всех $t \in [t_0,\ t_1]$. Кроме того, должны быть выполнены условия трансверсальности в начальной и конечной точках, т. е. вектор $(\lambda_1(t),\ \lambda_2(t),\ \ldots,\ \lambda_{n+1}(t))$ должен быть ортогонален к концевым многообразиям $\tilde{\theta}^0$ и $\tilde{\theta}^1$ соответственно в моменты $t = t_0$ и $t = t_1$.

Заметим прежде всего, что

$$\tilde{\mathbf{u}}^*(t) \in \tilde{U} \quad \forall t \in [t_0,\ t_1]$$

и, в частности,

$$|u^*_{m+1}(t)| < \infty \quad \forall t \in [t_0,\ t_1].$$

Из (3.12) следует, что

$$\left.\frac{\partial \tilde{\mathscr{H}}\,(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}(t),\ \tilde{\boldsymbol{x}}^*(t),\ \tilde{\mathbf{u}})}{\partial u_{m+1}}\right|_{\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{u}}^*(t)} = 0,$$

откуда, учитывая (3.10), получаем $\lambda_0(t) + \lambda_{n+1}(t) = 0$. Последнее равенство вместе с (3.11) в свою очередь дает

$$\lambda_{n+1}(t) = -\lambda_0(t) = \text{const} \geqslant 0. \tag{3.14}$$

Это соотношение, разумеется, согласуется с первым и последним из сопряженных уравнений (3.11).

В силу уравнений (3.10) и (3.14) условие (3.12) принимает вид

$$\sup_{\mathbf{u}\in U} \mathscr{H}(\boldsymbol{\lambda}(t),\ \boldsymbol{x}^*(t),\ \mathbf{u}) = \mathscr{H}(\boldsymbol{\lambda}(t),\ \boldsymbol{x}^*(t),\ \mathbf{u}^*(t)) = 0.$$

Преобразование условий трансверсальности требует некоторого внимания. Согласно п. 1.12 условие трансверсальности в начальной точке таково:

$$\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j \eta_j^0 = 0$$

и

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \theta_\rho^0}{\partial x_j} \eta_j^0 = 0, \quad \rho = 1,\ 2,\ \ldots,\ p, \qquad \eta_{n+1}^0 = 0$$

или просто

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \eta_j^0 = 0 \tag{3.15}$$

при условии

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \theta_\rho^0}{\partial x_j} \eta_j^0 = 0, \qquad \rho = 1,\ 2,\ \ldots,\ p. \tag{3.16}$$

Иначе говоря, условие трансверсальности в начальной точке остается неизменным при увеличении числа измерений пространства состояний.

Согласно результатам п. 1.11 условие трансверсальности в конечной точке имеет вид

$$\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j \eta_j^1 = 0$$

и

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \theta_\sigma^1}{\partial x_j} \eta_j^1 = 0, \quad \sigma = 1,\ 2,\ \ldots,\ q, \quad \eta_{n+1}^1 - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial G}{\partial x_j} \eta_j^1 = 0$$

или, если воспользоваться (3.14),

$$-\lambda_0 \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial G}{\partial x_j} \eta_j^1 + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \eta_j^1 = 0 \tag{3.17}$$

при условии

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \theta_\sigma^1}{\partial x_j} \eta_j^1 = 0, \qquad \sigma = 1, 2, \ldots, q. \tag{3.18}$$

Поскольку x_{n+1} и u_{m+1} не входят явно ни в выражение для $\mathscr{H}$-функции, ни в условия трансверсальности, мы можем теперь отвлечься от этих переменных и возвратиться к первоначальной формулировке задачи. Как видим, теорема 2 применима не только к системам с интегральным показателем качества, но и к таким системам, показатель качества которых имеет форму (3.1). Единственное отличие возникает в условии трансверсальности в конечной точке, где соотношения (1.28) и (1.29) заменяются соответственно на (3.17) и (3.18). Разумеется, если $G(\mathbf{x}) \equiv 0$, то показатель качества вновь становится интегральным, и теорема 2 применяется тогда без какого-либо видоизменения.

Можно отметить, что если $f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \equiv 0$, то конечное состояние может и не быть жестко фиксированным, если только значение показателя качества $G(\mathbf{x}(t_1))$ не задано a priori.

Наконец, легко видеть, что лемма 6 о релейном управлении также применима к рассматриваемой задаче, т. е. к задаче с показателем качества (3.1), где $f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \equiv \text{const}$. Если $f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \equiv 0$, то к условиям леммы 6 следует добавить требование

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x_1}, \frac{\partial G}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial G}{\partial x_n}\right) \neq 0 \quad \text{при} \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^*(t_1).$$

Это последнее требование возникает вследствие того, что в формуле (2.13) теперь уже не фигурирует величина λ_0.

3.2. Пример: экстремальное управление ракетой ограниченной величины тяги *)

Рассмотрим снова систему, описанную в п. 2.8, а именно ракету, величина тяги которой ограничена и которая совершает полет в одной и той же плоскости и подвержена

*) См. G. Leitmann, On a Class of Variational Problems in Rocket Fright, J. Aerospace Sci., vol. 26, 1959 (стр. 586 и далее). См. также В. К. Исаев, Принцип максимума Л. С. Понтрягина и оптимальное программирование тяги ракет, Автоматика и телемеханика, т. 22, № 8, 1961.

постоянному ускорению силы тяжести; силы аэродинамического сопротивления считаются пренебрежимо малыми. Уравнения, описывающие состояние ракеты, таковы:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_3, \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_4, \\ \frac{dx_3}{dt} &= \frac{c}{x_5}\, u_1 u_3, \\ \frac{dx_4}{dt} &= \frac{c}{x_5}\, u_2 u_3 - g, \\ \frac{dx_5}{dt} &= -u_3, \end{aligned}\right\} \tag{3.19}$$

а управляющие функции связаны ограничениями

$$\left.\begin{aligned} u_1^2 + u_2^2 &= 1, \\ 0 \leqslant u_3 &\leqslant u_3^{\max}. \end{aligned}\right\} \tag{3.20}$$

В отличие от задачи п. 2.8, теперь требуется определить экстремальное управление, осуществляющее переход между концевыми многообразиями

$$\begin{aligned} &\theta^0\colon \theta_\rho^0(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_5) = 0, \qquad \rho = 1,\ 2,\ \ldots,\ p, \\ &\theta^1\colon \theta_\sigma^1(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_5) = 0, \qquad \sigma = 1,\ 2,\ \ldots,\ q, \end{aligned}$$

и минимизирующее значение неинтегрального показателя качества

$$G(x_1(t_1),\ x_2(t_1),\ \ldots,\ x_5(t_1)).$$

Поскольку

$$f_0(\mathbf{x},\ \mathbf{u}) \equiv 0,$$

$\mathscr{H}$-функция оказывается равной

$$\mathscr{H}(\lambda,\ \boldsymbol{x},\ \mathbf{u}) = u_3\sigma_3 + \lambda_1 x_3 + \lambda_2 x_4 - \lambda_4 g, \tag{3.21}$$

где

$$\sigma_3 = \frac{c}{x_5}(\lambda_3 u_1 + \lambda_4 u_2) - \lambda_5. \tag{3.22}$$

Сопряженные уравнения таковы:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\lambda_1}{dt} &= 0, \\ \frac{d\lambda_2}{dt} &= 0, \\ \frac{d\lambda_3}{dt} &= -\lambda_1, \\ \frac{d\lambda_4}{dt} &= -\lambda_2, \\ \frac{d\lambda_5}{dt} &= \frac{c}{x_5^2}(\lambda_3 u_1 + \lambda_4 u_2)\, u_3, \end{aligned}\right\} \tag{3.23}$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1(t) &= \lambda_1(t_1), \qquad \lambda_3(t) = \lambda_3(t_1) + \lambda_1(t_1)(t_1 - t), \\ \lambda_2(t) &= \lambda_2(t_1), \qquad \lambda_4(t) = \lambda_4(t_1) + \lambda_2(t_1)(t_1 - t). \end{aligned}\right\} \tag{3.24}$$

Прежде всего рассмотрим направление экстремального вектора тяги, т. е. функции $u_1(t)$ и $u_2(t)$.

Условие а) теоремы 2 вместе с соотношениями (3.20) позволяет заключить, что векторы (u_1, u_2) и (λ_3, λ_4) должны быть одинаково направлены, т. е.

$$u_i(t) = \frac{\lambda_{i+2}(t)}{\sqrt{\lambda_3^2(t) + \lambda_4^2(t)}}, \qquad i = 1,\ 2. \tag{3.25}$$

Заметим, что, в отличие от проблемы максимальной дальности, мы теперь не можем сделать вывод о том, что экстремальный вектор тяги характеризуется постоянным направлением. Можно, однако, утверждать, что угол наклона этого вектора к оси x_1, равный $\operatorname{arctg}[u_2(t)/u_1(t)]$, непрерывно зависит от времени, за исключением, возможно, одной точки разрыва. Этот последний случай возникает, если $\lambda_3(t)$ и $\lambda_4(t)$ одновременно проходят через нуль и, следовательно, изменяют знаки. При этом угол наклона вектора тяги испытывает скачкообразное приращение на π радиан (см. упр. 3.2).

Перейдем теперь к исследованию величины экстремального вектора тяги. Как и в п. 2.8, мы обнаруживаем, что поведение управления $u_3(t)$ зависит от функции переключений

$$\sigma_3(t) = \frac{c}{x_5(t)} \sqrt{\lambda_3^2(t) + \lambda_4^2(t)} - \lambda_5(t). \tag{3.26}$$

Отсюда следует, что

$$u_1(t) = 1, \qquad u_2(t) = 0$$

при всех $t \in [t_0, t_1]$.

Исключая тот случай, когда принцип максимума не позволяет определить $u_3(t)$, можно легко показать, что *величина экстремального вектора тяги релейна и имеет не более двух переключений*. Если $\lambda_3(t)$ и $\lambda_4(t)$ не обращаются в нуль одновременно, то $d\sigma_3(t)/dt$ непрерывна и может иметь не более одного нуля. С другой стороны, если $\lambda_3(t)$ и $\lambda_4(t)$ одновременно проходят через нуль, то $d\sigma_3(t)/dt$ терпит разрыв; может случиться, однако, не более одного разрыва. В любом случае, таким образом, *функция переключений* $\sigma_3(t)$ *может иметь не более двух нулей*. Наконец, можно показать, что *) (см. упр. 3.5) последовательность знаков

$$\begin{aligned} &\sigma(t) < 0, && t \in [t_0, t'], \\ &\sigma(t) > 0, && t \in (t', t''], \\ &\sigma(t) < 0, && t \in (t'', t_1] \end{aligned}$$

противоречит необходимым условиям теоремы 2. Поэтому остаются лишь следующие возможные типы экстремальных программ величины вектора тяги:

$$\begin{aligned} &(1) && u_3(t) = 0, && t \in [t_0, t_1]; \\ &(2) && u_3(t) = u_3^{\max}, && t \in [t_0, t_1]; \\ &(3) && u_3(t) = 0, && t \in [t_0, t']; \\ & && u_3(t) = u_3^{\max}, && t \in [t', t_1]; \\ &(4) && u_3(t) = u_3^{\max}, && t \in [t^\circ, t']; \\ & && u_3(t) = 0, && t \in (t', t_1]; \\ &(5) && u_3(t) = u_3^{\max}, && t \in [t_0, t']; \\ & && u_3(t) = 0, && t \in (t', t''); \\ & && u_3(t) = u_3^{\max}, && t \in (t'', t_1]. \end{aligned}$$

Эти случаи представлены на рис. 3.1.

---

*) См. G. Leitmann, Note on a Class of Variat.onal Problems in Rocket Flight, J. Aerospace Sci., vol. 29, 1962, p. 1000.

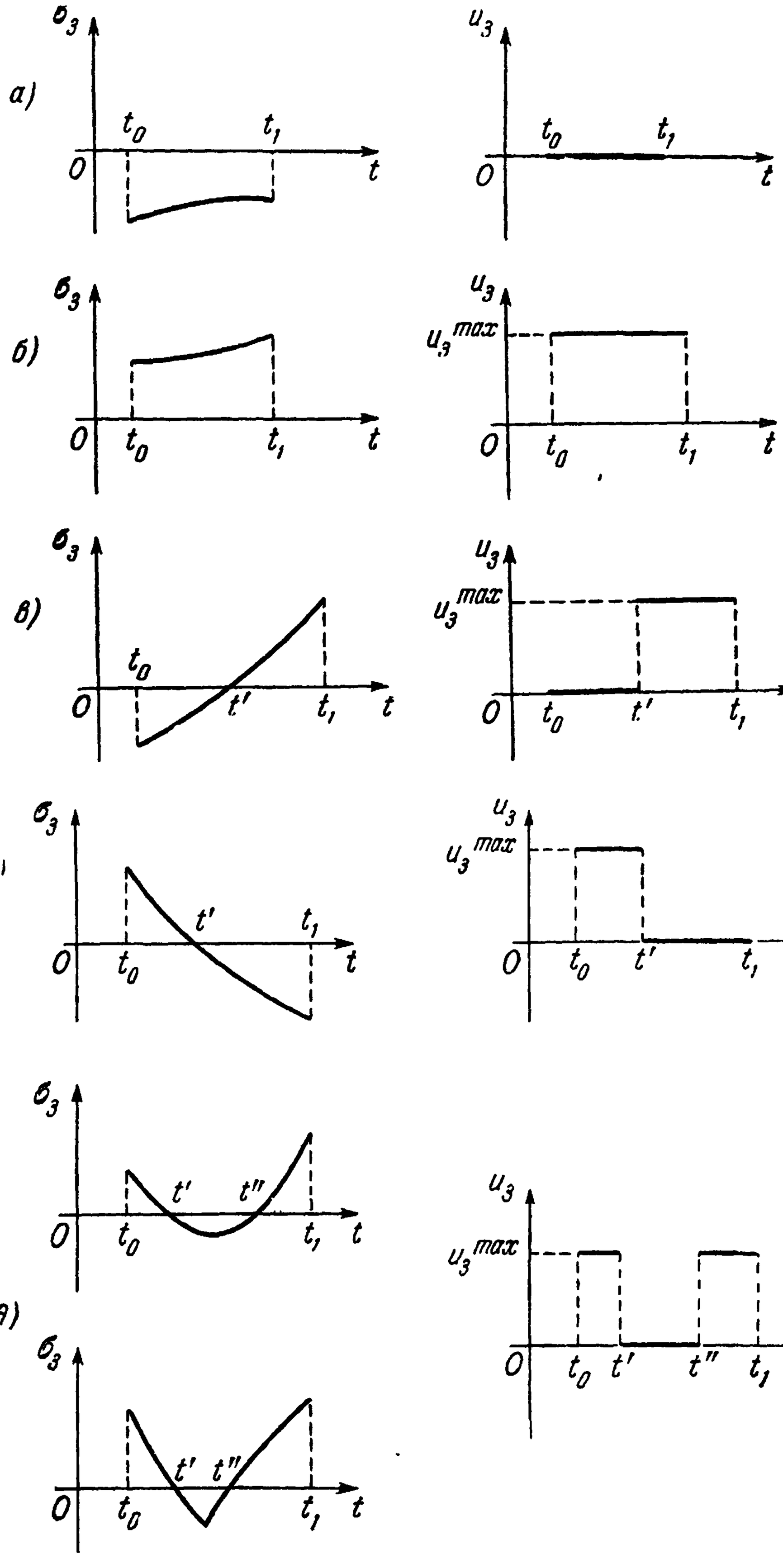

Рис. 3.1. Экстремальные программы ГЯП (пример п. 3.2).

3.3. Неавтономные системы и зависящие от времени концевые многообразия

До сих пор мы рассматривали *автономные* системы и ставили задачу о переводе их между точками, принадлежащими двум *фиксированным* многообразиям пространства состояний. Иными словами, предполагалось, что время не входит явно в уравнения состояния, в подынтегральную функцию показателя качества и в уравнения, описывающие концевые многообразия. Ниже будет показано, каким видоизменениям подвергается принцип максимума (теорема 2) в том случае, когда система неавтономна и концевые многообразия зависят от времени.

Рассмотрим систему с уравнением состояния

$$\frac{dx_j}{dt} = f_j(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.28}$$

Требуется перевести эту систему с помощью допустимого управления $\mathbf{u}(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, между точками, принадлежащими переменным во времени многообразиям $\theta^0 = \theta^0(t)$ и $\theta^1 = \theta^1(t)$ соответственно. Будем предполагать, что указанная зависимость от времени возникает следующим образом. Рассмотрим два гладких многообразия $\tilde{\theta}^0$ и $\tilde{\theta}^1$ в $n+1$-мерном пространстве $(\mathbf{x}, t)$:

$$\tilde{\theta}^0\colon\ \tilde{\theta}^0_\rho(\mathbf{x}, t) = 0, \qquad \rho = 1, 2, \ldots, p+1, \tag{3.29}$$

$$\tilde{\theta}^1\colon\ \tilde{\theta}^1_\sigma(\mathbf{x}, t) = 0, \qquad \sigma = 1, 2, \ldots, q+1. \tag{3.30}$$

Многообразия $\tilde{\theta}^0$ и $\tilde{\theta}^1$ имеют, таким образом, $n-p$ и $n-q$ измерений соответственно. Предположим, что функции $\theta^0_\rho(\mathbf{x}, t)$ и $\theta^1_\sigma(\mathbf{x}, t)$ имеют непрерывные производные по $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и t и что матрицы

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial\tilde{\theta}^0_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial\tilde{\theta}^0_1}{\partial x_n} & \dfrac{\partial\tilde{\theta}^0_1}{\partial t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial\tilde{\theta}^0_{p+1}}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial\tilde{\theta}^0_{p+1}}{\partial x_n} & \dfrac{\partial\tilde{\theta}^0_{p+1}}{\partial t} \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\tilde{\theta}^1_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial\tilde{\theta}^1_1}{\partial x_n} & \dfrac{\partial\tilde{\theta}^1_1}{\partial t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial\tilde{\theta}^1_{q+1}}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial\tilde{\theta}^1_{q+1}}{\partial x_n} & \dfrac{\partial\tilde{\theta}^1_{q+1}}{\partial t} \end{bmatrix}$$

имеют максимальный ранг в каждой точке $\tilde{\theta}^0$ и $\tilde{\theta}^1$ соответственно. Если $p < n$, то при всяком заданном значении вре-

мени, скажем $t = t'$, уравнения (3.29) определяют многообразие $\theta^0(t')$ в пространстве состояний E^n; число измерений $\theta^0(t')$ равно $n-(p+1)$. С изменением величины t возникает *однопараметрическое семейство начальных многообразий* $\theta^0(t)$ (см. рис. 3.2). Подобным же образом, если $q < n$, то уравнения (3.30) определяют однопараметрическое семейство концевых многообразий $\theta^1(t)$, каждое из которых имеет $n-(q+1)$ измерений. С другой стороны, если $p = n$, то значение времени фиксировано, т. е. $t = t_0$; в этом случае $\tilde{\theta}^0$ есть точка в пространстве «состояние — время», и проекция ее на пространство состояний E^n есть точка $\theta^0(t_0)$ (рис. 3.3). Поэтому как начальный момент времени, так и начальное состояние оказываются фиксированными *). Аналогично, если $q = n$, то как конечный момент времени, так и конечное состояние являются заданными.

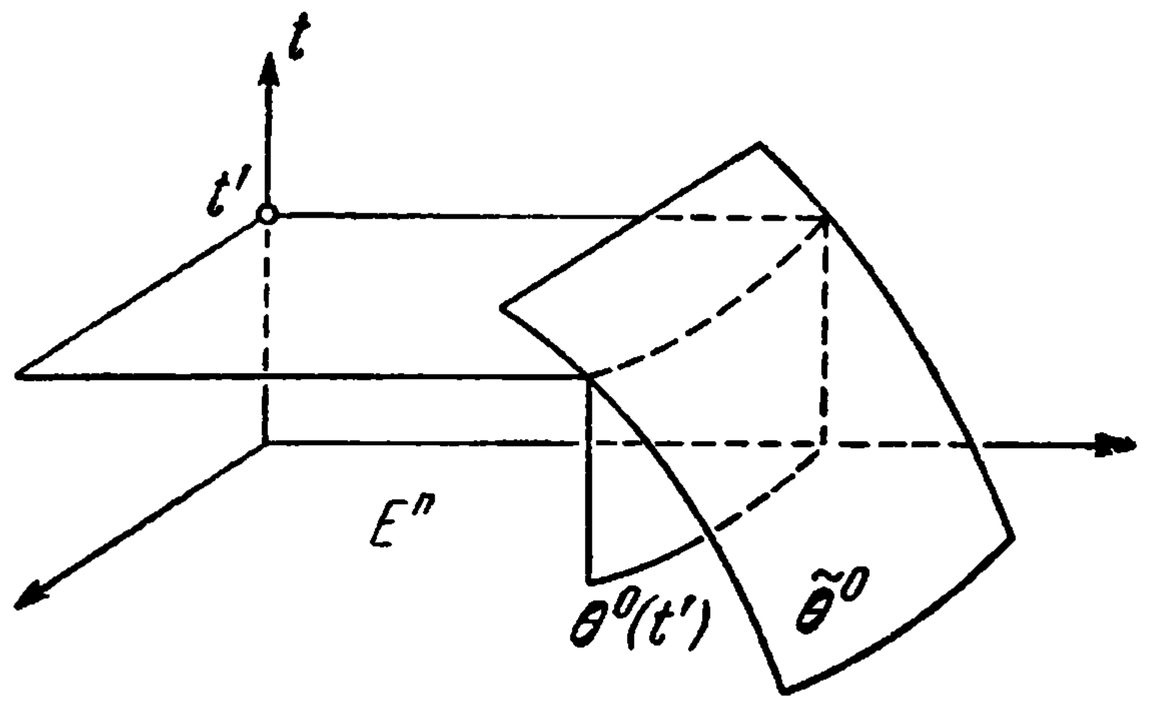

Рис. 3.2. Однопараметрическое семейство начальных многообразий.

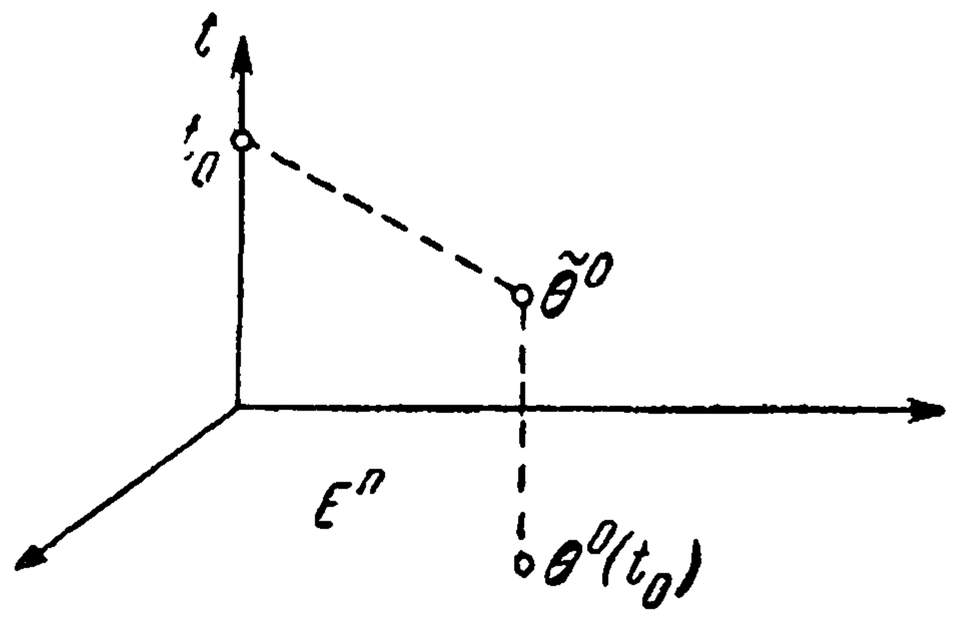

Рис. 3.3. Фиксированные начальное время и начальное состояние.

Мы желаем определить допустимое управление $\mathbf{u}^*(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, которое переводит систему из точки начального многообразия $\theta^0(t_0)$ в точку концевого многообразия $\theta^1(t_1)$ и сообщает минимальное значение показателю качества

$$\int_{t_0}^{t_1} f_0(\mathbf{x}(t),\ \mathbf{u}(t),\ t)\,dt. \qquad (3.31)$$

---

*) Может случиться, что уравнения (3.29) обладают более чем одним решением; в этом случае многообразие $\tilde{\theta}^0$ представляет собой ряд дискретных точек $(t_0, \mathbf{x}^0)$. Аналогичное замечание относится к $\tilde{\theta}^1$.

Траектории в пространстве E^{n+1} описываются неавтономным векторным уравнением

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{f}(x, \mathbf{u}, t),$$

где

$$\mathbf{f}(x, \mathbf{u}, t) = (f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \ldots, f_n(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)).$$

Предполагается, что $f_j(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ и $\partial f_j(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)/\partial x_i$, равно как и $\partial f_j(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)/\partial t$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 0, 1, \ldots, n$, определены и непрерывны на множестве $E^{n+1} \times U$, где E^{n+1} обозначает пространство $(t, \mathbf{x})$.

Чтобы иметь возможность воспользоваться теоремой 2, следует придать задаче такую форму, для которой эта теорема справедлива. Как и в п. 3.1, это может быть достигнуто увеличением числа измерений пространства состояний. В частности, можно ввести переменную состояния *)

$$x_{n+1} = t, \tag{3.32}$$

так что будем иметь дело с расширенной системой

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_j}{dt} &= f_j(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}, u_1, u_2, \ldots, u_m), \\ \frac{dx_{n+1}}{dt} &= 1, \\ j &= 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}\right\} \tag{3.33}$$

Концевые многообразия, на этот раз в пространстве E^{n+1}, будут описываться уравнениями

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{\theta}^0\colon \tilde{\theta}^0_\rho(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = 0, \ \rho = 1, 2, \ldots, p+1 \leqslant n+1, \\ &\tilde{\theta}^1\colon \tilde{\theta}^1_\sigma(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = 0, \ \sigma = 1, 2, \ldots, q+1 \leqslant n+1, \end{aligned}\right\} \tag{3.34}$$

*) Очевидно, это представляет тривиальное видоизменение рассуждений п. 1.8. Поскольку теперь невозможно фиксировать величину t_0 и считать, что начальная точка соседней траектории принадлежит Σ, постольку следует скорее брать $t - t_0$, а не t в качестве новой независимой переменной.

тогда как показатель качества расширенной системы будет иметь вид

$$\int_{t_0}^{t_1} f_0(x_1(t),\ \ldots,\ x_{n+1}(t),\ u_1(t),\ \ldots,\ u_m(t))\,dt. \quad (3.35)$$

В новой форме задача полностью эквивалентна проблеме, сформулированной в начале этого пункта. Важнее всего то, что эта задача принадлежит к типу, рассмотренному в гл. 1, так что теорема 2 оказывается применимой: требуется лишь заменить n на $n+1$. Как и в п. 3.1, положим

$$\tilde{\boldsymbol{x}} \triangleq (x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_{n+1}) = (\boldsymbol{x},\ x_{n+1}),$$

$$\tilde{\boldsymbol{\lambda}} \triangleq (\lambda_0,\ \lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_{n+1}) = (\boldsymbol{\lambda},\ \lambda_{n+1})$$

и

$$\tilde{\mathscr{H}} \triangleq \mathscr{H} + \lambda_{n+1}, \quad (3.36)$$

где

$$\mathscr{H} \triangleq \sum_{j=0}^{n} \lambda_j f_j.$$

Соответствующая сопряженная система будет, следовательно, вида

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\lambda_0}{dt} &= 0, \\ \frac{d\lambda_j}{dt} &= -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial x_j}, \\ \frac{d\lambda_{n+1}}{dt} &= -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial x_{n+1}}, \\ j &= 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \end{aligned}\right\} \quad (3.37)$$

Согласно условиям (а) и (б) теоремы 2, если $\mathbf{u}^*(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, — оптимальное управление, то существует ненулевое непрерывное решение $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}(t)$ сопряженной системы (3.37) такое, что

$$\sup_{\mathbf{u} \in U} \tilde{\mathscr{H}}(\boldsymbol{\lambda}(t),\ \tilde{\boldsymbol{x}}^*(t),\ \mathbf{u}) = \tilde{\mathscr{H}}(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}(t),\ \tilde{\boldsymbol{x}}^*(t),\ \mathbf{u}^*(t)) = 0$$

для всех $t \in [t_0, t_1]$. С учетом (3.36) и (3.32) преобразуем это условие к форме

$$\sup_{u \in U} \mathscr{H}(\lambda(t), x^*(t), t, u) = \mathscr{H}(\lambda(t), x^*(t), t, u^*(t)) \quad (3.38)$$

и

$$\mathscr{H}(\lambda(t), x^*(t), t, u^*(t)) = -\lambda_{n+1}(t). \quad (3.39)$$

Последнее уравнение сопряженной системы (3.37) вместе с уравнением (3.32) позволяют записать (3.39) следующим образом:

$$\mathscr{H}(\lambda(t), x^*(t), t, u^*(t)) =$$

$$= \mathscr{H}(\lambda(t_0), x^*(t_0), t_0, u^*(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \mathscr{H}(\lambda(\tau), x^*(\tau), \tau, u^*(\tau))}{\partial \tau} d\tau. \quad (3.40)$$

Условие трансверсальности в начальной точке таково:

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \eta_j^0 + \lambda_{n+1} \eta_{n+1}^0 = 0$$

и

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \tilde{\theta}_\rho^0}{\partial x_j} \eta_j^0 + \frac{\partial \tilde{\theta}_\rho^0}{\partial x_{n+1}} \eta_{n+1}^0 = 0, \quad \rho = 1, 2, \ldots, p+1.$$

Учитывая (3.32) и (3.39), запишем эти равенства так:

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \eta_j^0 = \mathscr{H} \eta_{n+1}^0 \quad (3.41)$$

и

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \tilde{\theta}_\rho^0}{\partial x_j} \eta_j^0 = -\frac{\partial \tilde{\theta}_\rho^0}{\partial t} \eta_{n+1}^0, \quad \rho = 1, 2, \ldots, p+1. \quad (3.42)$$

Аналогично условие трансверсальности в конечной точке принимает вид

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \eta_j^1 = \mathscr{H} \eta_{n+1}^1 \quad (3.43)$$

и

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \tilde{\theta}_\sigma^1}{\partial x_j} \eta_j^1 = -\frac{\partial \theta_\sigma^1}{\partial t} \eta_{n+1}^1, \quad \sigma = 1, 2, \ldots, q+1. \quad (3.44)$$

Приходим к заключению, что условия а), б) и г) теоремы 2 заменяются соотношениями (3.38), (3.40) и условиями трансверсальности (3.41), (3.42) и (3.43), (3.44) соответственно. Условие в), разумеется, остается без изменения. Подчеркнем, что эти условия не зависят от x_{n+1} и λ_{n+1}.

