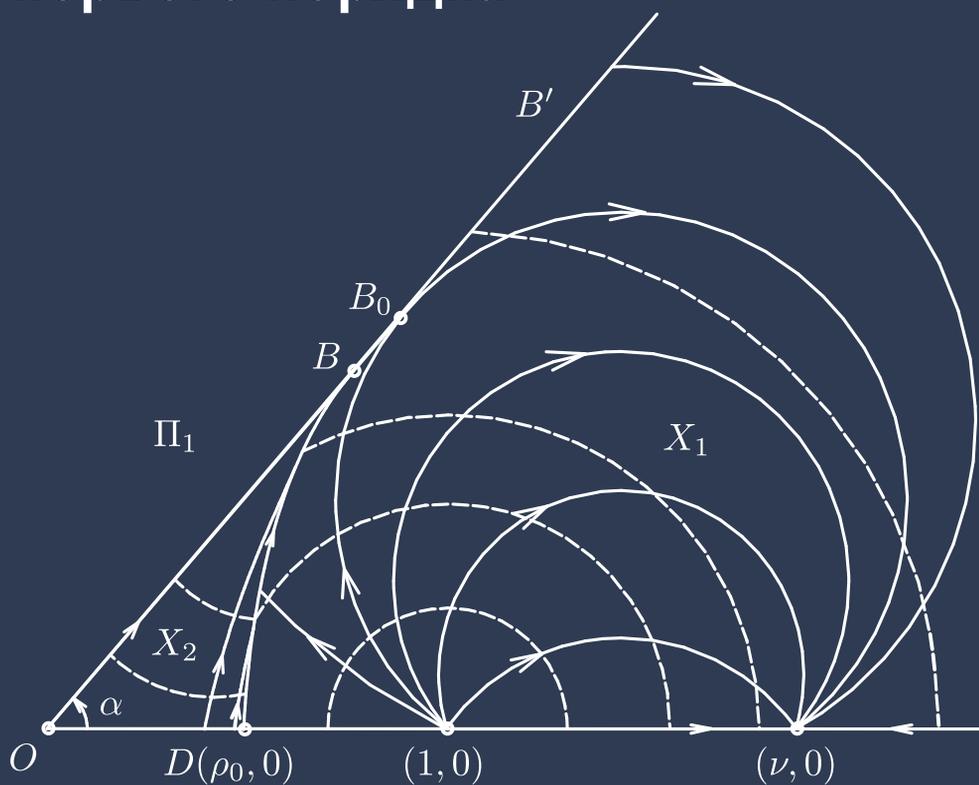


Арик Меликян

Приложения к задачам теории управления
и дифференциальным играм

Обобщенные характеристики уравнений в частных производных первого порядка





A.A. Melikyan

**Generalized Characteristics
of First Order PDEs**

**Applications in Optimal Control
and Differential Games**

1998

Birkhäuser

Boston • Basel • Berlin

А.А. Меликян

Обобщенные характеристики
уравнений в частных производных
первого порядка

Приложения к задачам теории управления
и дифференциальным играм

Перевод с английского
В.А. Корнеева, А.Е. Утемова

Под редакцией В.С. Пацко



Москва ♦ Ижевск

2014

УДК 517.95, 517.977
ББК 22.161.6, 22.161.8
М 47

Меликян А.А.

Обобщенные характеристики уравнений в частных производных первого порядка. Приложения к задачам теории управления и дифференциальным играм. — М.—Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2014. — 450 с.

Классический метод характеристик Коши для уравнений в частных производных первого порядка предполагает наличие гладкого решения таких уравнений. В то же время в математической физике, теории оптимального управления и теории дифференциальных игр широко используется понятие вязкостного (минимаксного) решения, охватывающее случай кусочно-гладкого решения. А.А.Меликян разработал метод обобщенных (сингулярных) характеристик, позволяющий исследовать, а в простых случаях даже находить вязкостное решение.

Настоящее издание содержит перевод книги А.А.Меликяна на эту тему, вышедшей на английском языке в 1998 г. В добавлении приведен перевод нескольких статей А.А.Меликяна, опубликованных на английском языке после 1998 г.

Для специалистов в области уравнений в частных производных, теории оптимального управления и теории дифференциальных игр, а также для студентов старших курсов учебных заведений и аспирантов.

ISBN 978-5-4344-0198-2

ББК 22.161.6, 22.161.8

© Карине Георгиевна Меликян, Заруи Ариковна Меликян,
Артем Арикович Меликян, 2014

© Институт проблем механики им. А.Ю.Ишлинского РАН, 2014



Об Арике Артаваздовиче Меликяне

Арик Артаваздович Меликян (1944–2009 гг.) — крупный ученый в области дифференциальных игр, оптимального управления и смежных разделов теории дифференциальных уравнений.

Арик Артаваздович родился 5 октября 1944 г. в Ереване. Его родители — Артавазд Михайлович и Шушаник Сантуровна — были преподавателями биологии в школе. В 1962 г. А.А. Меликян окончил школу с золотой медалью и поступил на факультет кибернетики Ереванского политехнического института. Прочувшись там один год, он в 1963 г. поступил в Московский физико-технический институт (МФТИ) на факультет аэромеханики и прикладной математики, который с отличием окончил в 1969 г. В том же году Арик Артаваздович поступил в аспирантуру МФТИ.

Будучи научным руководителем А.А. Меликяна, я предложил ему заняться исследованиями в области дифференциальных игр с неполной информацией. Арик Артаваздович быстро написал и успешно защитил весьма интересную кандидатскую диссертацию по этой теме.

По окончании аспирантуры он работал в Институте проблем механики АН СССР (в настоящее время Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук), с которым связана вся научная карьера А.А. Меликяна. Здесь Арик Артаваздович прошел путь от младшего научного сотрудника до заведующего лабораторией. В 1986 г. он защитил докторскую диссертацию на тему “Построение оптимальных движений в игровых задачах динамики”, в которой сочетались и взаимно обогащали друг друга математические методы классической механики и теории дифференциальных игр. В 1998 г. ему была присуждена Государственная премия Российской Федерации в области науки и техники. В 2003 г. А.А. Меликян был избран членом-корреспондентом Российской академии наук, а в 2009 г. — иностранным членом Национальной академии наук Республики Армения.

А.А. Меликян уделял большое внимание учебной работе по подготовке научной смены, был профессором МФТИ, читал оригинальные курсы по вариационному исчислению, оптимальному управлению и дифференциальным играм. Его ученики успешно работают в научных институтах многих стран.

Читателю предлагается книга А.А. Меликяна, посвященная методу обобщенных характеристик для уравнений в частных производных первого порядка. В основу книги положен материал монографии А.А. Меликяна “Generalized characteristics of first order PDEs. Applications in optimal control and differential games”^{*} и ряда журнальных публикаций, изданных за рубежом на английском языке. Я рад, что теперь эти работы будут опубликованы на русском языке.

^{*} *Melikyan, A.A. Generalized Characteristics of First Order PDEs: Applications in Optimal Control and Differential Games. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1998. xiv+310 pp.*

Обобщенные характеристики возникают в задачах теории управления и дифференциальных игр, когда недостаточно ограничиться классическими гладкими решениями уравнения Гамильтона – Якоби – Беллмана – Айзекса, а необходимо рассматривать также негладкие или даже разрывные решения и связанные с ними сингулярные многообразия, на которых происходят разрывы производной или значения решения. А.А. Меликян предложил и разработал метод сингулярных характеристик, позволяющий строить сингулярные многообразия, пользуясь классическим аппаратом теории дифференциальных уравнений. Этот метод дает возможность получать в явном виде синтез в задачах оптимального управления и дифференциальных игр и, кроме того, делать заключения о структуре и гладкости вязкостных решений уравнения Гамильтона – Якоби – Беллмана – Айзекса. При этом А.А. Меликян распространил свой метод на значительно более широкий класс уравнений в частных производных первого порядка. Оказалось, что метод сингулярных характеристик применим как для построения оптимальных решений в дифференциальных играх, так и для исследования распространения слабых разрывов в некоторых физических средах и для обработки визуальной информации.

А.А. Меликян был не только крупным ученым и замечательным преподавателем, но и прекрасным, отзывчивым, исключительно доброжелательным человеком, наделенным оптимизмом и чувством юмора. Его отличали удивительная доброта и многогранный талант: в молодости он был успешным спортсменом-легкоатлетом, играл на музыкальных инструментах, владел несколькими иностранными языками, параллельно с основным образованием обучался на факультете журналистики МГУ, брал интервью, писал рассказы, которые публиковались в “Литературной газете”.

В работе над данной книгой приняли участие коллеги, сотрудники, друзья и ученики Арика Артаваздовича: В.С. Пацко, И.М. Ананьевский, В.А. Корнеев, Н.В. Овакимян, А.И. Овсеевич, А.Е. Утемов, которые осуществили перевод английских текстов и научное редактирование. Большую помощь в подготовке издания оказали Д.А. Бедин, А.Г. Иванов, Л.В. Камнева, С.С. Кумков.

Академик Ф.Л. Черноусько

Оглавление

Об Арике Артаваздовиче Меликяне	7
Предисловие	19
Введение	23
ГЛАВА 1. Метод характеристик в гладких задачах	29
1.1. Задача Коши для УЧП первого порядка	29
1.1.1. Постановка задачи	29
1.1.2. Уравнения характеристик	30
1.1.3. Начальные условия	31
1.1.4. Замечание о решении в малом	33
1.1.5. Построение дважды дифференцируемого решения	33
1.1.6. Нерегулярная характеристическая задача	35
1.1.7. Пример на плоскости. Постановка задачи	39
1.1.8. Построение решения	40
1.2. Задача Коши для интегральных поверхностей	41
1.2.1. Геометрическая постановка задачи 1.1	41
1.2.2. Обобщенная задача Коши	42
1.2.3. Характеристическое поле на многообразии	45
1.2.4. Построение базисного решения	48
1.2.5. Выражение для λ при малых m	50
1.2.6. Достаточные условия для задач 1.3, 1.4	50
1.2.7. Геометрия характеристического поля	52
1.2.8. Характеристические точки многообразия W	53
1.2.9. Пример характеристической системы для случая $m = 1$	55
1.3. Задача Коши с подвижной границей	56
1.3.1. Регулярная задача с подвижной границей	56
1.3.2. Нерегулярная задача	59
1.3.3. Скобки Якоби различных уровней	60
1.3.4. Достаточное условие	61
1.3.5. Классическая нерегулярная нехарактеристическая задача	63
1.3.6. Иллюстративный пример	72
Упражнения	75
ГЛАВА 2. Обобщенные решения и сингулярные характеристики УЧП первого порядка	77
2.1. Вязкостные решения и их сингулярные многообразия	77
2.1.1. Определение вязкостного решения	77

2.1.2.	Регулярные и сингулярные точки решения. Простейшая сингулярность	79
2.1.3.	Необходимые условия простейшей сингулярности	82
2.1.4.	Сингулярные характеристики: определение и классификация	84
2.1.5.	Некоторые свойства задач с начальными и терминальными значениями	85
2.2.	Рассеивающая поверхность	86
2.2.1.	Основные условия	86
2.2.2.	Линейные и нелинейные гамильтонианы	87
2.3.	Сингулярные характеристики для эквивокальной поверхности	90
2.3.1.	Четыре типа поверхностей, необходимые условия	90
2.3.2.	Уравнения сингулярных характеристик	92
2.3.3.	Некоторые свойства характеристической системы	94
2.4.	Сингулярные характеристики для фокальной поверхности	96
2.4.1.	Шесть типов поверхностей, необходимые условия	96
2.4.2.	Фокальная поверхность — гиперплоскость	99
2.4.3.	Несимметричная поверхность, коллинеарные поля	102
2.4.4.	Вырожденные поверхности	105
2.4.5.	Начальные условия и идентификация сингулярных поверхностей	106
2.4.6.	Изменения для задач с терминальными значениями	106
2.5.	Пример задачи с заданными начальными условиями	107
2.5.1.	Постановка задачи	107
2.5.2.	Случай 1), $a < b$	109
2.5.3.	Случай 2), $a = b$	111
2.5.4.	Случай 3), $a > b$	112
2.5.5.	Некоторые изменения для несимметричного случая	114
2.5.6.	Заключительные замечания	117
	Упражнения	118
ГЛАВА 3. УЧП первого порядка в вариационном исчислении, оптимальном управлении и дифференциальных играх 119		
3.1.	Уравнение Гамильтона – Якоби в вариационном исчислении	119
3.1.1.	Формула первой вариации	119
3.1.2.	Случай неоднородного лагранжиана	122
3.1.3.	Вариационная задача о минимальной геодезической	123
3.1.4.	Классический однородный лагранжиан	125
3.2.	Уравнение Беллмана в оптимальном управлении	126
3.2.1.	Задача с фиксированным временем	126
3.2.2.	Задача быстрогодействия	128
3.2.3.	Управления обратной связи	131
3.3.	Уравнение Айзекса в дифференциальных играх	131
3.3.1.	Игра с фиксированным моментом окончания. Функция цены	131
3.3.2.	Игры преследования	134
3.4.	Обобщенные решения уравнения Гамильтона – Якоби – Беллмана – Айзекса	135

3.4.1.	Классические и вязкостные решения	135
3.4.2.	Обобщенное основное уравнение, неравенства А.И. Субботина	137
3.5.	Сингулярные траектории и сингулярные характеристики	139
3.5.1.	Сингулярные поверхности и траектории: определение и классификация	139
3.5.2.	Экивокальная поверхность	142
3.5.3.	Сингулярные траектории и характеристики	145
3.6.	Линейная игра преследования с эллиптическими вектограммами	146
3.6.1.	Постановка задачи	146
3.6.2.	Рассеивающая поверхность	148
3.6.3.	Фокальная поверхность	150
3.6.4.	Граница индифферентной зоны	152
Упражнения		153
ГЛАВА 4. Дифференциальные игры с простыми движениями на многообразиях		
4.1.	Постановка задачи	155
4.1.1.	Игры с простыми движениями	155
4.1.2.	Уравнения динамики	156
4.1.3.	Функции платы для двух игр	158
4.2.	Первичное решение	158
4.2.1.	Свойства геодезической линии	158
4.2.2.	Первичная и вторичная области	159
4.3.	Необходимые условия оптимальности	160
4.3.1.	Обобщенное основное уравнение, регулярные траектории	160
4.3.2.	Сингулярная (особая) поверхность в первичной области	162
4.3.3.	Анализ поверхности Γ_0 с использованием условий вязкостного решения	166
4.4.	Две ветви экивокальной поверхности	170
4.4.1.	Определение экивокальных поверхностей	170
4.4.2.	Основной результат	173
4.4.3.	Алгоритм построения	175
4.5.	Игра преследования с препятствием	176
4.5.1.	Постановки задачи	176
4.5.2.	Плоская задача	179
4.5.3.	Примеры	181
Упражнения		185
ГЛАВА 5. Игры простого преследования и сближения на двумерном конусе		
5.1.	Формулировка игры в различных системах координат	187
5.1.1.	Динамика в декартовых и относительных переменных	187
5.1.2.	Автомодельные переменные, комплексные координаты	191
5.1.3.	Первичные решения	193
5.2.	Анализ первичной области	194

5.2.1.	Необходимые условия оптимальности	194
5.2.2.	Построение множества B , параметрический анализ	196
5.2.3.	Построение эквивокальной поверхности	200
5.3.	Исследование вторичной области	201
5.3.1.	Игра преследования	201
5.3.2.	Критический конус при $\nu = 1 - \sin \alpha$	205
5.3.3.	Игра сближения	207
5.3.4.	Случай $\nu = 1$	210
5.3.5.	Об алгоритме синтеза и компьютерном моделировании	212
Упражнения		215
ГЛАВА 6. Гладкие решения УЧП с негладким гамильтонианом		217
6.1.	Сингулярные траектории в оптимальном управлении. Анализ на основе программного и синтезирующего подходов	217
6.1.1.	Введение	217
6.1.2.	Сингулярная дуга в задаче оптимального управления, программный подход	219
6.1.3.	Линейная задача	219
6.1.4.	Два набора переменных	221
6.1.5.	Необходимые условия в инвариантной форме	222
6.1.6.	Сингулярная универсальная поверхность в общей задаче	223
6.2.	Уравнения в частных производных первого порядка	225
6.2.1.	Необходимые условия для сингулярной гиперплоскости	225
6.2.2.	Вспомогательная теорема	227
6.2.3.	Необходимые условия в инвариантной форме	229
6.2.4.	Сингулярные характеристики для универсальной поверхности	230
6.2.5.	Приложения к задаче управления	231
6.2.6.	Пример	234
6.3.	Второй порядок сингулярности	237
6.3.1.	Два оптимальных фазовых портрета. Условие Коппа – Мойера	237
6.3.2.	Инвариантная форма условий второго порядка	239
6.3.3.	Сингулярные характеристики для синтеза S2	240
Упражнения		242
ГЛАВА 7. Ударные волны в решениях УЧП первого порядка		243
7.1.	Сингулярные характеристики в задачах на плоскости	243
7.1.1.	Двумерная задача	243
7.1.2.	Уравнения для фокальной линии	244
7.1.3.	Уравнения для эквивокальной линии	246
7.1.4.	Сингулярные характеристики двумерного уравнения Гамильтона – Якоби	247
7.2.	Ударные волны, порожденные граничными условиями	250
7.2.1.	Начальные условия	250
7.2.2.	Овыщукление функции $g(p)$	251
7.2.3.	Исследование второй производной	256

7.3.	Основные результаты для количества волн	258
7.3.1.	Упрощенные выражения скобок Якоби	258
7.3.2.	Случай простых отрезков	259
7.3.3.	Вторичные волны	264
7.3.4.	Решение в случае непростого отрезка	265
7.3.5.	Теорема С.Н. Кружкова	267
7.3.6.	Пример	268
7.3.7.	Некоторые обобщения на многомерный случай	269
7.4.	Другие приложения метода сингулярных характеристик	271
7.4.1.	Сингулярные характеристики в законах сохранения	271
7.4.2.	Об одном классе систем уравнений в частных производных первого порядка	272
Упражнения	275
ГЛАВА 8. Сингулярные поверхности негладких решений вариационных задач с функционалом, задаваемым многомерным интегралом	277
8.1.	Задача вариационного исчисления с многомерным интегралом	277
8.1.1.	Негладкое решение УЧП второго порядка	277
8.1.2.	Формула первой вариации	278
8.1.3.	Необходимые условия для сингулярной поверхности	281
8.2.	Построение сингулярной поверхности	285
8.2.1.	Уравнения сингулярных характеристик	285
8.2.2.	Начальные условия	286
8.3.	Квадратичный лагранжиан	289
8.3.1.	Вырожденные необходимые условия	289
8.3.2.	Сингулярные характеристики	290
8.3.3.	Возмущенная задача	293
8.3.4.	Начальные условия	294
8.4.	Пример	295
8.4.1.	Постановка задачи	295
8.4.2.	Разложения Тейлора	297
8.4.3.	Частные случаи	299
Упражнения	301
Приложение	303
1.	Теорема о неявной функции	303
2.	Скобки Якоби	304
3.	Инвариантность скобок Якоби	305
4.	Выпрямление поля	308
5.	Преобразование к простой задаче	310
Литература	312
Сокращения	318
Предметный указатель	319