3.4. Автономные системы с заданным временем перехода

Важной и интересной задачей является задача определения оптимального управления для автономной системы, которая должна быть переведена между точками начального и конечного многообразий *при заданном значении времени перехода*. Это единственное, что отличает такого рода задачу от задачи, которая рассматривалась в гл. 1 и к которой приложима теорема 2.

Поскольку система автономна, значение начального момента времени t_0 может быть выбрано по произволу. Поэтому задание величины $t_1 - t_0$ эквивалентно заданию значений t_0 и t_1. Если стать на эту точку зрения, то можно применить к задаче результаты п. 3.3. В частности, концевые условия (3.29) и (3.30) приобретают вид:

$$\tilde{\theta}^0:\begin{cases}\tilde{\theta}^0_\rho(\mathbf{x},\ t)=\theta^0_\rho(\mathbf{x})=0,\\ \tilde{\theta}^0_{p+1}(\mathbf{x},\ t)=t-t_0=0,\end{cases}\qquad \rho=1,\ 2,\ \ldots,\ p\leqslant n, \quad (3.45)$$

$$\tilde{\theta}^1:\begin{cases}\tilde{\theta}^1_\sigma(\mathbf{x},\ t)=\theta^1_\sigma(\mathbf{x})=0,\\ \tilde{\theta}^1_{q+1}(\mathbf{x},\ t)=t-t_1=0.\end{cases}\qquad \sigma=1,\ 2,\ \ldots,\ q\leqslant n, \quad (3.46)$$

Условие (3.38) остается без изменения, если не считать того обстоятельства, что функция $\mathscr{H}$ теперь не зависит явно от времени. Условие (3.40) принимает вид

$$\mathscr{H}(\boldsymbol{\lambda}(t),\ \boldsymbol{x}^*(t),\ \mathbf{u}^*(t))=\text{const}. \quad (3.47)$$

Учитывая (3.45), представим условия (3.41) и (3.42) трансверсальности в начальной точке в следующей форме:

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\eta^0_j=0 \quad (3.48)$$

и

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\theta^0_\rho}{\partial x_j}\eta^0_j=0,\qquad \rho=1,\ 2,\ \ldots,\ p. \quad (3.49)$$

Аналогично (3.46) показывает, что условия (3.43) и (3.44) трансверсальности в конечной точке могут быть записаны так:

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \eta_j^1 = 0 \tag{3.50}$$

и

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \theta_\sigma^1}{\partial x_j} \eta_j^1 = 0, \qquad \sigma = 1, 2, \ldots, q. \tag{3.51}$$

Приходим к заключению, что условия (а), (в) и (г) теоремы 2 остаются без изменения. Условие (б) заменяется условием (3.47).

Постоянная в равенстве (3.47) равна нулю, если время перехода не фиксировано; в задаче этого пункта знание этой постоянной заменяется знанием величины времени перехода.

3.5. Пример: задача о встрече для ракеты постоянной мощности при минимальном расходе топлива

Рассмотрим снова задачу п. 1.16, а именно задачу о полете ракеты постоянной мощности. Теперь, однако, мы будем считать известными начальные и конечные значения координаты x_1 и скорости x_2, а также значение времени перехода $t_1 - t_0$. Разыскивается программа ускорения силы тяги, приводящая к минимальному расходу топлива.

Уравнения состояния системы таковы:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= u. \end{aligned}\right\} \tag{3.52}$$

Ускорение силы тяги ограничено неравенством

$$|u| \leqslant a > 0, \tag{3.53}$$

где a — заданная постоянная.

Разыскивается допустимое управление $\mathbf{u}^*(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, переводящее систему из начального состояния (x_1^0, x_2^0) в конечное состояние (0, 0) за *заданное время перехода* $\tau_1 = t_1 - t_0$ и минимизирующее значение функционала

$$\int_{t_0}^{t_1} u^2 \, dt. \tag{3.54}$$

Функция $\mathscr{H}$ равна

$$\mathscr{H}(\lambda, x, u) = \lambda_0 u^2 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u, \tag{3.55}$$

а сопряженные уравнения таковы:

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = 0, \qquad \frac{d\lambda_2}{dt} = -\lambda_1,$$

так что

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1(t) &= \lambda_1(t_1), \\ \lambda_2(t) &= \lambda_2(t_1) + \lambda_1(t_1)(t_1 - t). \end{aligned}\right\} \tag{3.56}$$

При определении экстремального управления $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, следует рассмотреть два случая:

(1) $\lambda_0(t) \equiv 0$. В этом случае экстремальное управление, очевидно, релейно:

$$u(t) = a, \qquad \text{если} \quad \lambda_2(t) > 0;$$
$$u(t) = -a, \quad \text{если} \quad \lambda_2(t) < 0.$$

Далее, поскольку $\lambda_2(t)$ имеет не более одного нуля, число переключений не превосходит единицы. Интегрируя уравнения состояния (3.52) при последовательности значений управления $a \to -a$, найдем

$$a(4x_1^0 + 2x_2^0\tau_1) - (x_2^0)^2 + a^2\tau_1^2 = 0,$$

тогда как для последовательности $-a \to a$ будем иметь

$$a(4x_1^0 + 2x_2^0\tau_1) + (x_2^0)^2 - a^2\tau_1^2 = 0.$$

Таковы условия совместности концевых состояний, величины времени перехода и пределов, ограничивающих величину управления. Выигрыш, соответствующий каждой последовательности значений управления, равен

$$\int_{t_0}^{t_1} u^2\, dt = a^2\tau_1. \tag{3.57}$$

(2) $\lambda_0(t) \equiv \lambda_0 = \text{const} < 0$. Поскольку коэффициент при u^2 в правой части (3.55) отрицателен, функция $\mathscr{H}$ обладает стационарным максимумом относительно u; этот максимум найдется из уравнения

$$\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial u} = 2\lambda_0 u(t) + \lambda_2(t) = 0,$$

откуда

$$u(t) = c_1 + c_2\tau, \tag{3.58}$$

где

$$c_1 \triangleq -\frac{\lambda_2(t_1)}{2\lambda_0}, \qquad c_2 \triangleq -\frac{\lambda_1(t_1)}{2\lambda_0}, \qquad \tau \triangleq t_1 - t.$$

Интегрируя уравнения состояния (3.52), удобно взять «остающееся» время τ в качестве независимой переменной. В результате интегрирования получаем

$$c_1 = \frac{6}{\tau_1^2}\left(x_1^0 + \frac{1}{3}x_2^0\tau_1\right), \qquad c_2 = -\frac{12}{\tau_1^3}\left(x_1^0 + \frac{1}{2}x_2^0\tau_1\right),$$

так что экстремальное управление оказывается равным

$$u(t) = \tilde{u}(\tau) = \frac{2}{\tau_1^2}\left[\left(3x_1^0 + x_2^0\tau_1\right) - \left(6x_1^0 + 3x_2^0\tau_1\right)\frac{\tau}{\tau_1}\right]. \tag{3.59}$$

Разумеется, $\tilde{u}(\tau)$ должна быть допустимой функцией; в частности, условия (3.53) должны удовлетворяться для всех $\tau \in [0, \tau_1]$. Это означает, что $a \geqslant |\tilde{u}(0)|$ и $a \geqslant |\tilde{u}(\tau_1)|$.

Допустим, что a выбрано так, что $\tilde{u}(\tau)$ — допустимая функция. Соответствующий выигрыш равен

$$\int_0^{\tau_1} \tilde{u}^2\, d\tau = c_1^2\tau_1 + c_1c_2\tau_1^2 + \frac{1}{3}c_2^2\tau_1^3 =$$

$$= \frac{4}{\tau_1^3}\left[3\left(x_1^0\right)^2 + 3x_1^0x_2^0\tau_1 + \left(x_2^0\tau_1\right)^2\right]. \tag{3.60}$$

Теперь легко видеть, что случай (2) лучше, чем случай (1), поскольку в первом из них функция $\tilde{u}(\tau)$ линейна и ее абсолютный максимум равен a, тогда как в случае (2)

$$\int_{t_0}^{t_1} u^2\, dt < a^2\tau_1.$$

Поскольку теорема существования применима к данной задаче (см. приложение Б) и поскольку уравнение (3.59) определяет экстремальное управление единственным образом, это управление оказывается оптимальным.

3.6. Ограничения на управления, зависящие от переменных состояния

До сих пор мы предполагали, что допустимые управления принадлежат известному постоянному подмножеству U пространства управлений E^m. В этом пункте будет выяснено, каким образом видоизменяются наши результаты, если допустить, что управления принадлежат заданному множеству $U(\mathbf{x})$, зависящему от состояния $\mathbf{x}$. Иными словами, управление $\mathbf{u}(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, будет считаться *допустимым*, если

$$\mathbf{u}(t) \in U(\mathbf{x}(t)) \qquad \forall t \in [t_0, t_1], \tag{3.61}$$

где $\mathbf{x}(t)$ представляет решение уравнений состояния (1.8) для $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. При этом делается несколько более сильное предположение о том, что функции $f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ и $\partial f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u})/\partial x_j$ так же, как и $\partial f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u})/\partial u_k$, $i = 0, 1, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $k = 1, 2, \ldots, m$, определены и непрерывны на множестве $E^n \times E^m$.

Будем предполагать, что подмножество $U(\mathbf{x})$ определяется соотношениями

$$\varphi_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 0, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, l, \tag{3.62}$$

$$\psi_\beta(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \leqslant 0, \qquad \beta = 1, 2, \ldots, s, \tag{3.63}$$

где функции $\varphi_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ и $\psi_\beta(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ определены и непрерывны вместе со своими первыми частными производными на множестве $E^n \times E^m$.

Вернемся теперь к нашим предшествующим рассмотрениям и посмотрим, в какой мере полученные ранее результаты связаны с предположением о том, что допустимое управление принадлежит *постоянному* подмножеству пространства управлений.

Мы обнаружим, что рассуждения п. 1.8, касающиеся переноса касательной плоскости к предельной поверхности Σ вдоль оптимальной траектории Γ^*, основаны на предположении о том, что $\mathbf{u}(t) \in U$, $t \in [t_0, t_1]$, где U — постоянное множество. Вспомним, в частности, что $\Delta(\boldsymbol{x}^*(t_0))$ преобразуется посредством траекторий, выходящих из точек этой области и порождаемых управлением $\mathbf{u}^*(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$.

Теперь, однако, нельзя более гарантировать, что управление $\mathbf{u}^*(t)$ допустимо при $\boldsymbol{x}(t) \neq \boldsymbol{x}^*(t)$.

Мы вынуждены изменить наши рассуждения, чтобы иметь уверенность в том, что преобразующие область $\Delta(x^*(t_0))$ траектории порождаются управлением $\mathbf{u}(t)$, принадлежащим множеству $U(\mathbf{x}(t))$ при всех $t \in [t_0, t_1]$.

Предположим, что оптимальное управление $\mathbf{u}^*(t)$ и соответствующее состояние $\mathbf{x}^*(t)$ таковы, что $r \leqslant s$ соотношений (3.63) являются равенствами; изменяя в случае необходимости индексы, сможем написать

$$\psi_\beta(\mathbf{x}^*(t),\ \mathbf{u}^*(t)) = 0, \qquad \beta = 1,\ 2,\ \ldots,\ r, \tag{3.64}$$

тогда как

$$\psi_\beta(\mathbf{x}^*(t),\ \mathbf{u}^*(t)) < 0, \qquad \beta = r+1,\ r+2,\ \ldots,\ s. \tag{3.65}$$

Предположим, что матрица

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial \varphi_l}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_l}{\partial u_m} \\ \dfrac{\partial \psi_1}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial \psi_1}{\partial u_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial \psi_r}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial \psi_r}{\partial u_m} \end{bmatrix}$$

имеет максимальный ранг при $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(t)$, $\mathbf{u} = \mathbf{u}^*(t)$ *). Тогда существует окрестность точки $(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t))$ в пространстве $E^n \times E^m$, в пределах которой уравнения

$$\left.\begin{aligned} \varphi_\alpha(\mathbf{x},\ \mathbf{u}) &= 0, \qquad \alpha = 1,\ 2,\ \ldots,\ l, \\ \psi_\beta(\mathbf{x},\ \mathbf{u}) &= 0, \qquad \beta = 1,\ 2,\ \ldots,\ r, \end{aligned}\right\} \tag{3.66}$$

могут быть разрешены единственным образом относительно $r+l$ компонент $\mathbf{u}$, которые выразятся как функции $\mathbf{x}$ и оставшихся $m-(r+l)$ компонент $\mathbf{u}$, и эти функции будут непрерывны вместе со своими частными производными **).

---

*) Предполагается, что $r + l \leqslant m$.

**) Это следует из теоремы о неявной функции: см. R. C. Buck, Advanced Calculus, McGraw-Hill Book Company, New York, 1956.

Рассмотрим два вектора:

$$\mathbf{u}^c \triangleq (u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_{r+l}),$$
$$\mathbf{u}^a \triangleq (u_{r+l+1},\ u_{r+l+2},\ \ldots,\ u_m),$$

причем $\mathbf{u} = (\mathbf{u}^c,\ \mathbf{u}^a)$; запишем (3.66) в форме

$$\mathbf{R}(x,\ \mathbf{u}^a,\ \mathbf{u}^c) = 0, \tag{3.67}$$

где

$$\mathbf{R} \triangleq (\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_l,\ \psi_1,\ \psi_2,\ \ldots,\ \psi_r).$$

По доказанному существует функция

$$\mathbf{u}^c = \mathbf{U}^c(x,\ \mathbf{u}^a) \tag{3.68}$$

такая, что

$$\mathbf{R}(x,\ \mathbf{u}^a,\ \mathbf{U}^c(x,\ \mathbf{u}^a)) = 0 \tag{3.69}$$

и $U_k^c(x,\ \mathbf{u}^a)$, $\partial U_k^c/\partial x_j$ и $\partial U_k^c/\partial u_i$, $i = r+l+1,\ \ldots,\ m$, $j = 0,\ 1,\ \ldots,\ n$, $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ r+l$, определены и непрерывны в некоторой окрестности точки $(x^*(t),\ \mathbf{u}^*(t))$ в пространстве $E^{n+1} \times E^m$ *).

Выберем теперь вектор $\mathbf{u}^a$ равным $\mathbf{u}^a(t)$, так что

$$u_i^a(t) = u_i^*(t), \qquad i = r+l+1,\ r+l+2,\ \ldots,\ m, \tag{3.70}$$

и рассмотрим траектории, выходящие в момент t_0 из точек области $\Delta(x^*(t_0))$ и порождаемые управлением

$$\mathbf{u}(t) = (\mathbf{u}^c,\ \mathbf{u}^a), \tag{3.71}$$

где

$$\mathbf{u}^c = \mathbf{U}^c(x(t),\ \mathbf{u}^a(t)), \qquad \mathbf{u}^a = \mathbf{u}^a(t)$$

Интегрируя уравнения траекторий (1.11) п $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, получим

$$x(t) = x^*(t) + \varepsilon\eta(t) + \mathbf{o}(t,\ \varepsilon), \qquad t_0 \leqslant t \leqslant \tag{3.72}$$

где $\eta(t)$ удовлетворяет уравнению в вариациях:

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}\eta + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}^c}x^c, \tag{3.73}$$

---

*) Отметим, что ни $\mathbf{U}^c(x,\ \mathbf{u}^a)$, ни $\mathbf{R}(x,\ \mathbf{u}^a,\ \mathbf{u}^c)$ не зависят явно от x_0.

в котором

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial f_0}{\partial x_0} & \cdots & \frac{\partial f_0}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_0} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}^c} \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial f_0}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_0}{\partial u_{r+l}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_{r+l}} \end{bmatrix}$$

в точке $(x^*(t),\ \mathbf{u}(t))$ и

$$x^c = (x_1^c,\ x_2^c,\ \ldots,\ x_{r+l}^c),$$

где

$$x_k^c \triangleq \sum_{j=0}^{n} \left.\frac{\partial U_k^c(x,\ \mathbf{u}^a(t))}{\partial x_j}\right|_{x=x^*(t)} \eta_j.$$

Далее, подставляя выражение для $x = x(t)$, даваемое формулой (3.72), и выражение для $\mathbf{u}^a = \mathbf{u}^a(t)$, представленное формулой (3.70), в уравнение (3.69), получим

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}\eta + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{u}^c} x^c = 0, \tag{3.74}$$

где

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial R_1}{\partial x_0} & \cdots & \frac{\partial R_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial R_{r+l}}{\partial x_0} & \cdots & \frac{\partial R_{r+l}}{\partial x_n} \end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{u}^c} \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial R_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial R_1}{\partial u_{r+l}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial R_{r+l}}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial R_{r+l}}{\partial u_{r+l}} \end{bmatrix}$$

в точке $(x^*(t),\ \mathbf{u}^*(t))$.

Легко видеть, что управление $\mathbf{u}(t)$ допустимо. Поскольку (3.67) удовлетворяется функциями $x = x(t)$ и $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$, остается лишь показать, что

$$\psi_\beta(\mathbf{x}(t),\ \mathbf{u}(t)) < 0, \qquad \beta = r+1,\ r+2,\ \ldots,\ s. \tag{3.75}$$

Поскольку

$$\psi_\beta(\mathbf{x}(t),\ \mathbf{u}(t)) = \psi_\beta(\mathbf{x}^*(t),\ \boldsymbol{u}^*(t)) + \\ + \sum_{j=0}^{n} \frac{\partial \psi_\beta(\mathbf{x},\ \mathbf{u}^*(t))}{\partial x_j}\Big|_{x=x^*(t)} \varepsilon\eta_j + \\ + \sum_{k=1}^{r+l}\sum_{j=0}^{n} \frac{\partial \psi_\beta(\mathbf{x},\ \mathbf{u})}{\partial U_k^c}\,\frac{\partial U_k^c(\mathbf{x},\ \mathbf{u}^a)}{\partial x_j}\Big|_{\substack{x=x^*(t)\\ u=u^*(t)}} \varepsilon\eta_j + o(t,\ \varepsilon)$$

и

$$\psi_\beta(x^*(t),\ u^*(t)) < 0, \qquad \beta = r+1,\ r+2,\ \ldots,\ s,$$

неравенство (3.75), очевидно, имеет место при достаточно малых $|\varepsilon|$.

Разрешая уравнение (3.74) относительно $\boldsymbol{x}^c$ и подставляя результат в (3.73), придем к новому уравнению в вариациях

$$\frac{d\eta}{dt} = \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}^c}\left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{u}^c}\right)^{-1}\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}\right]\eta. \qquad (3.76)$$

Его решение определяет новое линейное преобразование $A(t_0,\ t)$ такое, что

$$\eta(t) = A(t_0,\ t)\,\eta^0, \qquad t_0 \leqslant t \leqslant t_1.$$

Все последующие рассуждения совпадают с ранее проведенными, если только в последних иметь в виду новое линейное преобразование касательной плоскости $T_\Sigma(x^*(t))$. В частности, теорема 2 остается в силе, но теперь $\boldsymbol{\lambda}(t)$ оказывается решением уравнения, сопряженного уравнению (3.76), а именно:

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\lambda\left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}^c}\left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{u}^c}\right)^{-1}\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}\right], \qquad (3.77)$$

которое можно также записать в форме

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\lambda\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} + \boldsymbol{\nu}\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}, \qquad (3.78)$$

где

$$\boldsymbol{\nu} = (\nu_1,\ \nu_2,\ \ldots,\ \nu_{r+l}) \triangleq \lambda\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}^c}\left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{u}^c}\right)^{-1}.$$

Ясно, что если связи (3.62) и (3.63) не зависят от состояния $\mathbf{x}$, то $\partial\mathbf{R}/\partial x = 0$ и (3.78) сводится к (1.21).

Направление роста времени определяется первым уравнением состояния

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 > 0.$$

Эта ситуация, а также аналогичная ей при $x_2 < 0$, показана на рис. 3.4. Отметим, что граница области E

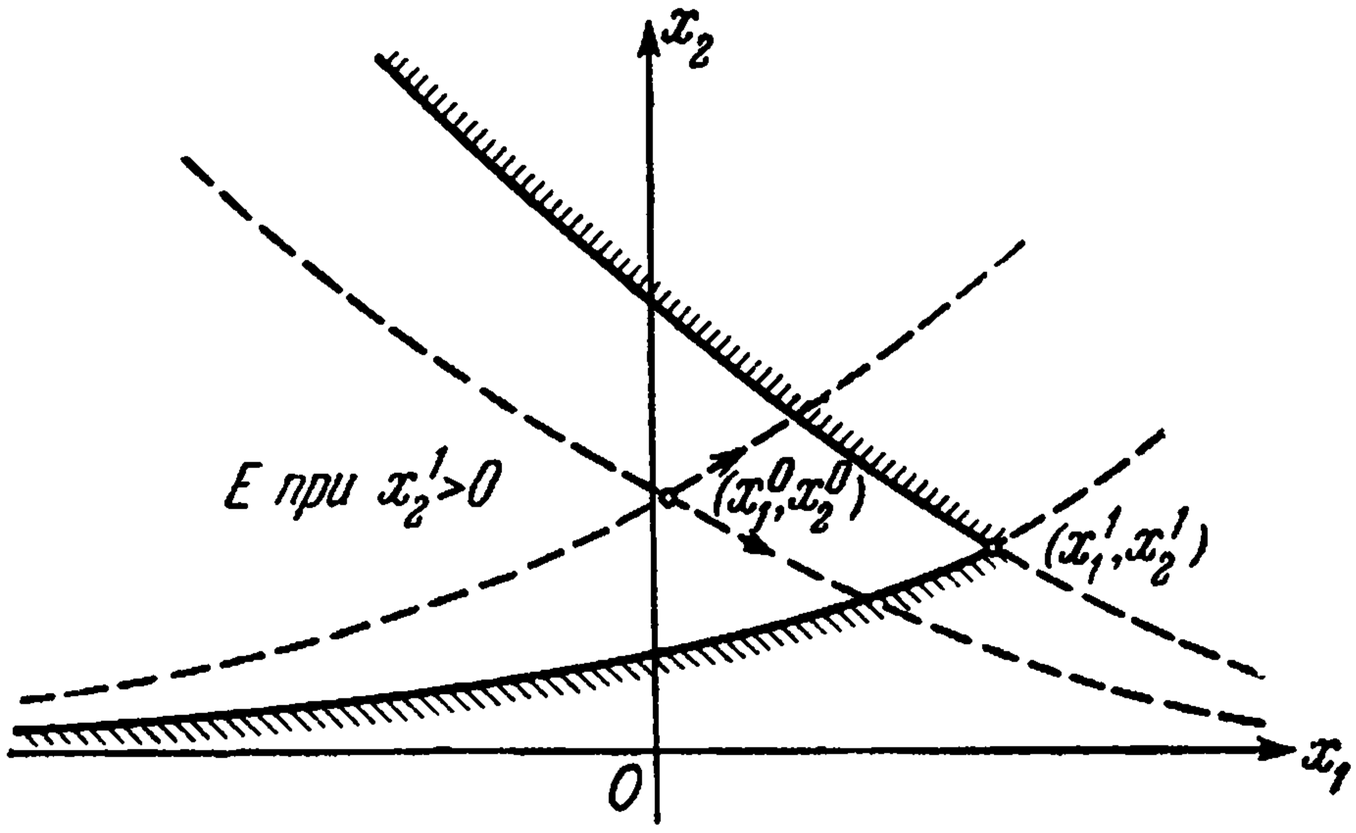

Рис. 3.4. Область начальных значений (пример п. 3.7).

принадлежит этой области, которая, таким образом, является замкнутой.

Перейдем теперь к определению экстремального управления $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. Функция $\mathscr{H}$ остается неизменной, т. е.

$$\mathscr{H}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{x}, u) = \lambda_0 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u. \qquad (3.81)$$

Согласно п. 3.6 сопряженные уравнения запишутся теперь в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\lambda_1}{dt} &= 0, \\ \frac{d\lambda_2}{dt} &= -\lambda_1 \pm 2\nu x_2, \end{aligned}\right\} \tag{3.82}$$

где

$$\nu = 0, \quad \text{если} \quad |u| < x_2^2$$

и

$$\nu = \lambda_2(t), \text{ если } u(t) + x_2^2(t) = 0 \text{ или } u(t) - x_2^2(t) = 0. \tag{3.83}$$

Поскольку

$$\mathscr{H}(\lambda(t), x(t), u(t)) = \lambda_0(t) + \lambda_1(t)\, x_2(t) + \lambda_2(t)\, u(t) = 0' \tag{3.84}$$

для всех $t \in [t_0, t_1]$, легко видеть, что $\lambda_2(t) \not\equiv 0$ на промежутке времени ненулевой длительности, если только не выполнены равенства $\lambda_0(t) = \lambda_1(t) = \lambda_2(t) \equiv 0$.

Мы заключаем, таким образом, что *экстремальное управление релейно*:

$$\left.\begin{aligned} u(t) + x_2^2(t) &= 0, \quad \text{если} \quad \lambda_2(t) < 0, \\ u(t) - x_2^2(t) &= 0, \quad \text{если} \quad \lambda_2(t) > 0. \end{aligned}\right\} \tag{3.85}$$

Легко теперь определить экстремальные пути в пространстве состояний. Интегрирование уравнений состояния (3.79) приводит к экспоненциальным кривым. В частности,

$$\left.\begin{aligned} x_2(t) &= ke^{x_1(t)}, \qquad u(t) = x_2^2(t), \\ x_2(t) &= k'e^{-x_1(t)}, \qquad u(t) = -x_2^2(t), \end{aligned}\right\} \tag{3.86}$$

где k и k' — постоянные. Заметим, что эти решения соответствуют нашему первоначальному соглашению относительно области E. Укажем также, что конечный отрезок экстремального пути принадлежит границе области E.

Далее, для $u(t) = x_2^2(t)$

$$k > 0 \left(x_2^1 > 0\right)$$

соответствует

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2(t) > 0, \quad \frac{dx_2}{dt} = x_2^2(t) > 0,$$

$$k < 0 \left(x_2^1 < 0\right)$$

соответствует

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2(t) < 0, \quad \frac{dx_2}{dt} = x_2^2(t) > 0,$$

тогда как для $u(t) = -x_2^2(t)$

$$k' > 0 \left(x_2^1 > 0\right)$$

соответствует

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2(t) > 0, \quad \frac{dx_2}{dt} = -x_2^2(t) < 0,$$

$$k' < 0 \left(x_2^1 < 0\right)$$

соответствует

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2(t) < 0, \quad \frac{dx_2}{dt} = -x_2^2(t) < 0.$$

Эти результаты позволяют указать направление возрастания времени на экстремальных путях в пространстве состояний; это направление отмечено стрелками на рис. 3.5.

Следующий вопрос относится к последовательности переключений экстремального управления. В момент переключения, скажем, при $t = t_s$, справедливо равенство $\lambda_2(t_s) = 0$, так что, согласно (3.82), в этот момент

$$\frac{d\lambda_2(t_s)}{dt} = -\lambda_1(t_s),$$

где $\lambda_1(t) \equiv \text{const}$. Поэтому может быть *не более одного переключения*; если

$$\lambda_1(t) > 0, \quad \text{то} \quad \frac{d\lambda_2(t_s)}{dt} < 0,$$

так что

$$\begin{cases} \lambda_2(t_s - 0) > 0, \\ \lambda_2(t_s + 0) < 0, \end{cases}$$

и последовательность переключений такова:

$$u(t) = x_2^2(t) \to u(t) = -x_2^2(t);$$

наоборот, если

$$\lambda_1(t) < 0, \quad \text{то} \quad \frac{d\lambda_2(t_s)}{dt} > 0,$$

так что

$$\begin{cases} \lambda_2(t_s - 0) < 0, \\ \lambda_2(t_s + 0) > 0, \end{cases}$$

и последовательность переключений имеет вид

$$u(t) = -x_2^2(t) \to u(t) = x_2^2(t).$$

Легко усмотреть, какая из этих последовательностей подходит для экстремального управления. Из (3.84) находим

$$\lambda_0(t_s) + \lambda_1(t_s)\, x_2(t_s) = 0. \tag{3.87}$$

Ясно, что если есть переключение, то $\lambda_0(t) \equiv \text{const} \neq 0$, за исключением случая, когда одновременно $\lambda_1(t) = \lambda_2(t) \equiv 0$.

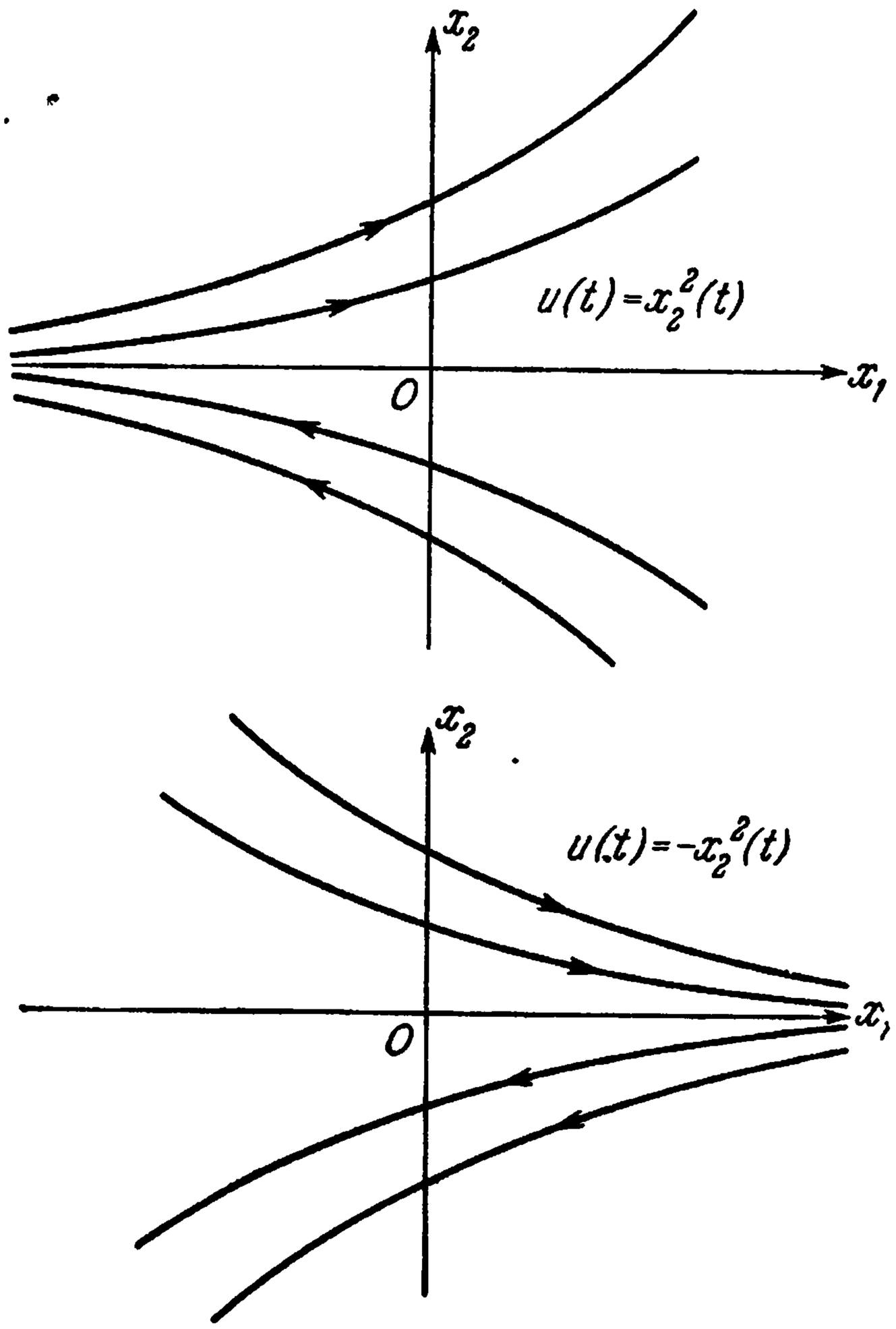

Рис. 3.5. Экстремальные пути (пример п. 3.7).

Тогда, если имеется переключение, $\lambda_0(t) \equiv \text{const} < 0$, и отсюда

$$\lambda_1(t_s) > 0, \qquad x_2(t_s) > 0,$$
$$\lambda_1(t_s) < 0, \qquad x_2(t_s) < 0.$$

Приходим к выводу, что последовательность переключений такова:

$$u(t) = x_2^2(t) \to u(t) = -x_2^2(t), \qquad x_2^1 > 0,$$
$$u(t) = -x_2^2(t) \to u(t) = x_2^2(t), \qquad x_2^1 < 0.$$

Это положение иллюстрировано на рис. 3.6. Разумеется, если начальное состояние принадлежит соответствующей части границы области E, то переключения не произойдет.

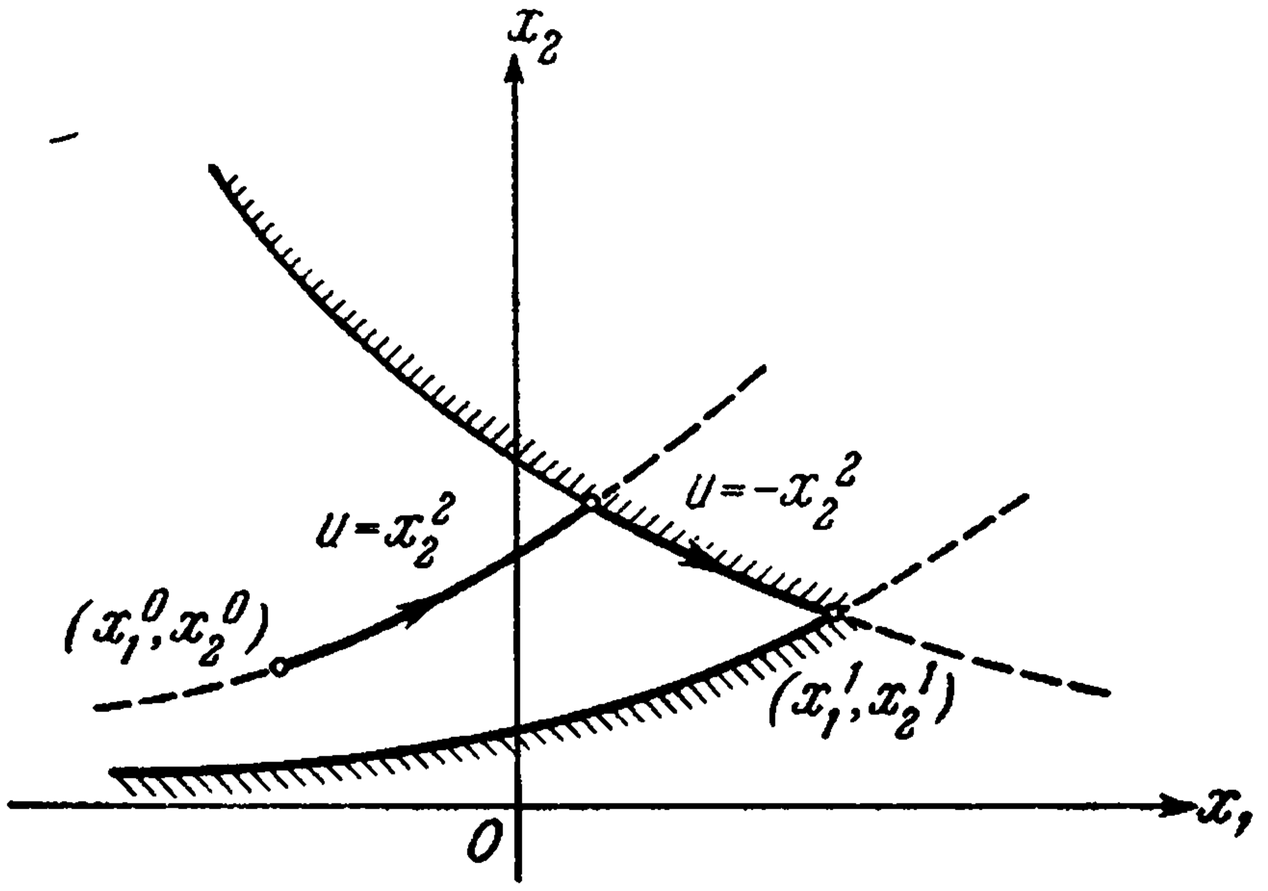

Рис. 3.6. Последовательность переключений экстремального управления (пример п. 3.7).

Отметим, что *экстремальное управление единственно*. Тем не менее, однако, мы не можем считать его оптимальным (хотя мы верим в то, что это так), поскольку ни одна из теорем существования приложения Б не может быть применена к этой проблеме.

Величина времени перехода, соответствующая экстремальному управлению, легко вычисляется путем интегрирования уравнений состояния (3.79) (см. упражнение 3.11). Например, если $x_2^1 > 0$, то

$$t_1 - t_0 = \frac{1}{x_2^0} + \frac{1}{x_2^1} - 2\sqrt{\frac{1}{x_2^0 x_2^1}}\exp\left(\frac{x_1^0 - x_1^1}{2}\right).$$

3.8. Задачи с параметрами

Другим вариантом поставленной в пп. 1.5 и 1.6 проблемы оптимального управления является задача, в которой временна́я история смены состояний системы и величина выигрыша определяется не только допустимым управлением $\mathbf{u}(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, но также и значениями *постоянных* параметров w_k, $k = 1, 2, \ldots, \gamma$. Представим себе, что параметры w_k определяют точку

$$\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_\gamma)$$

в γ-мерном евклидовом пространстве E^γ-пространстве параметров.

В частности, нас будет интересовать случай, когда уравнения состояния системы таковы:

$$\frac{dx_j}{dt} = f_j(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}), \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.88}$$

Задача теперь заключается в определении допустимого *) управления $\mathbf{u} = \mathbf{u}^*(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, а также системы постоянных параметров $w_k = w_k^*$, $k = 1, 2, \ldots, \gamma$, таким образом, чтобы система была переведена из состояния на начальном многообразии θ^0 в состояние на конечном многообразии θ^1 (принадлежащих оба пространству E^n), и при этом показатель качества

$$\int_{t_0}^{t_1} f_0(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{w})\, dt$$

достигал наименьшего возможного значения. Предполагается, что функции $f_j(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w})$, $\partial f_j(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w})/\partial x_i$ и $\partial f_j(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w})/\partial w_k$, $j = 0, 1, \ldots, n$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $k = 1, 2, \ldots, \gamma$ определены и непрерывны на множестве $E^n \times E^\gamma \times U$.

*) В смысле п. 1.5.

Легко привести эту задачу к такой форме, когда теорема 2 окажется применимой. С этой целью сформулируем эквивалентную задачу, которую опять получим путем увеличения размерности пространства состояний. Положим

$$(x_{n+1},\ x_{n+2},\ \ldots,\ x_{n+\gamma}) \triangleq (w_1,\ w_2,\ \ldots,\ w_\gamma)$$

и рассмотрим систему с уравнениями состояния

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_j}{dt} &= f_j(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n+\gamma},\ u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_m), \\ & \qquad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n, \\ \frac{dx_{n+k}}{dt} &= 0, \qquad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ \gamma, \end{aligned}\right\} \tag{3.89}$$

где состояние $\tilde{\mathbf{x}} \triangleq (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n+\gamma}) = (\mathbf{x},\ x_{n+1},\ \ldots,\ x_{n+\gamma})$ изображается теперь точкой $(n+\gamma)$-мерного евклидова пространства $E^{n+\gamma}$. Эта система должна быть переведена между точками на заданных концевых многообразиях $\tilde{\theta}^0$ и $\tilde{\theta}^1$ пространства $E^{n+\gamma}$, где

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{\theta}^0\colon\ \tilde{\theta}^0_\rho(\tilde{\mathbf{x}}) = \theta^0_\rho(\mathbf{x}) = 0, \qquad \rho = 1,\ 2,\ \ldots,\ p \leqslant n, \\ &\tilde{\theta}^1\colon\ \tilde{\theta}^1_\sigma(\tilde{\mathbf{x}}) = \theta^1_\sigma(\mathbf{x}) = 0, \qquad \sigma = 1,\ 2,\ \ldots,\ q \leqslant n. \end{aligned}\right\} \tag{3.90}$$

Требуется определить допустимое управление $\mathbf{u}^*(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, которое осуществляет такой переход и сообщает минимальное значение показателю качества

$$\int_{t_0}^{t_1} f_0(\tilde{\mathbf{x}}(t),\ \mathbf{u}(t))\,dt. \tag{3.91}$$

В такой форме проблема полностью равносильна задаче, поставленной в начале этого пункта. Принцип максимума (теорема 2) применим к этой новой форме задачи, нужно только заменить в его формулировке n на $n+\gamma$. Положим

$$\tilde{x} \triangleq (x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_{n+\gamma}) = (x,\ x_{n+1},\ \ldots,\ x_{n+\gamma}),$$
$$\tilde{\lambda} \triangleq (\lambda_0,\ \lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_{n+\gamma}) = (\lambda,\ \lambda_{n+1},\ \ldots,\ \lambda_{n+\gamma})$$

и

$$\tilde{\mathcal{H}}(\tilde{\lambda},\ \tilde{x},\ \mathbf{u}) \triangleq \sum_{j=0}^{n+\gamma} \lambda_j f_j(\tilde{\mathbf{x}},\ \mathbf{u}).$$

Согласно теореме 2, если $\mathbf{u}^*(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ — оптимальное управление и $\tilde{\boldsymbol{x}}^*(t)$ — соответствующее оптимальное решение уравнения траектории, то существует не равное тождественно нулю решение $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}(t)$ сопряженной системы

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\lambda_j}{dt} &= -\frac{\partial \tilde{\mathscr{H}}}{\partial x_j}, \qquad j = 0, 1, \ldots, n, \\ \frac{d\lambda_{n+k}}{dt} &= -\frac{\partial \tilde{\mathscr{H}}}{\partial x_{n+k}}, \qquad k = 1, 2, \ldots, \gamma, \end{aligned}\right\} \tag{3.92}$$

такое, что

$$\left.\begin{aligned} &(1)\ \sup_{u \in U} \tilde{\mathscr{H}}(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}(t), \tilde{\boldsymbol{x}}^*(t), \mathbf{u}) = \tilde{\mathscr{H}}(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}(t), \tilde{\boldsymbol{x}}^*(t), \mathbf{u}^*(t)), \\ &(2)\ \tilde{\mathscr{H}}(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}(t), \tilde{\boldsymbol{x}}^*(t), \mathbf{u}^*(t)) = 0, \\ &(3)\ \lambda_0(t) = \text{const} \leqslant 0, \end{aligned}\right\}$$

для всех $t \in [t_0, t_1]$;

(4) вектор $(\lambda_1(t), \lambda_2(t), \ldots, \lambda_{n+\gamma}(t))$ нормален к многообразию $\tilde{\theta}^0$ в момент $t = t_0$ и к многообразию $\tilde{\theta}^1$ в момент $t = t_1$.

Условие (4) вместе с (3.90) показывают, что условия трансверсальности сводятся к первоначальным, т. е. к условиям (1.28) и (1.29), а также (1.31) и (1.32); кроме того, имеют место равенства

$$\lambda_{n+k}(t_0) = \lambda_{n+k}(t_1) = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, \gamma. \tag{3.93}$$

В соответствии с (3.93), вторая группа сопряженных уравнений (3.92) допускает интегрирование; получаем

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \tilde{\mathscr{H}}(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}(t), \tilde{\boldsymbol{x}}, \mathbf{u}^*(t))}{\partial x_{n+k}}\Big|_{\tilde{\boldsymbol{x}} = \tilde{\boldsymbol{x}}^*(t)} dt = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, \gamma. \tag{3.94}$$

Как следствие второй группы уравнений состояния (3.89), имеем

$$\tilde{\mathscr{H}}(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}, \tilde{\boldsymbol{x}}, \mathbf{u}) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j f_j(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) \triangleq \mathscr{H}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{x}, \mathbf{w}, \mathbf{u}). \tag{3.95}$$

Вторая группа сопряженных уравнений (3.92) с учетом (3.95) и (3.93) показывает, что ни одно из равенств $\boldsymbol{\lambda}(t_0) = 0$

или $\lambda(t_1) = 0$ не может иметь места, если только не выполняется равенство $\tilde{\lambda}(t) \equiv 0$. Таким образом, $\lambda(t) \neq 0$ $\forall t \in [t_0, t_1]$.

Пользуясь еще раз соотношением (3.95) и условиями (1) и (2) и принимая во внимание (3.94), можем теперь возвратиться к задаче в ее первоначальной форме и установить принцип максимума для задач оптимального управления, содержащих параметры.

Теорема 3. *Если* $\mathbf{u}^*(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ — *оптимальное управление,* $\mathbf{w}^*$ — *оптимальная точка в пространстве параметров, а* $x^*(t)$ — *соответствующее решение уравнений траекторий*

$$\frac{dx_j}{dt} = f_j(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}), \qquad j = 0, 1, \ldots, n,$$

то существует ненулевое непрерывное решение $\lambda(t)$ *сопряженных уравнений*

$$\frac{d\lambda_j}{dt} = -\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}^*(t), \mathbf{w}^*)}{\partial x_j}\Bigg|_{x=x^*(t)} \lambda_i, \qquad j = 0, 1, \ldots, n$$

такое, что

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(а)} & \sup \mathscr{H}(\lambda(t), x^*(t), \mathbf{w}^*, \mathbf{u}) = \mathscr{H}(\lambda(t), x^*(t), \mathbf{w}, \mathbf{u}^*(t)), \\ \text{(б)} & \mathscr{H}(\lambda(t), x^*(t), \mathbf{w}^*, \mathbf{u}^*(t)) = 0, \\ \text{(в)} & \lambda_0(t) = \text{const} \leqslant 0, \end{array}\right\}$$

для всех $t \in [t_0, t_1]$;

(г) *вектор* $(\lambda_1(t), \lambda_2(t), \ldots, \lambda_n(t)$ *нормален к концевым многообразиям* θ^0 *и* θ^1 *в моменты* $t = t_0$ *и* $t = t_1$ *соответственно;*

$$\text{(д)} \qquad \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \mathscr{H}(\lambda(t), x^*(t), \mathbf{w}, \mathbf{u}^*(t))}{\partial w_k}\Bigg|_{\mathbf{w}=\mathbf{w}^*} dt = 0,$$

$$k = 1, 2, \ldots, \gamma.$$

Отметим, что условия (а) — (г) совершенно такие же, как в теореме 2, за исключением того, что в функциях $f_j(x, \mathbf{u}, \mathbf{w})$ появились параметры w_k. Новым является условие (д), дающее γ соотношений для определения постоянных w_k^*, $k = 1, 2, \ldots, \gamma$.

3.9. Пример: задача оптимального управления с параметром

Для иллюстрации результатов п. 3.8 рассмотрим простой пример, решение которого по существу очевидно. Пусть система описывается уравнением состояния

$$\frac{dx_1}{dt} = u + w \tag{3.96}$$

с ограничением на управление $|u| \leqslant 1$. Требуется определить оптимальное управление $u^*(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ и оптимальный параметр w^* так, чтобы перевести систему за заданное время $\tau_1 = t_1 - t_0$ из известного начального состояния x_1^0 в данное конечное состояние $x_1^1 \neq x_1^0$, минимизируя при этом функционал

$$\int_{t_0}^{t_1} u^2\, dt. \tag{3.97}$$

Ясно, что минимальное значение показателя качества (3.97) соответствует управлению

$$u^*(t) = 0, \qquad t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \tag{3.98}$$

после чего интегрирование (3.96) дает

$$w^* = \frac{x_1^1 - x_1^0}{\tau_1}. \tag{3.99}$$

Посмотрим теперь, каким образом этот результат формально вытекает из теоремы 3. Функция $\mathscr{H}$ равна

$$\mathscr{H}(\lambda, x, w. u) = \lambda_0 u^2 + \lambda_1 (u + w), \tag{3.100}$$

где

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = 0,$$

так что

$$\lambda_1(t) \equiv \text{const}. \tag{3.101}$$

Условие (д) теоремы 3 дает

$$\int_{t_0}^{t_1} \lambda_1(t)\, dt = 0;$$

учитывая (3.101), получаем $\lambda_1(t) \equiv 0$. Поэтому заключаем, что $\lambda_0(t) \equiv \text{const} \neq 0$ и, следовательно,

$$\lambda_0(t) \equiv \text{const} < 0.$$

Условие (а) теоремы сразу приводит к экстремальному *) управлению $u(t) = 0$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, откуда находим соответствующее значение параметра

$$w = \frac{x_1^1 - x_1^0}{\tau_1}.$$

Это решение единственно. Применяя теорему существования (приложение Б) к эквивалентной задаче с уравнениями

$$x_2 = w, \qquad \frac{dx_2}{dt} = 0,$$

заключаем, что полученное решение оптимально. Разумеется, оно совпадает с решением (3.98) и (3.99), полученным путем простой догадки.

3.10. Связи в концевой точке, выражаемые неравенствами

В этом пункте мы кратко рассмотрим случай, когда концевые значения независимой переменной (времени) или переменной состояния подчинены связям типа неравенств. В частности, рассмотрим случай, когда связь в конечной точке задана соотношением

$$\theta_\sigma^1(x_1, \ldots, x_{\nu-1}, x_{\nu+1}, \ldots, x_n) = 0, \quad \sigma = 1, 2, \ldots, q < n, \tag{3.102}$$

Кроме того, конечное значение x_ν пусть удовлетворяет неравенству

$$x_{\nu,\,\min}^1 \leqslant x_\nu \leqslant x_{\nu,\,\max}^1, \tag{3.103}$$

где $x_{\nu,\,\min}^1$ и $x_{\nu,\,\max}^1$ — заданные постоянные.

---

*) Мы говорим здесь об экстремальном, а не об оптимальном управлении, имея в виду, что теорема 3 лишь *необходима* для оптимальности.

При определении экстремального управления для системы, конечное состояние которой подчинено соотношениям (3.102) и (3.103), следует допустить две возможности:

(1) Оптимальное управление реализует такой переход, при котором $x^1_{\nu,\,\min} < x_\nu < x^1_{\nu,\,\max}$. В этом случае условие трансверсальности в конечной точке приводит к соотношению

$$\lambda_\nu(t_1) = 0. \tag{3.104}$$

(2) Оптимальное управление реализует такой переход, при котором

$$x^*_\nu(t_1) = x^1_{\nu,\,\min} \quad \text{или} \quad x^*_\nu(t_1) = x^1_{\nu,\,\max}. \tag{3.105}$$

В этом случае конечное значение x_ν на экстремальном пути дается формулой (3.105). Подобным же образом, если конечное состояние подчинено условию

$$\theta^1_\sigma(x) = 0, \qquad \sigma = 1,\ 2,\ \ldots,\ q \leqslant n, \tag{3.106}$$

а конечный момент времени — условию

$$t_{1,\,\min} \leqslant t \leqslant t_{1,\,\max}, \tag{3.107}$$

где $t_{1,\,\min}$ и $t_{1,\,\max}$ — заданные числа, то следует рассмотреть следующие две возможности:

(1) Оптимальное управление реализует такой переход, что конечное значение времени t_1 удовлетворяет неравенствам

$$t_{1,\,\min} < t < t_{1,\,\max}.$$

В этом случае к автономной системе применимо условие (б) теоремы 2:

$$\mathscr{H}(\boldsymbol{\lambda}(t),\ \boldsymbol{x}^*(t),\ \mathbf{u}^*(t)) = 0. \tag{3.108}$$

С другой стороны, для неавтономной системы условия трансверсальности (3.43) и (3.44) в концевой точке приводят к равенству

$$\mathscr{H}(\boldsymbol{\lambda}(t_1),\ \boldsymbol{x}^*(t_1),\ \mathbf{u}^*(t_1)) = 0. \tag{3.109}$$

(2) Оптимальное управление реализует такой переход, что

$$t_1 = t_{1,\,\min} \quad \text{или} \quad t_1 = t_{1,\,\max}. \tag{3.110}$$

В этом случае условия (3.110) занимают место (3.108); последнее условие в автономном случае принимает вид

$$\mathscr{H}(\boldsymbol{\lambda}(t),\ \boldsymbol{x}^*(t),\ \mathbf{u}^*(t)) = \text{const}, \qquad t_0 \leqslant t \leqslant t_1.$$

Для неавтономной системы условие (3.110) заменяет равенство (3.109).

Совершенно аналогичные замечания справедливы в том случае, когда *начальное* значение переменной состояния или времени подчинено связи типа неравенства. Соответствующие результаты можно получить формальным путем. Например, если конечное значение x_ν подчинено неравенству $x^1_{\nu,\,\min} \leqslant x_\nu \leqslant x^1_{\nu,\,\max}$, то увеличиваем размерность пространства состояний путем введения переменных состояния x_{n+1} и x_{n+2} таким образом, что

$$\frac{dx_{n+1}}{dt} = 0, \qquad \frac{dx_{n+2}}{dt} = 0.$$

Неравенства, ограничивающие конечное значение x_ν, заменятся теперь эквивалентными равенствами

$$x_\nu - x^1_{\nu,\,\min} = x^2_{n+1}, \qquad x^1_{\nu,\,\max} - x_\nu = x^2_{n+2}.$$

Полученная таким образом новая задача полностью равносильна первоначальной, но теперь, однако, можно непосредственно применить теорему 2. Сходное рассуждение, разумеется, применимо и к случаю, когда неравенства ограничивают конечное значение времени. Детали соответствующего вывода представляются читателю (см. упражнение 3.14).

Неравенства, наложенные на значения интеграла, легко сводятся к неравенствам, ограничивающим конечное значение добавочной переменной состояния. Таким образом, если

$$\int_{t_0}^{t_1} h(\mathbf{x}(t),\ \mathbf{u}(t))\,dt \leqslant 0,$$

то вводим переменную x_{n+1} посредством уравнения

$$\frac{dx_{n+1}}{dt} = f_{n+1}(\mathbf{x},\ \mathbf{u}), \qquad f_{n+1}(\mathbf{x},\ \mathbf{u}) \equiv h(\mathbf{x},\ \mathbf{u})$$

с дополнительными условиями

$$x_{n+1}(t_0) = 0, \qquad x_{n+1}(t_1) \leqslant 0.$$

Следует, наконец, отметить, что результаты этого пункта непосредственно переносятся на случай, когда ограничения типа неравенств накладываются на значения постоянного параметра w_ν, т. е.

$$w_{\nu,\,\min} \leqslant w_\nu \leqslant w_{\nu,\,\max}; \tag{3.111}$$

величины $w_{\nu,\min}$ и $w_{\nu,\max}$ считаются известными. Действительно, согласно рассуждениям п. 3.8, где положено $w_\nu = x_{n+\nu}$, связь (3.111) может быть заменена неравенством, ограничивающим начальное и конечное значения $x_{n+\nu}$. Таким образом, следует учитывать две возможности:

(1) Оптимальное значение параметра w_ν удовлетворяет ограничениям $w_{\nu,\min} < w_\nu < w_{\nu,\max}$; в этом случае условие (д) теоремы 3 применимо для $k = \nu$.

(2) Оптимальное значение параметра w_ν равно $w_\nu^* = w_{\nu,\min}$ или $w_\nu^* = w_{\nu,\max}$; в этом случае условие (д) теоремы 3 при $k = \nu$ заменяется одним из написанных равенств.

3.11. Пример: задача оптимального управления с ограниченным значением параметра

Рассмотрим теперь систему, описываемую уравнениями состояния

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 + w, \\ \frac{dx_2}{dt} &= u, \end{aligned}\right\} \tag{3.112}$$

где управляющая переменная u и параметр w подчинены ограничениям

$$|u| \leqslant 1 \tag{3.113}$$

и

$$|w| \leqslant W > 0, \tag{3.114}$$

где W — заданная постоянная.

Требуется перевести систему из данного начального состояния (x_1^0, x_2^0) в состояние покоя (0, 0) за минимальное время. Таким образом, имеем дело с задачей, охватываемой теоремой 3. Теорема существования применима к эквивалентной задаче (см. рассуждение п. 3), так что наилучшее экстремальное управление и соответствующее значение параметра оказываются оптимальными.

Функция $\mathscr{H}$ равна

$$\mathscr{H}(\lambda, x, w, u) = \lambda_0 + \lambda_1(x_2 + w) + \lambda_2 u, \tag{3.115}$$

а сопряженная система имеет вид

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = 0, \qquad \frac{d\lambda_2}{dt} = -\lambda_1,$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1(t) &= c_1, \\ \lambda_2(t) &= c_2 - c_1 t, \end{aligned}\right\} \tag{3.116}$$

где c_1 и c_2 — постоянные.

Согласно условию (б) теоремы 3, постоянные c_1 и c_2 не могут одновременно равняться нулю, если только при этом не соблюдается равенство $\lambda_0(t) = 0$. Поэтому функция переключений $\sigma(t) = c_2 - c_1 t$ может иметь не более одного нуля.

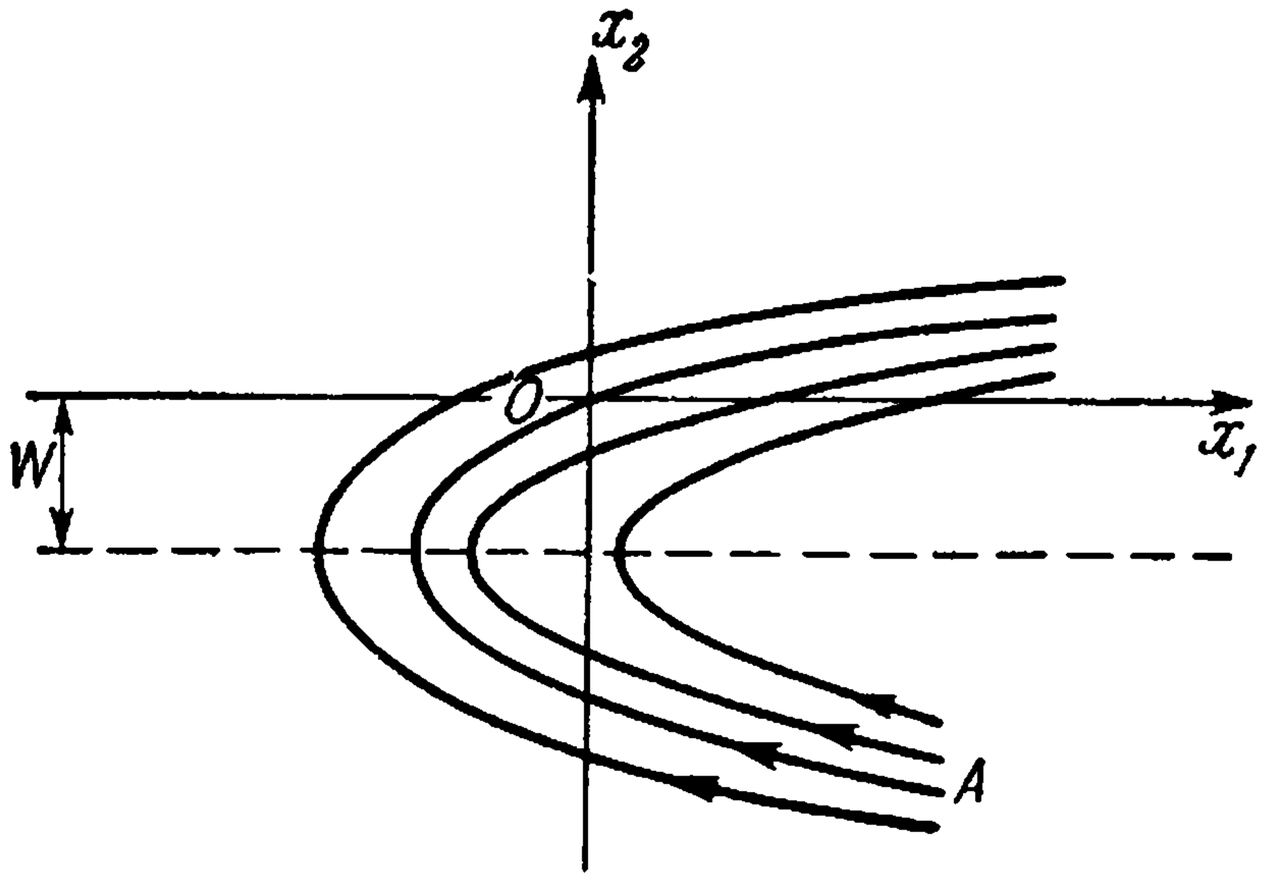

Рис. 3.7. Экстремальные пути для $w = W$ и $u = 1$ (пример п. 3.11).

Отсюда следует, что экстремальное управление релейно и имеет не более одного переключения.

Как показано в п. 3.10, следует рассмотреть три возможности, относящиеся к параметру w, а именно:

(а) $w = W$,

(б) $w = -W$,

(в) $|w| < W$.

Рассмотрим эти три случая последовательно.

Случай (а): если $w = W$, а управление релейно, то интегрирование уравнений состояния (3.112) приводит к следующим уравнениям экстремальных путей:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}(x_2 + W)^2 + k, && u(t) = 1, \\ x_2 &= -\frac{1}{2}(x_2 + W)^2 + k', && u(t) = -1; \end{aligned}\right\} \tag{3.117}$$

здесь k и k' — постоянные. Полученные параболические кривые показаны на рис. 3.7 и 3.8, где стрелки указывают направление возрастания времени.