ДОБАВЛЕНИЕ

Избранные статьи	323
Некоторые свойства уравнения Беллмана – Айзекса для игр на поверхностях вращения	325
1. Уравнение Гамильтона – Якоби – Беллмана – Айзекса для игры сближения-уклонения	325
2. Игры на поверхностях вращения	326
3. Игра на конусе	327
4. Игра на гиперболоиде	328
5. Геометрические свойства многообразия B	329
6. Фокальная точка	329
7. Край многообразия B	331
8. Вычисление C	332
9. Структура цены игры	333
Литература	333
Геометрия оптимальных траекторий в окрестности фокальных особых поверхностей в дифференциальных играх	335
1. Введение	335
2. Общее описание фокальной поверхности	336
3. Сингулярная поверхность — гиперплоскость	337
4. Поверхность в общем случае. Коллинеарные поля	340
5. Система двух УЧП для фокального многообразия в общем случае	342
6. Импульсная дифференциальная игра, возникающая в области финансов	345
6.1. Предшествующая работа	345
6.2. Применение теории предыдущего раздела	346
6.3. Эквивалентное скалярное УЧП второго порядка	347
7. 3D-дифференциальная игра с гладким гамильтонианом	348
Литература	349
Задачи с начальными и терминальными условиями для уравнения Гамильтона – Якоби	351
1. Введение	351
2. Вязкостные решения и краевые условия	352
3. Задачи с начальными и терминальными значениями в оптимальном управлении	353
3.1. Нестационарная система и задача вариационного исчисления	354
3.2. Стационарная система и задача вариационного исчисления	355
3.3. Задача вариационного исчисления с однородным лагранжианом	356
3.4. Замечание по терминологии	358
4. Примеры	359
4.1. Управление автомобилем	359
4.2. Двумерная дифференциальная игра	361
4.3. Скалярное уравнение эйконала	366
5. Заключение	367
Литература	367

Геометрия игр преследования-убегания на двумерных многообразиях	369
1. Введение	370
2. Пространство игры и динамика	371
3. Первичное решение	372
4. Неединственность геодезических. Многообразия Γ и B	373
5. Примеры многообразий Γ и B	375
6. Вторичная область. Экивокальные поверхности	384
7. Подобласть произвольного управления убегающего	386
8. Выводы	389
Литература	390

Простейшие особенности и обобщенные характеристики для уравнения Гамильтона–Якоби с гамильтонианом в виде максимума вогнутых функций	393
1. Введение	393
2. Простейшие особенности и сингулярные характеристики	395
2.1. Предположения о сингулярностях коразмерности 1	395
2.2. Классические характеристики	396
2.2.1. Свойство n -монотонности функций H_i	398
2.2.2. Условие равномерной n -монотонности	399
2.3. Метод сингулярных характеристик	399
2.3.1. Условия продолжения	401
3. Возможные типы сингулярностей	402
3.1. Восходящие сингулярности	403
3.1.1. Восходящая рассеивающая поверхность	404
3.1.2. Восходящая экивокальная поверхность	404
3.1.3. Восходящая фокальная поверхность	407
3.2. Нисходящие сингулярности	407
3.2.1. Нисходящая рассеивающая поверхность	408
3.2.2. Нисходящая экивокальная поверхность	409
3.2.3. Нисходящая фокальная поверхность	410
3.3. Неособые поверхности переключения	410
3.3.1. Неособая рассеивающая поверхность	411
3.3.2. Неособая экивокальная поверхность	411
3.3.3. Универсальная поверхность	411
4. Пример	413
4.1. Универсальная поверхность	414
4.2. Неособая экивокальная поверхность	415
4.3. Восходящая экивокальная поверхность	415
Литература	417

Краевые сингулярности и характеристики уравнения Гамильтона–Якоби	419
1. Введение	419
1.1. Классические характеристики	420
1.2. Начальная полоса	420
1.3. Условие регулярности	421

2.	Нерегулярная задача и граничные условия на M	422
2.1.	Начальная полоса для нерегулярной нехарактеристической задачи	423
3.	Метод сингулярных характеристик	424
3.1.	Эквивокальные сингулярные характеристики в дифференциальных играх	425
3.2.	Граничные сингулярные характеристики	427
3.3.	Сингулярность более высокого порядка	428
4.	Сравнение граничных условий на M и M_0^+	428
5.	Достаточные условия существования и единственности	430
5.1.	Формулировка простой задачи	431
5.2.	Формулировка теоремы	432
6.	Примеры	433
6.1.	Одномерный иллюстративный пример	433
6.2.	Дифференциальная игра с фазовыми ограничениями	434
6.3.	Граничные характеристики в игровой задаче о брахистохроне	437
7.	Выводы	440
	Литература	440
Универсальные поверхности и гладкие решения уравнений Беллмана		443
1.	Введение	443
2.	Гладкая функция Беллмана в окрестности универсальной поверхности	444
3.	Достаточные условия существования универсальной поверхности	447
	Литература	449

В память моих родителей Шушаник и Артавазда

Предисловие

В некоторых разделах механики, физики и теории управления возникают краевые задачи для нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных (УЧП) первого порядка. Для таких задач хорошо известно достаточное условие локального существования и единственности дважды дифференцируемого решения. Этот результат получен на основе метода характеристик. Решениями УЧП очень часто, особенно в теории управления, являются непрерывные негладкие (недифференцируемые) функции. В точках гладкости такие решения удовлетворяют уравнению в классическом смысле. Но если требовать это условие только в точках гладкости, то УЧП может иметь неединственное решение. Единственность имеет место, если в близлежащих областях выполнен подходящий принцип согласования гладких ветвей решения, то есть рассматривается определенный вид обобщенного решения.

В каждой области науки применяется свой принцип согласования гладких ветвей решения. В теории оптимального управления и дифференциальных играх этот принцип заключается в оптимальности функции цены игры. В физике и механике должны удовлетворяться определенные физические законы. Можно использовать и чисто математический подход, когда формально вводится обобщенное решение и доказываются его существование и единственность без попытки описания какого-либо конкретного физического явления. При этом некоторые виды обобщенных решений могут использоваться при моделировании данного явления, а некоторые — не могут.

В начале 80-х годов прошлого века был предложен и разработан общий подход к уравнениям в частных производных первого и второго порядков, базирующийся на понятии обобщенного вязкостного решения. Были сформулированы и доказаны теоремы существования и единственности. В некотором обобщенном смысле стали трактовать граничные условия. Было доказано, что во многих случаях вязкостные решения уравнения Гамильтона – Якоби – Беллмана – Айзекса являются решениями соответствующих задач оптимального управления и игровых задач. Аналогичные результаты получены в математической физике для УЧП.

Одним из привлекательных методов построения вязкостного решения УЧП остается метод характеристик (МХ). Это связано с тем, что данный метод отражает такую важную информацию о задаче, как распространение возмущения. Тем не менее, следует отметить, что классический МХ не может быть непосредственно применен из-за возможной негладкости как самого вязкостного решения уравнения, так и левой части УЧП (гамильтониана).

Данная книга в основном посвящена вопросу усовершенствования метода характеристик и его дальнейшему применению к построению решения в следующих случаях: а) обобщенное вязкостное решение негладкое, тогда как гамильтониан является гладкой или негладкой функцией; б) решение гладкое (классическое, вводить понятие обобщенного решения нет необходимости), но гамильтониан – негладкая

функция; в) УЧП является квазилинейным уравнением Эйлера второго порядка в вариационной задаче с негладким решением.

Ключевым понятием в усовершенствованном методе является понятие сингулярных характеристик (СХ). Оно появилось в результате исследования сингулярных траекторий в задачах теории дифференциальных игр и оптимального управления. Классические траектории в таких областях описываются гамильтоновой системой обыкновенных дифференциальных уравнений, являющейся характеристической системой для уравнения Гамильтона – Якоби – Беллмана – Айзекса. Сингулярные траектории для многих задач также описываются подобными уравнениями, но включающими в себя так называемые особые управления. Попытка исключить особые управления из этих уравнений приводит к понятию сингулярных характеристик, которые присущи не только игровым задачам и задачам оптимального управления, но и УЧП первого порядка общего вида. Благодаря понятию СХ большинство сингулярных траекторий и поверхностей, возникающих в задачах теории управления, получили инвариантное описание в терминах УЧП.

Общее математическое понимание природы сингулярности, как правило, упрощает алгоритм поиска решения игровой задачи или задачи теории оптимального управления. Полученный опыт решения данных задач, соответственно, оказывается очень полезным при анализе структуры сингулярности вязкостного решения обычных УЧП.

Описание классических и сингулярных характеристик в терминах дифференциальной геометрии следующее. Классические характеристики определяют поле касательных на гиперповерхности четной размерности (коразмерности один), соответствующей УЧП. Более точно, это поверхность размерности $2n$ в пространстве размерности $2n + 1$, включающем вектор состояния, вектор сопряженных переменных и еще одну скалярную переменную (значение искомой функции). Данное поле увеличивает на единицу размерность начального интегрального многообразия, сохраняя при этом свойство интегральности. Такое поле может быть определено на поверхностях нечетной коразмерности: 1, 3, Для всех этих случаев существует определение поля характеристик в терминах дифференциальной геометрии. Традиционно, только поле, заданное на поверхности коразмерности один, связывалось с УЧП первого порядка, причем негладкость решения и/или гамильтониана являлась препятствием для применения классического метода характеристик. Основные результаты данной работы помогают преодолеть это препятствие с помощью использования подобных характеристик, но определенных на подходящих поверхностях коразмерности 3, 5,

Интегральные кривые поля характеристик на поверхностях коразмерности 3 и более называются в данной работе сингулярными характеристиками. Таким образом, с нелинейными УЧП связывают два типа характеристик: классические и сингулярные. Во многих задачах, используя оба этих типа, можно построить решение УЧП в случае его негладкости и/или негладкости гамильтониана. Соответствующий алгоритм построения решения называется методом сингулярных характеристик (МСХ). Классические и сингулярные характеристики вместе называются обобщенными характеристиками.

Аналитически уравнения для сингулярных характеристик имеют схожую форму с уравнениями классических характеристик, но в них используется модифици-

рованный гамильтониан. Модифицированный (сингулярный) гамильтониан по сути является линейной комбинацией классического гамильтониана и некоторых других функций, которые отражают необходимые условия (вязкости или оптимальности) в форме равенств. Эти равенства определяют поверхности четной размерности, о которых говорилось выше, и должны быть установлены для каждого типа сингулярности. Поиск необходимых условий является важной частью МСХ. Они могут быть найдены с помощью некоторых свойств вязкостного решения, а также (в игровых задачах и задачах оптимального управления) с помощью неравенств А.И. Субботина для обобщенного решения уравнения Гамильтона – Якоби – Беллмана – Айзекса.

Книга состоит из восьми глав и приложения, в котором приведены некоторые известные результаты, используемые в тексте. Первая и вторая главы посвящены изложению МСХ. Третья глава представляет собой обзор УЧП первого порядка, возникающих в теории оптимального управления. Четвертая и пятая главы посвящены дифференциальным играм на римановых многообразиях и поверхностях, для которых характерна неединственность геодезических линий. В шестой главе анализируются гладкие решения УЧП первого порядка с негладким гамильтонианом. В седьмой главе демонстрируется применение МСХ для решения задачи о распаде ударной волны в решениях нелинейных УЧП. Применение МСХ к УЧП второго порядка (уравнение Эйлера для вариационной задачи) рассмотрено в восьмой главе.

Благодарю коллег и студентов, которые приняли участие в подготовке и обсуждении материалов данной книги. Большую признательность хотел бы выразить Н.В. Овакимян (Институт механики Национальной академии наук, Ереван, Армения), А.И. Овсеичу и А.С. Шамаеву (ИПМех РАН, Москва), а также J. Shinag (Technion, Haifa, Israel), с которым я подготовил несколько публикаций, вошедших в материал книги. Некоторые задачи и примеры были решены совместно с моими коллегами Б.Н. Соколовым, В.А. Корнеевым (ИПМех РАН) и моими студентами Л.С. Вишневецким, С.С. Фомичевым и Ю.Н. Салиевым. Много полезных замечаний было сделано Ф.Л. Черноусько (ИПМех РАН), А.И. Субботиным, В.С. Пацко (Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург). Также я признателен E. Cliff (Virginia Tech) и A. Swiech (Georgia Tech) за обсуждение некоторых тем книги. Отмечу еще одну существенную помощь со стороны университета Georgia Tech: благодаря совместной работе с М. Бородовским над задачами биоинформатики, в моем распоряжении был мобильный компьютер, на котором я набирал и редактировал текст книги на языке \LaTeX . Я благодарен М.А. Гильману (ИПМех РАН), сделавшему много полезных замечаний и подготовившему электронные варианты более чем 70 рисунков к книге.

Книга написана при финансовой поддержке РФФИ (грант № 95-01-00802). Рисунки были сделаны с помощью системы CHARTON, разработанной в Московском центре непрерывного математического образования.

Москва, 17 декабря 1997 г.
А.А. Меликян

Введение

Классический метод характеристик разработан для поиска решения нелинейного уравнения в частных производных (УЧП) первого порядка

$$F(x, u, p) = 0, \quad x \in D \subset \mathbb{R}^n \quad \left(p = \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (1)$$

в предположении, что граничные (начальные) условия заданы на гиперповерхности $M \subset D$:

$$u(x) = w(x), \quad x \in M \subset D \quad (2)$$

Здесь $u = u(x)$ — неизвестная функция от n переменных $x = (x_1, \dots, x_n)$, а F — некоторая скалярная функция (гамильтониан).

Характеристической системой для уравнения (1) является следующая система обыкновенных дифференциальных уравнений порядка $2n + 1$:

$$\dot{x} = F_p, \quad \dot{u} = \langle p, F_p \rangle, \quad \dot{p} = -F_x - pF_u \quad (3)$$

В случае, если уравнение (1) квазилинейно, то есть имеет форму

$$a_1(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + a_n(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_n} + a_0(x, u) = 0$$

то первые $n + 1$ уравнений из (3) отщепляются. Уравнение (1) является линейным, если коэффициенты a_i не зависят от u . В этом случае отщепляются первые n уравнений из (3).

При определенных условиях решение задачи (1), (2) можно свести к интегрированию системы (3) [18]. В частности, если решение $u(x)$ и гамильтониан $F(x, u, p)$ дважды непрерывно дифференцируемы.

Во многих приложениях, прежде всего, в теории оптимального управления и дифференциальных играх, негладкие (даже разрывные) функции следует считать решениями УЧП вида (1), (2). В данной книге рассматривается только случай непрерывных, но, возможно, негладких решений.

В основном мы сосредоточимся на обобщенных решениях в вязкостном смысле, которые используются для решения задач теории оптимального управления, вариационного исчисления и дифференциальных игр. В главе 8 также рассмотрим обобщенное решение для УЧП второго порядка в вариационном смысле. Доказано, что для большинства случаев вязкостное решение уравнения Гамильтона – Якоби – Беллмана – Айзекса совпадает с решением исходной игровой задачи или задачи оптимального управления [2, 21, 29, 45, 77]. Аналогичные результаты получены для УЧП, возникающих в задачах математической физики.

Имея в своем распоряжении понятие обобщенного решения, исследователь все же сталкивается с трудностями при попытке применить систему (3), если есть негладкость решения и/или гамильтониана. Данные типы негладкости часто упоминаются как препятствия к использованию классического метода характеристик. Одна из целей книги заключается в том, чтобы показать, как можно преодолеть указанное обстоятельство, используя модифицированное понятие характеристик. Идея такого подхода заключается в следующем.

Свяжем с каждым решением $u(x)$, $x \in D$, уравнения (1) сингулярное многообразие — множество точек из D , в которых нарушается гладкость либо функции $u(x)$, либо гамильтониана $F(x, u, p)$. А именно, рассмотрим сингулярное многообразие Γ_m , которое локально представляет собой гладкую поверхность размерности $n - m$. Предположим, что в каждой точке этого многообразия выполняются следующие $2m + 1$ равенств:

$$F_i(x, u, p) = 0, \quad i = -m, \dots, -1, 0, 1, \dots, m, \quad x \in \Gamma_m \quad (4)$$

здесь F_i — некоторые гладкие функции. Одни из них могут быть гамильтонианом системы (1) или одной из его гладких ветвей. Другие могут отражать некоторые необходимые условия для решения $u(x)$ на Γ_m . Вектор p в (4) можно трактовать как некоторое предельное значение градиента $\partial u / \partial x$ в точках множества Γ_m .

Полезно отметить, что система (3) определяет касательное поле на поверхности размерности $2n$, заданной уравнением (1) в пространстве $(x, u, p) \in \mathbb{R}^{2n+1}$. Важное свойство этого векторного поля состоит в том, что его фазовые траектории заметают многообразие размерности на единицу большей размерности начальной поверхности, и при этом для расширенной поверхности сохраняется условие интегральности. Условие интегральности состоит в том, что параметры u и p на поверхности связаны таким образом, что являются, соответственно, значением и градиентом некоторой гладкой функции в точке x . Многообразие, удовлетворяющее условию интегральности, называется интегральной поверхностью контактной 1-формы $\alpha = du - \langle p, dx \rangle$ [1].

Аналогичное касательное поле может быть определено на любом четномерном многообразии, заданном уравнениями (4), где функции F_i удовлетворяют некоторым условиям. Аналитически это поле можно задать системой (3), но с другим модифицированным (сингулярным) гамильтонианом. Сингулярный гамильтониан $H^\sigma(x, u, p)$ представляет собой линейную комбинацию функций F_i :

$$\mu H^\sigma(x, u, p) = \sum_{i=-m}^m \lambda_i F_i(x, u, p) \quad (5)$$

где коэффициенты λ_i являются некоторыми функциями от x, u, p , а μ — ненулевой нормирующий множитель. Соотношения (1), (3) соответствуют случаю $m = 0$ в (4). Интегральные кривые поля характеристик для случая $m \geq 1$ в (4) называются сингулярными характеристиками (СХ). Классические и сингулярные характеристики вместе называются обобщенными; они имеют определенный геометрический смысл [1].