Поскольку экстремальное управление может испытывать не более одного переключения, соответствующий экстремальный путь состоит самое большее из двух дуг парабол, одна из которых заканчивается конечным состоянием системы (0, 0).

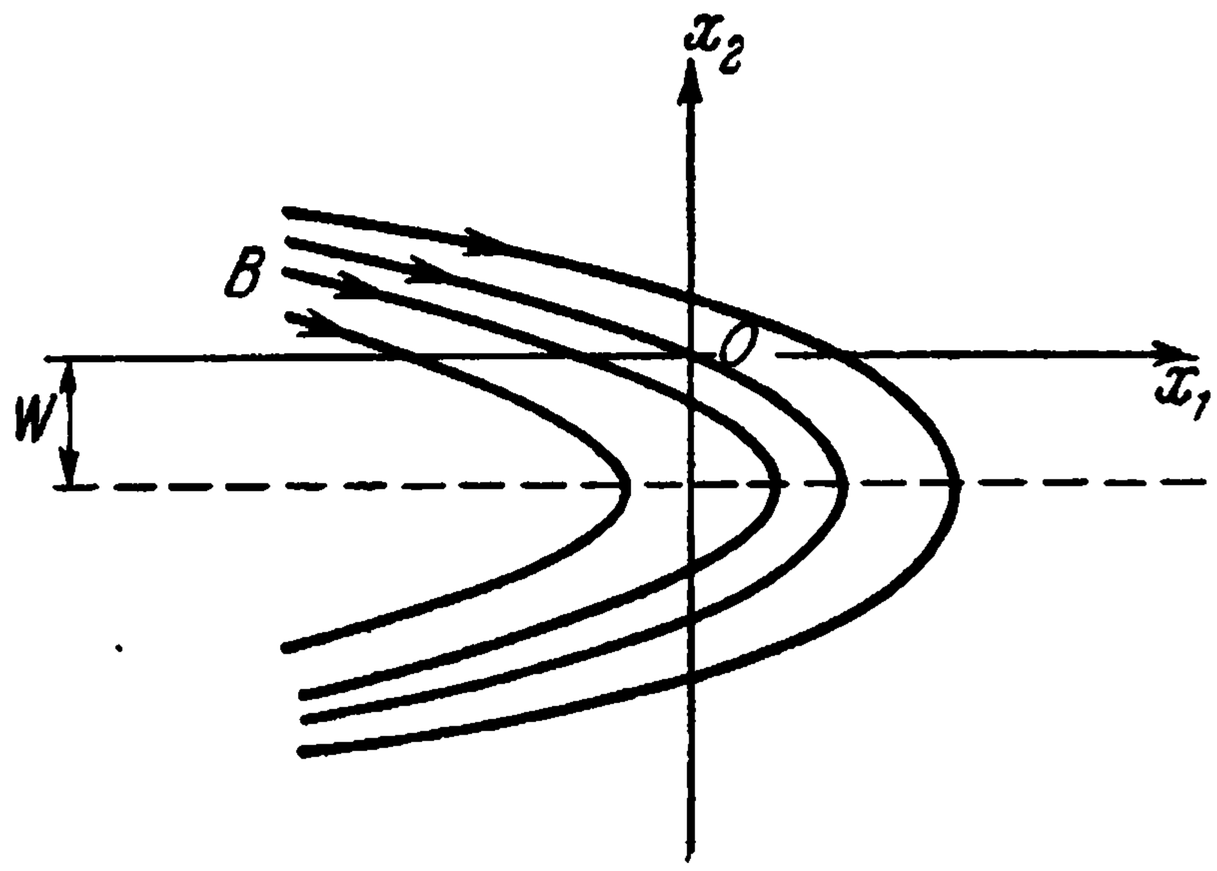

Рис. 3.8. Экстремальные пути для $w = W$ и $u = -1$ (пример п. 3.11).

Эти конечные дуги принадлежат параболам, уравнения которых таковы:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}\, x_2^2 + W x_2, \\ x_1 &= -\frac{1}{2}\, x_2^2 - W x_2. \end{aligned}\right\} \qquad (3.118)$$

На рис. 3.7 и 3.8 эти дуги обозначены, соответственно, через AO и BO. Кривая AOB является *кривой переключений*. Если начальная точка $(x_1^0,\ x_2^0)$ лежит в области, расположенной выше кривой AOB, то переключение происходит в последовательности $u(t) = -1 \to u(t) = 1$. Наоборот, если точка $(x_1^0,\ x_2^0)$ находится под кривой AOB, то переключение происходит в последовательности $u(t) = 1 \to u(t) = -1$. Этот вывод проиллюстрирован на рис. 3.9.

Интегрирование уравнений состояния (3.112) позволяет определить время перехода τ_1 как функцию начального состояния. Пусть t_s обозначает момент переключения. Тогда

$$\tau_a \triangleq \tau_1 = \left| x_2^0 - 2x_2(t_s) \right|. \qquad (3.119)$$

Если исключить тривиальную возможность $x_1^0 = x_2^0 = 0$, $\tau_1 = 0$, то это условие вместе с первым уравнением (3.116)

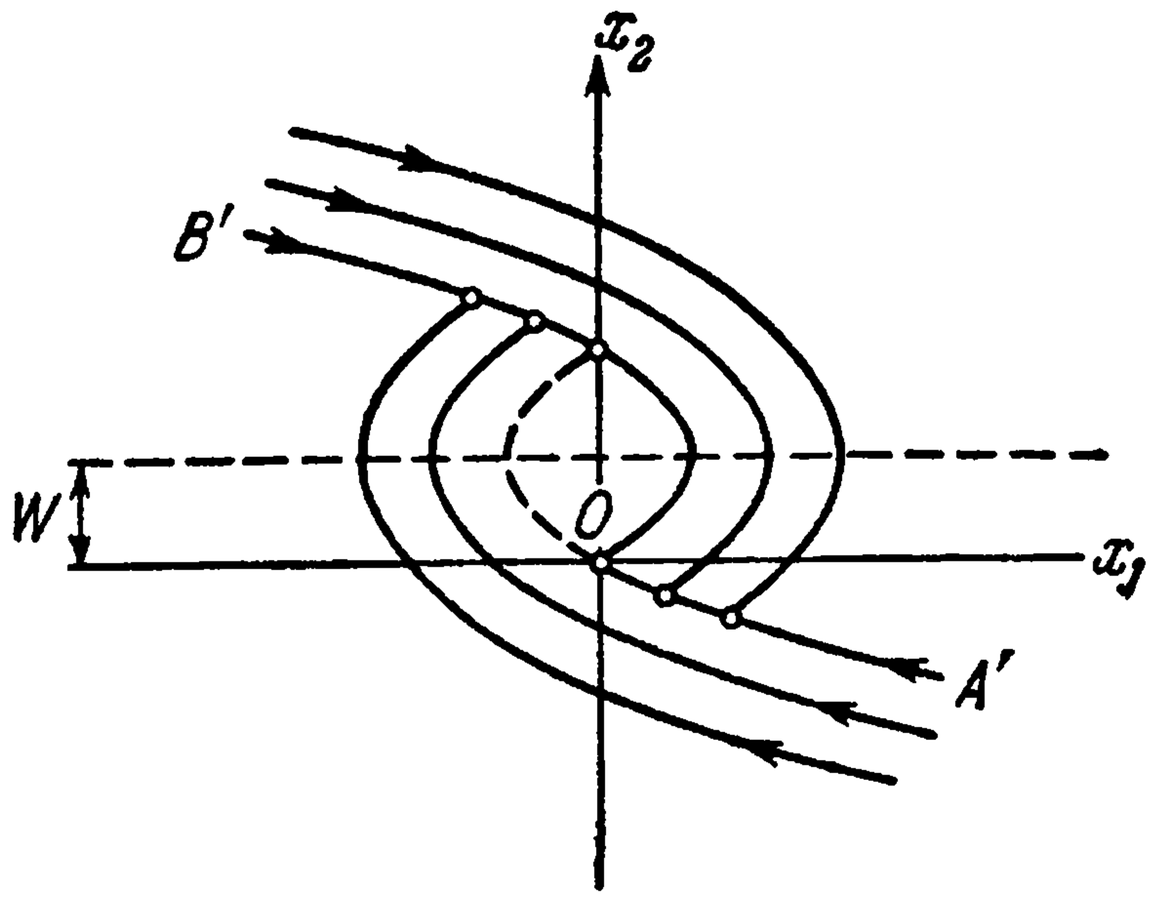

Рис. 3.10. Последовательность переключений для $w = W$ (пример п 3.11).

дает $c_1 = 0$, так что функция переключений $\sigma(t) = c_2 = \text{const}$). Следовательно,

$$u(t) \equiv 1, \qquad c_2 > 0,$$

$$u(t) \equiv -1, \qquad c_2 < 0,$$

и экстремальное управление не испытывает переключений. Интегрируя уравнения состояния (3.112), получаем

$$\left.\begin{aligned} u(t) &\equiv -1, \\ w_{\text{в}} \triangleq w &= -\frac{x_1^0}{x_2^0} - \frac{1}{2} x_2^0, \\ \tau_{\text{в}} \triangleq \tau_1 &= x_2^0, \end{aligned}\right\} \quad x_2^0 > 0;$$

$$\left.\begin{aligned} u(t) &\equiv 1, \\ w_{\text{в}} \triangleq w &= \frac{x_1^0}{x_2^0} - \frac{1}{2} x_2^0, \\ \tau_{\text{в}} \triangleq \tau_1 &= -x_2^0, \end{aligned}\right\} \quad x_2^0 < 0. \qquad (3.122)$$

Условие $|w| < W$ ограничивает область начальных состояний. Интегрирование уравнений состояния дает

$$x_1^0 = \frac{1}{2}(x_2^0)^2 + \alpha x_2^0, \qquad x_2^0 < 0,$$

$$x_1^0 = -\frac{1}{2}(x_2^0)^2 - \alpha x_2^0, \qquad x_2^0 > 0,$$

где $|\alpha| < W$.

Имея в виду (3.118) и (3.120), заключаем, что точка (x_1^0, x_2^0) должна принадлежать открытой области, ограниченной

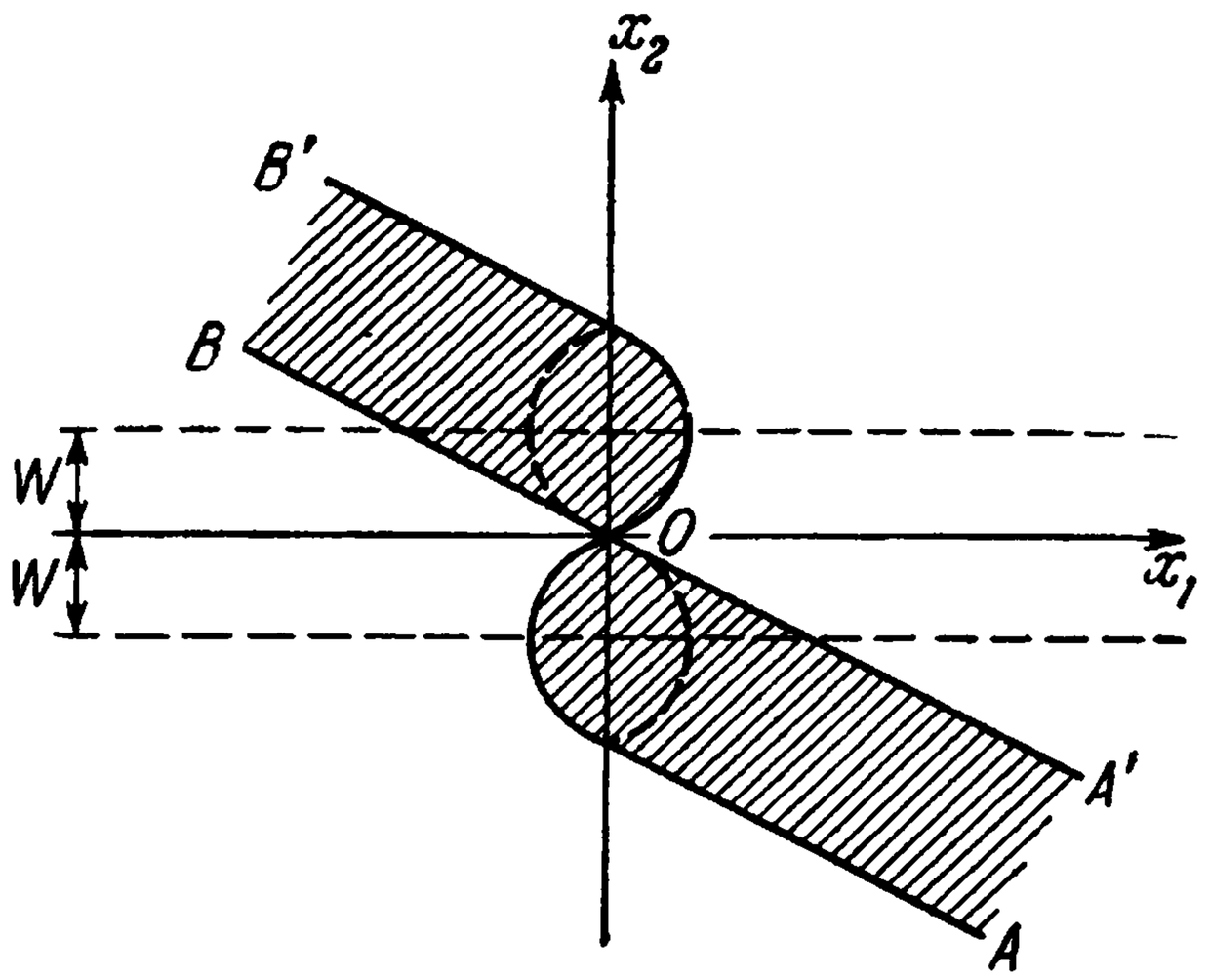

Рис. 3.11. Область начальных данных для $|w| < W$ (пример п. 3.11).

кривыми переключений AOB и $A'OB'$; это показано на рис. 3.11.

Сравним теперь значения времени перехода $\tau_а$, $\tau_б$ и $\tau_в$, чтобы выбрать *наилучшее* экстремальное управление. Пусть сначала точка (x_1^0, x_2^0) будет расположена в такой области, где возможен случай (в).

При $x_2^0 > 0$ из (3.119), (3.121) и (3.122) следует (см. также рис. 3.12), что

$$\tau_а = x_2^0 - 2x_2(t_s), \qquad x_2(t_s) < 0,$$

$$\tau_б = 2x_2(t_s) - x_2^0, \qquad x_2(t_s) > x_2^0,$$

$$\tau_в = x_2^0.$$

Поэтому

$$\tau_в < \begin{cases} \tau_а, \\ \tau_б. \end{cases}$$

К такому же заключению приходим и в случае, когда $x_2^0 < 0$. Отсюда следует, что если случай (в) возможен, то он соответствует наилучшему экстремальному управлению.

Сравним, далее, величины $\tau_а$ и $\tau_б$ в случае, когда точка (x_1^0, x_2^0) расположена в такой области, где случай (в) не может иметь места. Если (x_1^0, x_2^0) лежит над кривой $A'OB'$ (рис. 3.13), то

$$\tau_а = x_2^0 - 2x_2(t_s)_а,$$

$$\tau_б = x_2^0 - 2x_2(t_s)_б,$$

и

$$x_2(t_s)_а < x_2(t_s)_б,$$

где индексы а и б относятся, соответственно, к случаям (а) и (б). Следовательно,

$$\tau_б < \tau_а.$$

Подобным же образом, если точка (x_1^0, x_2^0) лежит под кривой AOB, то

$$\tau_а < \tau_б.$$

Поскольку наилучшее экстремальное управление единственно, оно является оптимальным. Полученные нами результаты собраны в табл. 3.1.

Таблица 3.1

Оптимальные значения управления и параметра

(x_1^0, x_2^0)	Случай	$u^*(t)$	w^*
Ниже AOB	а	$1 \to -1$	W
Выше $A'OB'$	б	$-1 \to 1$	$-W$
Между AO и $A'O$	в	1	$(x_1^0/x_2^0) - \frac{1}{2} x_2^0$
Между BO и $B'O$	в	-1	$-(x_1^0/x_2^0) - \frac{1}{2} x_2^0$

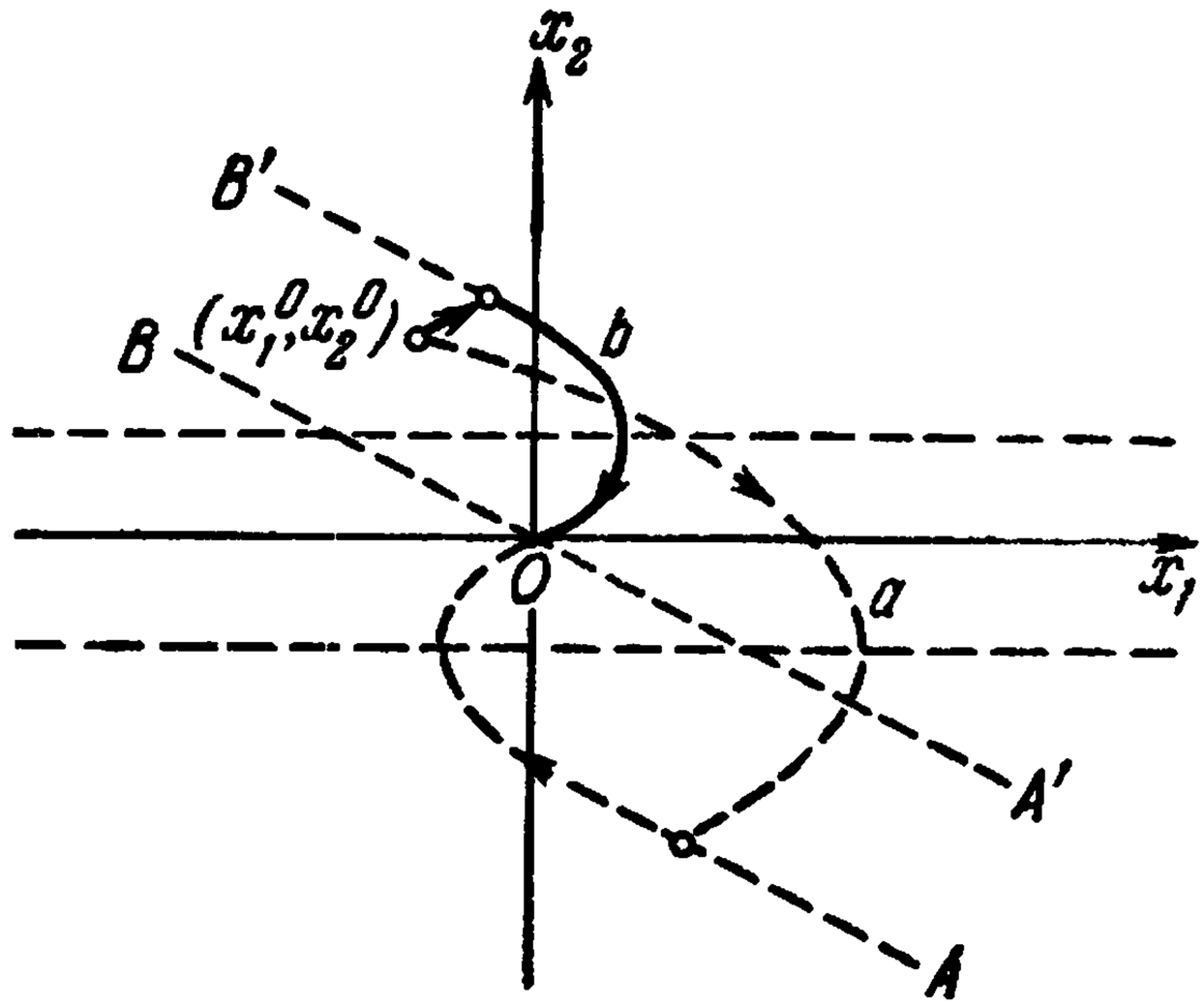

Рис. 3.12. Экстремальные пути для $w = W$ и $w = -W$ (пример п. 3.11).

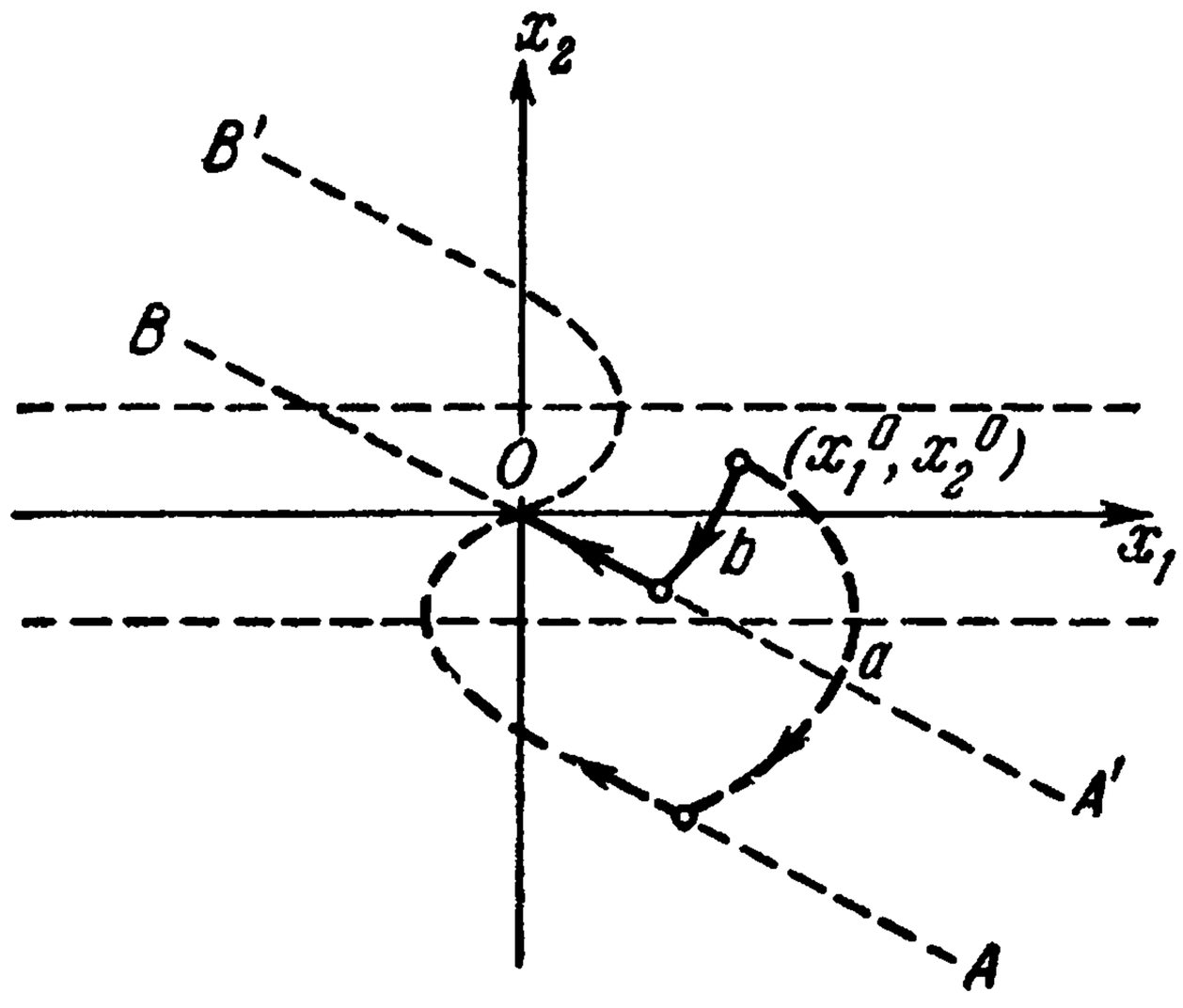

Рис. 3.13. Экстремальные пути для $w = W$ и $w = -W$ (пример п. 3.11).

3.12. Оптимальное управление при наличии обратной связи

Рассматривая оптимальное управление, переводящее систему из известного состояния $\mathbf{x}^0$ в состояние на заданном

Рис. 3.14. Программированное управление (открытая система).

конечном многообразии θ^1, мы находим оптимальное управление как функцию времени, т. е.

$$\mathbf{u}^*(t) = \boldsymbol{\varphi}(t;\ \mathbf{x}^0,\ t_0), \tag{3.123}$$

где $\boldsymbol{\varphi}(t;\ \mathbf{x}^0,\ t_0)$ — кусочно-непрерывная функция в промежутке $[t_0,\ t_1]$. Если управляющая функция (3.123) указывает значения управления в каждый момент времени в промежутке $t \in [t_0,\ t_1]$, то говорят о *программном или разомкнутом управлении* (рис. 3.14).

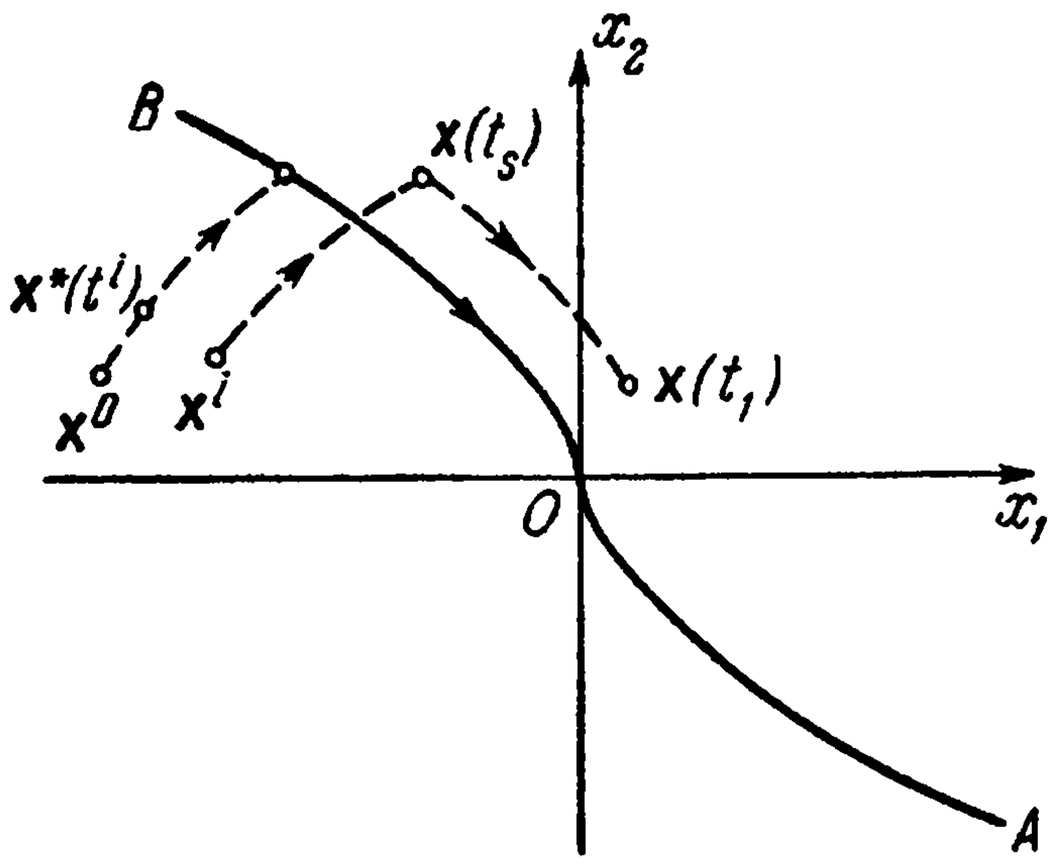

Рис. 3.15. Разомкнутое управление (пример п. 2.5).

К сожалению, однако, реально существующие системы несовершенны. С одной стороны, уравнения состояния могут не давать точного описания системы, с другой стороны, физическая реализация управления, заданного функцией (3.123), также может быть несовершенной. Поэтому в действительности система может не находиться в том состоянии, которое предписывается решением уравнений состояния. Рассмотрим, например, оптимальный по быстродействию регулятор, описанный в п. 2.5.

Если начальное состояние $\mathbf{x}^0$ лежит ниже кривой переключения AOB (рис. 3.15), то оптимальное разомкнутое управление имеет вид

$$\left.\begin{aligned} u^*(t) &= 1 \quad \text{на } [t_0, t_s], \\ u^*(t) &= -1 \quad \text{на } [t_s, t_1], \end{aligned}\right\} \tag{3.124}$$

где $t = t_s$ обозначает момент переключения. Пусть $\mathbf{x}^*(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ будет решением уравнений состояния при управлении $u = u^*(t)$, заданном функцией (3.124). Допустим, что при реализации управления была сделана ошибка и что в момент t^i состояние системы $\mathbf{x}^i \neq \mathbf{x}^*(t^i)$. Предположим также, что впоследствии система ведет себя безукоризненно, и пусть $\mathbf{x}(t)$, $t^i < t \leqslant t_1$ обозначает решение уравнений состояния при управлении (3.124). Очевидно, точка $\mathbf{x}(t_s)$ не лежит на кривой переключений AOB, и состояние $\mathbf{x}(t_1) \neq (0, 0)$. Поэтому управление (3.124) не является оптимальным для перехода из $\mathbf{x}^i$ в (0, 0). Оптимальное управление, однако, получится, если произвести переключение в тот момент, когда система достигнет кривой AOB, и затем сохранять значение управления равным — 1 до тех пор, пока не будет достигнуто состояние (0, 0) (рис. 3.16).

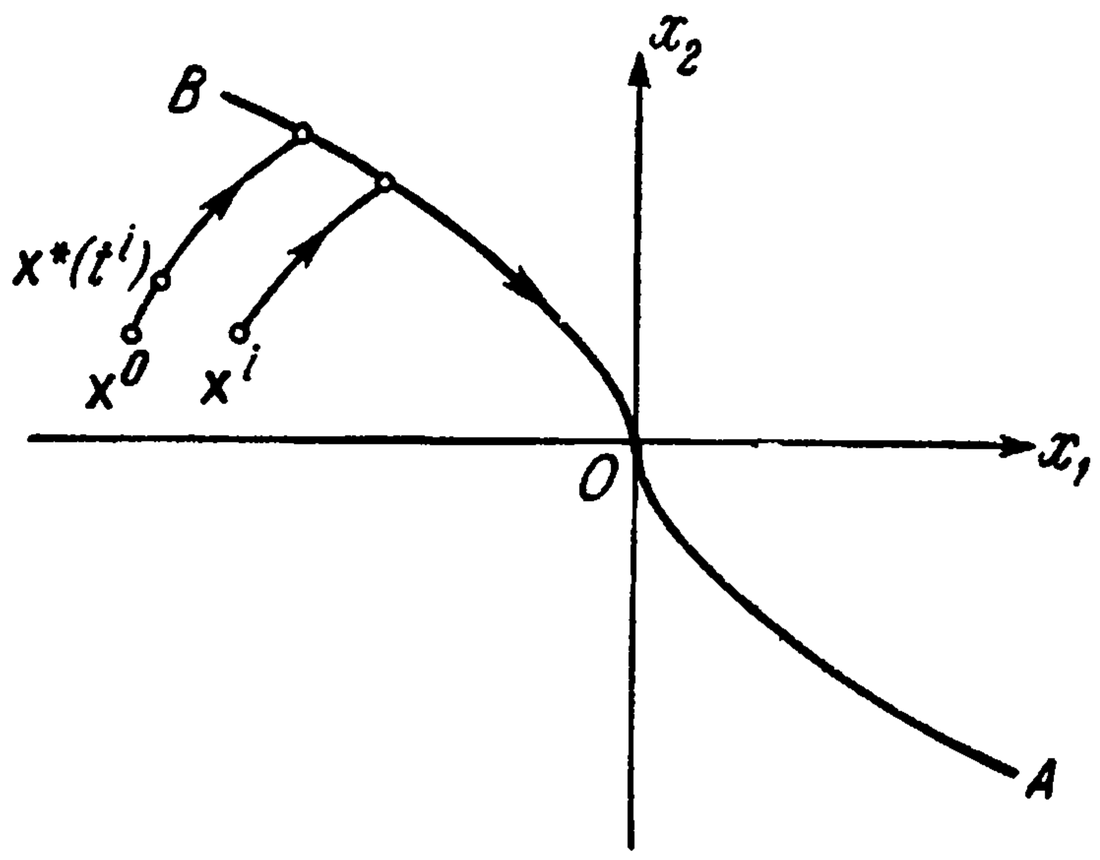

Рис. 3.16. Замкнутое управление (пример п. 2.5).

В общем случае, таким образом, оказывается желательным пересчитывать оптимальное управление в определенные моменты времени в процессе перехода, например, в моменты $t = t^i$, соответствующие *наблюдаемым* состояниям $\mathbf{x}^i$, $i = 1, 2, \ldots, \mu$. Если $\mu < \infty$, то говорят об *управлении с обратной связью по выбранным значениям переменных состояния*. В промежутках между *выбранными моментами времени* t^i и t^{i+1} управление является программным, т. е. $\mathbf{u}^*(t) = \boldsymbol{\varphi}(t; \mathbf{x}^i, t^i)$, $t^i < t \leqslant t^{i+1}$.

Если $\mu \to \infty$ или, что то же, если $t^{i+1} \to t^i$, то говорят о *непрерывной обратной связи или о замкнутом управлении* (рис. 3.17).

Можно избежать обременительной процедуры пересчета оптимального управления для последовательных начальных состояний $\mathbf{x}^i$, $i = 1, 2, \ldots, \mu$, если считать известной зависимость оптимального управления от состояния системы, а не от времени.

Если имеется такая зависимость, то говорят, что произведен *синтез* оптимального управления. Во многих рассмотренных выше примерах оптимальное управление известно как

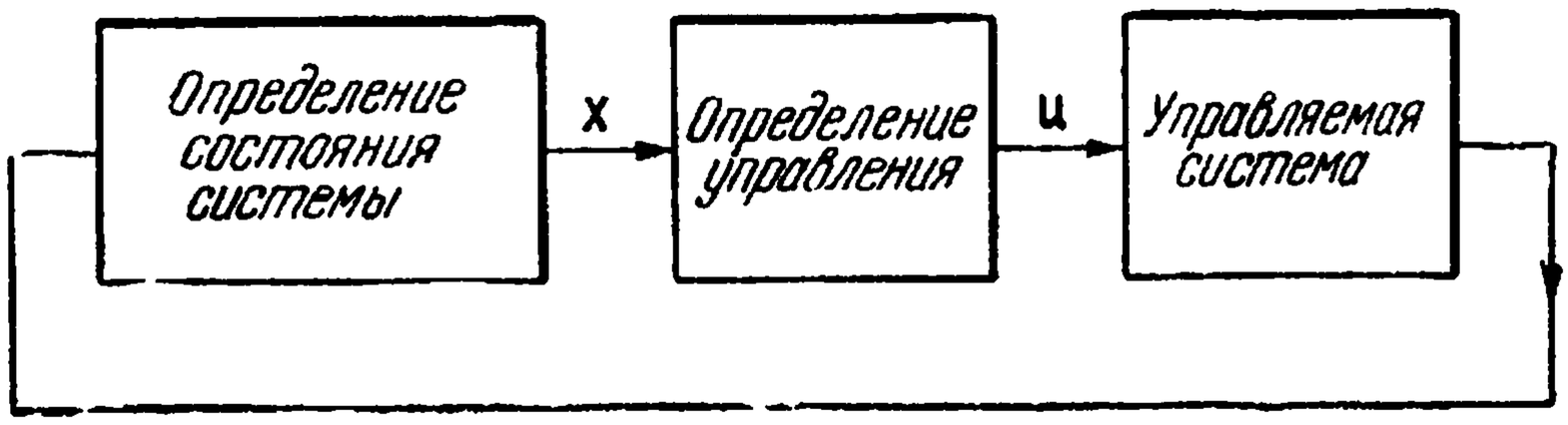

Рис. 3.17. Управление с обратной связью (замкнутое управление).

функция состояния (см., например, пп. 1.16, 1.17, 2.5, 2.6, 2.9, 3.5, 3.7, 3.9 и 3.11). В примерах пп. 2.8 и 3.2 синтез оптимального управления произведен не был.

3.13. Пример: оптимальное управление с обратной связью в задаче о встрече при минимальном расходе топлива

Для иллюстрации изложенной в п. 3.12 точки зрения вернемся к примеру п. 3.5. В этом примере рассматривается автономная система в случае, когда время перехода задано. Согласно рассуждениям пп. 3.3 и 3.4 время фигурирует как добавочная независимая переменная и, следовательно, участвует в характеристике состояния системы.

Уравнение (3.59) определяет оптимальное управление как функцию времени τ, остающегося до конечного момента, а также начального состояния (x_1^0, x_2^0) и времени перехода τ_1. Рассматривая состояние $\mathbf{x}^i$ в выбранный момент t^i как «начальное» состояние, мы сразу находим *управление с обратной*

связью по выбранным значениям переменных состояния, а именно:

$$\tilde{\mathbf{u}}(\tau) = \frac{2}{\tau_1^2}\left[(3x_1^i + x_2^i\tau_1) - (6x_1^i + 3x_2^i\tau_1)\frac{\tau}{\tau_1}\right], \quad (3.125)$$

где $\tau_1 = t_1 - t^i$, $\tau = t_1 - t$, $t_1 - t^{i+1} \leqslant \tau < t_1 - t^i$.

Совершая в (3.125) предельный переход $t^{i+1} \to t^i$, приходим к *управлению с непрерывной обратной связью*

$$\tilde{\mathbf{u}}(\tau) = -\frac{2}{\tau^2}[3x_1 + 2x_2\tau]. \quad (3.126)$$

Здесь $\tau = t_1 - t$ есть остающееся время, а (x_1, x_2) — текущее состояние системы. Интересно отметить, что замкнутое управление является линейной функцией текущего состояния. Далее, если текущее состояние при приближении к конечному моменту, т. е. при уменьшении τ, отличается от заданного конечного состояния (0, 0), то требуемое управление приобретает большие значения, как этого и следовало ожидать.

Упражнения

3.1. Дана система, описываемая уравнениями состояния

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \qquad \frac{dx_2}{dt} = u$$

при $|u| \leqslant 1$. Требуется перевести систему из состояния $\left(x_1^0, x_2^0\right)$ на многообразие $x_2 = 0$, минимизируя функционал

$$\int_{t_0}^{t_1} dt + \alpha x_1^2(t_1),$$

где $\alpha > 0$ заданное число. Найти экстремальное управление.

3.2. Дана система, рассмотренная в п. 3.2. Требуется минимизировать время перехода из начального состояния

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0, \qquad x_5 = x_5^0 > x_5^1$$

в конечное состояние

$$x_1 = x_1^1, \quad x_2 = x_3 = x_4 = 0, \quad x_5 = x_5^1 > 0.$$

Найти экстремальное управление.

3.3. Дана система, рассмотренная в п. 3.2. Требуется перевести систему из состояния $\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_5^0\right)$ на многообразие $x_2 = x_2^1$ и

$x_5 = x_5^1 < x_5^0$, максимизируя конечное значение x_1. Найти экстремальное управление, пользуясь результатами п. 3.1.

3.4. Дана система, рассмотренная в п. 3.2. Требуется перевести систему из состояния $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_5^0)$ на многообразие $x_5 = x_5^1 < x_5^0$, максимизируя конечное значение x_3. Найти экстремальное управление.

3.5. Рассмотреть пример, разобранный в п. 3.2. Показать, что последовательность переключений $u_3 = 0 \to u_3 = u_3^{\max} \to u_3 = 0$ несовместима с теоремой 2.

3.6. Полет ракеты ограниченной мощности, совершающийся в одной и той же плоскости, описывается следующими уравнениями состояния:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_3, \qquad \frac{dx_2}{dt} = x_4, \qquad \frac{dx_3}{dt} = \frac{u_1 u_3 u_4}{x_5},$$

$$\frac{dx_4}{dt} = \frac{u_2 u_3 u_4}{x_5}, \quad \frac{dx_5}{dt} = -u_4;$$

множество U значений управления задается соотношениями

$$u_1^2 + u_2^2 = 1, \quad 0 \leqslant u_3^2 u_4 \leqslant \alpha, \quad 0 \leqslant u_3 \leqslant \beta, \quad 0 \leqslant u_4 \leqslant \gamma,$$

где α, β, γ — заданные положительные постоянные. Найти экстремальное управление, предполагая, что $\beta^2\gamma > \alpha$. Показать, в частности, что экстремальное управление принадлежит границе множества U, если показатель качества является функцией конечного состояния системы.

3.7. Дана система, описываемая уравнением состояния

$$\frac{dx_1}{dt} = u$$

с ограничением на управление $|u| \leqslant 1$. Требуется перевести систему за заданное время $t_1 - t_0 = \tau_1$ из $x_1 = x_1^0$ в $x_1 = x_1^1$, минимизируя значение функционала

$$\int_{t_0}^{t_1} x_1^2(t)\, dt.$$

Найти экстремальное управление.

3.8. Рассмотреть пример п. 3.7. Показать, что надлежащей заменой управляющей переменной можно свести задачу к проблеме с *постоянным* множеством значений управления. Найти экстремальное управление.

3.9. Уравнения движения ракеты, совершающей горизонтальный полет над поверхностью планеты, лишенной атмосферы, имеют вид

$$\frac{dx_1}{dt} = \left[\left(\frac{cu_3}{x_3}\right)^2 - g^2\right]^{1/2} u_1, \qquad \frac{dx_2}{dt} = \left[\left(\frac{cu_3}{x_3}\right)^2 - g^2\right]^{1/2} u_2,$$

$$\frac{dx_3}{dt} = -u_3;$$

здесь c и g — положительные постоянные, а множество U определено соотношениями

$$u_1^2 + u_2^2 = 1, \qquad \frac{g}{c} x_5 \leqslant u_3 \leqslant u_3^{\max},$$

где $u_3^{\max}$ — заданное число. Требуется перевести систему из состояния $\left(x_1^0, x_2^0, x_3^0\right)$ на многообразие $x_1 = x_1^1$, $x_2 = x_2^1$ таким образом, чтобы конечное значение x_3 было максимально. Найти экстремальное управление.

3.10. Рассмотреть систему, описанную в упражнении 3.9. Требуется перевести ее из состояния $\left(x_1^0, x_2^0, x_3^0\right)$ на многообразие $x_1 = x_1^1$, $x_2 = x_2^1$, минимизируя время перехода $t_1 - t_0$. Найти экстремальное управление.

3.11. Для задачи, рассмотренной в п. 3.7, определить значение времени перехода, соответствующее экстремальному управлению.

3.12. Уравнения, описывающие прямолинейное движение ракеты, имеют вид

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \qquad \frac{dx_2}{dt} = \frac{wu}{x_3}, \qquad \frac{dx_3}{dt} = -u.$$

Ограничения на управляющую функцию u и на значения постоянного параметра w таковы:

$$0 \leqslant u \leqslant u^{\max}, \quad 0 \leqslant w \leqslant w^{\max}.$$

Здесь $u^{\max}$ и $w^{\max}$ — заданные положительные числа. Требуется перевести систему из состояния $\left(x_1^0, x_2^0, x_3^0\right)$ на многообразие $x_1 = x_1^1$, $x_2 = x_2^1$, максимизируя конечное значение x_3. Найти экстремальное управление.

3.13. Рассмотреть задачу п. 3.5. На этот раз, однако, время перехода не задано: вместо этого указана верхняя граница величины времени перехода, а именно, $t_1 - t_0 \leqslant \tau_1$, где τ_1 — заданное положительное число. Найти экстремальное управление.

3.14. Показать, что результаты п. 3.10, относящиеся к неравенствам, ограничивающим значения переменных состояния в конечной точке, могут быть формально получены введением подходящей дополнительной фазовой переменной.

3.15. Рассмотреть так называемую задачу Больца: в классе функций $x_j = x_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, обладающих кусочно-непрерывными первыми производными и удовлетворяющих в промежутке $[t_0, t_1]$ дифференциальным уравнениям

$$\frac{dx_j}{dt} - f_j\left(t, x_1, \ldots, x_n, \frac{dx_{k+1}}{dt}, \ldots, \frac{dx_n}{dt}\right) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, k < n$$

и краевым условиям

$$\theta_\rho^0(t_0, x_1(t_0), \ldots, x_n(t_0)) = 0, \qquad \rho = 1, 2, \ldots, p \leqslant n+1,$$
$$\theta_\sigma^1(t_1, x_1(t_1), \ldots, x_n(t_1)) = 0, \qquad \sigma = 1, 2, \ldots, q \leqslant n+1,$$

найти функции $x_j = x_j^*(t)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, минимизирующие функционал

$$J \triangleq G(t_1, x_1(t_1), \ldots, x_n(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} f\left(t, x_1, \ldots, x_n, \frac{dx_1}{dt}, \ldots, \frac{dx_n}{dt}\right) dt.$$

Воспользоваться теоремой 2 для вывода правила множителей и условия Вейерштрасса вариационного исчисления.

ГЛАВА 4

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА УПРАВЛЯЮЩИЕ ФУНКЦИИ И ПЕРЕМЕННЫЕ СОСТОЯНИЯ

4.1. Ограничения на переменные состояния

До сих пор предметом нашего рассмотрения были такие системы, где допустимое управление принимает значения в пределах заданного множества, зависящего от переменных состояния или постоянного, но в которых переменные состояния не подчинены a priori каким-либо связям. В некоторых задачах, однако, требуется, чтобы состояния системы находились в заданной области пространства состояний. Например, при определении кривой минимальной длины, соединяющей две заданные точки, может оказаться недопустимым прохождение через точки некоторой области, например, через болото или топь (см. пример 4.1).

Здесь будут рассмотрены некоторые особенности оптимальных проблем, в которых требуется, чтобы состояния системы находились в заданной *замкнутой* области $B \subset E^n$ пространства состояний. Иными словами, мы будем принимать во внимание лишь те пути, соединяющие начальное многообразие θ^0 с конечным θ^1, которые целиком расположены в B, т. е.

$$\mathbf{x}(t) \in B \qquad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Такие пути будут называться допустимыми. В частности, нас будут интересовать ограничения типа

$$B \triangleq \{\mathbf{x} : g(\mathbf{x}) \leqslant 0\},$$

где $g(\mathbf{x})$ — заданная функция, имеющая непрерывные частные производные второго порядка в окрестности границы B, обозначаемой через ∂B и определяемой равенством $g(\mathbf{x}) = 0$.

Поскольку $g(\boldsymbol{x}) \equiv g(\mathbf{x})$, мы вправе рассматривать цилиндрическую область G в пространстве E^{n+1} (ось цилиндра

параллельна оси x_0):

$$G \triangleq \{x : g(x) \leqslant 0\}. \tag{4.1}$$

Все траектории, проекции которых на E^n представляют собой допустимые пути, будут называться допустимыми траекториями (рис. 4.1). Таким образом, все допустимые траектории полностью расположены в области G, т. е. $x(t) \in G$ $\forall t \in [t_0, t_1]$.

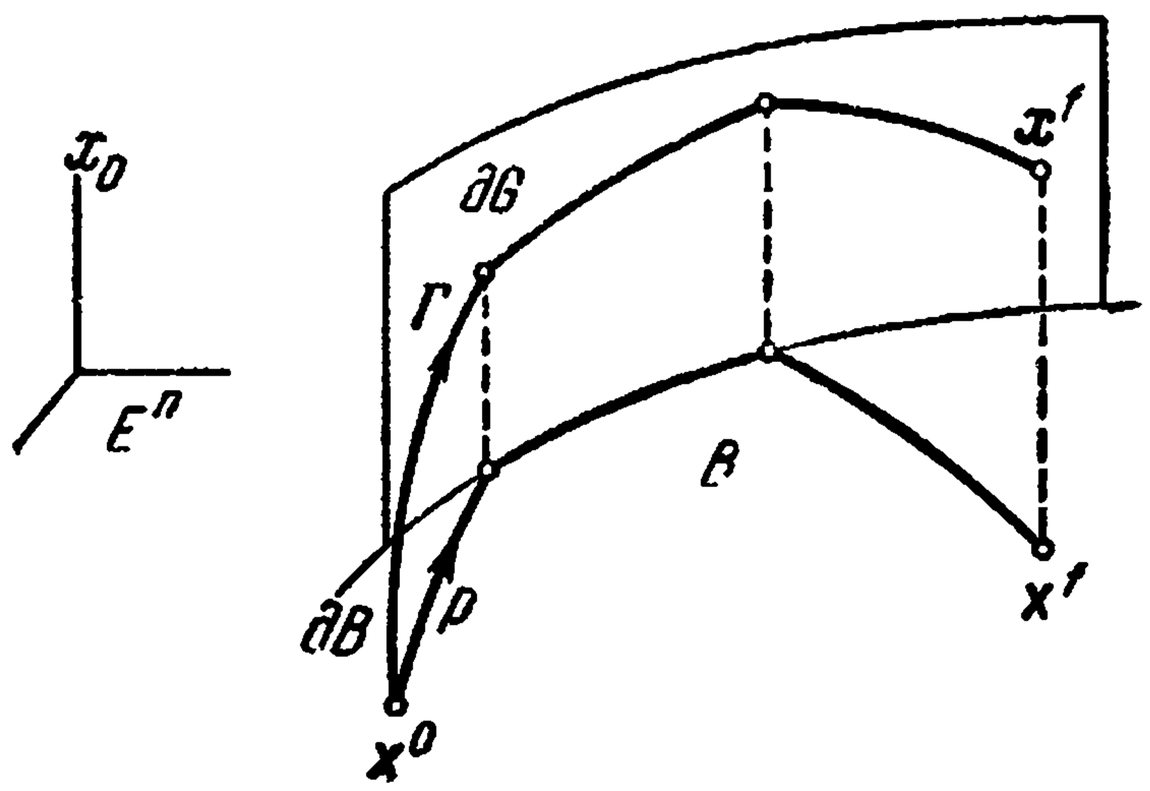

Рис. 4.1. Допустимый путь и допустимая траектория.

Нас особенно будут интересовать отрезки оптимальной траектории, которые принадлежат границе ∂G области G, заданной соотношением (4.1). Граница ∂G является гладкой n-мерной цилиндрической поверхностью, определяемой уравнением $g(x) = 0$, и такой, что вектор

$$\nabla g(x) \triangleq \operatorname{grad} g(x) = \left(0, \frac{\partial g}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial g}{\partial x_n}\right)$$

не обращается в нуль в каждой точке границы ∂G.

4.2. Ограничения на управления

В дальнейшем мы ограничимся задачами, для которых множество U значений управлений дается соотношениями

$$\psi_\beta(\mathbf{u}) \leqslant 0, \qquad \beta = 1, 2, \ldots, s, \tag{4.2}$$

где функции $\psi_\beta(\mathbf{u})$ и $\partial\psi_\beta(\mathbf{u})/\partial u_k$, $\beta = 1, 2, \ldots, s$, $k = 1, 2, \ldots, m$ определены и непрерывны в окрестности границы ∂U области U.

Рассмотрим теперь оптимальную траекторию Γ^*, соответствующую управлению $\mathbf{u}^*(t)$ и решению $x^*(t_0)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. Предположим, что в некоторый момент $t' \in [t_0, t_1]$

$$x^*(t') \in \partial G \quad \text{и} \quad \mathbf{u}^*(t') \in \partial U.$$

Иначе говоря, значение $\mathbf{u}^*(t')$ управления таково, что

$$\psi_\beta(\mathbf{u}^*(t')) = 0, \qquad \beta = 1, 2, \ldots, r. \tag{4.3}$$ *)

Нам понадобится скалярная функция

$$p(x, \mathbf{u}) \triangleq \nabla g(x) \cdot \mathbf{f}(x, \mathbf{u}) \tag{4.4}$$

и векторные функции

$$\nabla_u p(x, \mathbf{u}) \triangleq \left(\frac{\partial p}{\partial u_1}, \frac{\partial p}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial p}{\partial u_m}\right)$$

и

$$\nabla_u \psi_\beta(\mathbf{u}) \triangleq \left(\frac{\partial \psi_\beta}{\partial u_1}, \frac{\partial \psi_\beta}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial \psi_\beta}{\partial u_m}\right).$$

Предположим, что $\nabla_u p(x, \mathbf{u}) \neq 0$ и что векторы $\nabla_u p(x, \mathbf{u})$, $\nabla_u \psi_1(\mathbf{u}), \ldots, \nabla_u \psi_r(\mathbf{u})$ линейно независимы при $x = x^*(t')$ и $\mathbf{u} = \mathbf{u}^*(t')$. Далее будем предполагать, что функции $f_i(x, \mathbf{u})$ и $\partial f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u})/\partial x_j$, а также $\partial f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u})/\partial u_k$, $i = 0, 1, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $k = 1, 2, \ldots, m$ определены и непрерывны на множестве $\hat{B} \times \hat{U}$, где $\hat{B}$ и $\hat{U}$ — открытые множества, содержащие, соответственно, множества B и U.

Как выяснится ниже, эти предположения будут полезны, поскольку они позволят привести задачу к уже исследованной ранее форме.

4.3. Оптимальная траектория, лежащая на заданной границе

При доказательстве теоремы 2 (принцип максимума) рассмотрению подлежали лишь малые окрестности оптимальной траектории Γ^*, как, например, это было при переносе касательной плоскости к предельной поверхности Σ. Таким образом, теорема 2 применима к точкам Γ^*, лежащим *внутри* области G. По этой причине нас будут сейчас интересовать те отрезки Γ^*, которые принадлежат границе ∂G.

Рассмотрим оптимальную траекторию Γ^*, отвечающую управлению $\mathbf{u}^*(t)$ и решению $x^*(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, и такую, что

$$x^*(t) \in \partial G \qquad \forall t \in [t_e, t_l]. \tag{4.5}$$

---

*) Всегда можно, изменяя в случае необходимости нумерацию формул (4.2), считать равенствами первые r соотношений (4.2).

где $t_0 \leqslant t_e < t_l \leqslant t_1$. Точки $x^*(t_e)$ и $x^*(t_l)$ называются, соответственно, точкой выхода на границу и точкой схода с границы. Согласно (4.5) и определению (4.4) имеем

$$p(x^*(t),\ u^*(t)) = 0 \qquad \forall t \in [t_e,\ t_l]. \tag{4.6}$$

Выясним, каким изменениям подвергнется теорема 2 для точек Γ^*, лежащих на ∂G. Пусть Σ будет предельной поверхностью, на которой лежит Γ^*. Ограничим рассмотрение случаем, когда существует окрестность $\mathcal{N}$ точки $x \in \partial G$ в пространстве E^{n+1}, такая, что все точки $\mathcal{N} \cap E$ суть *регулярные* точки Σ; иначе говоря, касательная плоскость $T_\Sigma(x)$

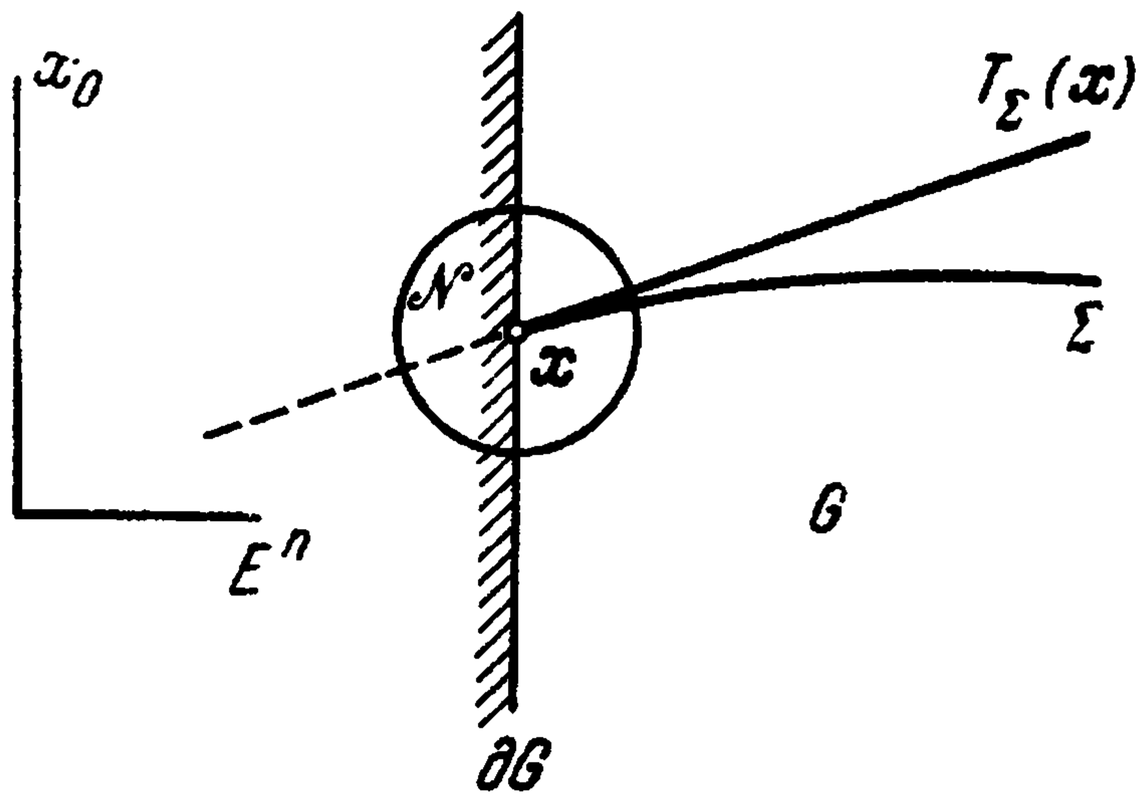

Рис. 4.2. Касательная плоскость к поверхности Σ в граничной точке.

определена для всех $x \in \mathcal{N} \cap \Sigma$. В частности, плоскость $T_\Sigma(x)$ определена для $x \in \partial G \cap \Sigma$ (рис. 4.2).

Вспомним теперь основные пункты доказательства теоремы 2. Как и в п. 1.8, мы рассматриваем окрестность на поверхности Σ точки выхода $x^*(t_e)$, обозначаемую через $\Delta(x^*(t_e))$, и изучаем ее преобразование вдоль Γ^*, совершаемое посредством уравнений траекторий (1.11) при надлежаще выбранном допустимом управлении $\mathbf{u}(t)$, $t_e \leqslant t \leqslant t_l$. В п. 1.8 рассматривалось такое же преобразование при переходе между *регулярными внутренними* точками Σ с помощью подходящего управления $\mathbf{u}^*(t)$; теорема 1 и лемма 4 привели вслед за этим к лемме 5, касающейся переноса плоскости $T_\Sigma(x^*(t))$ с помощью линейного преобразования, определяемого уравнениями в вариациях (1.13).

Положение дел в настоящем пункте отличается от ситуации п. 1.8 в двух основных отношениях. Поскольку поверхность Σ не определена в точках, расположенных вне области G, точки $\boldsymbol{x}^*(t)$ $t_e \leqslant t \leqslant t_l$ не являются регулярными *внутренними* точками Σ (рис. 4.2). Кроме того, для применимости теоремы 1 необходимо, чтобы траектории, выходящие в момент t_e из точек области $\Delta(\boldsymbol{x}^*(t_e))$, были допустимы. Рассмотрим это последнее требование более подробно.