Применяя сингулярные характеристики, можно построить многообразие Γ_m вместе с определенной на нем функцией $u(x)$ при условии задания для нее некото-

рых начальных условий. Использование классических характеристик вместе с сингулярными позволяет построить в малом негладкое вязкостное решение или классическое решение в случае негладкого гамильтониана F . Соответствующий алгоритм построения решения называется в книге методом сингулярных характеристик (МСХ). Некоторые аналитические и геометрические свойства сингулярных характеристик и их применение к решению так называемой задачи Коши с подвижной границей исследованы в главе 1. В главе 2 рассмотрено применение МСХ к теории вязкостных решений.

Основное внимание уделено сингулярным поверхностям коразмерности один, то есть гиперповерхностям при $m = 1$. Необходимые условия (4) и сингулярный гамильтониан (5) в этом случае принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} F_1(x, u, p) = 0, \quad F_0(x, u, p) = 0, \quad F_{-1}(x, u, p) = 0 \\ \mu H^\sigma = \{F_1 F_0\} F_{-1} + \{F_0 F_{-1}\} F_1 + \{F_{-1} F_1\} F_0 \end{aligned} \quad (6)$$

где $\{\cdot\}$ — скобки Якоби (скобки Пуассона, если F_i не зависят от u).

Одной из интересных сингулярностей вязкостного решения является так называемая экивокальная поверхность (терминология возникла в теории дифференциальных игр). Здесь непрерывное решение $u(x)$ претерпевает скачок градиента на поверхности Γ_1 . При этом классические характеристики достигают многообразия Γ_1 с одной стороны и покидают его с другой.

Доказано, что в случае гладкого гамильтониана классические характеристики покидают Γ_1 по касательной. Обозначим через $v(x)$ сужение решения $u(x)$ на противоположную (нетангенциальную) полуокрестность многообразия Γ_1 , то есть $v(x)$ — одна из двух гладких ветвей решения. Тогда можно записать следующие необходимые условия:

$$\begin{aligned} F_0 = F(x, u, p) = 0, \quad F_1(x, u) = u - v(x) = 0 \\ F_{-1} = \langle F_p, p - q \rangle = \{F_1 F\} = 0 \quad \left(q = \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь p — градиент решения на тангенциальной стороне многообразия Γ_1 . Функция F_0 в (7) есть гамильтониан (1), а равенство $F_1 = 0$ отражает непрерывность решения на Γ_1 . Последнее равенство в (7) означает условие касания, поскольку вектор $p - q$ является нормалью к Γ_1 .

Подставим функции (7) в формулу (6), полагая $\mu = \{\{F_1 F\} F_1\}$, и запишем систему (3), используя полученное выражение для H^σ . В результате придем к следующей системе для сингулярных экивокальных характеристик на многообразии (7):

$$\dot{x} = F_p, \quad \dot{u} = \langle p, F_p \rangle, \quad \dot{p} = -F_x - p F_u - \frac{\{\{F F_1\} F\}}{\{\{F_1 F\} F_1\}} (p - q(x)) \quad (8)$$

Данная система может быть использована для построения многообразия Γ_1 . При этом предполагается, что и функция $v(x)$, и ее градиент $q(x)$ известны заранее: до построения Γ_1 и второй гладкой ветви решения.

В случае негладкого гамильтониана вида

$$F(x, u, p) = \min[F^+(x, u, p), F^-(x, u, p)] \quad (9)$$

где F^+ и F^- — гладкие функции, необходимые условия (6) будут состоять из следующих равенств (вместо (7)):

$$F_0 = F^+ = 0, \quad F_{-1} = F^- = 0 \quad F_1 = u - v(x) = 0 \quad (10)$$

Сингулярный гамильтониан (6), построенный по функциям (10), порождает систему уравнений для сингулярных эквивокальных характеристик:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \lambda_+ F_p^+ + \lambda_- F_p^-, & \dot{u} &= \lambda_+ \langle p, F_p^+ \rangle + \lambda_- \langle p, F_p^- \rangle \\ \dot{p} &= -\lambda_+ (F_x^+ + p F_u^+) - \lambda_- (F_x^- + p F_u^-) - \frac{\{F^- F^+\}}{\mu} (p - p_0(x)) \\ \lambda_+ &= \{F_1 F^-\} / \mu, & \mu &= \{F_1 F^-\} + \{F^+ F_1\}, & \lambda_+ + \lambda_- &= 1 \end{aligned} \quad (11)$$

Фокальная сингулярная поверхность определяется как поверхность, порождаемая негладким решением, когда классические характеристики покидают эту поверхность с обеих сторон либо по касательной, либо без касания, в зависимости от гладкости гамильтониана F . Соответствующая система для сингулярных характеристик в этом случае может быть получена из уравнений (8), (11).

В главе 3 представлен обзор УЧП первого порядка, возникающих в задачах теории управления. Это хорошо известные уравнения Гамильтона–Якоби (в вариационном исчислении), Беллмана (в теории оптимального управления) и Айзекса (в дифференциальных играх). Основные особенности этих трех уравнений заключаются в следующем. В вариационном исчислении гамильтониан представляет собой гладкую и выпуклую (или вогнутую) по p функцию; в теории оптимального управления эта функция также выпукла по p , но уже может быть негладкой; в дифференциальных играх гамильтониан, вообще говоря, не является выпуклой или вогнутой по p функцией и может быть как гладким, так и негладким. Данное обстоятельство объясняет тот факт, что фокальные и эквивокальные поверхности встречаются только в задачах теории дифференциальных игр.

Главы 4, 5 посвящены дифференциальным играм на многообразиях и поверхностях, на которых нарушается единственность геодезических линий, связывающих положения игроков. Эта неединственность порождает два типа сингулярных поверхностей: рассеивающую и эквивокальную. Для построения эквивокальной поверхности применяются результаты главы 2. В главе 4 исследованы некоторые локальные свойства игр на римановых многообразиях с невырожденной метрикой. Полученные результаты используются далее для решения двух игровых задач на конической поверхности в трехмерном евклидовом пространстве.

В главе 6 изучаются свойства гладких решений УЧП первого порядка с негладким гамильтонианом вида (9). Рассмотрена так называемая сингулярная универсальная поверхность: соответствующее решение гладкое, классические характеристики достигают эту поверхность с обеих сторон без касания. Доказано, что решение в этом случае, по меньшей мере, дважды непрерывно дифференцируемо и выполняются следующие условия на Γ_1 :

$$\{F_1 F_0\} = 0, \quad \{\{F_1 F_0\} F_1\} \leq 0, \quad \{\{F_0 F_1\} F_0\} \leq 0 \quad (12)$$

Здесь вместо F^+ , F^- используются традиционные, определенные ниже, обозначения. Это позволяет записать условия (6) сингулярной универсальной поверхности

в виде

$$F_0 = F^+ = 0, \quad F_1 = F^- = 0, \quad F_{-1} = \{F_1 F_0\} = 0 \quad (13)$$

Данные соотношения порождают следующую систему для сингулярных характеристик:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{1}{\mu}(\lambda_0 F_{0p} + \lambda_1 F_{1p}), & \dot{u} &= \frac{1}{\mu}(\lambda_0 \langle p, F_{0p} \rangle + \lambda_1 \langle p, F_{1p} \rangle) \\ \dot{p} &= -\frac{1}{\mu}(\lambda_0 (F_{0x} + p F_{0u}) + \lambda_1 (F_{1x} + p F_{1u})) \\ \lambda_0 &= \{\{F_1 F_0\} F_1\}, & \lambda_1 &= \{\{F_0 F_1\} F_0\}, & \mu &= \lambda_0 + \lambda_1 \end{aligned} \quad (14)$$

Система (14) соответствует уравнению для сингулярной дуги в теории оптимального управления. Неравенства (12) представляют собой обобщенные условия для сингулярной дуги: они обеспечивают выполнение условия Келли, а также выполнение геометрических ограничений на управляющие параметры.

Возникновение ударных волн из сингулярности в начальных условиях для нелинейных УЧП первого порядка рассмотрено в главе 7. Подобные задачи возникают в математической физике, в частности, в теории законов сохранения. В главе проведено независимое исследование сингулярных характеристик в двумерных задачах. Вследствие малой размерности задачи здесь нет необходимости в использовании общей теории, и уравнения для сингулярных характеристик получаются только из условий вязкостного решения.

Рассмотрим уравнение (1) в форме Гамильтона – Якоби (используя обозначения $x_1 = x, x_2 = t$):

$$F = \frac{\partial u}{\partial t} + H\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0 \quad (15)$$

Здесь гамильтониан H — гладкая функция. Для различия между функциями F и H первую иногда называют расширенным гамильтонианом. Система (8) для гамильтониана (15) в этом случае существенно упрощается. Используя ее, можно получить следующее уравнение, справедливое на фокальной поверхности (кривой):

$$\frac{d}{dt} H_p = \frac{[H_t - H H_u + (H_x + p H_u) H_p]^*}{p - \alpha} \quad \left(p = \frac{\partial u}{\partial x}\right) \quad (16)$$

где p и α — значения частной производной $\partial u / \partial x$ на разных сторонах сингулярной кривой, а через $[f]^* = f(p) - f(\alpha)$ обозначен скачок величины f . Таким образом, полная производная по времени от H_p имеет вид конечной разности. В главе 7 доказана теорема о числе ударных волн, порожденных единственной негладкостью в начальных условиях. Установлено, что в общем случае две крайние волны в результирующей совокупности волн являются эквивокальными сингулярными кривыми, а остальные волны — фокальными кривыми. Указаны некоторые возможные способы применения полученных результатов к законам сохранения.

В главе 8 продемонстрирована возможность применения метода сингулярных характеристик для решения УЧП второго порядка. Здесь рассмотрена многомерная задача вариационного исчисления с негладким решением. Показано, что на поверхности, в точках которой нарушается гладкость решения, выполняются два обобщенных условия Вейерштрасса – Эрдмана. При этом второе условие

Вейерштрасса–Эрдмана, схожее с соотношением (7), представляет собой равенство нулю скобки Якоби от первого условия и функции F_1 , чье обращение в нуль отражает свойство непрерывности. Это позволяет заключить, что система вида (8) описывает распространение особенностей решения квазилинейного уравнения Эйлера второго порядка.

Приложения к задачам оптимального управления и к дифференциальным играм сконцентрированы в главах 3–6. Главы 1, 2, 7, 8 содержат основные теоретические результаты и могут быть прочитаны независимо. После каждой главы приводится ряд упражнений.

Данная книга может быть основой учебного курса по методу сингулярных характеристик. Некоторые главы могут использоваться в других курсах по приложениям дифференциальных уравнений.

Несмотря на то что метод сингулярных характеристик был разработан в основном для решения задач теории управления, он может найти применение и в математической физике.

ГЛАВА 1

Метод характеристик в гладких задачах

1.1. Задача Коши для УЧП первого порядка

1.1.1. Постановка задачи

Рассмотрим нелинейное УЧП первого порядка в общем случае:

$$F(x, u(x), p(x)) = 0, \quad x \in D \subset \mathbb{R}^n \quad \left(p = \frac{\partial u}{\partial x} = u_x \right) \quad (1.1)$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$ — n -мерный вектор пространства \mathbb{R}^n , D — открытая окрестность некоторой заданной точки $x^* \in \mathbb{R}^n$, u — неизвестная скалярная функция $u : D \rightarrow \mathbb{R}^1$, а $p = (p_1, \dots, p_n)$ — ее градиент: $p_i = \partial u / \partial x_i$, $i = 1, \dots, n$. Скалярную функцию $F : N \rightarrow \mathbb{R}^1$ будем называть гамильтонианом. Условимся, что множество $N = D \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n$ задано в $(2n + 1)$ -мерном пространстве $(x, u, p) \in \mathbb{R}^{2n+1}$.

Для того чтобы ввести граничные условия для (1.1), определим в D некоторую гладкую поверхность M при условии $x^* \in M$, рис. 1.1:

$$\begin{aligned} M = \{x \in D : x = \varphi(s), s \in G\}, \quad \varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in \mathbb{R}^n \\ s = (s_1, \dots, s_{n-1}) \in G \subset \mathbb{R}^{n-1}, \quad \text{rank} \|\partial \varphi_i / \partial s_j\| = n - 1 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь через s обозначен $(n - 1)$ -мерный вектор параметров, заданный на множестве $G \subset \mathbb{R}^{n-1}$. При этом предполагается, что для некоторого $s^* \in G$ выполняется равенство $x^* = \varphi(s^*)$. Поверхность M может быть также задана с помощью скалярной функции $g(x)$:

$$M = \{x \in D : g(x) = 0\}, \quad \partial g(x^*) / \partial x \neq 0 \quad (1.3)$$

Условие на rank в (1.2) и неравенство в (1.3) означают, что множество M является в \mathbb{R}^n гиперповерхностью размерности $n - 1$. Значение неизвестной функции u на M определяется равенством

$$u(\varphi(s)) = w(s) \quad (1.4)$$

где $w : G \rightarrow \mathbb{R}^1$ — некоторая заданная функция. Начальные условия могут быть также определены равенством

$$u(x) = v(x), \quad x \in M \quad (1.5)$$

где $v(x)$ — значение заданной функции $v : D \rightarrow \mathbb{R}^1$. Таким образом, имеет место равенство $v(\varphi(s)) = w(s)$, $s \in G$. Отметим, что значения функции $v(s)$ важны только на поверхности M , а не на всем множестве D . Подобного рода дополнительная информация о функции v будет полезна в некоторых рассматриваемых далее задачах.

Предполагается, что все введенные функции, по крайней мере, дважды непрерывно дифференцируемы: $F, v, g, w, \varphi \in C^2$.

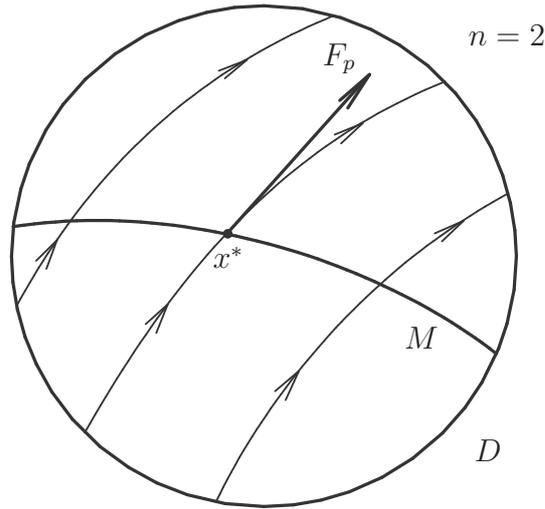


Рис. 1.1

Задача 1.1. Требуется найти дважды непрерывно дифференцируемое решение $u(x) \in C^2$ уравнения (1.1), удовлетворяющее условию (1.4).

1.1.2. Уравнения характеристик

Решение задачи 1.1 может быть сведено к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений [18]:

$$\dot{x} = F_p, \quad \dot{u} = \langle p, F_p \rangle, \quad \dot{p} = -F_x - pF_u \quad (1.6)$$

в предположении, что заданы некоторые начальные условия. Здесь F_p, F_x — n -мерные векторы: $\partial F / \partial p_i, \partial F / \partial x_i, i = 1, \dots, n$, а через $\langle p, q \rangle$ обозначено скалярное произведение двух векторов $p, q \in \mathbb{R}^n$:

$$\langle p, q \rangle = p_1 q_1 + \dots + p_n q_n$$

Система обыкновенных дифференциальных уравнений (1.6) называется *характеристической системой* для уравнения в частных производных (1.1).

Точка сверху в (1.6) обозначает дифференцирование относительно вспомогательной независимой переменной t : $\dot{x} = dx/dt$. В частном случае, когда функция F представима в виде

$$F(x, u, p) = p_n + H(x, u, \bar{p}) \quad (\bar{p} = (p_1, \dots, p_{n-1})) \quad (1.7)$$

уравнение для последней компоненты вектора x в (1.6) принимает вид $\dot{x}_n = 1$, откуда следует $x_n = t + \text{const}$. Если же функция F не зависит от u , $F = F(x, p)$, то система (1.6) расщепляется и уравнения для x, p принимают так называемую форму Гамильтона:

$$\dot{x} = F_p, \quad \dot{p} = -F_x \quad (1.8)$$

Геометрические свойства системы (1.6) будут рассматриваться в следующем разделе. Поясним основное аналитическое свойство системы (1.6). Предположим, что функция $u(x) \in C^2(D)$ является решением (1.1). Рассмотрим поле векторов F_p или, другими словами, систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = F_p(x, u(x), p(x)), \quad x \in D \quad (1.9)$$

Для производной \dot{p} вектора $p(x)$ по направлению F_p или, что то же самое, вдоль решения $x(t)$ системы (1.9) получаем выражение

$$\frac{d}{dt} p_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial p_k}{\partial x_i} \dot{x}_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial p_i}{\partial x_k} F_{p_i} \quad (1.10)$$

где использовано равенство

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial p_k}{\partial x_i} \quad (1.11)$$

Продифференцируем далее тождество (1.1) по переменной x_k :

$$F_{x_k} + F_u p_k + \sum_{i=1}^n F_{p_i} \frac{\partial p_i}{\partial x_k} = 0 \quad (1.12)$$

Складывая (1.10) с (1.12), для \dot{p}_k получаем выражение

$$\dot{p}_k = -F_{x_k} - p_k F_u$$

которое является покомпонентной формой третьего уравнения в (1.6). Второе уравнение $\dot{u} = \langle p, F_p \rangle$ следует из (1.9):

$$\dot{u} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \dot{x}_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} F_{p_i} = \langle p, F_p \rangle$$

Таким образом, для заданного решения $u(x)$ величины $x, u, p = \partial u / \partial x$ подчиняются системе (1.6), которая является замкнутой системой в том смысле, что правые части всех уравнений зависят только от x, u, p . Это свойство, в свою очередь, может быть использовано для построения неизвестного решения $u(x)$.

1.1.3. Начальные условия

Предположим, что для системы (1.6) начальные условия (условия Коши) заданы на гиперповерхности M . Соотношения (1.2), (1.4) задают начальные условия для x и u соответственно. Начальные условия для p могут быть получены дифференцированием (1.4) по переменным $s_j, j = 1, \dots, n-1$:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_i}{\partial s_j} = \frac{\partial w}{\partial s_j}, \quad j = 1, \dots, n-1$$

Отметим, что (1.4) представляет собой тождество по переменной s , а (1.5), в свою очередь, не является тождеством по x . Вместе с (1.1) эти равенства образуют следующую систему уравнений с n неизвестными $p_i = \partial u / \partial x_i$, $i = 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned} F(\varphi(s), w(s), p) &= 0, \quad s \in G \\ \frac{\partial w(s)}{\partial s_j} - \left\langle p, \frac{\partial \varphi(s)}{\partial s_j} \right\rangle &= 0, \quad j = 1, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (1.13)$$

Матрица Якоби для этой системы имеет вид

$$J = J(p, s) = \|F_p, \partial \varphi / \partial s_1, \dots, \partial \varphi / \partial s_{n-1}\|^T, \quad s \in G, \quad p \in \mathbb{R}^n \quad (1.14)$$

где n -мерные векторы

$$\begin{aligned} F_p &= (F_{p_1}, \dots, F_{p_n}) \\ \partial \varphi / \partial s_j &= (\partial \varphi_1 / \partial s_j, \dots, \partial \varphi_n / \partial s_j), \quad j = 1, \dots, n-1 \end{aligned}$$

являются строками матрицы J .

Пусть вектор $p^* \in \mathbb{R}^n$ удовлетворяет системе (1.13) при некотором $s = s^*$. Будем говорить, что выполняются условия трансверсальности, если

$$\Delta(p^*, s^*) \neq 0 \quad (\Delta(p, s) = \det J(p, s)) \quad (1.15)$$

Отметим, что векторы $\partial \varphi / \partial s_j$, $j = 1, \dots, n-1$, являются касательными к поверхности M , а условие (1.15) означает линейную независимость строк матрицы (1.14). Отсюда следует, что вектор $F_p(\varphi(s^*), w(s^*), p^*)$ трансверсален (расположен под ненулевым углом) к поверхности M в точке $x^* \in M$, рис. 1.1.

Из теоремы о неявной функции и (1.15) следует существование и единственность решения $p = \psi(s)$, $s \in G$, $\psi \in C^1(G)$, $p^* = \psi(s^*)$. Таким образом, начальные условия для системы (1.6), которые для определенности будем относить к моменту времени $t = 0$, имеют следующий вид:

$$x = \varphi(s), \quad u = w(s), \quad p = \psi(s), \quad s \in G \quad (t = 0) \quad (1.16)$$

где $\varphi, w \in C^2$, $\psi \in C^1$.

Вычисление начальных условий для вектора p (решением системы (1.13)) существенно упрощается, если множество M имеет вид координатной гиперповерхности: $x_n = a = \text{const}$. В этом случае оставшиеся компоненты вектора x могут трактоваться как параметры: $s = \bar{x} = (x_1, \dots, x_{n-1})$. Дифференцирование по переменным $x_j = s_j$ граничных условий (1.4), имеющих в данном случае вид

$$u(x_1, \dots, x_{n-1}, a) = w(x_1, \dots, x_{n-1}) \quad (1.17)$$

позволяет вычислить значения всех компонент вектора p , кроме последней:

$$p_j = \psi_j(\bar{x}) = \partial w / \partial x_j, \quad j = 1, \dots, n-1$$

Отсюда, с учетом (1.13), получаем $\varphi_j = s_j$, $j = 1, \dots, n-1$, $\varphi_n = a$. Последняя компонента может быть найдена из уравнения (1.1):

$$F(\bar{x}, a, w(\bar{x}), \psi_1(\bar{x}), \dots, \psi_{n-1}(\bar{x}), p_n) = 0$$

Достаточное условие для разрешимости этого уравнения выражается соотношением

$$\partial F(x^*, u(x^*), p^*) / \partial p_n \neq 0$$

которое, как можно показать, является условием трансверсальности (1.15) и всегда выполняется для гамильтониана вида (1.7).

1.1.4. Замечание о решении в малом

В этой главе, как и в основной части данной книги, приведенные результаты носят локальный характер. Это означает, что используемые предположения и утверждения действительны при условии достаточной малости соответствующих множеств, таких как D, M, G . Если некоторое утверждение выполнено лишь на подобласти $D' \subset D$, то в дальнейших рассуждениях мы продолжаем использовать обозначение D . Отметим далее, что условие типа равенства определяется для всех точек, в которых, как предполагается, оно выполнено. Условие типа неравенства, например, такое как (1.15), будет иногда определяться лишь для одной точки, поскольку по непрерывности подобное неравенство имеет место в достаточно малой окрестности этой точки.

1.1.5. Построение дважды дифференцируемого решения

Достаточная гладкость функции F ($F \in C^2$), а также гладкость функций φ, w, ψ , задающих начальные условия (1.16), обеспечивают системе (1.6) существование и единственность решения, непрерывно дифференцируемого по параметру s [17], которое будем обозначать

$$x = X(s, t), \quad u = U(s, t), \quad p = P(s, t), \quad s \in G, \quad |t| \leq t_0 \quad (1.18)$$

где t_0 — достаточно малая положительная величина. Из начальных условий (1.16) и первого уравнения в (1.6) можно получить соотношения для функции $X(s, t)$ при $t = 0$:

$$\frac{\partial X(s, 0)}{\partial t} = F_p(\varphi(s), w(s), \psi(s)), \quad X(s, 0) = \varphi(s), \quad s \in G$$

Отсюда имеем следующее выражение для якобиана (1.14):

$$\left| \frac{\partial(X_1, \dots, X_n)}{\partial(s_1, \dots, s_{n-1}, t)} \right| = \det J(\psi(s), s), \quad t = 0, \quad s \in G$$

Таким образом, условие, аналогичное (1.15), позволяет разрешить систему

$$x_1 = X_1(s_1, \dots, s_{n-1}, t), \quad \dots, \quad x_n = X_n(s_1, \dots, s_{n-1}, t)$$

относительно неизвестных s, t и найти $(n-1)$ -мерную и скалярную функции

$$s = S(x), \quad t = T(x), \quad x \in D \quad (1.19)$$

из класса C^1 . Подставим далее эти функции во второе и третье соотношения (1.18) и обозначим скалярную и n -мерную функции от x через

$$u(x) = U(S(x), T(x)), \quad p(x) = P(S(x), T(x)), \quad x \in D \quad (1.20)$$

где обе функции принадлежат классу C^1 .

Теперь для функций (1.20) покажем, что $u(x)$ является решением (1.1) с начальным условием (1.4), а $p(x)$ есть градиент $u(x)$. Здесь $u(x)$ дважды непрерывно дифференцируема, так как $p(x) \in C^1$.

Во-первых, отметим равенство

$$F(x, u(x), p(x)) = 0, \quad x \in D \quad (1.21)$$

Действительно, одно из основных свойств системы (1.6) заключается в том, что функция $F(x, u, p)$ (гамильтониан) является первым интегралом системы (1.6):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}F &= \langle F_x, \dot{x} \rangle + F_u \dot{u} + \langle F_p, \dot{p} \rangle = \\ &= \langle F_x, F_p \rangle + F_u \langle p, F_p \rangle - \langle F_p, F_x + pF_u \rangle = 0 \end{aligned} \quad (1.22)$$

Это означает, что имеет место тождество $F(X(s, t), U(s, t), P(s, t)) = 0$ по переменным s, t . Так как замена переменных (1.19) обратима, то отсюда следует (1.21).

Во-вторых, для доказательства соотношения

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x} = p(x), \quad x \in D \quad (1.23)$$

рассмотрим первое равенство в (1.20), выраженное в переменных s, t , то есть $u(X(s, t)) = U(s, t)$, и продифференцируем его по этим переменным:

$$\frac{\partial U}{\partial s_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial X_i}{\partial s_j}, \quad j = 1, \dots, n-1, \quad \frac{\partial U}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial X_i}{\partial t} \quad (1.24)$$

Покажем, что (1.24) справедливо при $\partial u / \partial x_i = P_i(s, t)$. Тем самым будет установлено соотношение (1.23). Подставляя $P_i(s, t) = \partial u / \partial x_i$ в (1.24) и обозначая через $h_j(s, t)$ и $h_n(s, t)$ разность левых и правых частей соответственно, получаем

$$\begin{aligned} h_j &= \frac{\partial U}{\partial s_j} - \sum_{i=1}^n P_i(s, t) \frac{\partial X_i}{\partial s_j}, \quad j = 1, \dots, n-1 \\ h_n &= \frac{\partial U}{\partial t} - \sum_{i=1}^n P_i(s, t) \frac{\partial X_i}{\partial t} = 0 \end{aligned} \quad (1.25)$$

Отметим, что равенство нулю переменной h_n следует также из соотношения $\partial X / \partial t = F_p$ и второго уравнения в (1.6). Следовательно, $\partial h_n / \partial s_j = 0$ и из (1.25) можно получить равенство

$$\frac{\partial h_j}{\partial t} = \frac{\partial h_j}{\partial t} - \frac{\partial h_n}{\partial s_j} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial P_i}{\partial s_j} \frac{\partial X_i}{\partial t} - \frac{\partial P_i}{\partial t} \frac{\partial X_i}{\partial s_j} \right) \quad (1.26)$$

Из второго соотношения в (1.13) и первого в (1.25) имеем $h_j(s, 0) = 0$. Продифференцировав тождество $F(X(s, t), U(s, t), P(s, t)) = 0$ по переменной s_j , имеем

$$\left\langle F_x, \frac{\partial X}{\partial s_j} \right\rangle + F_u \frac{\partial U}{\partial s_j} + \left\langle F_p, \frac{\partial P}{\partial s_j} \right\rangle = 0 \quad (1.27)$$

Поскольку из третьего уравнения в (1.6) следует $\partial P / \partial t = -F_x - PF_u$, то в силу (1.26), (1.27) получаем

$$\frac{\partial h_j}{\partial t} = -F_u h_j$$

Таким образом, для фиксированного $s \in G$ имеем линейное скалярное дифференциальное уравнение относительно h_j с нулевым начальным условием при $t = 0$. Это означает, что $h_j(s, t) = 0$ для $s \in G, |t| \leq t_0, j = 1, \dots, n-1$.

Приведенные выше результаты доказывают следующую теорему о решении задачи 1.1 [18].

Теорема 1.1. *Предположим, что $F, \varphi, w \in C^2$. Тогда для каждого вектора $p^* \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющего системе (1.13) и условию трансверсальности (1.15), найдется единственное решение $u(x) \in C^2(D)$ задачи 1.1, определенное в достаточно малой окрестности точки x^* .*

1.1.6. Нерегулярная характеристическая задача

Начальные условия (1.16) задают в $(2n+1)$ -мерном пространстве (x, u, p) поверхность Σ размерности $(n-1)$:

$$\Sigma = \{(x, u, p) \in \mathbb{R}^{2n+1} : x = \varphi(s), u = w(s), p = \psi(s), s \in G\} \quad (1.28)$$

Отметим, что (1.2) и (1.4) первоначально определяют только функции $\varphi(s)$ и $w(s)$ соответственно, а функция $\psi(s)$ находится из (1.13) с учетом условия (1.15). При этом каждый вектор p^* , удовлетворяющий (1.15), порождает поверхность Σ и соответствующее решение $u(x) \in C^2(D)$.

Другая возможная формулировка задачи 1.1 заключается в том, что изначально задается поверхность Σ , удовлетворяющая системе (1.13), то есть уравнению (1.1) и так называемому условию интегральности (условию полосы) [18]. Подобная формулировка используется далее в некоторых задачах, в том числе и для УЧП первого порядка.

В приведенных выше результатах условие трансверсальности (1.15) применялось дважды: один раз для обеспечения существования функции $\psi(s)$ в (1.16), а второй раз для обратимости замены переменных (1.19), порождающей решение (1.20). Если же поверхность Σ задана заранее, то для нахождения начальных значений вектора p это условие не требуется.

Задачу 1.1, для которой определена такая поверхность Σ , что имеет место равенство $\Delta(\psi(s), s) = 0$ для всех $s \in G$, будем называть *нерегулярной* задачей Коши. Достаточные условия теоремы 1.1 можно расширить и на нерегулярную задачу. Однако в этом случае дважды дифференцируемое решение будет существовать при выполнении некоторого дополнительного условия, а именно, поверхность Σ должна быть характеристической поверхностью.

Для описания этого условия, а также упрощения формулировок, введем $(2n+1)$ -мерный вектор $z = (x, u, p) \in \mathbb{R}^{2n+1}$ и *характеристический вектор* $\xi_F(z)$,

который представляет собой объединение правых частей системы (1.6) и позволяет записать ее в более компактной форме:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \xi_F(z) \quad (z = (x, u, p)) \\ \xi_F(z) &= (F_p(z), \langle p, F_p(z) \rangle, -F_x(z) - pF_u(z)) \in \mathbb{R}^{2n+1} \end{aligned} \quad (1.29)$$

Векторное поле, задаваемое (1.29), определено для любого $z \in \mathbb{R}^{2n+1}$. Пусть

$$W = \{z \in \mathbb{R}^{2n+1} : F(z) = 0\}$$

— гиперповерхность, определяемая в \mathbb{R}^{2n+1} уравнением (1.1). Как следует из (1.22), вектор $\xi_F(z)$ для каждого $z \in W$ является касательным к W . Поле, заданное сужением (1.29) на W , называется *характеристическим полем* на поверхности W .

Обозначим через $T_z\Sigma$ касательную гиперплоскость к множеству Σ в точке $z \in \Sigma$, другими словами, множество линейных комбинаций

$$\eta = a_1\eta^1 + \dots + a_{n-1}\eta^{n-1} \in T_z\Sigma$$

в базисе векторов

$$\begin{aligned} \eta^j(z) &= \left(\frac{\partial\varphi(s)}{\partial s_j}, \frac{\partial w(s)}{\partial s_j}, \frac{\partial\psi(s)}{\partial s_j} \right), \quad j = 1, \dots, n-1 \\ z &= (\varphi(s), w(s), \psi(s)) \in \Sigma \end{aligned} \quad (1.30)$$

Компоненты касательного вектора η удобно и принято обозначать следующим образом:

$$\begin{aligned} \eta &= (X, U, P) \in T_z\Sigma, \quad U \in \mathbb{R}^1, \quad X, P \in \mathbb{R}^n, \\ X &= \sum_{j=1}^{n-1} a_j \frac{\partial\varphi}{\partial s_j}, \quad U = \sum_{j=1}^{n-1} a_j \frac{\partial w}{\partial s_j}, \quad P = \sum_{j=1}^{n-1} a_j \frac{\partial\psi}{\partial s_j} \end{aligned}$$

Эти обозначения схожи с обозначениями решения (1.18) характеристической системы. В связи с этим, для различия между ними, при записи решения (1.18) будем указывать аргументы функций, например, $X(s, t)$.

Поверхность Σ называется *характеристической поверхностью*, если для каждого вектора $z \in \Sigma$ характеристический вектор (1.29) лежит в касательной плоскости, то есть

$$\xi_F(z) \in T_z\Sigma, \quad z \in \Sigma$$

Другими словами, вектор $\xi_F(z)$ представим в виде

$$\xi_F(z) = a_1\eta^1(z) + \dots + a_{n-1}\eta^{n-1}(z) \quad (1.31)$$

где $a_1^2 + \dots + a_{n-1}^2 > 0$.

Заметим, что условие нерегулярности $\Delta = 0$ означает, что вектор F_p является линейной комбинацией других векторов в (1.14):

$$F_p = a_1 \frac{\partial\varphi}{\partial s_1} + \dots + a_{n-1} \frac{\partial\varphi}{\partial s_{n-1}} \quad (1.32)$$

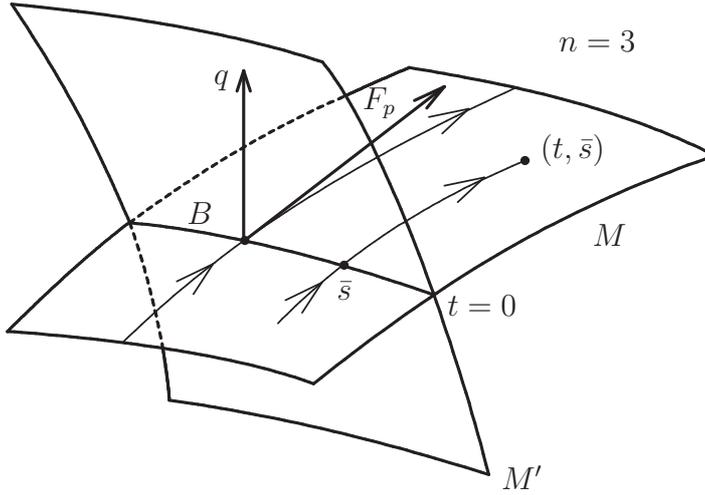


Рис. 1.2

или, что то же самое, первые n компонент векторов ξ_F и η^j удовлетворяют равенству (1.31). С геометрической точки зрения условие (1.32) означает касание вектором F_p поверхности M , рис. 1.2.

Нерегулярная задача имеет дважды непрерывно дифференцируемое решение (C^2 -решение) в том и только том случае, если все компоненты векторов ξ_F и η^j удовлетворяют (1.31), то есть если поверхность Σ является характеристической.

Необходимость. Предположим, что уравнение (1.1) имеет решение $u(x) \in C^2$, а равенства (1.32) и включение

$$(\varphi(s), u(\varphi(s)), \partial u(\varphi(s))/\partial x) \in \Sigma \quad (1.33)$$

справедливы для любого $s \in G$. Тогда для второй части компонент вектора (1.29), с помощью (1.13), получаем

$$\langle p, F_p \rangle = \sum_{i=1}^n p_i F_{p_i} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} p_i a_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial s_j} = \sum_{j=1}^{n-1} a_j \frac{\partial w}{\partial s_j} \quad (1.34)$$

Для последних n компонент вектора ξ_F , используя равенство (1.11) (которое справедливо при $u(x) \in C^2$) и соотношения (1.12), (1.32), находим:

$$-F_{x_k} - p_k F_u = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial p_k}{\partial x_i} a_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial s_j} = \sum_{j=1}^{n-1} a_j \frac{\partial p_k}{\partial s_j} \quad (1.35)$$

Таким образом, благодаря дважды непрерывно дифференцируемому решению $u(x)$ и, следовательно, выполнению (1.11), из (1.32) следуют соотношения (1.34) и (1.35), которые означают выполнение характеристического условия (1.31).

Достаточность. Для доказательства достаточности построим новую начальную поверхность

$$\Sigma' = \{(x, u, p) \in \mathbb{R}^{2n+1} : x = \varphi'(s), u = w'(s), p = \psi'(s), s \in G\}$$

удовлетворяющую условию трансверсальности (1.15), для которой соответствующее единственное решение $u(x)$ обладает свойством (1.33) на Σ' и на Σ . Положим $\Sigma_2 = \Sigma \cap \Sigma'$. Нетрудно показать, что размерность многообразия Σ_2 равна $n - 2$.