4.4. Ограниченное множество значений управления

Отметим еще раз, что область $\Delta(\boldsymbol{x}^*(t_e))$ должна быть преобразована с помощью допустимого управления, т. е. управления

$$\mathbf{u}(t) \in U \qquad \forall t \in [t_e,\ t_l], \tag{4.7}$$

и такого, что соответствующее решение уравнений (1.11) определяет допустимую траекторию

$$\boldsymbol{x}(t) \in G \qquad \forall t \in [t_e,\ t_l]. \tag{4.8}$$

Чтобы удовлетворить условию (4.8), подчиним $\mathbf{u}(t)$ дополнительному ограничению

$$p(\boldsymbol{x}(t),\ \mathbf{u}(t)) = 0 \qquad \forall t \in [t_e,\ t_l]. \tag{4.9}$$

Легко видеть, что условие (4.9) вместе с

$$\Delta(\boldsymbol{x}^*(t_e)) \subset \Sigma \subset G \tag{4.10}$$

эквивалентно (4.8). В самом деле, согласно определению (4.4) имеем

$$\frac{dg(\boldsymbol{x}(t))}{dt} = p(\boldsymbol{x}(t),\ \mathbf{u}(t)),$$

так что (4.9) показывает, что

$$g(\boldsymbol{x}(t)) = \text{const} \qquad \forall t \in [t_e,\ t_l]. \tag{4.11}$$

Но согласно (4.10)

$$g(\boldsymbol{x}(t_e)) \leqslant 0. \tag{4.12}$$

Условия (4.11) и (4.12) влекут за собой (4.8). Таким образом, подходящим допустимым управлением, реализующим перенос $\Delta(\boldsymbol{x}^*(t_e))$, является такое управление, значения

где

$$\nabla p(x, u) \triangleq \left(\frac{\partial p}{\partial x_0}, \frac{\partial p}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial p}{\partial x_n}\right).$$

Рассмотрим теперь второе обстоятельство, отличающее нашу задачу от задачи п. 1.8. Поскольку точки $\Delta(x^*(t))$, $t_e \leqslant t \leqslant t_l$ принадлежат допустимым траекториям, начальные точки которых расположены на Σ, из теоремы 1 следует, что никакая точка $\Delta(x^*(t))$ не является B-точкой относительно Σ; в этом смысле положение не изменилось по сравнению с п. 1.8. С другой стороны, однако, точка $x^*(t) \in \partial G$

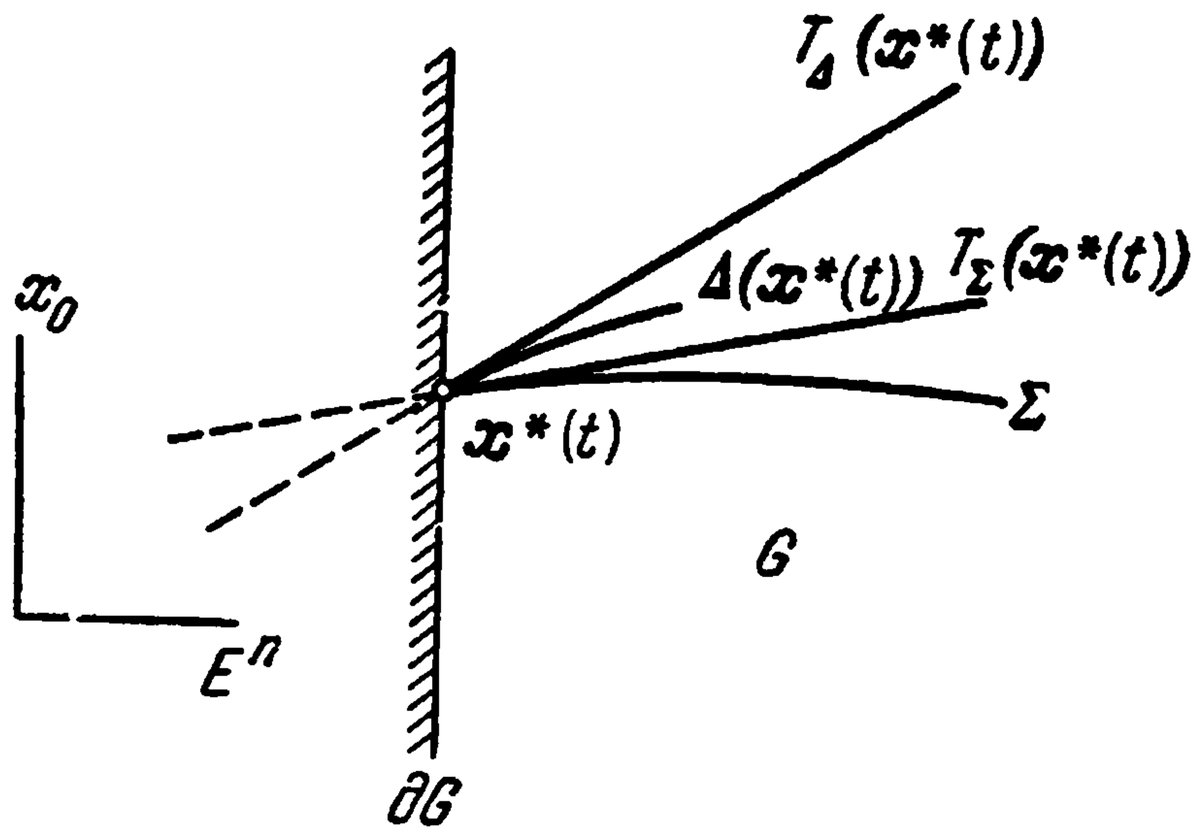

Рис. 4.3. Поверхности Σ и $\Delta(x^*(t))$.

и, следовательно, не является регулярной *внутренней* точкой Σ, как это было уже отмечено в конце предыдущего пункта. Таким образом, хотя поверхности $\Delta(x^*(t))$ и Σ не пересекаются, мы не вправе заключить, что они имеют общую касательную плоскость в точке $x^*(t)$, $t_e \leqslant t \leqslant t_l$ (рис. 4.3). Иными словами, хотя

$$T_\Delta(x^*(t_e)) = T_\Sigma(x^*(t_e)),$$

мы не можем сделать вывод, что $T_\Delta(x^*(t)) = T_\Sigma(x^*(t))$ при всех $t \in [t_e, t_l]$. В частности, нельзя утверждать, что вектор $\lambda(t)$ нормален к плоскости $T_\Sigma(x^*(t))$ при всех $t \in [t_e, t_l]$.

4.5. Соотношение между нормалями

В этом пункте будет выведено соотношение между векторами, нормальными к касательным плоскостям к поверхностям Σ, $\Delta(x^*(t))$ и ∂G в точке $x^*(t)$, $t_e \leqslant t \leqslant t_l$.

Как и в п. 1.9, обозначим через $\mathbf{n}(x)$ единичный вектор, направленный по нормали к $T_\Sigma(x)$ в сторону области B/Σ в регулярной *внутренней* точке x поверхности Σ. Рассмотрим такую регулярную внутреннюю точку $x = x^*(t) + \Delta x \in \mathcal{N} \cap \Sigma$ вместе с соответствующей нормалью $\mathbf{n}(x)$. Нормаль $\mathbf{n}(x^*(t))$ определится путем предельного перехода $|\Delta x| \to 0$.

Пусть теперь $\mathbf{N}(x)$—вектор, нормальный к $T_\Sigma(x)$ в точке $x \in \mathcal{N} \cap \Sigma$ и такой, что

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{N}(x) &\triangleq -\operatorname{grad}\Phi(x), \quad n_0(x) \neq 0, \\ \mathbf{N}(x) &\triangleq k\mathbf{n}(x), \quad k > 0, \quad n_0(x) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{4.16}$$

где $\Phi(x) = C$ представляет уравнение поверхности Σ, а k — произвольное положительное число.

Кроме того, положим

$$\lambda(t_e) = \mathbf{N}(x^*(t_e)). \tag{4.17}$$

Это равенство естественно, поскольку

$$T_\Delta(x^*(t_e)) = T_\Sigma(x^*(t_e)).$$

Далее, поскольку x_0 не входит явно в уравнение (4.15), снова имеем равенство

$$\lambda_0(t) \equiv \text{const}, \quad t_e \leqslant t \leqslant t_l. \tag{4.18}$$

Отсюда, с учетом (4.16) и (4.17), получаем

$$\left.\begin{aligned} \lambda_0(t) &= -1, \quad n_0(x^*(t_e)) \neq 0, \\ \lambda_0(t) &= 0, \quad n_0(x^*(t_e)) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{4.19}$$

при всех $t \in [t_e, t_l]$.

Третий рассматриваемый вектор есть вектор $\nabla g(x^*(t))$, нормальный к касательной плоскости $T_{\partial G}(x^*(t))$ границы ∂G в точке $x^*(t)$.

Лемма 8. *Пусть Γ^* будет оптимальной траекторией, соответствующей решению $x^*(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ и принадлежащей в течение промежутка времени $[t_e, t_l]$ границе ∂G. Если**) *при этом вектор, направленный внутрь области G, одновременно направлен внутрь области $\mathcal{G}^*$, то векторы $\lambda(t)$, $\mathbf{N}(x^*(t))$ и $\nabla g(x^*(t))$ линейно зависимы. Далее, если*

---

*) Это условие тривиально, если $G = \mathcal{G}^*$ (см. пример 4.1).

векторы $\lambda(t)$ *и* $\nabla g(x^*(t))$, *а также* $\mathbf{N}(x^*(t))$ и $\nabla g(x^*(t))$ *линейно независимы, то*

$$\lambda(t) = \mathbf{N}(x^*(t)) + \mu(t)\nabla g(x^*(t)), \qquad \mu(t) \leqslant 0 \quad (4.20)$$

для всех $t \in [t_e, t_l]$, *причем* $\mu(t)$ *непрерывна в промежутке* $[t_e, t_l]$.

Докажем сначала, что три вектора нормалей линейно зависимы. Предположим, что это не так: пусть в точке $x' = x^*(t')$, $t' \in [t_e, t_l]$ векторы $\lambda(t')$, $\mathbf{N}(x')$ и $\nabla g(x')$ линейно независимы. Пусть

$$L(x') \triangleq T_\Delta(x') \cap T_\Sigma(x') \cap T_{\partial G}(x').$$

Тогда можно указать пару векторов α и β в точке x' таких, что

$$\left.\begin{aligned} &\alpha \in T_\Delta(x') \cap T_\Sigma(x') - L(x'), \\ &\lambda(t') \cdot \alpha = \mathbf{N}(x') \cdot \alpha = 0 \quad \text{и} \quad \Delta g(x') \cdot \alpha < 0 \end{aligned}\right\} \quad (4.21)\ ^*)$$

и

$$\left.\begin{aligned} &\beta \in T_\Delta(x') \cap T_{\partial G}(x') - L(x'), \\ &\lambda(t') \cdot \beta = \nabla g(x') \cdot \beta = 0 \quad \text{и} \quad \mathbf{N}(x') \cdot \beta > 0. \end{aligned}\right\} \quad (4.22)$$

Рассмотрим вместе с тем вектор $\eta \triangleq c\alpha + d\beta$, где c и d — положительные числа. Тогда из (4.21) и (4.22) следует, что

$$\nabla g(x') \cdot \eta < 0 \quad (4.23)$$

и

$$\mathbf{N}(x') \cdot \eta > 0. \quad (4.24)$$

Неравенство (4.23) показывает, что вектор η направлен в область G и, следовательно, согласно условию леммы, в область $\mathscr{E}^*$. Неравенство (4.24) приводит тогда к заключению о том, что η направлен внутрь области B/Σ. Иными словами, существует положительное число δ такое, что для всех ε, $0 < \varepsilon \leqslant \delta$ точка $x' + \varepsilon\eta$ принадлежит области B/Σ. Но согласно (4.21) и (4.22) вектор η принадлежит $T_\Delta(x')$, так что точка $x' + \varepsilon\eta$ расположена в $T_\Delta(x')$. Можно показать **), что каждой точке $x' + \varepsilon\eta \in T_\Delta(x')$ и $\mathscr{E}^*$ при достаточно

---

*) Вычитание следует понимать в теоретико-множественном смысле; например, $T_\Delta \cap T_\Sigma - L$ обозначает замыкание L в $T_\Delta \cap T_\Sigma$.

) Доказательство этого утверждения опирается на линейное преобразование, определяемое уравнением в вариациях (3.75); оно предоставляется читателю в качестве упражнения (см. **упражнение 4.1).

малом $\varepsilon > 0$ соответствует точка $x' + \varepsilon\eta + o(\varepsilon) \in \Delta(x')$. После этого становится очевидным, что условие $x' + \varepsilon\eta \in B/\Sigma$ влечет за собой $x' + \varepsilon\eta + o(\varepsilon) \in \Delta(x')$ и B/Σ для достаточно малых ε. Этот вывод противоречит результату п. 4.4, который гласит, что $\Delta(x')$ не содержит B-точек относительно Σ. Таким образом, первая часть леммы доказана: в каждый момент времени $t \in [t_e, t_l]$ существуют числа c_i, $i = 1, 2, 3$, не все равные нулю и такие, что

$$c_1\lambda(t) + c_2\mathbf{N}(x^*(t)) + c_3\nabla g(x^*(t)) = 0. \qquad (4.25)$$

Докажем теперь справедливость соотношения (4.20). Нам придется рассмотреть два случая:

(1) $\lambda_0(t) \equiv -1$. Если $n_0(x^*(t)) = 0$, то согласно (4.16) $N_0(x^*(t)) = 0$. В этом случае нулевая компонента (4.25) показывает, что $c_1 = 0$, поскольку нулевая компонента вектора $\nabla g(x^*(t))$ исчезает. Но векторы $\mathbf{N}(x^*(t))$ и $\nabla g(x^*(t))$ коллинеарны и, следовательно, линейно зависимы, что противоречит условию леммы. Поэтому $n_0(x^*(t)) \neq 0$, так что согласно (4.16) $N_0(x^*(t)) = 1$. Вновь рассматривая нулевую компоненту (4.25), находим, что $c_1 = -c_2$. Наконец, из неравенства $\nabla g(x^*(t)) \neq 0$ и соотношения (4.25) заключаем, что $c_1 = -c_2 \neq 0$. Таким образом, справедливость (4.20) установлена; следует считать, что $\mu(t) = -c_3/c_1$. Непрерывность $\mu(t)$ непосредственно следует из непрерывности $\lambda(t)$, $\mathbf{N}(x^*(t))$ и $\nabla g(x^*(t))$ в промежутке $[t_e, t_l]$.

(2) $\lambda_0(t) \equiv 0$. Согласно (4.25) и (4.16) существуют числа d_i, $i = 1, 2, 3$, не все равные нулю и такие, что

$$d_1\lambda(t) + d_2\mathbf{n}(x^*(t)) + d_3\nabla g(x^*(t)) = 0.$$

Нулевая компонента этого уравнения показывает, что либо $d_2 = 0$, либо $n_0(x^*(t)) = 0$. Но равенство $d_2 = 0$ в свою очередь влечет за собой линейную зависимость векторов $\lambda(t)$ и $\nabla g(x^*(t))$, что противоречит условию. Поэтому $n_0(x^*(t)) = 0$, а отсюда, в соответствии с (4.16), выводим, что $\mathbf{N}(x^*(t)) = k\mathbf{n}(x^*(t))$, $k > 0$. Согласно условию $\mathbf{N}(x^*(t))$, а значит, и $\mathbf{n}(x^*(t))$, и $\nabla g(x^*(t))$ линейно независимы, так что $d_1 \neq 0$. Следовательно, мы имеем

$$-\lambda(t) = \frac{d_2}{d_1}\mathbf{n}(x^*(t)) + \frac{d_3}{d_1}\nabla g(x^*(t)). \qquad (4.26)$$

Коэффициенты d_2/d_1 и d_3/d_1 являются непрерывными функциями в промежутке $[t_e, t_l]$. Это вытекает из непрерывности трех векторов нормалей, а также из предполагаемой линейной независимости $\lambda(t)$ и $\nabla g(x^*(t))$, а также $\mathbf{n}(x^*(t))$ и $\nabla g(x^*(t))$. Допустим, что d_2/d_1 и d_3/d_1 терпят разрывы непрерывности на величины δ и δ' соответственно:

$$-\lambda(t) = \frac{d_2}{d_1}\mathbf{n}(x^*(t)) + \frac{d_3}{d_1}\nabla g(x^*(t)),$$

$$-\lambda(t+0) = \left(\frac{d_2}{d_1}+\delta\right)\mathbf{n}(x^*(t+0)) + \left(\frac{d_3}{d_1}+\delta'\right)\nabla g(x^*(t+0)).$$

Отсюда следует, что $\delta n(x^*(t)) + \delta' \nabla g(x^*(t)) = 0$, а это противоречит условию, если $\delta \neq 0$ и $\delta' \neq 0$. В момент $t = t_e$ из (4.17) и (4.26), а также из предполагаемой линейной независимости $\mathbf{n}(x^*(t))$ и $\nabla g(x^*(t))$ следует, что $\frac{d_2}{d_1} = -k < 0$. Но предполагаемая линейная независимость $\lambda(t)$ и $\nabla g(x^*(t))$ вместе с непрерывностью d_2/d_1 показывают, что $d_2/d_1 < 0$ для всех $t \in [t_e, t_l]$. Наконец, полагая $k = -d_2/d_1$ и $\mu = -d_3/d_1$, получаем (4.20). Чтобы завершить доказательство леммы 8, нужно только показать, что $\mu(t) \leqslant 0$.

Рассмотрим точку

$$x^*(t) + \varepsilon\eta + \mathbf{o}(\varepsilon) \in \Delta(x^*(t)), \qquad \varepsilon > 0,$$

где

$$\eta \in T_\Delta(x^*(t)), \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mathbf{o}(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0 \tag{4.27}$$

и

$$\nabla g(x^*(t)) \cdot \eta < 0, \tag{4.28}$$

так что вектор η направлен внутрь области G. Поскольку $\Delta(x^*(t))$ не имеет B-точек относительно Σ, получаем неравенство

$$\mathbf{N}(x^*(t)) \cdot \eta \leqslant 0. \tag{4.29}$$

Но из (4.20) и (4.27) вытекает, что

$$\mathbf{N}(x^*(t)) \cdot \eta + \mu(t)\nabla g(x^*(t)) \cdot \eta = 0.$$

Это соотношение вместе с (4.29) приводит к требуемому результату и завершает доказательство леммы 8.

4.6. Ограниченный принцип максимума

Вспомним теперь определение ограниченного множества значений управления $\Omega \subset U$. В частности, отметим, что

$$\nabla g(x^*(t)) \cdot \mathbf{f}(x^*(t), \mathbf{u}) = 0 \qquad \forall \mathbf{u} \in \Omega.$$

Из (4.20) поэтому следует, что

$$\boldsymbol{\lambda}(t) \cdot \mathbf{f}(x^*(t), \mathbf{u}) = \mathbf{N}(x^*(t)) \cdot \mathbf{f}(x^*(t), \mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{u} \in \Omega, \quad \forall t \in [t_e, t_l]. \tag{4.30}$$

Далее, поскольку $\mathbf{f}(x, \mathbf{u})$ и $\mathbf{n}(x)$ — непрерывные функции от x на множестве $\mathscr{N} \cap \Sigma$, к точке $x^*(t) \in \partial G$ оказываются применимы соотношения (1.19) и (1.20), а именно:

$$\mathbf{N}(x^*(t)) \cdot \mathbf{f}(x^*(t), \mathbf{u}) \leqslant 0 \qquad \forall \mathbf{u} \in U \tag{4.31}$$

и

$$\mathbf{N}(x^*(t)) \cdot \mathbf{f}(x^*(t), \mathbf{u}^*(t)) = 0. \tag{4.32}$$

Эти соотношения совместно с (4.30) показывают, что

$$\boldsymbol{\lambda}(t) \cdot \mathbf{f}(x^*(t), \mathbf{u}) \leqslant 0 \qquad \forall \mathbf{u} \in \Omega \tag{4.33}$$

и

$$\boldsymbol{\lambda}(t) \cdot \mathbf{f}(x^*(t), \mathbf{u}^*(t)) = 0. \tag{4.34}$$

В противоположность соотношениям (1.24) и (1.25), применимым в регулярных *внутренних* точках Σ, относительно (4.33) и (4.34) мы замечаем, что:

(1) $\boldsymbol{\lambda}(t)$ удовлетворяет (1.21) для первого из этих соотношений и удовлетворяет (4.15) для второго из них;

(2) $\mathbf{u} \in U$ в первом из этих соотношений и $\mathbf{u} \in \Omega$ во втором.

Благодаря второму из этих замечаний мы назовем следующую теорему «ограниченным» принципом максимума.

Теорема 4. *Если* $\mathbf{u}^*(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ *— оптимальное управление и если* $x^*(t) \in \partial G$ *при всех* $t \in [t_e, t_l]$, $t_0 \leqslant t_e < t_l \leqslant t_1$, *то существует ненулевая непрерывная векторная функция* $\boldsymbol{\lambda}(t)$, *удовлетворяющая уравнению* (4.15) *и такая, что*

при всех $t \in [t_e, t_l]$:

(а) $\sup\limits_{\mathbf{u} \in \Omega} \mathscr{H}(\boldsymbol{\lambda}(t), x^*(t), \mathbf{u}) = \mathscr{H}(\boldsymbol{\lambda}(t), x^*(t), \mathbf{u}^*(t))$,

(б) $\mathscr{H}(\boldsymbol{\lambda}(t), x^*(t), \mathbf{u}^*(t)) = 0$,

(в) $\lambda_0(t) = \text{const} \leqslant 0$.

Условия (а) и (б) теоремы немедленно следуют из (4.33) и (4.34); условие (в) вытекает из (4.19).

В этом пункте мы рассматривали тольку ту часть оптимальной траектории, которая расположена на границе ∂G. В общем случае оптимальная траектория может частью принадлежать границе G, а частью внутренности G. Представляется интересным исследовать поведение оптимальной траектории в точках $x^*(t_e)$ и $x^*(t_l)$ выхода на границу и схода с нее.

4.7. Условие скачка

Если $t_e > t_0$, то $x^*(t_e - 0)$ — внутренняя точка G и, следовательно, согласно предположению регулярная внутренняя точка Σ. Сходным образом, если $t_l < t_1$, то $x^*(t_l + 0)$ — регулярная внутренняя точка Σ. Таким образом, можно положить

$$\lambda(t_e - 0) = \mathbf{N}(x^*(t_e)), \qquad t_e > t_0,$$
$$\lambda(t_l + 0) = \mathbf{N}(x^*(t_l)), \qquad t_l < t_1.$$

Из (4.17) и (4.20) теперь следует, что

$$\lambda(t_e - 0) = \lambda(t_e) \tag{4.35}$$

и

$$\lambda(t_l + 0) = \lambda(t_l) - \mu(t_l)\nabla g(x^*(t_l)). \tag{4.36}$$

Иными словами, сопряженный вектор $\lambda(t)$ непрерывен в точке выхода на границу, но в общем случае разрывен в точке схода с границы. Величина разрыва задается так называемым условием скачка (4.36).

Следует отметить, что теорема 4 и условие скачка (4.36) могут быть выведены без помощи геометрических концепций и использованных выше вспомогательных предположений *).

4.8. Некоторые свойства сопряженного уравнения

В этом пункте мы укажем некоторые добавочные свойства сопряженного уравнения (4.15). Докажем, прежде всего, что

$$\nu_0(t) = \mu(t), \qquad t_e \leqslant t \leqslant t_l. \tag{4.37}$$

---

*) См. Л. С. Понтрягин и др., Математическая теория оптимальных процессов Физматгиз, Москва, 1961, гл. 6. Отметим, однако, что полученные в этой книге результаты связаны с предположениями п. 4.2.

Следуя условиям (4.31) и (4.32) и определению (4.2) множества U значений управления, мы заключили выше, что функция $\mathbf{N}(\boldsymbol{x}^*(t)) \cdot \mathbf{f}(\boldsymbol{x}^*(t), \mathbf{u})$ достигает минимума по отношению ко всем $\mathbf{u}$, *удовлетворяющим связям* (4.2), в точке $\mathbf{u} = \mathbf{u}^*(t)$, где $\mathbf{u}^*(t)$ такое, что имеет место (4.3). Известное из обычного анализа правило множителей *) гласит, что существует единственный ненулевой вектор $\mathbf{b}=(b_1, b_2, \ldots, b_r)$ такой, что

$$\sum_{\beta=1}^{r} b_\beta \nabla_u \psi_\beta (\mathbf{u}^*(t)) = \mathbf{N}(\boldsymbol{x}^*(t)) \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}, \tag{4.38}$$

где матрица

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial f_0}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_0}{\partial u_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{bmatrix}$$

вычисляется при $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^*(t)$ и $\mathbf{u} = \mathbf{u}^*(t)$.

Подобным же образом, применение правила множителей к условиям (4.33) и (4.34) показывает, что существует единственный ненулевой вектор $\mathbf{e} = (e_0, e_1, \ldots, e_r)$ такой, что

$$e_0 \nabla_u p(\boldsymbol{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)) + \sum_{\beta=1}^{r} e_\beta \nabla_u \psi_\beta (\mathbf{u}^*(t)) = \lambda(t) \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}. \tag{4.39}$$

Подставляя в (4.39) значение $\lambda(t)$ из (4.20) и пользуясь (4.38), получаем уравнение

$$(e_0 - \mu) \nabla_u p(\boldsymbol{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)) + \sum_{\beta=1}^{r} (e_\beta - b_\beta) \nabla_u \psi_\beta (\mathbf{u}^*(t)) = 0.$$

Предполагаемая линейная независимость векторов $\nabla_u p(\boldsymbol{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t))$ и $\nabla_u \psi_\beta (\mathbf{u}^*(t))$, $\beta = 1, 2, \ldots, r$, позволяет заключить, что

$$\left.\begin{aligned} \mu &= e_0, \\ b_\beta &= e_\beta, \quad \beta = 1, 2, \ldots, r. \end{aligned}\right\} \tag{4.40}$$

---

*) L. Brand, Advanced Calculus, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1955.

Заметим теперь, что (4.39) образует систему m уравнений, матрица коэффициентов которых имеет ранг $r+1$. Поэтому система может быть разрешена относительно $r+1$ компонент вектора e. Вспоминая определение матриц $\partial R/\partial u^c$ и $\partial f/\partial u^c$, данное в п. 3.6, получим

$$\mathbf{e}\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{u}^c} = \lambda(t)\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}^c}.$$

Наконец, используя определение (4.14) для ν, найдем $\mathbf{e} \equiv \boldsymbol{\nu}$ и, в частности, $e_0 = \nu_0$. С помощью (4.40) теперь получим равенство (4.37). Таким образом, постоянная $\mu(t_l)$ в условии скачка (4.36) есть просто значение функции ν_0 в момент $t = t_l$.

Другое интересное свойство сопряженного уравнения (4.15) заключается в следующем. Если $\lambda = \lambda(t)$ — решение (4.15), то $\lambda = \lambda(t) + c\nabla g(x^*(t))$, $c = \text{const}$ также является решением, если только $\nu_0(t)$ заменено на $\nu_0(t) + c$. Это легко проверить простой подстановкой.

Следует, наконец, отметить, что мы ограничились рассмотрением множества U, заданного ограничениями типа *неравенств* (4.2). Легко показать, что связи типа

$$\varphi_\alpha(\mathbf{u}) = 0, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, l$$

не приведут ни к каким видоизменениям в формулировке теоремы 4, за исключением тривиального замечания об увеличении числа компонент вектора $\mathbf{u}^c$ (см. пример 4.1). Доказательство этого утверждения представляется читателю (см. пример 4.2).

4.9. Пример: минимальное расстояние между двумя точками при наличии запрещенной области

В этом пункте мы приложим полученные выше результаты к простой задаче с ограничениями на переменные состояния. Требуется найти плоскую кривую минимальной длины, соединяющую две заданные точки, но не проходящую через точки замкнутой круговой области («кругового болота») (рис. 4.4). Формулируя эквивалентную задачу управления, можно сказать, что требуется определить оптимальное по быстродействию управление для пути, который проходится

с постоянной скоростью. Таким образом, имеем уравнения состояния

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= u_1, \\ \frac{dx_2}{dt} &= u_2 \end{aligned}\right\} \tag{4.41}$$

с ограничениями на управления

$$\varphi(\mathbf{u}) \triangleq u_1^2 + u_2^2 - 1 = 0 \tag{4.42}$$

и на переменные состояния

$$g(\boldsymbol{x}) \triangleq R^2 - (x_1 - a)^2 - x_2^2 \leqslant 0; \tag{4.43}$$

в последней формуле R и a—заданные постоянные. Разыскивается допустимое управление $\mathbf{u}^*(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, порождающее допустимые пути (т. е. такие, что (4.43) удовлетворяется) из данного начального состояния (x_1^0, x_2^0) в состояние (0, 0) и сообщающее минимальное значение времени перехода $t_1 - t_0$. Это требование, очевидно, эквивалентно минимизации длины пути

$$L = \int_0^L ds = \int_{t_0}^{t_1} dt,$$

где

$$ds \triangleq \sqrt{(dx_1)^2 + (dx_2)^2} = dt. \tag{4.44}$$

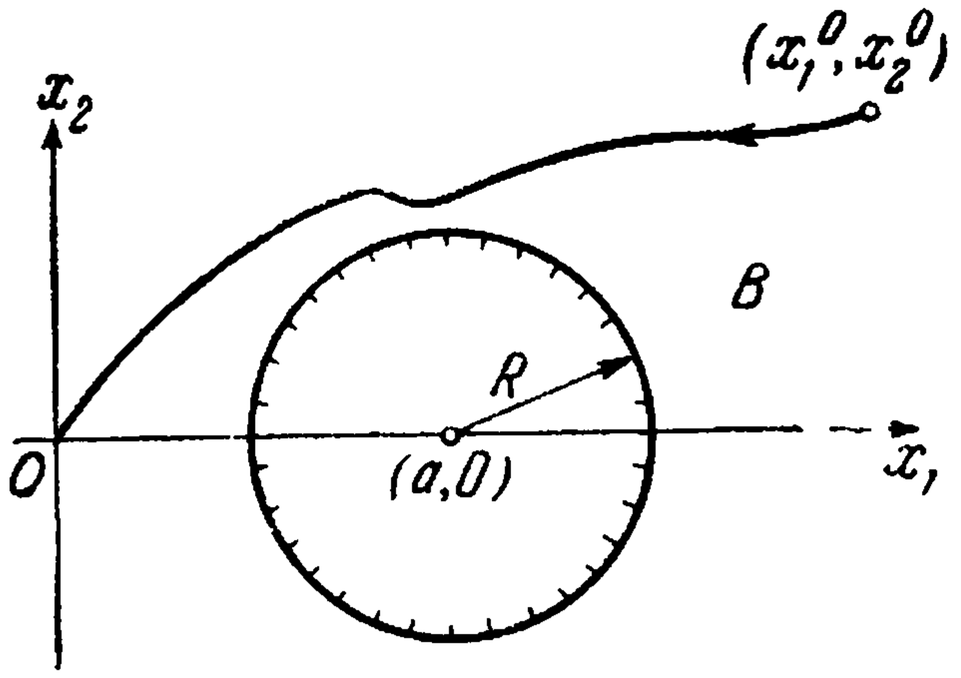

Рис. 4.4. Кривая с запрещенной областью (пример п. 4.9).

При определении экстремального управления следует применить теорему 2 во внутренних точках области G; для точек границы ∂G нужно воспользоваться теоремой 4. В обоих случаях необходимо иметь выражение для функции $\mathscr{H}$; эта функция равна

$$\mathscr{H}(\lambda, \boldsymbol{x}, \mathbf{u}) = \lambda_0 + \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2. \tag{4.45}$$

Рассмотрим вначале *внутренние точки*.

Сопряженные уравнения

$$\frac{d\lambda_1}{dt} \equiv 0,$$

$$\frac{d\lambda_2}{dt} \equiv 0$$

имеют интегралы вида

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1(t) &\equiv \text{const} \triangleq c_1, \\ \lambda_2(t) &\equiv \text{const} \triangleq c_2. \end{aligned}\right\} \tag{4.46}$$

Условие (а) теоремы 2 вместе с равенством (4.42) показывает, что

$$u_i(t) \equiv \frac{c_i}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \equiv \text{const}, \qquad i \equiv 1,\ 2, \tag{4.47}$$

откуда следует, что отрезки экстремальных путей, расположенные внутри области B, заданной неравенством (4.43), являются прямыми линиями; ясно, что этого и следовало ожидать. Далее, условие (б) теоремы 2 вместе с (4.46) показывает, что $\lambda_0(t) + \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \equiv 0$, так что постоянные c_1 и c_2 не могут быть одновременно нулями. Отсюда заключаем, что $\lambda_0(t) \equiv \text{const} < 0$.