Построение поверхности Σ' будем осуществлять на основе многообразия M' , которое пересекает заданное многообразие M без касания вдоль некоторого $(n - 2)$ -мерного многообразия $B = M \cap M'$, рис. 1.2. Не теряя общности, полагаем, что $x^* \in B$, вектор $F_p(\varphi(s^*), w(s^*), \psi(s^*))$ трансверсален к B (так как это верно для M) и B состоит из таких точек многообразия M , в которых первая компонента вектора s равна нулю, $s_1 = 0$:

$$B = \{x \in D : x = \varphi(s), s \in G_B\}, \quad G_B = \{s \in G : s_1 = 0\}$$

Такое многообразие M' может быть задано, например, с использованием в (1.2) функции

$$\varphi'(s) = \varphi(s) + s_1 q, \quad s \in G$$

где q — некоторый ненулевой вектор, задающий нормаль к M в точке $x^* \in M$.

При нахождении поверхности Σ' функцию $w'(s)$ определим следующим образом:

$$\begin{aligned} w'(s) &= w(s) + s_1 \langle \psi(s), q \rangle + h(s_1), \quad s \in G \\ h(0) &= 0, \quad dh(0)/ds_1 = 0 \end{aligned}$$

Здесь $h(s_1)$ — произвольная гладкая функция одной переменной с указанными выше свойствами при $s_1 = 0$. Можно показать, что функции $\varphi'(s)$ и $w'(s)$ удовлетворяют достаточному условию (1.15) и, следовательно, порождают единственное решение $\psi'(s)$ системы (1.13), такое что

$$\psi'(s) = \psi(s), \quad s \in G_B$$

Таким образом, новая поверхность Σ' построена. Она пересекается с поверхностью Σ по $(n - 2)$ -мерному множеству

$$\Sigma_2 = \{(x, u, p) \in \mathbb{R}^{2n+1} : x = \varphi'(s), u = w'(s), p = \psi'(s), s \in G_B\} \subset \Sigma'$$

Поверхность Σ' порождает решение (1.18) системы (1.6) и, следовательно, с учетом (1.19), единственное решение (1.20) уравнения (1.1).

Рассмотрим решение (1.18) системы (1.6), стартующее из точек множества $\Sigma_2 \subset \Sigma'$:

$$(X(s, 0), U(s, 0), P(s, 0)) \in \Sigma_2, \quad s \in G_B$$

Вследствие выполнения характеристического условия (1.31), а также в силу существования и единственности решения системы (1.6), данное решение, начинающееся при $t = 0$ на $\Sigma_2 \subset \Sigma$, останется на Σ . Другими словами, можно описать поверхность Σ следующим образом:

$$\Sigma = \{(x, u, p) \in \mathbb{R}^{2n+1} : x = X(s, t), u = U(s, t), p = P(s, t), s \in G_B, |t| \leq t_0\}$$

Последнее совпадает с условием (1.33), записанным в переменных $s \in G_B$ и t вместо $s \in G$, рис. 1.2.

Таким образом, существование решения нерегулярной характеристической задачи доказано. Заметим, что при этом существует бесконечное множество подобных решений, поскольку выбор функции $h'(s)$ для задания функции $w'(s)$ был произвольным.

В итоге, можем сформулировать следующую теорему.

Теорема 1.2. *Нерегулярная задача Коши имеет C^2 -решение в том и только том случае, если начальная поверхность Σ является характеристической. При этом таких решений бесконечно много.*

Доказательство необходимости показывает, что нерегулярная нехарактеристическая задача (условие (1.32) выполняется, а условие (1.31) не выполнено) не может иметь C^2 -решения.

1.1.7. Пример на плоскости. Постановка задачи

Рассмотрим следующую задачу Коши относительно неизвестной функции $u(x, y)$ двух переменных $x, y \in \mathbb{R}^1$:

$$\begin{aligned} F(x, y, p, q) &= p + \sqrt{a^2 + q^2} - x\sqrt{b^2 + q^2} = 0 \\ u(0, y) &= cy, \quad (p = \partial u / \partial x, \quad q = \partial u / \partial y, \quad a, b, c = \text{const}) \end{aligned} \quad (1.36)$$

Здесь используется покомпонентное обозначение переменных x, y, p, q вместо классических x_1, x_2, p_1, p_2 . Данная задача принадлежит к классу задач (1.1) для плоского случая (в двумерном пространстве координат), при этом ось y является граничной поверхностью (аналогично (1.17)):

$$M = \{(x, y) : x = 0, y = s, s \in \mathbb{R}^1\} \quad (1.37)$$

Множество D представляет собой всю (x, y) -плоскость.

Характеристическая система (1.6) для рассматриваемого примера имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F_p = 1, \quad \dot{y} = F_q = q/\sqrt{a^2 + q^2} - xq/\sqrt{b^2 + q^2} \\ \dot{u} &= pF_p + qF_q, \quad \dot{p} = -F_x = \sqrt{b^2 + q^2}, \quad \dot{q} = -F_y = 0 \end{aligned} \quad (1.38)$$

Ввиду того, что множество M совпадает с координатной осью, построение начальных условий упрощается аналогично случаю (1.17). Как было получено выше, условие трансверсальности (1.15) для задачи (1.36) выполнено, поскольку гамильтониан для нее имеет вид (1.7) и $\Delta = F_p = 1$. Дифференцированием граничных условий и из (1.36) получаем

$$q(0, y) = c, \quad p(0, y) = -\sqrt{a^2 + c^2}, \quad y \in \mathbb{R}^1$$

Таким образом, начальные условия (1.16) для системы (1.36) имеют вид

$$x = 0, \quad y = s, \quad u = cs, \quad p = -\sqrt{a^2 + c^2}, \quad q = c, \quad s \in \mathbb{R}^1 \quad (1.39)$$

1.1.8. Построение решения

Построение решения в задаче (1.36) основано на интегрировании системы (1.38) с начальными условиями (1.39). Из первого и двух последних уравнений (1.38) получаем $x = t + \text{const}$, $q = \text{const}$, $\dot{p} = \text{const}$. Отсюда для производной \dot{y} следует линейная зависимость от x и, следовательно, от t . Таким образом, используя начальные условия (1.39), находим решение (1.18) для системы (1.38):

$$\begin{aligned} x = X(s, t) &= t, & y = Y(s, t) &= s + \frac{ct}{\sqrt{a^2 + c^2}} - \frac{1}{2} \frac{ct^2}{\sqrt{b^2 + c^2}} \\ u = U(s, t) &= cs - \frac{a^2 t}{\sqrt{a^2 + c^2}} + \frac{1}{2} \frac{b^2 t^2}{\sqrt{b^2 + c^2}} \\ p = P(s, t) &= t\sqrt{b^2 + c^2} - \sqrt{a^2 + c^2}, & q = Q(s, t) &= c \end{aligned} \quad (1.40)$$

Первые два уравнения могут быть разрешены относительно переменных t и s :

$$t = x, \quad s = y - \frac{cx}{\sqrt{a^2 + c^2}} + \frac{1}{2} \frac{cx^2}{\sqrt{b^2 + c^2}}$$

Подстановка этих выражений в третью функцию (1.40) дает решение задачи Коши (1.36)

$$u(x, y) = cy + \frac{1}{2} x^2 \sqrt{b^2 + c^2} - x\sqrt{a^2 + c^2}$$

определенное на всей (x, y) -плоскости. Первые два уравнения из (1.40) определяют на (x, y) -плоскости однопараметрическое семейство парабол с параметром s . Это семейство получается сдвигом параболы $y = -c(x - x_0)^2 / (2\sqrt{b^2 + c^2})$ вдоль вертикальной прямой $x = x_0 = \sqrt{b^2 + c^2} / \sqrt{a^2 + c^2}$, которая является осью симметрии

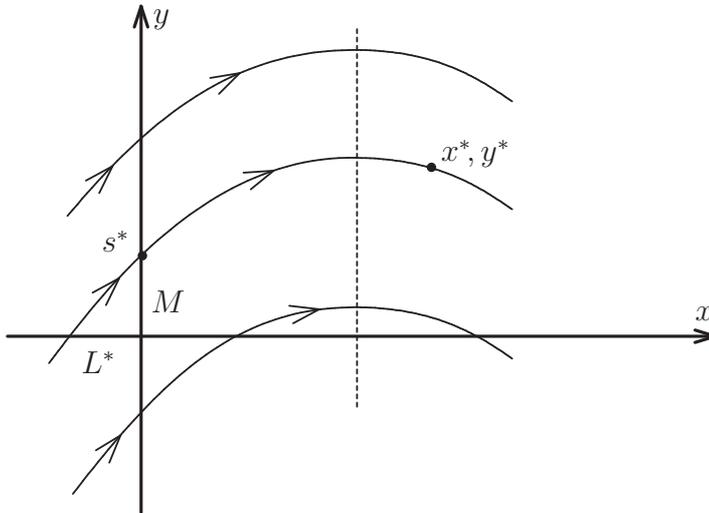


Рис. 1.3

семейства. Данные параболы по сути являются проекцией интегральных кривых системы (1.38) из 5-мерного пространства (x, y, u, p, q) на двумерную (x, y) -плоскость. Эти проекции также часто называют характеристиками.

Следует отметить, что каждая точка плоскости достигается одной и только одной параболой, которая приносит информацию о решении с оси Oy . Эта единственность обеспечивается свойством обратимости первых двух уравнений в (1.40). Каждому значению решения $u(x^*, y^*)$ в точке (x^*, y^*) , рис. 1.3, соответствует только одна характеристика, проходящая через точку $y = s^*$ на оси Oy . При этом малое возмущение начального значения s^* приводит к возмущению решения только в малой окрестности точек параболы L^* . Это свойство не является справедливым для УЧП второго порядка и, как будет показано в следующей главе, не имеет места для обобщенного решения нелинейных УЧП первого порядка.

1.2. Задача Коши для интегральных поверхностей

1.2.1. Геометрическая постановка задачи 1.1

Используя обозначения (1.28), будем далее рассматривать в пространстве \mathbb{R}^{2n+1} векторов $z = (x, u, p)$ поверхности (многообразия) размерности $n - m$ при некотором $0 \leq m \leq n - 1$:

$$\Sigma_m = \{(x, u, p) \in \mathbb{R}^{2n+1} : x = \varphi(s), u = w(s), p = \psi(s) : s \in G_m\} \quad (1.41)$$

Здесь $G_m \subset \mathbb{R}^{n-m}$ — множество векторов s размерности $n - m$, $w(s)$ — скалярная функция, а $\varphi(s)$ и $\psi(s)$ — гладкие n -мерные вектор-функции. Поверхность (1.28), например, соответствует значению $m = 1$. Нас будут интересовать поверхности Σ_m , для которых существует такая гладкая функция $u(x) \in C^2(D)$, что она принимает значение $w(s)$, а ее градиент — значение $\psi(s)$ при $x = \varphi(s)$ или, другими словами, имеют место следующие равенства:

$$u(\varphi(s)) = w(s), \quad \frac{\partial u(\varphi(s))}{\partial x} = \psi(s), \quad s \in G_m$$

Отсюда можно получить необходимые условия существования данной функции путем дифференцирования первого равенства по переменным s_j с использованием второго равенства:

$$\frac{\partial w}{\partial s_j} - \left\langle p, \frac{\partial \varphi}{\partial s_j} \right\rangle = 0, \quad p = \psi(s), \quad j = 1, \dots, n - m \quad (1.42)$$

Последнее представляет собой условие интегральности (условие полосы) [18]. При $m = 0$, когда вектор x может рассматриваться как параметр s и $u(x) = w(x)$, из условия (1.42) вытекает

$$\frac{\partial w}{\partial x} - p = 0, \quad p(x) = \psi(x) \quad (1.43)$$

Первое равенство здесь следует рассматривать не как обозначение, аналогично (1.1), а как требование на функции $w(s)$ и $\psi(s)$.

Левая часть (1.42) является линейной функцией (линейной формой, 1-формой), которую будем обозначать через $\alpha(\eta)$, где $\eta = (X, U, P) \in T_z \Sigma_m$ — касательный вектор, а $\alpha(\eta) = U - \langle p, X \rangle$. Коэффициенты p формы α зависят от точки $z \in \Sigma_m \subset \mathbb{R}^{2n+1}$. Традиционное обозначение этой линейной формы имеет вид

$$\alpha = U - \langle p, X \rangle = du - \langle p, dx \rangle = du - \sum_{i=1}^n p_i dx_i \quad (1.44)$$

где $du = U$ и $dx_i = X_i$ — скалярные 1-формы, которые носят название внешних производных (дифференциалов) от величин u и x_i . Форма α называется *первой контактной формой*.

Поверхность Σ вида (1.41), для которой форма α обращается в нуль при всех касательных векторах η , таких что

$$\alpha(\eta) = 0, \quad \eta \in T_z \Sigma, \quad z \in \Sigma \quad (1.45)$$

называется интегральной поверхностью первой контактной формы α . Множество всех интегральных поверхностей будем обозначать через I , $\Sigma \in I$. Можно показать, что равенство (1.45) верно для всех касательных векторов η в том и только том случае, если оно верно для базисных векторов, то есть выполнено условие (1.42).

Решение уравнения (1.1) (как и любая гладкая функция $u(x) \in C^2(D)$) определяет n -мерную интегральную поверхность Σ_0 вида (1.41), с переменной x в качестве параметра s и $w(x) = u(x)$, $\psi(x) = \partial u / \partial x$. Другая параметризация Σ_0 представлена в (1.18), где параметр t играет роль дополнительной компоненты вектора s . Второе уравнение в (1.13) показывает, что начальные условия (1.16) определяют $(n-1)$ -мерную интегральную поверхность Σ_1 . Таким образом, $\Sigma_1, \Sigma_0 \in I$. Уравнение (1.1) и первое равенство в (1.13) означают, что

$$\Sigma_1, \Sigma_0 \subset W = \{z \in \mathbb{R}^{2n+1} : F(z) = 0\} \quad (1.46)$$

При $t = 0$ функции из (1.18) совпадают с (1.16), откуда следует, что $\Sigma_1 \subset \Sigma_0$. Это приводит к следующей геометрической интерпретации задачи 1.1.

Задача 1.2. *Заданы множества W и Σ_1 такие, что $\Sigma_1 \subset W$. Требуется найти множество $\Sigma_0 \in I$, для которого $\Sigma_1 \subset \Sigma_0 \subset W$.*

Следует отметить, что здесь также подразумеваются дополнительные требования, налагаемые на множества Σ_1, Σ_0 и выраженные в (1.2), (1.15), которые означают, что ранг матрицы $\partial \varphi / \partial s$ должен быть максимальным. Эти требования обеспечивают регулярность начальной поверхности M , а также существование единственного решения (1.1).

1.2.2. Обобщенная задача Коши

Для рассмотрения обобщенной задачи очень удобно вначале воспользоваться формулировкой задачи 1.2. С этой целью отметим основную идею построения поверхности Σ_0 , заключающуюся в прохождении интегральной кривой соответствующей системы дифференциальных уравнений через точку многообразия Σ_1 . Таким

образом, можно построить поверхность Σ_0 , размерность которой на единицу больше размерности Σ_1 . При этом основное требование к системе дифференциальных уравнений выражается в сохранении включения $\Sigma \in I$. Это позволяет обобщить задачу 1.2 следующим образом: для заданного $\Sigma_{m+1} \in I$ требуется найти Σ_m такое, что $\Sigma_{m+1} \subset \Sigma_m \subset W$. Для того чтобы обеспечить единственность решения Σ_m , как мы увидим далее, необходимо также модифицировать многообразие W , которое в (1.46) имеет коразмерность равную единице. Для обобщенной задачи нам понадобится многообразие W коразмерности $2m + 1$. В связи с этим введем новое обозначение

$$W_{2m+1} = \{z \in \mathbb{R}^{2n+1} : F_i(z) = 0, |i| \leq m\} \quad (1.47)$$

где $F_i \in C^2(N)$, а $|i| \leq m$ означает, что величина i принимает $2m + 1$ значений: $i = -m, \dots, -1, 0, 1, \dots, m$.

Задача 1.3. *Задано $[n - (m + 1)]$ -мерное многообразие $\Sigma_{m+1} \in I$. Требуется найти $(n - m)$ -мерное многообразие $\Sigma_m \in I$ такое, что $\Sigma_{m+1} \subset \Sigma_m \subset W_{2m+1}$, $0 \leq m \leq n - 1$.*

Задачу 1.3 будем далее называть *задачей Коши на интегральных поверхностях* или *задачей Коши на многообразии*.

Как правило, нас будут интересовать проекции многообразия $\Sigma \in I$ на x -подпространство \mathbb{R}_x^n пространства \mathbb{R}_z^{2n+1} . Используя проекционный оператор π , можно определить проекцию Γ_m многообразия Σ_m из (1.41) формулой

$$\pi\Sigma_m = \Gamma_m = \{x \in \mathbb{R}_x^n : x = \varphi(s), s \in G_m\} \quad (1.48)$$

Для точки $z = (x, u, p)$ имеем $\pi z = x$. Говорят, что многообразие Σ_m *хорошо проецируемое*, если матрица $\partial\varphi/\partial s$ имеет максимальный ранг, равный $n - m$. В этом случае $\dim\Gamma_m = \dim\Sigma_m = n - m$. Множество хорошо проецируемых интегральных поверхностей будем обозначать через I^0 .

Каждому многообразию $\Sigma_m \in I^0$ можно поставить в соответствие единственную пару (u, Γ_m) , где $\Gamma_m = \pi\Sigma_m$, а $u = u(x)$, $x \in \Gamma_m$, — однозначная функция с областью определения Γ_m и заданная вторым равенством в (1.41): $u(x) = w(s)$ для $x = \varphi(s)$, $s \in G_m$. В общем случае для некоторой заданной пары (u, Γ_m) существует бесконечное количество поверхностей Σ_m , которым она соответствует. Например, для построения единственной начальной поверхности, заданной в (1.16), необходимо кроме равенств (1.2), (1.4), задать также уравнение (1.1), которое приводит к системе (1.13). Этот пример соответствует значению $m = 1$. Для $m > 1$ потребуется задать многообразие (1.47).

Вместе с задачей 1.3 будем также рассматривать *задачу Коши для проекций*.

Задача 1.4. *Задано начальное хорошо проецируемое многообразие $\Sigma_{m+1} \in I^0$. Требуется найти пару (u, Γ_m) , порожденную некоторым многообразием $\Sigma_m \in I^0$, так что $\Sigma_{m+1} \subset \Sigma_m \subset W_{2m+1}$.*

В связи с задачей 1.4 отметим справедливость следующего утверждения: $\pi\Sigma_{m+1} = \Gamma_{m+1} \subset \Gamma_m$, а соответствующие функции $u(x)$ из пар (u, Γ_{m+1}) и (u, Γ_m) совпадают на Γ_{m+1} . Заметим также, что в некоторых случаях вместо многообразия Σ_{m+1} может быть задана пара (u, Γ_{m+1}) , а Σ_{m+1} удастся построить на базе этой пары и W_{2m+1} . Это справедливо, например, при $m = 0$.

Как было сказано выше, коразмерность многообразия W_{2m+1} (число равенств $F_i = 0$ в (1.47)) выбирается так, чтобы гарантировать единственность решений задач 1.3, 1.4. Эта единственность имеет место благодаря определенным свойствам характеристического поля, а также ограничению на возможную размерность многообразия Σ_m . Для вывода этого ограничения проигнорируем одно условие в (1.47), положив $F_0 = 0$, и рассмотрим многообразие

$$W_{2m} = \{z \in \mathbb{R}^{2n+1} : F_i(z) = 0, |i| \leq m, i \neq 0\} \quad (1.49)$$

Запишем линейную дифференциальную форму, отвечающую функции $F(x, u, p)$:

$$dF(\eta) = \langle F_x, X \rangle + F_u U + \langle F_p, P \rangle, \quad \eta = (X, U, P) \in T_z W$$

Отметим, что традиционно используемое обозначение для дифференциала следующее: $dF = dF(dz) = \langle F_x, dx \rangle + F_u du + \langle F_p, dp \rangle$.

Лемма 1.1. *Предположим, что $2m + 1$ линейных форм $\alpha(\eta)$, $dF_i(\eta)$, $0 < |i| \leq m$, линейно независимы для $z \in W_{2m}$, то есть линейно независимы $2m + 1$ векторов их коэффициентов:*

$$\alpha : (-p, 1, 0), \quad dF_i : (F_{ix}, F_{iu}, F_{ip}), \quad i = \pm 1, \dots, \pm m \quad (1.50)$$

Тогда размерность любой интегральной поверхности $\Sigma \in I$, такой что $\Sigma \subset W_{2m}$, не превышает значение $n - m$, то есть $\dim \Sigma \leq n - m$.

Доказательство. Положим $r = \dim \Sigma$. Для оценки значения r нужно установить, сколько линейно независимых (базисных) векторов имеет касательная гиперповерхность $T_z \Sigma$ в точке

$$z \in \Sigma = \{z \in \mathbb{R}^{2n+1} : x = \varphi(s), u = w(s), p = \psi(s), s = (s_1, \dots, s_r) \in G_r\}$$

Вложение $\Sigma \subset W_{2m}$ означает, что $F_i(\varphi(s), w(s), \psi(s)) = 0$ для $s \in G_r$. Продифференцировав эти тождества по компонентам s_j , получаем

$$dF_i(\eta^j) = \left\langle F_{ix}, \frac{\partial \varphi}{\partial s_j} \right\rangle + F_{iu} \frac{\partial w}{\partial s_j} + \left\langle F_{ip}, \frac{\partial \psi}{\partial s_j} \right\rangle = 0, \quad 0 < |i| \leq m \quad (1.51)$$

Из $\Sigma \in I$ следует

$$\frac{\partial w}{\partial s_j} - \left\langle \psi, \frac{\partial \varphi}{\partial s_j} \right\rangle = 0, \quad j = 1, \dots, r \quad (1.52)$$

Рассмотрим здесь два различных равенства для s_j и s_k ($k \neq j$). Продифференцируем первое из них по переменной s_k , а второе по переменной s_j . Вычитая из первого полученного результата второй, имеем

$$\omega(\eta^k, \eta^j) = \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial s_j}, \frac{\partial \varphi}{\partial s_k} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial s_k}, \frac{\partial \varphi}{\partial s_j} \right\rangle = 0, \quad k, j = 1, \dots, r \quad (1.53)$$

Полученная здесь 2-форма w называется внешним дифференциалом от α , $w = d\alpha$, и представима в виде

$$\omega(\eta^1, \eta^2) = \langle X^2, P^1 \rangle - \langle X^1, P^2 \rangle, \quad \eta^1 = (X^1, U^1, P^1), \quad \eta^2 = (X^2, U^2, P^2)$$

Далее найдем оценку величины r из равенств (1.51)–(1.53), справедливых для базисных векторов

$$\eta^j = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s_j}, \frac{\partial w}{\partial s_j}, \frac{\partial \psi}{\partial s_j} \right), \quad j = 1, \dots, r$$

пространства $T_z \Sigma$.

Рассмотрим в касательном пространстве $T_z \mathbb{R}^{2n+1}$ векторов $\eta = (X, U, P)$ так называемую контактную плоскость

$$\Pi_z = \{ \eta \in T_z \mathbb{R}^{2n+1} : U - \langle p, X \rangle = 0 \} \quad (1.54)$$

Плоскость Π_z размерности $2n$ имеет взаимно-однозначное соответствие с пространством \mathbb{R}^{2n} укороченных векторов

$$\bar{\eta} = (X, P) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad \eta = (X, \langle p, X \rangle, P) \in \Pi_z \quad (1.55)$$

Таким образом, параметры (X, P) служат координатами точки в пространстве Π_z . По определению, $T_z \Sigma \subset \Pi_z$, откуда следует, что векторы $\bar{\eta}^j$ являются базисными для пространства $T_z \Sigma$. Так как векторы (1.50) линейно независимы, то равенства

$$dF_i(\eta) = 0, \quad i = \pm 1, \dots, \pm m, \quad \alpha(\eta) = U - \langle p, X \rangle = 0$$

определяют $2(n - m)$ -мерное подпространство $C_z \subset \Pi_z$. В силу (1.51) имеем $T_z \Sigma \subset C_z$. Для любого $\eta \in T_z \Sigma$ из (1.53) получаем

$$\langle \Omega \bar{\eta}^k, \bar{\eta} \rangle = 0, \quad k = 1, \dots, r, \quad \Omega = \begin{vmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{vmatrix} \quad (1.56)$$

где Ω — кососимметрическая матрица размерности $2n \times 2n$, а E — единичная $n \times n$ -матрица. Заметим, что в (1.56) скалярное произведение вычисляется в пространстве векторов из \mathbb{R}^{2n} . Так как $\det \Omega \neq 0$, то векторы $\Omega \bar{\eta}^k$, $k = 1, \dots, r$, линейно независимы и, следовательно, равенства (1.56) задают $[2(n - m) - r]$ -мерное подпространство $C_z^* \subset C_z$. Условие (1.53) означает, что $T_z \Sigma \subset C_z^*$. Поэтому $r \leq 2(n - m) - r$, откуда следует неравенство $r \leq n - m$. Лемма доказана.

1.2.3. Характеристическое поле на многообразии

Характеристическое поле ξ_F в (1.29), соответствующее системе дифференциальных уравнений (1.6), обладает двумя важными свойствами. Первое заключается в том, что оно представляет собой касательное поле к поверхности (многообразию) (1.46), определяемой уравнением (1.1). Второе свойство состоит в том, что размерность поля на единицу больше размерности начальной интегральной поверхности $\Sigma_1 \in I$; кроме того, для поля сохраняется свойство интегральной поверхности. Подобное поле может быть полезно при решении задач из предыдущих разделов.

Построим вначале касательное поле к многообразию W_{2m+1} как линейную комбинацию характеристических векторов

$$\xi_{F_i} = (F_{ip}, \langle p, F_{ip} \rangle, -F_{ix} - pF_{iu}) \quad (1.57)$$

и затем покажем, что оно обладает также вторым свойством характеристического поля. С этой целью введем скалярную функцию, называемую сингулярным гамильтонианом:

$$H^\sigma(z) = \sum_{i=-m}^m \lambda_i(z) F_i(z), \quad z \in \mathbb{R}^{2n+1} \quad (1.58)$$

Здесь λ_i — множители Лагранжа, определяемые как некоторые функции от z . Для упрощения будем опускать верхний индекс σ в обозначении H^σ , если, конечно, это не вызовет двусмысленность.

Сужение характеристического поля

$$\xi_H(z) = (H_p, \langle p, H_p \rangle, -H_x - p H_u)$$

на многообразии W_{2m+1} имеет вид

$$\xi_H(z) = \sum_{i=-m}^m \lambda_i(z) \xi_{F_i}(z), \quad z \in W_{2m+1} \quad (1.59)$$

поскольку члены, содержащие производные от функций λ_i , исчезают благодаря выполнению на W_{2m+1} равенства $F_i = 0$. При произвольных λ_i вектор (1.59) не является касательным к W_{2m+1} . Для этого данный вектор должен быть касательным к каждой поверхности $F_i(z) = 0$, другими словами, он должен занулять каждую дифференциальную форму $dF_i(\eta)$:

$$dF_i(\xi_H(z)) = \sum_{j=-m}^m \lambda_j dF_i(\xi_{F_j}(z)) = 0, \quad |i| \leq m \quad (1.60)$$

Последнее представляет собой линейную систему, которая может быть рассмотрена относительно неизвестного вектора λ :

$$\begin{aligned} C\lambda &= 0, \quad \lambda = (\lambda_{-m}, \dots, \lambda_{-1}, \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^{2m+1} \\ C &= \|c_{ij}\|, \quad c_{ij} = dF_i(\xi_{F_j}) = \omega(\xi_{F_i}, \xi_{F_j}) = \{F_i F_j\}, \quad i, j = -m, \dots, m \end{aligned} \quad (1.61)$$

Здесь C — квадратная матрица размерности $(2m+1) \times (2m+1)$ с элементами c_{ij} , зависящими от точки $z \in \mathbb{R}^{2n+1}$ и равными скобкам Якоби, то есть $c_{ij} = \{F_i F_j\}$.

Для двух функций $F(z)$ и $G(z)$ скобки Якоби имеют следующие четыре эквивалентных определения:

$$\begin{aligned} \{FG\} &= dF(\xi_G) = \frac{\partial F}{\partial \xi_G} = \omega(\xi_F, \xi_G) = \langle F_x + p F_u, G_p \rangle - \langle G_x + p G_u, F_p \rangle = \\ &= \sum_{i=1}^n [(F_{x_i} + p_i F_u) G_{p_i} - (G_{x_i} + p_i G_u) F_{p_i}] \end{aligned} \quad (1.62)$$

В частности, как показано здесь, скобки Якоби представляют собой производную по направлению ξ_G от функции F , а также значение формы ω в (1.53) на векторах ξ_F, ξ_G . Если же функции не зависят от u , то есть $F = F(x, p)$, $G = G(x, p)$, то (1.62) является *скобкой Пуассона*:

$$\{FG\} = \langle F_x, G_p \rangle - \langle G_x, F_p \rangle$$

Некоторые свойства скобок Якоби, которые мы будем использовать в этой книге, приведены в приложении. Из (1.62) можно получить, что скобки Якоби обладают свойством антисимметрии и, следовательно, матрица C кососимметрическая:

$$C = -C^T, \quad c_{ij} = \{F_i F_j\} = -\{F_j F_i\} = -c_{ji} \quad (1.63)$$

Для любой квадратной матрицы C нечетной размерности справедливо тождество $\det(-C) = -\det C$, в случае четной размерности имеем $\det(-C) = \det C$. При этом в обоих случаях выполняется равенство $\det C = \det C^T$. Таким образом, для кососимметрической матрицы C нечетной размерности из (1.63) следует $\det C = 0$ и, стало быть, ее ранг не превышает $2m$. Последнее является достаточным условием существования нетривиального решения для системы (1.61).

Если ранг матрицы C равен $2m$, то все решения системы (1.61) можно задать параметрическим множеством $\alpha\lambda(z)$, где α — скалярный параметр, а $\lambda(z)$ — некоторое фиксированное (базисное) решение, которое будет определено далее. Можно сказать, что таким образом задается единственное направление в λ -пространстве.

Из соотношения (1.60) следует, что полные производные от всех функций $F_i(z)$, вычисленные вдоль решений системы

$$\dot{x} = H_p, \quad \dot{u} = \langle p, H_p \rangle, \quad \dot{p} = -H_x - p H_u \quad (1.64)$$

обращаются в нуль на множестве W_{2m+1} . Другими словами, W_{2m+1} является инвариантным множеством для системы (1.64), то есть решение (1.64), стартующее из произвольной точки $z^0 \in W_{2m+1}$, остается на W_{2m+1} . Система (1.64) представляет собой характеристическую систему вида (1.6), записанную с помощью гамильтониана (1.58). Используя обозначения (1.29), систему (1.64) можно записать в следующей компактной форме:

$$\dot{z} = \xi_H(z) \quad (1.65)$$

Неединственность решения λ системы (1.61) с точностью до множителя a предоставляет свободу в выборе параметра дифференцирования (независимой переменной) в (1.64), (1.65). Изменением этого параметра можно всегда привести системы (1.64), (1.65) к виду, для которого соответствующее решение λ имеет множитель $a = 1$.

В соответствии с (1.59), система (1.64) (или (1.65)) на многообразии W_{2m+1} принимает вид

$$\dot{x} = \sum_{i=-m}^m \lambda_i F_{ip}, \quad \dot{u} = \sum_{i=-m}^m \lambda_i \langle p, F_{ip} \rangle, \quad \dot{p} = - \sum_{i=-m}^m \lambda_i (F_{ix} + p F_{iu}) \quad (1.66)$$

Систему (1.66) будем называть характеристической системой для многообразия W_{2m+1} , а векторное поле $\xi_H(z)$ — характеристическим на W_{2m+1} . По построению, это поле является касательным к W_{2m+1} .

Нам далее будет удобно полагать, что в (1.58), (1.64)–(1.66) фигурирует фиксированное базисное решение $\lambda(z)$ системы (1.61). Тем не менее, для сохранения общности, можно заменить (1.58) на соотношение

$$\mu(z)H(z) = \sum_{i=-m}^m \lambda_i(z)F_i(z) \quad (1.67)$$

где новый множитель $\mu = 1/a$ используется вместо a . Для получения характеристических уравнений при некотором $\mu \neq 1$ (подразумевается $\mu \neq 0$) вместо λ_i в (1.66) следует подставить λ_i/μ . В общем случае ненулевой множитель μ можно выбрать с помощью некоторой нормировки вектора λ , например,

$$\sum_{i=-m}^m \lambda_i/\mu = 1 \quad (1.68)$$

1.2.4. Построение базисного решения

Покажем, что система $C\lambda = 0$ всегда имеет частное решение $\lambda = \theta$, где

$$\theta = (\Delta_{-mk}, \dots, \Delta_{0k}, \dots, \Delta_{mk}) \in \mathbb{R}^{2m+1} \quad (1.69)$$

Здесь k — произвольное целое число, удовлетворяющее неравенству $|k| \leq m$, а Δ_{ij} — кофактор элемента c_{ij} матрицы C . Кофактором (алгебраическим дополнением) элемента c_{ij} произвольной квадратной матрицы C называется число, равное произведению $-1^{(i+j)}$ на детерминант подматрицы, полученной удалением из этой матрицы i -ой строки и j -ого столбца. Так как для любой кососимметрической матрицы C нечетной размерности справедливо равенство $\Delta_{ij} = \Delta_{ji}$, то, подставив (1.69) в исходное уравнение, получаем

$$\sum_{j=-m}^m c_{ij} \Delta_{jk} = \sum_{j=-m}^m c_{ij} \Delta_{kj} = \delta_{ik} \det C = 0 \quad (\delta_{ii} = 1, \delta_{ik} = 0, i \neq k) \quad (1.70)$$

Действительно, при $i = k$ выражение (1.70) представляет собой определение детерминанта матрицы C , а при $i \neq k$ является детерминантом другой матрицы с двумя совпадающими строками, полученной из матрицы C путем замены k -ой строки на i -ую. В обоих случаях в (1.70) равенство нулю выполняется вследствие того, что для любой кососимметрической матрицы C нечетной размерности имеем $\det C = 0$. Отсюда следует, что (1.69) является частным решением уравнения $C\lambda = 0$.

Элементы вектора (1.69) как детерминанты (с точностью до знака) подматриц матрицы C представляют собой однородные полиномы степени $2m$ относительно элементов c_{ij} . Используя понятие пфаффиана, определение которого приводится ниже, для кососимметрической матрицы четной размерности можно получить более простое решение с полиномами порядка m .

Непосредственное вычисление детерминантов кососимметрических матриц размерности два и четыре дает

$$\begin{vmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{vmatrix} = a^2, \quad \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix} = (af - be + cd)^2 \quad (1.71)$$

Отсюда следует, что эти детерминанты неотрицательны и представляют собой полные квадраты полиномов степени $m = 1, 2$ для матриц порядка $2m$. Можно показать, что это утверждение справедливо для любых кососимметрических матриц порядка $2m$, где $m \geq 1$.

Положим, что такой матрицей является матрица $B = \|b_{ij}\|$, $i, j = \pm 1, \dots, \pm m$. Пфаффиан от матрицы B определяется следующим образом:

$$\text{Pf}(B) = \frac{1}{2^m m!} \sum_{j_k} \varepsilon(j_k) b_{j_{-m} j_{-m+1}} \cdots b_{j_{m-1} j_m} \quad (1.72)$$

Здесь суммирование ведется по всем возможным перестановкам

$$j_k = (j_{-m}, j_{-m+1}, \dots, j_{m-1}, j_m)$$

а коэффициент $\varepsilon(j_k)$ принимает значение 1 при четной перестановке

$$(-m, -m+1, \dots, m-1, m) \rightarrow j_k$$

и -1 при нечетной. Известно [81], что имеет место равенство

$$[\text{Pf}(B)]^2 = \det B \quad (1.73)$$

Пусть C_i является кососимметрической квадратной матрицей размерности $2m$, полученной из матрицы C путем удаления i -ой строки и i -ого столбца. Тогда элементы вектора (1.69) можно представить [51] в виде

$$\Delta_{ij} = \lambda_i \lambda_j, \quad \lambda_k = (-1)^k \text{Pf}(C_k), \quad |k| \leq m \quad (1.74)$$

Потребуем выполнение условия на ранг матрицы C , которое использовалось в предыдущем разделе: $\text{rank } C = 2m$. Отсюда следует, что существует k , при котором в (1.74) $\lambda_k \neq 0$. Подставляя $\Delta_{jk} = \lambda_j \lambda_k$ в (1.70), получаем

$$\sum_{j=-m}^m c_{ij} \lambda_j \lambda_k = \lambda_k \sum_{j=-m}^m c_{ij} \lambda_j = 0, \quad \lambda_k \neq 0$$

Это равенство означает, что вектор $\lambda = (\lambda_{-m}, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^{2m+1}$ с компонентами, задаваемыми (1.74), представляет собой еще одно нетривиальное решение системы $C\lambda = 0$. Далее под обозначением $\lambda = \lambda(z)$ будем понимать именно это решение, которое также называется базисным решением.