Полагая

$$\lambda_0(t) \equiv -1, \tag{4.48}$$

получаем

$$u_i(t) \equiv \lambda_i(t) \equiv c_i, \qquad i \equiv 1,\ 2. \tag{4.49}$$

Рассмотрим теперь отрезки экстремальных путей, принадлежащие *границе* области B. Здесь нам понадобится векторная функция

$$\nabla g(\boldsymbol{x}) \equiv (0,\ -2(x_1 - a),\ -2x_2) \tag{4.50}$$

и скалярная функция

$$p(\boldsymbol{x},\ \mathbf{u}) \equiv -2u_1(x_1 - a) - 2u_2 x_2. \tag{4.51}$$

На границе

$$p(\boldsymbol{x}(t),\ \mathbf{u}(t)) \equiv 0,$$

так что

$$\frac{u_2(t)}{u_1(t)} \equiv -\frac{x_1(t) - a}{x_2(t)}. \tag{4.52}$$

Далее мы имеем

$$R^2 = (x_1 - a)^2 + x_2^2,$$

так что (рис. 4.5) можно написать

$$\left.\begin{aligned} u_1(t) &= -\frac{x_2(t)}{R} = -\sin\theta, \\ u_2(t) &= \frac{x_1(t) - a}{R} = \cos\theta. \end{aligned}\right\} \tag{4.53}$$

Таким образом, вектор $\mathbf{u}(t)$ полностью известен, если известно $\mathbf{x}(t)$; поэтому $\mathbf{u}^c = \mathbf{u}$. Сопряженное уравнение (4.15) имеет вид

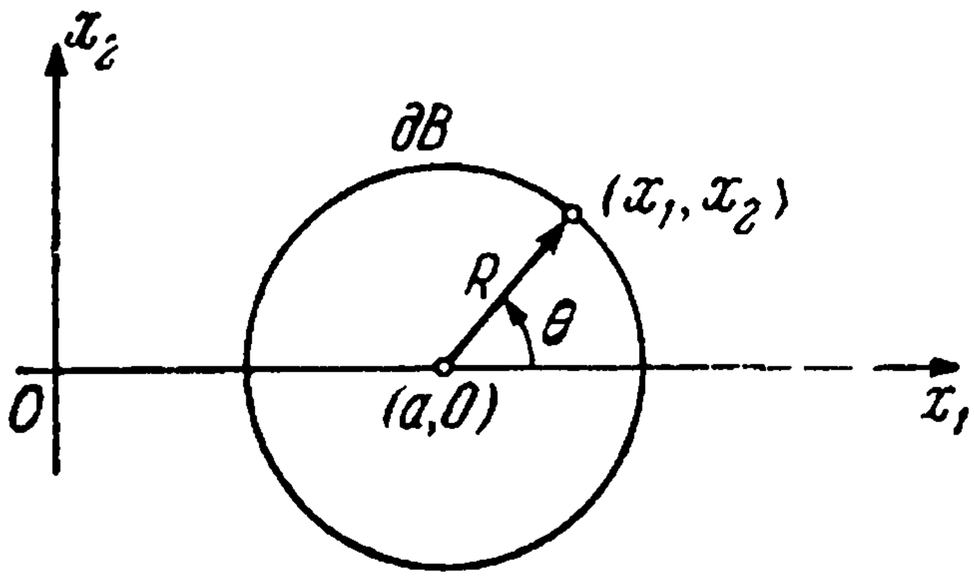

Рис. 4.5. Состояние на границе (пример п. 4.9).

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\lambda \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{x}} + \nu_0 \nabla p, \tag{4.54}$$

где

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{x}} = 0$$

и

$$\nabla p = (0, \ -2u_1, \quad -2u_2).$$

Далее, определение (4.14) вектора $\boldsymbol{\nu}$ показывает, что

$$\nu_0 \nabla_u p + \nu_1 \nabla_u \varphi = \lambda \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}^c}, \tag{4.55}$$

где

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}^c} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Разрешая (4.55) и пользуясь (4.53) и (4.42), получим

$$\nu_0 = \frac{\lambda_2 u_1 - \lambda_1 u_2}{2R}. \tag{4.56}$$

Заметим теперь, что функция $\lambda_0(t)$ непрерывна как в точке выхода на границу, так и в точке схода с нее (это следует из (4.35) и (4.36)). Поэтому формула (4.48) справедлива и тогда, когда состояние системы соответствует точкам границы. Условие (б) теоремы 4 приводит тогда к равенству

$$\lambda_1(t)\, u_1(t) + \lambda_2(t)\, u_2(t) = 1. \tag{4.57}$$

Нужно, таким образом, решить только одно из двух оставшихся сопряженных уравнений. Наиболее просто это можно сделать, введя угол θ в качестве независимой переменной, т. е. положив $R\,d\theta = ds = dt$. Пользуясь (4.56) и (4.57), запишем уравнение (4.54) для компоненты λ_1 в следующей форме:

$$\frac{d\lambda_1}{d\theta} + \lambda_1 \operatorname{tg}\theta = -\operatorname{tg}\theta \sin\theta. \tag{4.58}$$

Общее решение уравнения (4.58) таково:

$$\lambda_1(\theta) = K\cos\theta - \sin\theta + \theta\cos\theta. \tag{4.59}$$

здесь K — постоянная. Уравнения (4.57) и (4.53) приводят теперь к формуле

$$\lambda_2(\theta) = K\sin\theta + \cos\theta + \theta\sin\theta. \tag{4.60}$$

Чтобы выяснить поведение интересующих нас величин в точке выхода $(x_1^e, x_2^e) \triangleq \mathbf{x}(t_e)$ и в точке схода $(x_1^l, x_2^l) \triangleq \mathbf{x}(t_l)$

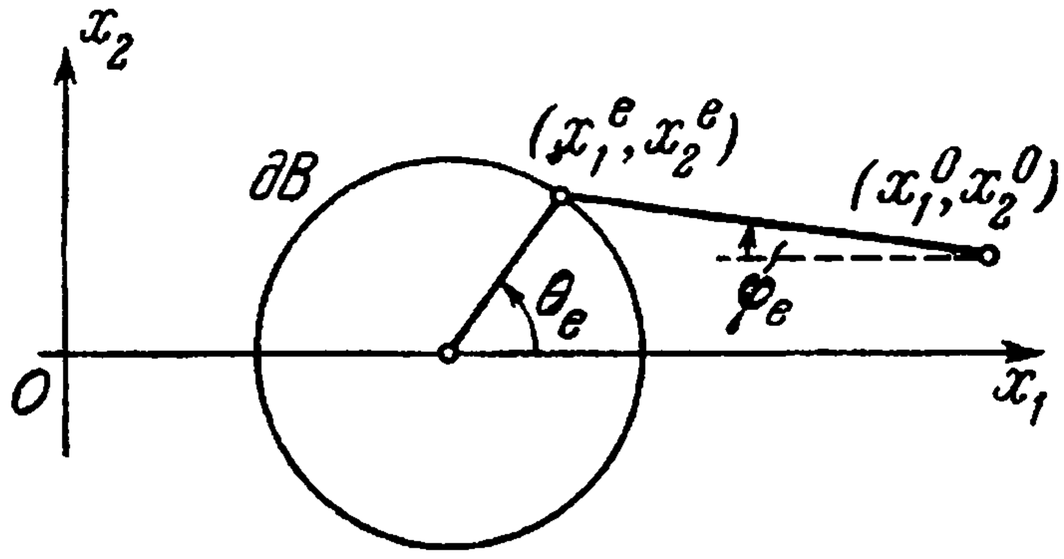

Рис. 4.6. Точка выхода на границу (пример п. 4.9).

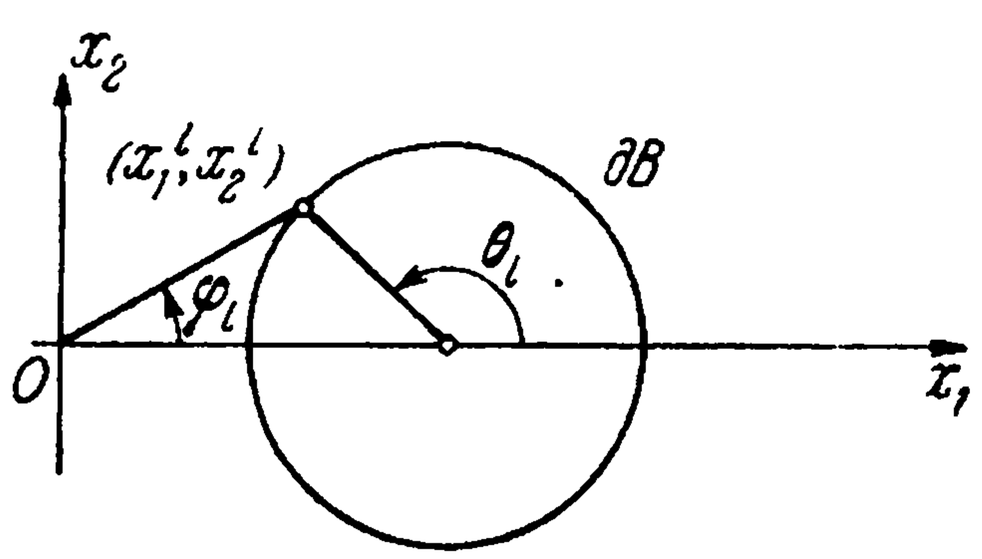

Рис. 4.7. Точка схода с границы (пример п. 4.9).

(рис. 4.6 и 4.7), необходимо воспользоваться условиями (4.35) и (4.36).

Для *точки выхода* $\theta = \theta_e$ согласно (4.35) получаем

$$\begin{aligned} K\cos\theta_e - \sin\theta_e + \theta_e\cos\theta_e &= -\cos\varphi_e, \\ K\sin\theta_e + \cos\theta_e + \theta_e\sin\theta_e &= \sin\varphi_e, \end{aligned} \tag{4.61}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi_e &= -u_1(t) = -\lambda_1(t), \\ \sin\varphi_e &= u_2(t) = \lambda_2(t), \end{aligned}\right\} \quad t < t_e.$$

Решая (4.61), находим

$$K = -\theta_e \tag{4.62}$$

и

$$\theta_e + \varphi_e = \frac{\pi}{2}. \tag{4.63}$$

Условие (4.63) показывает, что *отрезок экстремального пути, предшествующий точке выхода, касается границы в этой точке.*

Чтобы воспользоваться условием скачка (4.36) в *точке схода* $\theta = \theta_l$, примем во внимание (4.37); учитывая (4.56), (4.53), (4.59) и (4.60), приходим к формуле

$$\mu(\theta_l) = \nu_0(\theta_l) = \frac{\theta_e - \theta_l}{2R}. \tag{4.64}$$

Далее находим

$$x_1 - a = R\cos\theta \quad \text{и} \quad x_2 = R\sin\theta,$$

так что для точек границы получается

$$\nabla g = (0,\ -2R\cos\theta,\ -2R\sin\theta). \tag{4.65}$$

Пользуясь любой из формул (4.59) или (4.60), а также (4.62), получим необходимое условие в точке схода. Из (4.59) находим

$$\cos\varphi_l = \sin\theta_l, \tag{4.66}$$

а (4.60) дает

$$\sin\varphi_l = -\cos\theta_l, \tag{4.67}$$

где (рис. 4.7)

$$\left.\begin{aligned}\cos\varphi_l &= -u_1(t) = -\lambda_1(t),\\ \sin\varphi_l &= -u_2(t) = -\lambda_2(t),\end{aligned}\right\} \quad t > t_l.$$

Условия (4.66) и (4.67) показывают, что *отрезок экстремального пути, следующий за точкой схода, касается границы в этой точке.* Следует заметить, что этот результат может быть получен непосредственно из условия скачка (4.36) без привлечения соотношения (4.37); проверка этого утверждения представляется читателю (см. упражнение 4.3).

Оптимальное решение рассматриваемой задачи хорошо известно и может быть найдено непосредственно. Если начальная точка расположена в области. ограниченной окружностью и двумя касательными к ней, проведенными из начала коорди-

нат, то кривая наименьшей длины состоит из трех отрезков: отрезка прямой, выходящей из начальной точки и касающейся окружности, дуги окружности и отрезка касательной, приходящей в начало координат. Если начальная точка лежит за пределами указанной области, то оптимальной кривой является прямая линия. Все это показано на рис. 4.8. Как и следовало

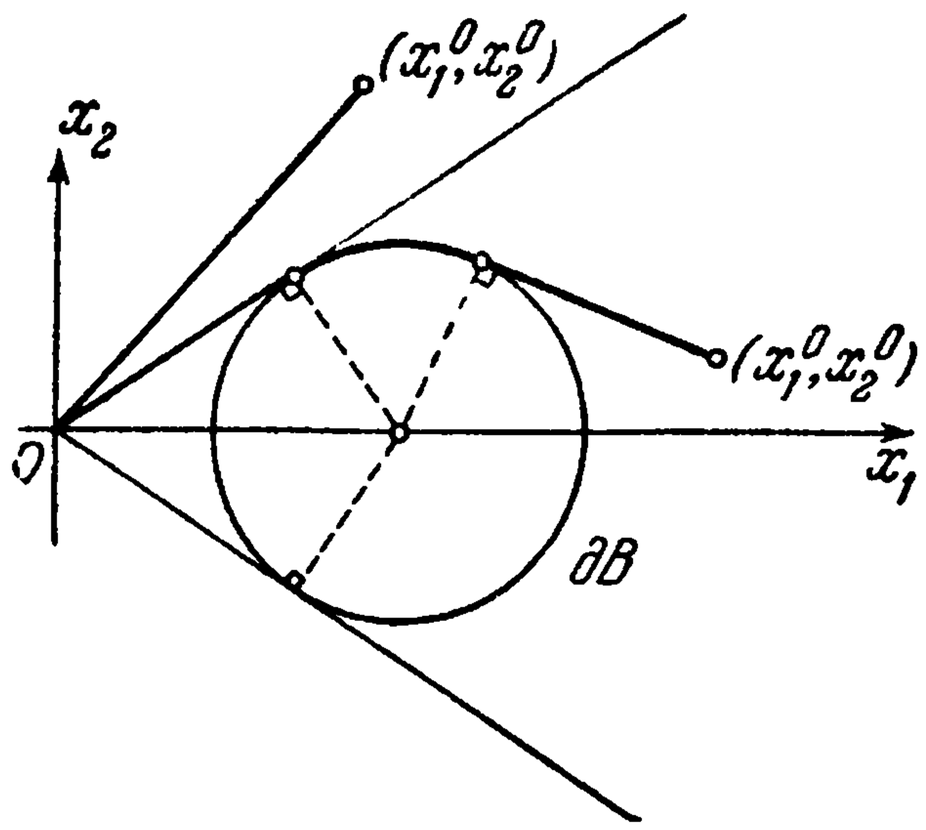

Рис. 4.8. Зависимость оптимального пути от начального состояния (пример п. 4.9).

ожидать, экстремальное решение, полученное с помощью теорем 2 и 4, согласуется с известным оптимальным решением.

Наконец, весьма легко найти поверхность равных оптимальных значений выигрыша и предельные поверхности и убедиться в том, что все сделанные ранее относительно этих поверхностей допущения справедливы (см. упражнение 4.4).

Упражнения

4.1. В лемме 8 утверждается, что каждой точке $x' + \varepsilon\eta \in T_\Delta(x')$ и $\mathfrak{E}^*$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$ соответствует точка $x' + \varepsilon\eta + o(\varepsilon) \in \Delta(x')$. Доказать справедливость этого утверждения.

4.2. Показать, что теорема 4 остается верной, если множество U задано соотношениями

$$\varphi_\alpha(u) = 0, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, l,$$
$$\psi_\beta(u) \leqslant 0, \qquad \beta = 1, 2, \ldots, s.$$

Как при этом изменяется сопряженное уравнение (4.15)?

4.3. Для примера п. 4.9 показать, что отрезок экспериментального пути, следующий за точкой схода, касается границы в этой точке. Воспользоваться только условием скачка.

4.4. Получить уравнения, определяющие поверхности S и Σ для задачи о минимуме расстояния при ограничении, указанном в примере п. 4.9. Показать применимость леммы 8.

4.5. Рассмотреть задачу п. 4.9 о минимуме расстояния при наличии связей. Требование, чтобы минимальная кривая заканчивалась в начале координат, заменено теперь требованием, чтобы эта кривая заканчивалась на оси x_2. Изменится ли решение и если да, то каким образом?

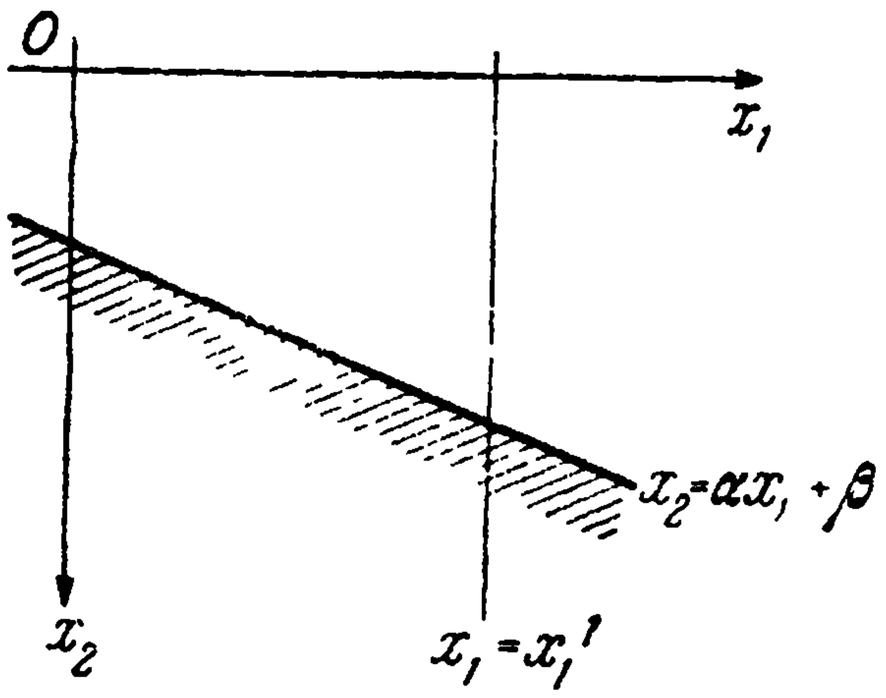

Рис. 4.9. К упражнению 4.6.

4.6. Рассматривается тяжелая частица, движущаяся без трения по некоторой поверхности (рис. 4.9). Если частица начинает движение из состояния покоя в точке (0, 0), то интегрирование уравнений движения дает

$$\frac{dx_1}{dt}=\sqrt{x_2}\,u_1, \qquad \frac{dx_2}{dt}=\sqrt{x_2}\,u_2,$$

где $u_1^2+u_2^2=1$.

Допустимые пути подчинены ограничению $x_2-\alpha x_1-\beta\leqslant 0$, где α и β — известные положительные постоянные. Требуется перевести систему за минимальное время из точки (0, 0) на многообразие $x_1=x_1^1$. Найти экстремальное управление. Как изменяется решение при изменении отношения α/x_1^1?

Иными словами, допустимое правило *переводит* систему из состояния x_1^0 в состояние x_1^f, где *)

$$x_1^f = x_1^0 + \int_{t_0}^{t_1} u(t)\,dt,$$

причем вычисление ведется вдоль *пути* в пространстве E^1, задаваемом соотношением (А.3).

Предположим теперь, что требуется перевести систему в конечное состояние $x_1^1 = 0$. В этом случае, очевидно, заданное множество θ^1 конечных состояний состоит просто из одного-единственного состояния x_1^1. Ясно, что требуемый переход можно осуществить с помощью допустимого правила из *любого* начального состояния $x_1^0 \in E^1$. Например, можно взять

$$u(t) = c = \text{const}, \quad |c| \leqslant 1, \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1,$$

где

$$t_1 - t_0 = -\frac{x_1^0}{c}.$$

Поэтому множеством начальных состояний является все пространство состояний, т. е. $E = E^1$.

Переходя теперь к вопросу о *показателе качества*, рассмотрим задачу, в которой выигрышем является время перехода $t_1 - t_0$.

Уравнение (А.1) показывает, что

$$t_1 - t_0 = \int_{x_1^0}^{x_1^f} \frac{dx_1}{u} = V(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^f; r, p).$$

---

*) Если $u(t)$ имеет разрыв непрерывности в момент $t = t_c$, то интеграл в решении записывается в форме

$$\int_{t_0}^{t_1} u(t)\,dt = \int_{t_0}^{t_c} u(t)\,dt + \int_{t_c+0}^{t_1} u(t)\,dt.$$

Свойство аддитивности (1.2), очевидно, имеет место, поскольку

$$t_1 - t_0 = \int_{t_0}^{t} d\tau + \int_{t}^{t_1} d\tau = \int_{x_1^0}^{x_1(t)} \frac{dx_1}{u} + \int_{x_1(t)}^{x_1^f} \frac{dx_1}{u} =$$

$$= V(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^i; r, p^i) + V(\mathbf{x}^i, \mathbf{x}^f; r, p_i).$$

Выигрыш при переходе из $x_1 = x_1^0$ в $x_1 = 0$ равен

$$\int_{x_1^0}^{0} \frac{dx_1}{u}. \tag{A.4}$$

Следовательно, правило является *оптимальным*, если управление $u = u^*(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ таково, что интеграл (A.4) принимает минимальное возможное значение. Проверка показывает, что

$$u^*(t) \equiv 1, \quad \text{если} \quad x_1^0 < 0,$$

$$u^*(t) \equiv -1, \quad \text{если} \quad x_1^0 > 0,$$

где

$$t_1 - t_0 = \int_{x_1^0}^{0} \frac{dx_1}{-\operatorname{sign} x_1^0} = |x_1^0|.$$

Следовательно, *минимальный выигрыш* равен

$$V^*(\mathbf{x}^0; \theta^1) = |x_1^0|. \tag{A.5}$$

Отметим, наконец, что заданное конечное состояние $x_1^1 = 0$ может быть достигнуто из *любого* начального состояния $x_1^0 \in E^1$ вдоль *оптимального пути*, определяемого уравнениями

$$x_1 = x_1^*(t) = x_1^0 + (t - t_0), \quad \text{если} \quad x_1^0 < 0,$$

$$x_1 = x_1^*(t) = x_1^0 - (t - t_0), \quad \text{если} \quad x_1^0 > 0.$$

Иначе говоря, в данном случае $E^* = E = E^1$.

A.2. Траектории (п. 1.2)

Согласно определению (1.3) *траектории* в пространстве E^{n+1}, координата x_0 траектории дается уравнением

$$x_0^i + V(\mathbf{x}^i, \mathbf{x}^f; r, p_i) = C,$$

так что для нашей задачи получаем

$$x_0(t) + \int_t^{t_1} d\tau = C,$$

или

$$\frac{dx_0}{dt} = 1. \qquad \text{(A.6)}$$

Таким образом, если известна функция $u = u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, удовлетворяющая условию (А.2), и если задана начальная точка $x^0 = (x_0^0, x_1^0)$ в расширенном пространстве состояний E^2, то соответствующее решение $x(t) = (x_0(t), x_1(t))$ уравнений (А.1) и (А.6) определяет траекторию в E^2. При этом *оптимальная траектория* определяется уравнениями

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= x_0^*(t) = x_0^0 + (t - t_0), \\ x_1 &= x_1^*(t) = \begin{cases} x_1^0 + (t - t_0), & \text{если} \quad x_1^0 < 0, \\ x_1^0 - (t - t_0), & \text{если} \quad x_1^0 > 0. \end{cases} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(A.7)}$$

А.3. Поверхности Σ и S (п. 1.3)

Согласно определению (1.5) *предельной поверхности* уравнение этой поверхности (см. (А.5)) для нашего случая записывается в форме

$$x_0 + |x_1| = C \quad \forall x_1 \in E^1. \qquad \text{(A.8)}$$

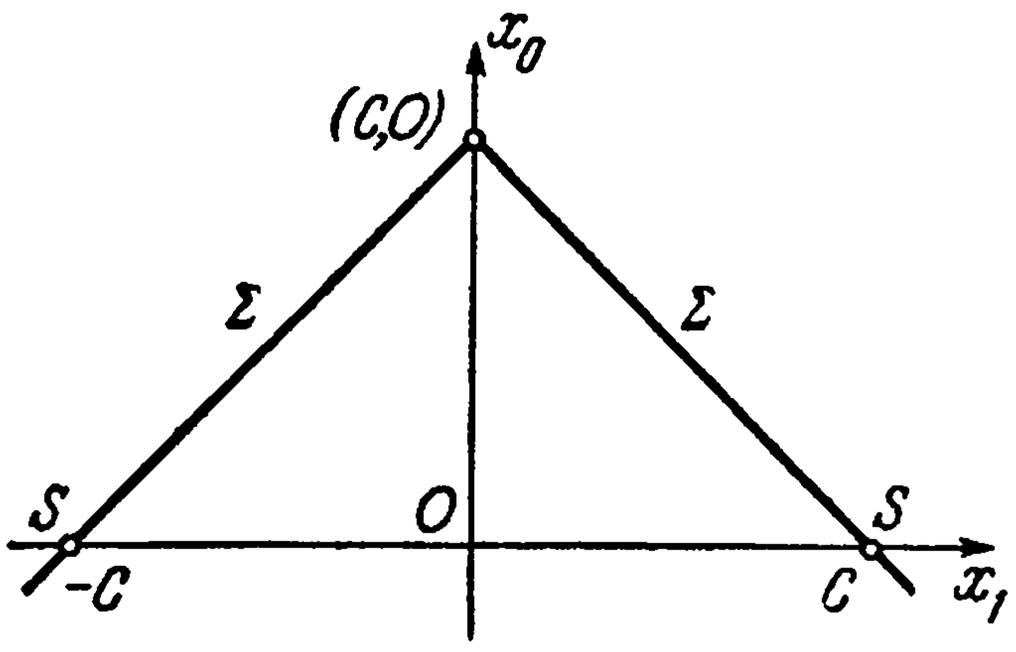

Рис. А.1. Предельная поверхность и поверхность равных оптимальных значений выигрыша.

Если задано значение параметра C, то соответствующая поверхность Σ состоит из двух прямолинейных лучей, имеющих, соответственно, наклоны 1 и —1 (рис. А.1). *Поверхность равных оптимальных значений выигрыша*, определяемая формулой (1.6), задается уравнением

$$|x_1| = C. \qquad \text{(A.9)}$$

Иначе говоря, поверхность S состоит из двух точек $x_1 = C$ и $x_1 = -C$.

A.4. Основное свойство поверхности Σ (п. 1.4)

Рассмотрим теперь вопрос о применимости леммы 2 и теоремы 1 к рассматриваемой нами задаче.

Из уравнения (4.7) находим, что

$$\frac{dx_0}{dx_1} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x_1 < 0, \\ 1, & \text{если} \quad x_1 > 0, \end{cases} \tag{A.10}$$

в точке $x = x^*(t)$ оптимальной траектории. Имея в виду (A.8), сейчас же заключаем, что лемма 2 применима, т. е. оптимальная траектория, имеющая одну общую точку с поверхностью Σ, полностью принадлежит этой поверхности Σ.

Более того, из уравнений (A.1) и (A.6) следует, что

$$\frac{dx_1}{dx_0} = u, \tag{A.11}$$

где согласно (A.2) и (A.6)

$$|u| \leqslant 1 \quad \text{и} \quad dx_0 = dt > 0. \tag{A.12}$$

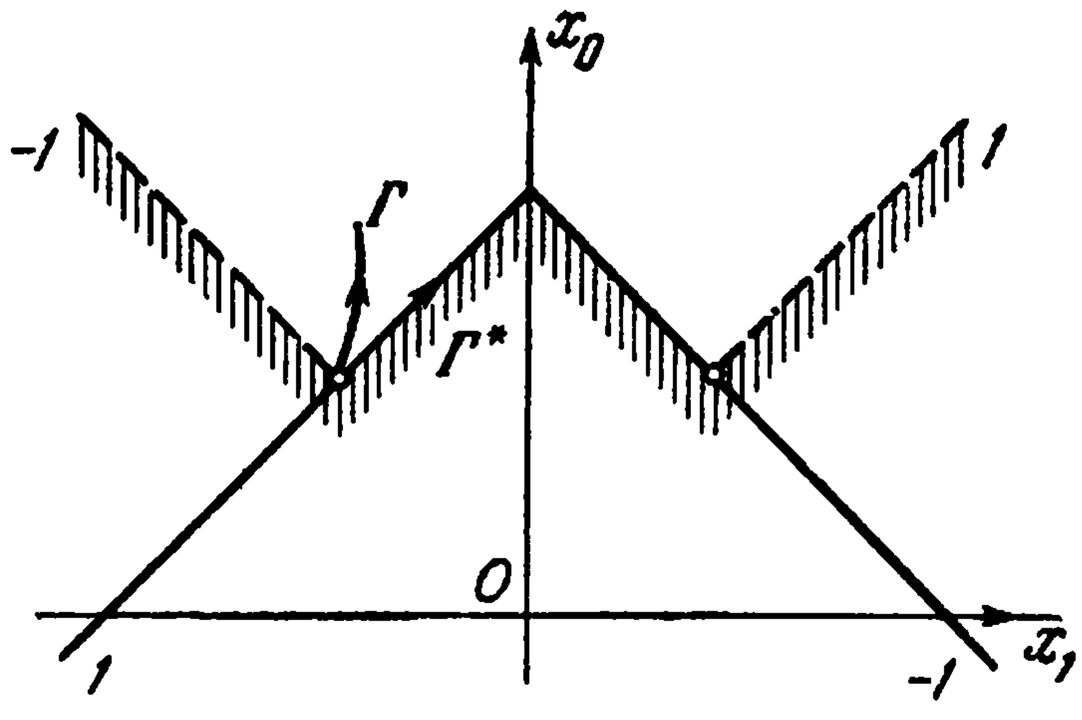

Рис. A.2. Ограничения наклона траектории.

Таким образом, наклон траектории ограничен следующими пределами:

$$-1 \leqslant \frac{dx_1}{dx_0} \leqslant 1, \quad \text{где} \quad dx_0 > 0. \tag{A.13}$$

Этот результат проиллюстрирован на рис. A.2.

Применимость теоремы 1 очевидна: ни одна траектория, имеющая общую точку с заданной поверхностью Σ, не имеет B-точек относительно этой поверхности Σ.

A.5. Преобразование касательной плоскости (пп. 1.7 и 1.8)

Прежде всего отметим, что всякая точка, за исключением конечной точки $x^1 = (C, 0)$, является регулярной внутренней точкой предельной поверхности Σ. Согласно определению касательная плоскость к Σ в точке x^1 не единственна; можно,

однако, указать предельные положения этой плоскости при приближении к точке x^1 слева и справа, т. е. при $x \to x^1$, если $x_1 < 0$ и если $x_1 > 0$. Тем не менее, однако, точка x^1 не есть регулярная внутренняя точка Σ.