Из (1.74) следует, что условие $\lambda \neq 0$ эквивалентно $\Delta_{ik} \neq 0$ при некоторых i, k . Доказательство (1.74) приведено в [51]. В случаях малых m , а именно, $m = 0, 1, 2$, которые будут рассматриваться в этой книге, соотношения (1.73), (1.74) можно получить путем непосредственных вычислений.

Таким образом, условие для ранга матрицы C имеет три эквивалентные формулировки:

$$\text{rank } C(z) = 2m, \quad \Delta_{ik}(z) \neq 0, \quad \lambda(z) \neq 0, \quad z \in \mathbb{R}^{2n+1} \quad (1.75)$$

Действительно, если $\text{rank } C < 2m$, то матрица C , размерность которой равна $2m + 1$, содержит не более $2m - 1$ линейно независимых строк и, следовательно, $\det C_i = 0$ для любого $|i| \leq m$. Отсюда с учетом (1.73), (1.74) получаем $\lambda = 0$.

Следует отметить, что условия (1.75) означают существование единственного (с точностью до скалярного множителя) решения системы $C\lambda = 0$. В качестве этого

решения можно взять вектор $\lambda(z)$, компоненты которого определяются из (1.74). Если же $\text{rank } C < 2m$, то существуют, по крайней мере, два линейно независимых решения данной системы.

В данной главе будем полагать, что условие (1.75) выполнено. Это есть дополнительное ограничение на функции F_i в (1.47), которое не вытекает из линейной независимости dF_i . Действительно, при малых m можно выбрать данные функции в виде $F_i = F_i(x, u)$ (отсутствует зависимость от p) с линейно независимыми dF_i , в то время как матрица C и вектор λ будут тождественно нулевыми. Можно показать, что из условия (1.75) следует, что среди $2m + 1$ линейных форм dF_i , по крайней мере, $2m$ линейно независимы.

1.2.5. Выражение для λ при малых m

Рассмотрим вначале случай $m = 0$, когда λ является скаляром. Для этого случая положим по определению $\lambda = 1$. Отметим, что соотношения (1.75) при таком выборе λ выполняются.

Далее рассмотрим случай $m = 1$. Вычисляя кофакторы элементов первой строки квадратной матрицы C из (1.61) размерности 3×3 , имеем

$$\Delta_{-1-1} = \{F_0 F_1\}^2, \quad \Delta_{-10} = \{F_0 F_1\}\{F_1 F_{-1}\}, \quad \Delta_{-11} = \{F_0 F_1\}\{F_{-1} F_0\}$$

Отсюда, с учетом (1.74), для компонент вектора λ получаем

$$\lambda_{-1} = \{F_0 F_1\}, \quad \lambda_0 = \{F_1 F_{-1}\}, \quad \lambda_1 = \{F_{-1} F_0\} \quad (1.76)$$

Тогда гамильтониан (1.67) будет иметь вид

$$\mu H = \{F_0 F_1\} F_{-1} + \{F_1 F_{-1}\} F_0 + \{F_{-1} F_0\} F_1 \quad (1.77)$$

Последнее выражение можно легко запомнить по следующему правилу: три индекса в каждом слагаемом представляют собой циклическую перестановку по отношению к индексам в предыдущем слагаемом.

Для нахождения компонент вектора λ при $m = 2$ можно посчитать главные кофакторы Δ_{ii} , $i \leq 2$, и воспользоваться далее формулами из (1.71), (1.74). Это позволяет выписать следующие равенства:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= c_{-2-1} c_{12} - c_{-21} c_{-12} + c_{-22} c_{-11} \\ \lambda_1 &= -[c_{-2-1} c_{02} - c_{-20} c_{-12} + c_{-22} c_{-10}] \\ \lambda_2 &= -[c_{-2-1} c_{10} - c_{-21} c_{-10} + c_{-20} c_{-11}], \quad c_{ij} = \{F_i F_j\} \end{aligned} \quad (1.78)$$

Все λ_k , в частности λ_{-1} и λ_{-2} , могут быть получены из выражения для λ_0 согласно следующей процедуре (работающей также при $m \geq 1$): для нахождения λ_k необходимо заменить во всех нижних индексах слагаемых правой части k на 0 и после каждой такой замены нужно изменить также знак всего выражения.

1.2.6. Достаточные условия для задач 1.3, 1.4

Сформулированные в разделе 1.2.2 задачи 1.3, 1.4 представляют собой корректно поставленные задачи на так называемом нехарактеристическом многообразии

W_{2m+1} , состоящем из нехарактеристических точек. Точка $z \in W_{2m+1}$ называется нехарактеристической, если имеем $\lambda(z) \neq 0$, а $2m+2$ линейных форм dF_i и α являются линейно независимыми в этой точке. Оба этих условия могут быть объединены в следующее:

$$\xi_H(z) = \sum_{i=-m}^m \lambda_i(z) \xi_{F_i}(z) \neq 0, \quad z \in W_{2m+1} \quad (1.79)$$

Действительно, отсюда получаем $\lambda(z) \neq 0$. В целом, эквивалентность имеет место в силу следующей леммы.

Лемма 1.2. *Предположим, что $\lambda(z) \neq 0$ при некотором $z \in W_{2m+1}$. Тогда формы dF_i , $|i| \leq m$, и α линейно независимы в том и только том случае, если выполнено неравенство (1.79).*

Доказательство. Рассмотрим случай $m = 0$, положив $\lambda = 1$. Тогда $H = F$, $\xi_H = \xi_F$. Предположим, что $\xi_F = 0$. Отсюда получаем

$$F_p = 0, \quad \langle p, F_p \rangle = 0, \quad F_x + pF_u = 0 \quad (\xi_F = 0) \quad (1.80)$$

Из этих формул следует, что $(2n+1)$ -мерные векторы $\text{grad} F = (F_x, F_u, F_p)$ и $\xi_\alpha = (-p, 1, 0)$, а также формы

$$dF(\eta) = \langle F_x, X \rangle + F_u U + \langle F_p, P \rangle, \quad \alpha(\eta) = U - \langle p, X \rangle, \quad \eta = (X, U, P)$$

являются линейно зависимыми, так как $F + \mu \xi_\alpha = 0$ и $dF + \mu \alpha = 0$ при $\mu = -F_u$.

Предположим теперь, что формы dF и α линейно зависимы. Тогда при некоторых ν и μ справедливо равенство $\nu \text{grad} F + \mu \xi_\alpha = 0$, $\nu^2 + \mu^2 \neq 0$. Если при этом $\mu = 0$, то $\text{grad} F = 0$ и, следовательно, $\xi_F = 0$. Если же $\mu \neq 0$, то $\nu \neq 0$, поскольку вектор ξ_α имеет ненулевую вторую компоненту равную единице. Таким образом, можно положить $\nu = 1$. Отсюда для вторых компонент векторов $\text{grad} F$ и ξ_F получаем уравнение $F_u + \mu = 0$, откуда следует (1.80). Доказательство для случая $m \geq 1$ представляет собой упражнение 1.1. Лемма доказана.

Из леммы следует, что нехарактеристическое многообразие представляет собой многообразие W_{2m+1} , для каждой точки которого выполнено неравенство (1.79). Свойство нехарактеристичности для одной точки $z^* \in W_{2m+1}$ приводит к локальной нехарактеристичности многообразия W_{2m+1} . Геометрическая интерпретация свойства нехарактеристичности, а также многообразия W , содержащего характеристические точки, в которых выполняется равенство $\xi_F = 0$, будет рассмотрено в следующем разделе.

Теорема 1.3. *Предположим, что вектор $\xi_H(z)$ (вектор $H_p(z)$) трансверсален к многообразию Σ_{m+1} (многообразию $\Gamma_{m+1} = \pi \Sigma_{m+1}$) в некоторой точке $z^* \in \Sigma_{m+1}$ (соответственно $x^* = \pi z^* \in \Gamma_{m+1}$). Тогда существует единственное решение Σ_m задачи 1.3 (задачи 1.4). При этом многообразие Σ_m состоит из интегральных кривых системы (1.66), стартующих на Σ_{m+1} , а пара (u, Γ_m) для задачи 1.4 определяется x - и u -компонентами решения (1.66).*

Доказательство

Существование. Условие трансверсальности гарантирует, что все интегральные кривые системы (1.66), стартующие на Σ_{m+1} , образуют $(n - m)$ -мерную поверхность Σ_m (для задачи 1.4 — ее проекцию Γ_m), представляющую собой решение системы (1.66). Последняя в данном случае имеет форму (1.18), где размерность вектора s равна $(n - m) - 1$. Для доказательства включения $\Sigma_m \in I$ следует проверить выполнение свойства (1.42) на многообразии Σ_m , которое параметризовано $(n - m)$ -мерным вектором (s, t) . Проверка свойства полностью повторяет ту часть доказательства теоремы 1.1, которая представлена в (1.22)–(1.27), при этом сингулярный гамильтониан H из (1.58) (рассматриваемый на W_{2m+1}) играет роль функции F .

Единственность. Условие трансверсальности обеспечивает, в частности, выполнение условия нехарактеристичности

$$\xi_H(z) \neq 0 \quad (1.81)$$

откуда, с учетом леммы 1.2, следует линейная независимость форм dF_i . Тогда из леммы 1.1 получаем, что многообразии W_{2m} , размерность которого больше, чем размерность многообразия Σ_m , может содержать интегральное многообразие максимальной размерности $n - m$. Это означает, что вектор $\xi_H(z)$ является касательным к любому другому интегральному многообразию Σ'_m размерности $n - m$ в точке $z \in \Sigma'_m$ (другими словами, может быть построено $(n - m + 1)$ -мерное многообразие). Так как система (1.66) удовлетворяет известным условиям существования и единственности [17], то любое другое $(n - m)$ -мерное многообразие Σ'_m будет совпадать с Σ_m . Теорема доказана.

1.2.7. Геометрия характеристического поля

Из условия (1.79) и леммы 1.2 следует, что формы dF_i , $|i| \leq m$, и α являются линейно независимыми. С геометрической точки зрения это означает, что в пространстве $T_z \mathbb{R}^{2n+1}$ касательных векторов $\eta = (X, U, P)$ $2n$ -мерная контактная плоскость Π_z из (1.54), $U - \langle p, X \rangle = 0$, пересекает касательное пространство $T_z W_{2m+1}$ вдоль подпространства Q_z минимально возможной размерности, см. [1]:

$$\dim Q_z = 2(n - m) - 1, \quad Q_z = \Pi_z \cap T_z W_{2m+1} \quad (1.82)$$

Обозначим через L_z линейную оболочку $2m + 1$ векторов ξ_{F_i} , $|i| \leq m$. Для нехарактеристической точки справедливо равенство $\dim L_z = 2m + 1$. Можно показать, что пересечение $l_z = L_z \cap Q_z$ является одномерным множеством, порожденным характеристическим вектором $\xi_H(z)$:

$$l_z = L_z \cap Q_z = \{\eta \in T_z \mathbb{R}^{2n+1} : \eta = a \xi_H(z), a \in \mathbb{R}^1\}$$

С аналитической точки зрения произвольный вектор $\eta \in Q_z$ удовлетворяет следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} \Pi_z : U - \langle p, X \rangle &= 0 \\ T_z W_{2m+1} : \langle F_{ix}, X \rangle + F_{iu} U + \langle F_{ip}, P \rangle &= 0, \quad |i| \leq m \end{aligned}$$

Исключение U из второго уравнения дает

$$\omega(\xi_{F_i}, \eta) = \langle F_{ix} + pF_{iu}, X \rangle + \langle F_{ip}, P \rangle = 0, \quad |i| \leq m \quad (1.83)$$

С другой стороны, любой вектор из L_z можно представить в виде

$$\eta = \sum_{j=-m}^m \mu_j \xi_{F_j}$$

при некоторых μ_j . Для вектора η , принадлежащего пересечению $L_z \cap Q_z$, должно выполняться соотношение (1.83):

$$\omega\left(\xi_{F_i}, \sum_{j=-m}^m \mu_j \xi_{F_j}\right) = \sum_{j=-m}^m \mu_j \omega(\xi_{F_i}, \xi_{F_j}) = 0, \quad |i| \leq m \quad (1.84)$$

Так как $\omega(\xi_{F_i}, \xi_{F_j}) = c_{ij}$, то отсюда получаем линейную однородную систему (1.61), которая имеет единственное (с точностью до ненулевого множителя) решение, определяющее одномерное множество l_z . Таким образом, характеристический вектор $\xi_H(z)$, $z \in W_{2m+1}$, может быть определен геометрически.

1.2.8. Характеристические точки многообразия W

Рассмотрим характеристическую точку $z \in W_{2m+1}$, $\xi_H(z) = 0$. Полагаем, что $\lambda(z) \neq 0$, а формы dF_i , $|i| \leq m$, линейно независимы. Согласно лемме 1.2 формы dF_i и α являются в данном случае линейно зависимыми, и следовательно для подпространства Q_z из (1.82) получаем $\dim Q_z = 2(n - m)$. При этом система (1.84) по-прежнему имеет единственное решение, но порожденное уже нулевым вектором $\xi_H(z) = 0$. Это означает, что пересечение $l_z = L_z \cap Q_z$ является пустым множеством, то есть характеристический вектор не существует или, другими словами, отсутствует ядро формы ω . Из равенства $\xi_H(z) = 0$ следует также линейная зависимость векторов ξ_{F_i} . Используя условие $\lambda(z) \neq 0$, можно показать, что среди векторов ξ_{F_i} существуют $2m$ линейно независимых. Тогда $\dim L_z = 2m$. Следовательно, как и в нехарактеристическом случае, имеем $\dim Q_z + \dim L_z = 2n$, а подпространства Q_z , L_z пространства Π_z являются взаимно косоортогональными относительно скалярного произведения $\omega(\xi, \eta)$.

Из вышеизложенных рассуждений следует, что в окрестности характеристической точки $z \in W_{2m+1}$ постановка задачи 1.3 некорректна и, таким образом, используя характеристическое поле и исходную интегральную поверхность Σ_{m+1} , нельзя построить искомую поверхность Σ_m . Несмотря на это, для любой исходной поверхности Σ_{m+1} многообразия W_{2m+1} может содержать некоторую поверхность Σ_m , которая может быть найдена другим способом.

Лемма 1.3. Пусть линейные формы $dF_i(\eta)$, $|i| \leq m$, являются линейно независимыми и $\lambda(z) \neq 0$ для некоторого $z \in W_{2m+1}$. Предположим, что множество

$$\Sigma = \{z \in W_{2m+1} : \xi_H(z) = 0\}$$

не пусто и представляет собой гладкую поверхность. Тогда $\Sigma \in I$, то есть Σ — интегральная поверхность линейной формы α .

Доказательство. Запишем условие $\xi_H(z) = 0$ в координатной форме. Тогда справедливы равенства

$$\sum_{i=-m}^m \lambda_i F_{ip} = 0, \quad \sum_{i=-m}^m \lambda_i (F_{ix} + pF_{iu}) = 0$$

Умножая первое равенство скалярно на P , а второе на X и складывая полученные результаты, имеем

$$\sum_{i=-m}^m \lambda_i (\langle F_{ip}, P \rangle + \langle F_{ix}, X \rangle + \langle p, X \rangle F_{iu}) = 0$$

С другой стороны, для любого касательного вектора $\eta = (X, U, P) \in T_z \Sigma \subset T_z W_{2m+1}$ справедливо соотношение

$$dF_i = \langle F_{ix}, X \rangle + \langle F_{ip}, P \rangle + F_{iu} U = 0$$

Получаем, что сумма первых двух слагаемых равна $-F_{iu} U$. Используя это, запишем предыдущее равенство в виде

$$\left(\sum_{i=-m}^m \lambda_i F_{iu} \right) (U - \langle p, X \rangle) = 0$$

Первый множитель здесь отличен от нуля, так как в противном случае формы dF_i были бы линейно зависимыми. Таким образом, $U - \langle p, X \rangle = 0$, то есть $\alpha(\eta) = 0$, что означает $\Sigma \in I$. Лемма доказана.

В качестве применения леммы 1.3 рассмотрим алгоритм построения начальной поверхности Σ_1 , задаваемой (1.16) (см. также пример 1.2). Из (1.1), (1.3) и (1.5) следует, что поверхность Σ_1 может рассматриваться как подмножество многообразия (1.47), для которого $m = 1$:

$$\Sigma_1 \subset W_3 = \{z = (x, u, p) \in \mathbb{R}^{2n+1} : F_i(z) = 0, |i| \leq 1\}$$

$$F_0(z) = F(z), \quad F_{-1}(x) = g(x), \quad F_1(x, u) = u - v(x)$$

Сингулярный гамильтониан (1.77), соответствующий данному W_3 , при $\mu = 1$ имеет вид

$$H = \{F_0 F_1\} F_{-1} + \{F_1 F_{-1}\} F_0 + \{F_{-1} F_0\} F_1$$

$$\{F_0 F_1\} = -\langle F_p, p - v_x \rangle, \quad \{F_1 F_{-1}\} = 0, \quad \{F_{-1} F_0\} = \langle F_p, g_x \rangle$$

Отсюда получаем следующее условие для характеристических точек W_3 :

$$\xi_H = (0, 0, \langle F_p, p - v_x \rangle g_x - \langle F_p, g_x \rangle (p - v_x)) = 0 \quad (1.85)$$

Данный $(2n+1)$ -мерный вектор содержит только n последних компонент, отличных тождественно от нуля. Таким образом, в (1.85) имеется n нетривиальных уравнений.

Пусть векторы $y^1(x), \dots, y^{n-1}(x) \in \mathbb{R}^n$ образуют базис в касательном пространстве $T_x M$ и, в частности, справедливы равенства $\langle g_x, y^j \rangle = 0$. Скалярно умножая вектор, составленный из последних n компонент (1.85), на вектор y^j , получаем

$$\langle F_p, g_x \rangle \langle y^j, p - v_x \rangle = 0, \quad j = 1, \dots, n-1 \quad (1.86)$$

Подобное умножение на вектор F_p дает тождественный нуль, откуда следует, что среди n уравнений в (1.85) независимыми являются только $n-1$.

Предположим $\langle F_p, g_x \rangle \neq 0$, что эквивалентно условию трансверсальности (1.15). Тогда (1.86) совместно с уравнением (1.1) (одно из соотношений, определяющих W_3) дают следующую систему относительно неизвестного p :

$$\begin{aligned} F(x, v(x), p) &= 0 \\ \langle p - v_x(x), y^j(x) \rangle &= 0, \quad j = 1, \dots, n-1, \quad x \in M \end{aligned} \quad (1.87)$$

Можно показать, что система (1.87) совпадает с системой (1.13), так как поверхность M параметризуется равенствами $x = \varphi(s)$, $w(s) = v(\varphi(s))$, $y^j = \partial\varphi/\partial s_j$, $\partial w/\partial s_j = \langle v_x, y^j \rangle$.