В самом деле, в рассматриваемом нами случае поверхность Σ совпадает со своей касательной плоскостью $T_\Sigma(x')$ в любой точке $x \notin x'$. Лемма 5, следовательно, выполняется тривиальным образом. Уравнения в вариациях для нашего случая записываются в форме

$$\frac{d\eta_0}{dt} = 0, \qquad \frac{d\eta_1}{dt} = 0,$$

так что $A(t_0, t)$ — тождественный оператор, т. е.

$$\eta(t) = \eta^0 \qquad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Отсюда заключаем, что $\eta^0 \in T_\Sigma(x^0)$ влечет за собой

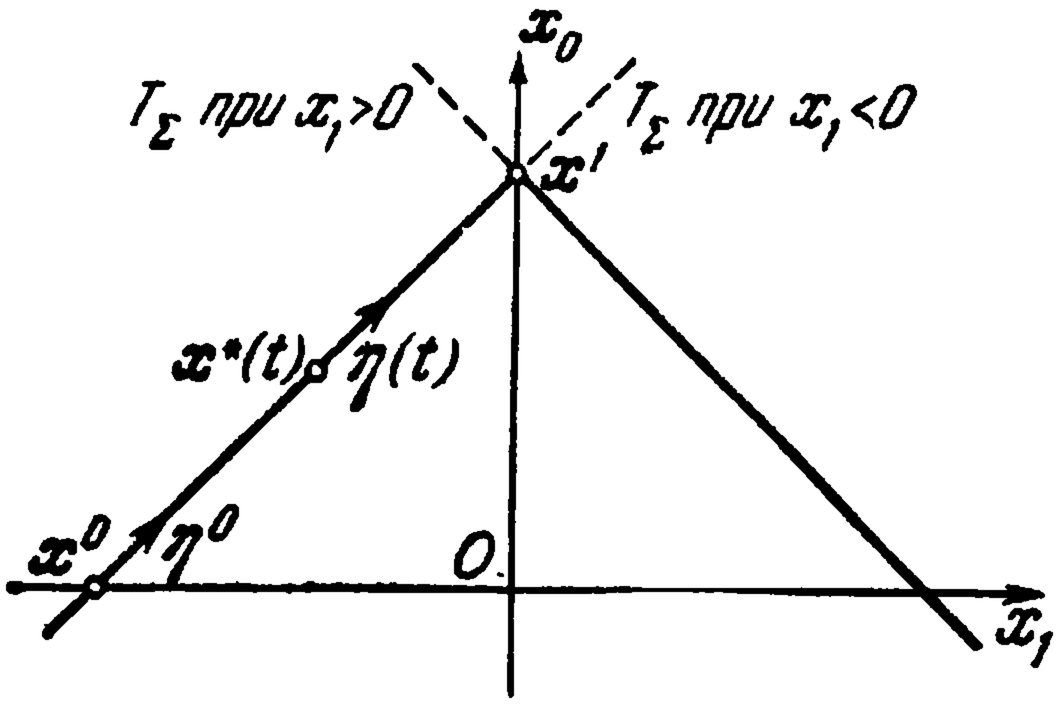

Рис. А.3. Преобразование касательной плоскости.

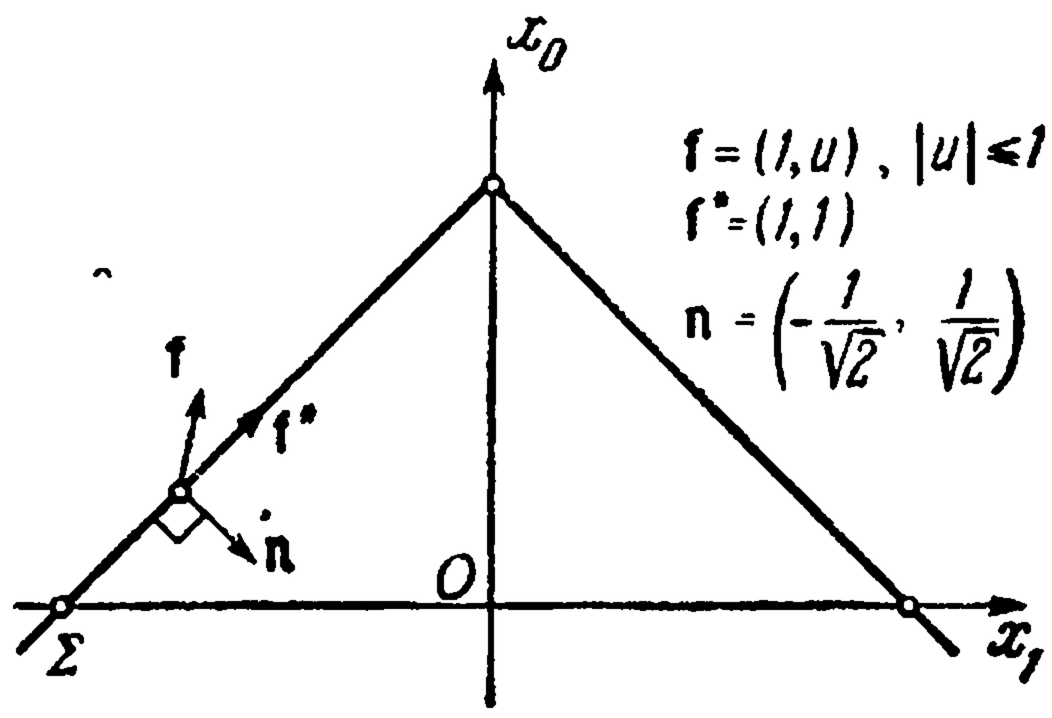

Рис. А.4. Условия (1.19) и (1.20).

$\eta(t) \in T_\Sigma(x^*(t))$ $\forall t \in [t_0, t_1]$, поскольку $T_\Sigma(x^*(t))$ представляет собой прямую, направление которой задается вектором η^0 (рис. А.3). В данном случае мы полагаем

$$T_\Sigma(x^*(t_1)) = T_\Sigma(x^*(t_1 - 0)).$$

А.6. Регулярная внутренняя точка Σ (п. 1.9)

Для рассматриваемой нами задачи условия (1.19) и (1.20) сразу следуют из выводов п. А.4. Эти условия показаны на рис. А.4.

A.7. Принцип максимума (п. 1.13)

Выясним теперь, согласуется ли угаданное выше оптимальное управление с теоремой 2. В нашем случае

$$\mathscr{H}(\lambda, x, u) = \lambda_0 + \lambda_1 u, \tag{A.14}$$

откуда

$$\frac{d\lambda_0}{dt} = -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial x_0} = 0,$$

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial x_1} = 0,$$

так что в промежутке $[t_0, t_1]$

$$\lambda_0(t) \equiv \text{const} \triangleq \lambda_0, \quad \lambda_1(t) \equiv \text{const} \triangleq \lambda_1.$$

Более того, согласно условию (а) теоремы 2 имеем *)

$$u^*(t) \equiv -1, \quad \text{если} \quad \lambda_1 < 0,$$

$$u^*(t) \equiv 1, \quad \text{если} \quad \lambda_1 > 0.$$

Для перехода из $x_1 = x_1^0$ в точку $x_1 = 0$ получаем

$$\left.\begin{aligned} u^*(t) &\equiv -1, \quad \text{если} \quad x_1^0 > 0, \\ u^*(t) &\equiv 1, \quad \text{если} \quad x_1^0 < 0, \end{aligned}\right\} \tag{A.15}$$

что согласуется с найденным ранее решением.

A.8. Вектор градиента (п. 1.14)

Условие (б) теоремы 2 показывает, что

$$\lambda_0 + \lambda_1 u^*(t) \equiv 0, \tag{A.16}$$

так что, учитывая условие (в) теоремы 2 и тот факт, что $\lambda(t) = (\lambda_0, \lambda_1) \neq 0$, получаем $\lambda_0 = \text{const} < 0$. Поэтому, полагая

$$\lambda_0 = -1, \tag{A.17}$$

найдем из уравнений (A.16) и (A.15), что

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 \quad \text{при} \quad x_1 < 0 \quad (x_1^0 < 0), \\ \lambda_1 &= -1 \quad \text{при} \quad x_1 > 0 \quad (x_1^0 > 0). \end{aligned}\right\} \tag{A.18}$$

---

*) Экстремальное управление единственно и, следовательно, оптимально, поскольку к данной задаче применима теорема существования.

Согласно (А.8) уравнение поверхности Σ имеет вид

$$\Phi(x) \triangleq x_0 + |x_1| = C,$$

так что

$$\operatorname{grad}\Phi(x) = \begin{cases} (1, -1) & \text{при} \quad x_1 < 0, \\ (1, 1) & \text{при} \quad x_1 > 0. \end{cases} \tag{А.19}$$

Соотношение (1.34) следует немедленно из формул (А.17)—(А.19).

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

СУЩЕСТВОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

В этом пункте мы приведем формулировку двух важных теорем существования оптимального управления. Первая из этих теорем касается оптимального по быстродействию управления для линейных систем *).

Теорема Б.1. *Рассмотрим систему с уравнением состояния*

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u},$$

где $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{B}$ *— постоянные матрицы* **). *Требуется перевести систему из данного начального состояния* $\mathbf{x}^0$ *на данное конечное многообразие* θ^1 *с помощью кусочно-непрерывного управления* $\mathbf{u}(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, *значения которого принадлежат заданному множеству* U, *определяемому неравенствами* $u_i^{\min} \leqslant u_i \leqslant u_i^{\max}$, $i = 1, 2, \ldots, m$. *Если существует хотя бы одно такое управление, то существует и оптимальное по быстродействию управление.*

Другая теорема относится к системам, линейным относительно переменных состояния ***).

Теорема Б.2. *Дана система с уравнением состояния*

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}(\mathbf{u})$$

---

*) См. H. Halkin, A Generalization of LaSalle's «Bang-bang» Principle, J. SIAM Control, ser. A, vol. 2, 1965.

**) Теорема верна, даже если элементы матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ суть кусочно-аналитические функции времени.

***) См. L. W. Neustadt, The Existence of Optimal Controls in the Absence of Convexity Conditions, J. Math. Analysis and Appl., vol. 7, 1963, стр. 110 и далее. (Эта работа содержит также ссылки на другие теоремы существования.) В действительности теорема справедлива для неавтономных систем и концевых многообразий, зависящих от времени.

и показателем качества

$$\int_{t_0}^{t_1} [\alpha \cdot \mathbf{x}(t) + \beta(\mathbf{u}(t))]\, dt;$$

матрица $\mathbf{A}$ *и вектор* α *постоянны, а векторы* $\mathbf{b}(\mathbf{u})$ *и* $\beta(\mathbf{u})$ *непрерывны. Требуется перевести систему из данного начального состояния* $\mathbf{x}^0$ *на заданное конечное многообразие* θ^1 *с помощью измеримого управления* $\mathbf{u}(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, *значения которого принадлежат заданному компактному множеству* U. *Если существует хотя бы одно такое управление, то существует и оптимальное управление.*

Относительно последней теоремы важно отметить, что ее условиями требуется лишь *измеримость* допустимого управления. Поскольку класс кусочно-непрерывных управлений образует *подмножество* класса измеримых *) управлений, существование измеримого оптимального управления не гарантирует существования кусочно-непрерывного оптимального управления. Тем не менее теорема Б.2 важна сама по себе, поскольку принцип максимума, содержащийся в теореме 2, справедлив, как можно показать, и в классе измеримых управлений **).

---

*) Определение измеримой функции см. И. П. Натансон, Теория функций вещественной переменной, Гостехиздат, Москва, 1957.

**) См. Л. С. Понтрягин и др., Математическая теория оптимальных процессов, Физматгиз, Москва, 1961.

ПРИЛОЖЕНИЕ В

СВЯЗЬ С ВАРИАЦИОННЫМ ИСЧИСЛЕНИЕМ

В этом разделе мы рассмотрим связь теоремы 2 с необходимыми условиями минимума, известными из вариационного исчисления. Ограничимся рассмотрением так называемой простейшей задачи, т. е. задачи о минимизации интеграла. Теорема 2 дает возможность получить для этого случая три из четырех известных необходимых условий минимума, а также условия в угловых точках и естественные граничные условия *). С помощью сходных рассуждений можно получить эти необходимые условия и для более общих задач вариационного исчисления, таких, как задачи Лагранжа, Майера и Больца **) (см. упражнение 3.15).

В.1. Простейшая задача

Рассмотрим интеграл

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t,\ x,\ \dot{x})\, dt, \tag{B.1}$$

в котором $\dot{x} \triangleq dx/dt$. Среди всех функций $x = x(t)$ с кусочно-непрерывными первыми производными в промежутке $[t_0,\ t_1]$, удовлетворяющих граничным условиям

$$\left.\begin{aligned} \theta^0(t_0,\ x(t_0)) &= 0, \\ \theta^1(t_1,\ x(t_1)) &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{B.2}$$

*) См. O. Bolza, Lectures on the Calculus of Variations, Dover, N. Y., 1961, а также И. М. Гельфанд и С. В. Фомин Вариационное исчисление, Физматгиз, Москва 1961.

**) См. Г. А. Блисс, Лекции по вариационному исчислению, ИЛ, Москва, 1950.

где θ^0 и θ^1 — заданные дифференцируемые функции, требуется найти функцию $x = x^*(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, доставляющую минимальное значение интегралу (B.1).

Чтобы применить теорему 2 к этой задаче, следует сформулировать последнюю в терминах теории оптимального управления.

Положим

$$\left.\begin{aligned} x_1 &\triangleq x, \\ x_2 &\triangleq t, \\ u &\triangleq \dot{x}, \end{aligned}\right\} \qquad f_0(x_1, x_2, u) \triangleq f(t, x, \dot{x}).$$

Эквивалентная формулировка такова: рассматривается система, описываемая уравнениями состояния

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= u, \\ \frac{dx_2}{dt} &= 1. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(B.3)}$$

Требуется определить оптимальное управление $u^*(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, переводящее систему с начального многообразия θ^0 на конечное многообразие θ^1; многообразия эти задаются уравнениями

$$\left.\begin{aligned} \theta^0(x_1, x_2) &= 0, \\ \theta^1(x_1, x_2) &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(B.4)}$$

Переход требуется осуществить таким образом, чтобы минимизировать величину интеграла

$$\int_{t_0}^{t_1} f_0(x_1, x_2, u)\, dt. \qquad \text{(B.5)}$$

К задаче в такой форме теорема 2, очевидно, применима. Функция $\mathscr{H}$ задачи такова:

$$\mathscr{H}(\lambda, x, u) = \lambda_0 f_0(x_1, x_2, u) + \lambda_1 u + \lambda_2, \qquad \text{(B.6)}$$

так что сопряженные уравнения имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\lambda_1}{dt} &= -\lambda_0 \frac{\partial f_0}{\partial x_1}, \\ \frac{d\lambda_2}{dt} &= -\lambda_0 \frac{\partial f_0}{\partial x_2}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(B.7)}$$

Условие (а) теоремы 2 дает *)

$$\left.\frac{\partial \mathscr{H}(\lambda(t), x^*(t), u)}{\partial u}\right|_{u=u^*(t)} = 0$$

и

$$\left.\frac{\partial^2 \mathscr{H}(\lambda(t), x^*(t), u)}{\partial u^2}\right|_{u=u^*(t)} \leqslant 0,$$

поскольку в данном случае ограничение на u отсутствует; таким образом, $U = E^1$. Для рассматриваемой задачи написанные условия приобретают вид

$$\lambda_0 \frac{\partial f_0}{\partial u} + \lambda_1 = 0 \tag{B.8}$$

и

$$\lambda_0 \frac{\partial^2 f_0}{\partial u^2} \leqslant 0 \tag{B.9}$$

при $\lambda = \lambda(t)$, $x = x^*(t)$ и $u = u^*(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$.

Условие (б) теоремы 2 гласит:

$$\lambda_0(t) f_0\left(x_1^*(t), x_2^*(t), u^*(t)\right) + \lambda_1(t) u^*(t) + \lambda_2(t) = 0, \tag{B.10}$$

а условие (в) приводит к неравенству

$$\lambda_0(t) = \text{const} \leqslant 0. \tag{B.11}$$

В.2. Уравнение Эйлера — Лагранжа

Поскольку решение $\lambda(t) = (\lambda_0(t), \lambda_1(t), \lambda_2(t))$ должно быть ненулевым, из (В.8) и (В.10) следует, что $\lambda_0(t) \neq 0$; условие (В.11) записывается тогда в форме

$$\lambda_0(t) = \text{const} \triangleq \lambda_0 < 0. \tag{B.12}$$

Дифференцируя (В.8) и пользуясь (В.7), приходим к уравнению

$$\lambda_0 \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial f_0}{\partial u} - \frac{\partial f_0}{\partial x_1}\right) = 0. \tag{B.13}$$

---

*) В вариационном исчислении предполагается, что функция $f(t, x, \dot{x})$ вместе со своими частными производными до третьего порядка определена и непрерывна в открытой области пространства $(t, x, \dot{x})$.

Имея в виду (В.12), перейдем к исходным переменным; (В.13) запишется теперь в форме

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} = 0. \qquad \text{(В.14)}$$

Получили уравнение Эйлера—Лагранжа для простейшей задачи.

В.3. Условие Лежандра

Условие (В.9) вместе с (В.12) приводит к неравенству

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial u^2} \geqslant 0,$$

или, в исходных переменных,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \dot{x}^2} \geqslant 0. \qquad \text{(В.15)}$$

Это неравенство и представляет условие Лежандра.

В.4. Условие Вейерштрасса

Разрешая уравнение (В.8) относительно $\lambda_1(t)$ и подставляя результат в (В.6), получим

$$\mathscr{H}(\lambda(t),\ x^*(t),\ u) = \lambda_0\left[f_0\left(x_1^*(t),\ x_2^*(t),\ u\right) - \right.$$
$$\left. - u\frac{\partial f_0\left(x_1^*(t),\ x_2^*(t),\ u\right)}{\partial u}\Bigg|_{u=u^*(t)}\right] + \lambda_2(t).$$

Учитывая (В.12), можем записать условие (а) теоремы 2 в следующей форме:

$$f_0\left(x_1^*(t),\ x_2^*(t),\ u\right) - f_0\left(x_1^*(t),\ x_2^*(t),\ u^*(t)\right) -$$
$$- (u - u^*(t))\left.\frac{\partial f_0\left(x_1^*(t),\ x_2^*(t),\ u\right)}{\partial u}\right|_{u=u^*(t)} \geqslant 0$$

для всех $u \neq u^*(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. В первоначальных переменных это неравенство записывается так:

$$f(t,\ x^*(t),\ \dot{x}) - f(t,\ x^*(t),\ \dot{x}^*(t)) - (\dot{x} - \dot{x}^*(t)) \left.\frac{\partial f(t,\ x^*(t),\ \dot{x})}{\partial \dot{x}}\right|_{\dot{x}=\dot{x}^*(t)} \geqslant 0 \quad \text{(B.16)}$$

для всех $\dot{x} \neq \dot{x}^*(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$; в такой форме неравенство известно как условие Вейерштрасса.

Если функция $x = x^*(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ сообщает минимальное значение интегралу (B.1), то она должна быть решением уравнения (B.14), удовлетворяющим условиям (B.15) и (B.16). Таким образом, теорема 2 приводит к трем необходимым условиям минимума для простейшей задачи вариационного исчисления; четвертое необходимое условие, *условие Якоби*, не следует непосредственно из теоремы.

B.5. Условия в угловых точках

Из (B.8) следует, что

$$\frac{\partial f_0}{\partial u} = -\frac{\lambda_1(t)}{\lambda_0};$$

условие (B.10) показывает теперь, что

$$f_0 - u\frac{\partial f_0}{\partial u} = -\frac{\lambda_2(t)}{\lambda_0}.$$

Оба эти выражения непрерывны в промежутке $[t_0,\ t_1]$, как это следует из непрерывности $\lambda(t)$. В частности, если $u^*(t)$, а значит, и $\dot{x}^*(t)$, разрывна в точке $t = t_c$, то оптимальное решение удовлетворяет условиям

$$\left.\begin{aligned} \left.\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right|_{t=t_c-0} &= \left.\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right|_{t=t_c+0}, \\ f - \dot{x}\left.\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right|_{t=t_c-0} &= f - \dot{x}\left.\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right|_{t=t_c+0}. \end{aligned}\right\} \quad \text{(B.17)}$$

Эти равенства называются условиями Эрдмана—Вейерштрасса в угловых точках.

В.6. Условие трансверсальности

Воспользуемся теперь условием (г) теоремы 2. Например, в начальной точке имеем

$$\lambda_1(t_0)\,\eta_1^0 + \lambda_2(t_0)\,\eta_2^0 = 0 \tag{B.18}$$

при условии

$$\frac{\partial\theta^0}{\partial x_1}\,\eta_1^0 + \frac{\partial\theta^0}{\partial x_2}\,\eta_2^0 = 0. \tag{B.19}$$

Последние два равенства дают

$$\lambda_1(t_0)\frac{\partial\theta^0}{\partial x_2} - \lambda_2(t_0)\,\frac{\partial\theta_0}{\partial x_1} = 0. \tag{B.20}$$

Выразим теперь значения $\lambda_1(t_0)$ и $\lambda_2(t_0)$ с помощью (B.8) и условия (б) теоремы 2; подставляя результаты в (B.20) и пользуясь (B.12), получим

$$f_0 - \left(\frac{\partial\theta^0/\partial x_2}{\partial\theta^0/\partial x_1} + u\right)\frac{\partial f_0}{\partial u} = 0. \tag{B.21}$$

Здесь

$$u = u^*(t),\ \ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^*(t)\ \ \text{и}\ \ t = t_0.$$

В первоначальных переменных условие (B.21) записывается в форме

$$f - \left(\frac{\partial\theta^0/\partial t}{\partial\theta^0/\partial x} + \dot{x}\right)\frac{\partial f}{\partial\dot{x}} = 0, \tag{B.22}$$

где $x = x^*(t)$, $\dot{x} = \dot{x}^*(t)$ и $t = t_0$. Мы получили условие трансверсальности в начальной точке. Аналогичное условие имеет место, разумеется, и в конечной точке.

В.7. Естественное граничное условие

Если значение t_0 или t_1 задано, но значение $x(t_0)$ или $x(t_1)$ не известно, то можем вновь использовать условие (г) теоремы 2. Пусть, например, значение t_0 задано, но $x(t_0)$ не известно. Тогда из (B.18) и (B.19) следует, что $\lambda_1(t_0) = 0$, откуда, пользуясь (B.8) и (B.12), получаем равенство

$$\frac{\partial f_0}{\partial u} = 0,$$

справедливое в начальной точке оптимальной траектории. Возвращаясь к первоначальным переменным, запишем это равенство в форме

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} = 0; \tag{B.23}$$

здесь

$$x = x^*(t), \quad \dot{x} = \dot{x}^*(t) \quad \text{и} \quad t = t_0.$$

Таково естественное граничное условие в начальной точке.

Аналогичное условие справедливо для конечной точки, если значение t_1 известно, а $x(t_1)$ свободно.

Laning G. and Battin R., Random Processes in Automatic Control, McGraw-Hill Book Company, New York, 1956. [Русский перевод; Лэнинг Дж Х. и Бэттин Р. Г., Случайные процессы в задачах автоматического управления. М., ИЛ, 1958.]
LaSalle J P. and Lefschetz S. (eds.), Nonlinear Differential Equations and Nonlinear Mechanics, Academic Press Inc., New York, 1963.
Leitmann G. (ed), Optimization Techniques, Academic Press Inc., New York, 1962. [Русский перевод: Лейтман Дж. (ред.), Методы оптимизации с приложениями к механике космического полета, М., «Наука», 1965.]
Leitmann G. (ed.), Topics in Optimization, Academic Press Inc., New York, 1966.
Leondes C. T. (ed.), Advances in Control Theory, Academic Press Inc., New York, 1964.
Peterson E. L., Statistical Analysis and Optimization of Systems, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1961.
Ragazzini J. R. and Franklin G. F., Sampled-data Control Systems, McGraw-Hill Book Company, New York, 1958.
Tou J. T., Modern Control Theory, McGraw-Hill Book Company, New York, 1964.
Truxal J., Feedback Control System Synthesis, McGraw-Hill Book Company, New York, 1955.
Tsien H. S., Engineering Cybernetics, McGraw-Hill Book Company, New York, 1954. [Русский перевод: Цянь Сюэ-сень, Техническая кибернетика, М., ИЛ, 1956.]
Zadeh L. A. and Desoer C., Linear System Theory, McGraw-Hill Book Company, New York, 1963.
Zoutendijk G., Method of Feasible Direction, Elsevier Publishing Company, Amsterdam, 1960. [Русский перевод: Зойтендейк Г., Методы возможных направлений, М., ИЛ, 1963.]

Книги, рекомендуемые для одновременного изучения и справок

Athans M. and Falb P. L., Optimal Control, McGraw-Hill Book Company, New York, 1966.
Bellmann R. E. and Dreyfus S E. Applied Dynamic Programming, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1962. [Русский перевод: Беллман Р. и Дрейфус С., Прикладные задачи динамического программирования, М., «Наука», 1965.]
Bolza O., Lectures on the Calculus of Variations, Dover Publications, Inc., New York, 1961.
Dreyfus S. E., Dynamic Programming and the Calculus of Variations, Academic Press Inc., New York, 1965.
Lawden D. F., Optimal Trajectories for Space Navigation, Butterworth & Co (Publishers), Ltd., London, 1963 [Русский перевод: Лоуден Д Ф., Оптимальные траектории для космической навигации, М., «Мир», 1966.]

Книги для углубленного изучения

Bliss G. A., Lectures on the Calculus of Variations, The University of Chicago Press, Chicago, 1946. [Русский перевод: Блисс Г. А., Лекции по вариационному исчислению, М., ИЛ, 1950.]

Гельфанд И. М. и Фомин С. В., Вариационное исчисление, М., Физматгиз, 1961.

Isaacs R., Differential Games, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1965. [Русский перевод: Айзекс Р., Дифференциальные игры, Изд-во «Мир», 1967.]

Merriam C. W., III, Optimazation Theory and the Design of Feedback Control Systems, McGraw-Hill Book Company, New York, 1964.

Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф., Математическая теория оптимальных процессов, Физматгиз, 1961.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Базис 27
Больца задача 145

Вейерштрасса условие 182
Вектор 11
Время сгорания 83
Выигрыш 14, 15, 17
— минимальный 14, 18

Гладкая поверхность 36

Допустимая управляющая функция 24, 25, 113
Допустимое правило 169

Задача Больца 145
Замкнутое управление 142

Качество, показатель 14, 16, 17, 25, 170
Компонента релейная 62
Кривая переключений 69

Лежандра условие 182

Матрица 11
Минимальный выигрыш 14, 18
Множество 11

Неавтономная система 25
Неособенное преобразование 27
Непрерывная обратная связь 142

Ограниченный принцип максимума 158
Однолистная поверхность 17
Оптимальная программа 14
— траектория 16, 18, 20
Оптимальная траектория регулярная 34
Оптимальное правило 14
— управление 26
— —, синтез 142

Переменные управляющие 23
Поверхность гладкая 36
— однолистная 17
— предельная 18, 20, 22, 23
— равных оптимальных значений функционала 18
Показатель качества 14, 16, 17, 25, 170
Правило 13
— допустимое 109
— множителей 160
— оптимальное 14
Преобразование неособенное 27
Принцип максимума 41, 42
— — ограниченный 158
Программа оптимальная 14
Программное управление 140, 141
Пространство состояний 13
— фазовое 13
Путь 14
— экстремальный 48

Разомкнутое управление 140
Регулярная точка 29
— оптимальная траектория 34
Релейная компонента 62

Связь обратная непрерывная 142
Семейство 11
Синтез оптимального управления 142

Система неавтономная 25
Скалярное произведение 11

Точка регулярная 29
Траектория 16
— оптимальная 16, 18 20
— — регулярная 34

Управление 23
— замкнутое 142
— оптимальное 26
— программное 140, 141
— разомкнутое 140
— с обратной связью 141
— экстремальное 44
Управляющая функция допустимая 24, 25
Управляющие переменные 23
Уравнение динамического программирования 43
Уравнение Эйлера—Лагранжа 182
Уравнения состояния 23
— траекторий 26
Условие Вейерштрасса 182
— Лежандра 182
— трансверсальности 37, 40, 56, 184
— Эрдмана — Вейерштрасса 183

Фазовое пространство 13
Функция переключений 62

Эйлера — Лагранжа уравнение 182
Экстремальное управление 44
Экстремальный путь 48
Эрдмана—Вейерштрасса условие 183

Дж. Лейтман

Введение в теорию оптимального управления

(Серия: «Теоретические основы технической кибернетики»)

М., 1968 г., 192 стр. с илл.

Редактор *А. А. Могилевский*

Техн. редактор *И. Ш. Аксельрод*

Корректор *Л. Н. Боровина*

Сдано в набор 20/X 1967 г. Подписано к печати 8/II 1968 г. Бумага 84×108$^{1}/_{32}$. Физ. печ. л 6. Условн. печ. л. 10,08. Уч.-изд. л. 8,09. Тираж 14 000 экз. Цена книги 78 коп. Заказ № 926.

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ленинградская типография № 2
имени Евгении Соколовой Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР,
Измайловский проспект, 29.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

ИМЕЮТСЯ В ПРОДАЖЕ:

Джури Э., Импульсные системы автоматического регулирования, перевод с английского, Физматгиз, 1963, 456 стр., 1 р. 51 к.

Казаков И. Е. и Доступов Б. Г., Статистическая динамика нелинейных автоматических систем, Физматгиз, 1962, 342 стр., 1 р. 24 к.

Первозванский А. А., Случайные процессы в нелинейных автоматических системах, Физматгиз, 1962, 351 стр., 1 р. 08, к.

Ройтенберг Я Н., Некоторые задачи управления движением, Физматгиз, 1963, 140 стр., 38 коп.

Флюгге-Лотц И., Метод фазовой плоскости в теории релейных систем, перевод с английского, Физматгиз, 1959, 175 стр., 64 коп.

Перечисленные выше книги требуйте в магазинах Книготорга. Письменный заказ можно направить также в ближайший отдел «Книга — почтой» республиканского, областного, краевого Книготорга. Литература будет выслана наложенным платежом. При отсутствии этих книг на месте следует обратиться по адресу: Москва, К-50, ул. Медведева, 1, магазин № 8 Москниги, отдел «Книга — почтой».

ГОТОВЯТСЯ К ПЕЧАТИ:

Баруча-Рид А. Т., Элементы теории марковских процессов и их приложения, перевод с английского.

Бусленко Н. П., Моделирование сложных систем.

Современная теория систем управления, под ред. К. Т. Леондеса, перевод с английского.

Красовский А. А., Статистическая теория переходных процессов в системах управления (серия «Теоретические основы технической кибернетики»).

Растригин Л. А., Статистические методы поиска (серия «Теоретические основы технической кибернетики»).

Предварительные заказы на печатающиеся книги принимаются всеми магазинами Книготорга и «Академкниги».