Таким образом, начальная поверхность Σ_1 для задачи 1.1 состоит из характеристических точек многообразия W_3 , определяемого уравнением (1.1) и начальными условиями.

1.2.9. Пример характеристической системы для случая $m = 1$

Характеристические поля, рассматриваемые в данной книге, относятся к многообразиям W_1 и W_3 коразмерности 1 и 3, что соответствует значениям $m = 0, 1$ в (1.47). Рассмотрим пример для случая $m = 1$.

Пусть многообразие W_3 определено следующим образом:

$$\begin{aligned} W_3 : \quad F_0 = F(x, u, p) &= 0, \quad F_1 = F_1(x, u) = u - v(x) = 0 \\ F_{-1} = \{F_1 F\} &= \langle F_p, p - q \rangle = 0 \end{aligned} \quad (1.88)$$

Здесь $v(x)$ — заданная функция, а $q = q(x)$ — ее градиент. Множитель λ_{-1} , как следует из (1.76), в данном случае равен нулю. Кроме того, функция F_1 в (1.88) не зависит от p и, следовательно, имеет место равенство $F_{1p} = 0$. Последнее упрощает вид характеристической системы. Полагая $\mu = \lambda_0$ и рассматривая гамильтониан (1.77), получаем характеристическую систему (см. (1.66)–(1.68))

$$\dot{x} = F_p, \quad \dot{u} = \langle p, F_p \rangle, \quad \dot{p} = -F_x - pF_u - \frac{\{\{F F_1\} F\}}{\{\{F_1 F\} F_1\}} (p - q) \quad (1.89)$$

где $q = \partial v/\partial x$. Эта система отличается от системы для регулярных характеристик уравнения $F = 0$ лишь последним членом в последнем уравнении.

Отметим, что в системе (1.89) полагается выполненным условие $\{\{F_1 F\} F_1\} \neq 0$. Для некоторых частных случаев выражение для знаменателя в (1.89), соответствующее однородной функции F первого и второго порядков, получено в упражнениях

к этой главе. Если же функция F квадратична по переменной p , то данный знаменатель исчезает для точек на W_3 . Подобный вырожденный случай рассмотрен в приложении для функции

$$F(x, u, p) = \frac{1}{2} \langle A(x, u)(p - q(x)), p - q(x) \rangle \quad \left(q = \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

В главе 6 приводится пример многообразия W_3 , для которого третья функция F_{-1} , аналогично (1.89), представляет собой скобки Якоби первых двух:

$$W_3 : \quad F_0(x, u, p) = 0, \quad F_1(x, u, p) = 0, \quad F_{-1} = \{F_0 F_1\} = 0 \quad (1.90)$$

Характеристическая система в данном случае упрощается, так как $\lambda_{-1} = \{F_0 F_1\} = 0$. Нормирующий множитель μ , определяемый в (1.68), имеет вид

$$\mu = \lambda_0 + \lambda_1 = \{\{F_1 F_0\} F_1\} + \{\{F_0 F_1\} F_0\}$$

Это приводит к следующей характеристической системе на W_3 :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{1}{\lambda_0 + \lambda_1} (\lambda_0 F_{0p} + \lambda_1 F_{1p}) \\ \dot{u} &= \frac{1}{\lambda_0 + \lambda_1} (\lambda_0 \langle p, F_{0p} \rangle + \lambda_1 \langle p, F_{1p} \rangle) \\ \dot{p} &= -\frac{1}{\lambda_0 + \lambda_1} (\lambda_0 (F_{0x} + p F_{0u}) + \lambda_1 (F_{1x} + p F_{1u})) \\ \lambda_0 &= \{\{F_1 F_0\} F_1\}, \quad \lambda_1 = \{\{F_0 F_1\} F_0\} \end{aligned} \quad (1.91)$$

Данная система имеет место в теории УЧП первого порядка с негладким гамильтонианом и гладким (классическим) решением.

1.3. Задача Коши с подвижной границей

1.3.1. Регулярная задача с подвижной границей

Рассматриваемая в данном разделе задача возникает при построении сингулярных поверхностей в дифференциальных играх, которые будут исследоваться в следующих главах. Другое интересное приложение полученных ниже результатов относится к нерегулярной нехарактеристической задаче. Несмотря на то что задача с подвижной границей фактически расщепляется на две задачи, рассмотренные в предыдущем разделе, она обеспечивает достаточное условие существования решения в нехарактеристической задаче.

Пусть $(n - 2)$ -мерное многообразие B лежит в открытой окрестности D точки $x^* \in B \subset \mathbb{R}^n$, а $F(z)$, $G(z)$, $v(x)$ являются дважды непрерывно дифференцируемыми скалярными функциями $z = (x, u, p) \in \mathbb{R}^{2n+1}$ и $x \in \mathbb{R}^n$ соответственно.

Задача 1.5. *Найти гладкую гиперповерхность Γ , $\dim \Gamma = n - 1$, а также скалярную функцию $u(x) \in C^2(D)$, которые удовлетворяют следующим соотношениям:*

$$F(x, u(x), p(x)) = 0, \quad x \in D \quad (p = \partial u / \partial x) \quad (1.92)$$

$$u(x) - v(x) = 0, \quad G(x, u(x), p(x)) = 0, \quad x \in \Gamma; \quad B \subset \Gamma \subset D \quad (1.93)$$

Здесь (1.93) играет роль граничного условия для УЧП (1.92), но при этом только часть B поверхности Γ является фиксированной. Действительно, сравнивая (1.93) с аналогичным условием (1.5) в задаче 1.1, видим, что для определения неизвестной границы Γ добавляется новое равенство $G = 0$. Таким образом, задается только часть границы, а остальную нужно найти из равенства $G = 0$.

Приведенная формулировка задачи 1.5 соответствует наиболее простому случаю. Для более общего случая с несколькими неизвестными границами Γ_k коразмерности k и такими, что $\Gamma_{m+1} \subset \Gamma_m \dots \subset \Gamma_1 \subset D$, см. [50, 51].

При выполнении некоторых условий регулярности решение задачи 1.5 расщепляется на решение двух задач 1.4 для границы Γ (при $m = 1$) и для функции $u(x)$ (при $m = 0$).

Пусть вектор-функции $y^1(x), \dots, y^{n-2}(x)$ являются базисными для касательного пространства $T_x B$, $x \in B$. Дифференцируя равенство $u(x) - v(x) = 0$, $x \in B$, по направлению y^j и используя другие уравнения в (1.92), (1.93), можно получить следующую систему из n уравнений относительно неизвестного вектора $p = p(x)$, $x \in B$:

$$\begin{aligned} F(x, v(x), p) = 0, \quad G(x, v(x), p) = 0, \quad x \in B \\ \langle p - q(x), y^j(x) \rangle = 0, \quad j = 1, \dots, n-2 \quad (q(x) = \partial v(x)/\partial x) \end{aligned} \quad (1.94)$$

Здесь $q(x)$ — заданная вектор-функция, являющаяся градиентом известной функции $v(x)$. Отметим, что в (1.94) по сравнению с аналогичной системой (1.13) одно из линейных по p уравнений заменено на $G = 0$ (параметрическое описание многообразия B дает $y^j = \partial \varphi / \partial s_j$, $j = 1, \dots, n-2$).

Следуя обозначениям из раздела 1.1, введем функцию F_1 , а также новые обозначения для F, G и соответствующего сингулярного гамильтониана (1.77):

$$\begin{aligned} F_0(z) = F(z), \quad F_{-1}(z) = G(z), \quad F_1(x, u) = u - v(x) \\ \mu H = \{F_0 F_1\} F_{-1} + \{F_1 F_{-1}\} F_0 + \{F_{-1} F_0\} F_1 \end{aligned} \quad (1.95)$$

Можно проверить, что

$$\lambda_{-1} = \{F_0 F_1\} = -\langle F_p, p - q \rangle, \quad \lambda_0 = \{F_1 F_{-1}\} = \langle G_p, p - q \rangle$$

В нижеприведенной теореме полагается $\mu = 1$.

Теорема 1.4. *Предположим, что выполнены следующие три условия:*

- 1) существует решение p^* системы (1.94) при $x = x^*$;
- 2) вектор $H_p(z^*) = \langle G_p, p^* - q \rangle F_p - \langle F_p, p^* - q \rangle G_p$ трансверсален к многообразию B в точке $x^* \in B$;
- 3) $\langle F_p, p^* - q \rangle \neq 0$ при $z = z^* = (x^*, u^*, p^*)$, $u^* = v(x^*)$.

Тогда для каждого вектора p^* существует единственное решение задачи 1.5. Поверхность Γ является единственным решением задачи 1.4 с $m = 1$, многообразие W_3 задается функциями из (1.95), а начальное многообразие Σ_2 определяется

системой (1.94), то есть $\Gamma = \pi\Sigma_1$, где Σ_1 состоит из интегральных кривых системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \langle G_p, p - q \rangle F_p - \langle F_p, p - q \rangle G_p \\ \dot{u} &= \langle q, F_p \rangle \langle p, G_p \rangle - \langle q, G_p \rangle \langle p, F_p \rangle \\ \dot{p} &= -\langle G_p, p - q \rangle F_x + pF_u + \langle F_p, p - q \rangle (G_x + pG_u) - \{GF\}(p - q) \\ z(0) &= (x(0), u(0), p(0)) \in \Sigma_2 \end{aligned} \quad (1.96)$$

Функция $u(x)$ является решением задачи 1.1 с граничным условием $u(x) = v(x)$ на Γ .

Доказательство. Из условия 2) следует, что $H_p \neq 0$, так как нулевой вектор является касательным к любой поверхности. Векторы F_p, G_p не коллинеарны ввиду того, что из равенства $F_p = aG_p$ следует $H_p = 0$. Эти векторы также не принадлежат линейной оболочке векторов y^1, \dots, y^{n-2} . Для вектора F_p данное утверждение следует из условия 3): все векторы y^j , в отличие от F_p , ортогональны (см. (1.94)) ненулевому вектору $p - q$. Если же G_p является линейной комбинацией векторов y^j , то $\langle G_p, p - q \rangle = 0$ и, следовательно, $H_p = -\langle F_p, p - q \rangle G_p$. Отсюда, в противоречие условию 2), получаем, что H_p является линейной комбинацией векторов y^j .

Таким образом, можем заключить, что векторы $F_p, G_p, y^1, \dots, y^{n-2} \in \mathbb{R}^n$ линейно независимы. Это означает, что якобиан системы (1.94) не равен нулю и для нее существует единственное решение $p = r(x)$, $x \in B$, $r(x^*) = p^*$. Следовательно, доказано существование $(n-2)$ -мерной хорошо проецируемой интегральной поверхности Σ_2 , $\Sigma_2 \in I^0$. Эта поверхность вместе с условием 2) удовлетворяют условиям теоремы 1.3 при $m = 1$. Пара (u, Γ) , удовлетворяющая теореме, является единственной; при этом u представляет собой сужение $v(x)$ на Γ .

Далее границу Γ , вместе с определенным на ней граничным условием $u(x) = v(x)$, можно рассматривать как заданную для уравнения (1.92). Таким образом, имеем задачу 1.1, для которой условие 3) теоремы играет роль условия трансверсальности (1.15), гарантирующего существование и единственность решения $u(x) \in C^2(D)$. Заметим, что ненулевой вектор $p(x) - q(x)$, $x \in \Gamma$, является нормалью к границе Γ , так как он равен градиенту функции, обращающейся в нуль на Γ . Теорема доказана.

В дальнейшем мы рассмотрим задачу 1.5, для которой, по крайней мере, существует хорошо проецируемая поверхность Σ_1 . Доказательство теоремы 1.4 показывает, что поверхности Σ_1 и $\Gamma_1 = \pi\Sigma_1$ существуют тогда, когда выполняются условия 1), 2) теоремы (в то время как условие 3) может быть нарушено). Эти условия также гарантируют, что ненулевой вектор $p - q$ является нормалью к Γ , рис. 1.4.

Переформулируем условия существования границы Γ , а также приведем более общее условие того, что вектор $p - q$ является нормалью к Γ .

Лемма 1.4. Пусть выполнены следующие условия:

- 1) существует решение p^* системы (1.94) при $x = x^*$;
- 2) векторы $F_p, G_p, y^1, \dots, y^{n-2}$ линейно независимы в \mathbb{R}^n в точке $z^* = (x^*, v(x^*), p^*)$;
- 3) для точки z^* выполнено неравенство $\{F_1 F\}^2 + \{F_1 G\}^2 > 0$.

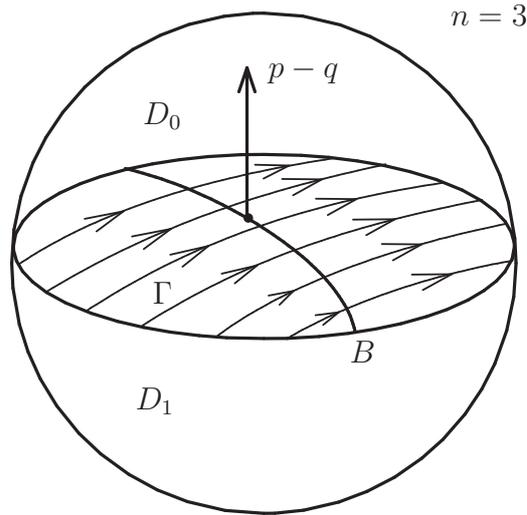


Рис. 1.4

Тогда существует единственная поверхность Γ , удовлетворяющая условию (1.93), а вектор $p - q$, $q = v_x$, $x \in \Gamma$, определяет поле нормалей к Γ .

Доказательство. Из доказательства теоремы 1.4 следует, что условие 2) этой теоремы эквивалентно условиям 2), 3) доказываемой леммы. Таким образом, существуют хорошо проецируемая поверхность Σ_1 и граница $\Gamma_1 = \pi\Sigma_1$. Существование вектора $p - q$, являющегося нормалью к Γ , следует из теоремы 1.4 и существования решения $u(x) \in C^2(D)$. В случае, когда нарушается условие 3) теоремы, $\langle F_p, p - q \rangle = 0$, мы еще имеем $\langle G_p, p - q \rangle \neq 0$ (иначе $H_p = 0$, и H_p не является трансверсальным к B). Меняя далее местами функции F и G в формулировке задачи 1.5, снова получаем, что $u(x) \in C^2(D)$ является решением уравнения $G = 0$. Лемма доказана.

1.3.2. Нерегулярная задача

Рассмотрим задачу 1.5, для которой условие 3) теоремы 1.4 тождественно нарушено:

$$-\{FF_1\} = \langle F_p, p - q \rangle = 0, \quad z \in \Sigma_1 \quad (1.97)$$

Если дополнительно при $z \in \Sigma_1$ имеет место равенство $\{GF\} = 0$, то характеристический вектор

$$\xi_F = (F_p, \langle p, F_p \rangle, -F_x - pF_u)$$

коллинеарен правой части системы (1.96), задающей поверхность Σ_1 . Таким образом, эта поверхность является характеристической для уравнения $F = 0$. Как показано в разделе 1.1, в этом случае существует бесконечно много решений $u(x) \in C^2(D)$. Задача 1.5 здесь также имеет бесконечно много решений, то есть единственную границу Γ , но много функций $u(x) \in C^2(D)$.

Задачу 1.5, для которой условия 1), 2) теоремы 1.4 выполнены и имеют место соотношения

$$\{FF_1\} = 0, \quad \{GF\} \neq 0, \quad z \in \Sigma_1 \quad (1.98)$$

назовем нерегулярной задачей 1.5.

Ниже для нерегулярной задачи 1.5 будут сформулированы достаточные условия, сводящие решение задачи к построению поверхности Γ и к решению нерегулярной нехарактеристической задачи 1.1. Для определенного класса функций эти условия будут достаточными для существования решения в нехарактеристической задаче.

1.3.3. Скобки Якоби различных уровней

Так как равенство (1.97) представляет собой тождество на Σ_1 , то во втором условии (1.93) вместо функции $G(z)$ можно поставить функцию $\{FF_1\}$. Таким образом, нерегулярная задача 1.5 может быть сформулирована с использованием только двух функций $F(z)$ и $v(z)$. Для нерегулярной задачи с $G = \{FF_1\}$ имеем

$$H_p = \{F_1G\}F_p = \{F_1\{FF_1\}\}F_p$$

Дальнейшая нерегулярность соответствует случаю, когда, кроме выполнения первого равенства в (1.98), имеет также место тождество $\{F_1\{FF_1\}\} = 0$ и, следовательно, $H_p = 0$ на Σ . В этом случае двойные скобки Якоби могут быть взяты в качестве G . Такой процесс замены можно продолжить и далее. Заметим, что вследствие свойства антисимметрии скобок Якоби, $\{FG\} = -\{GF\}$, имеем $\{F_1\{FF_1\}\} = \{\{F_1F\}F_1\}$, то есть при том же порядке следования функций можно изменить порядок скобок.

Таким образом, вложенные скобки Якоби появляются при исследовании нерегулярной задачи. Для описания соответствующих выражений введем понятие *скобок уровня* $0, 1, \dots$. Зафиксируем две достаточно гладкие функции $F_0(z), F_1(z)$ и назовем их скобками нулевого уровня. Введем скобки более высоких уровней:

$$\begin{aligned} & \{F_0F_1\} \text{ — уровень } 1 \\ & \{\{F_0F_1\}F_0\}, \{\{F_0F_1\}F_1\} \text{ — уровень } 2 \\ & \{\dots\{\{F_0F_1\}F_{j_s}\}\dots F_{j_{k+1}}\}, (k \text{ скобок}) \text{ — уровень } k \end{aligned} \quad (1.99)$$

Каждому уровню из (1.99) принадлежат также и скобки, в которых порядок следования функций изменен: $\{\dots\{F_1F_0\}\dots F_{j_{k+1}}\}$. Общее количество скобок, соответствующих уровню k , равняется числу булевых векторов $j = (j_1, j_2, \dots, j_{k+1})$. Любая компонента j_s такого вектора может принимать лишь два значения 0 или 1. Введем специальные обозначения для двух особых случаев, когда все величины j_s , $s \geq 2$, принимают одно и то же значение:

$$F_0^{k+1} = \{F_1F_0^k\}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad F_0^0 = F_0 \quad (1.100)$$

$$F_1^{k+1} = \{F_1^kF_0\}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad F_1^0 = F_1 \quad (1.101)$$

Далее функция F_1 , как правило, будет иметь вид $F_1(x, u) = u - v(x)$. При $v(x) \equiv 0$ функции из (1.100) запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} F_0^{k+1} &= \{F_1 F_0^k\} = \langle p, F_{0p}^k \rangle = \left\langle p, \frac{\partial}{\partial p} \right\rangle^{k+1} F_0 = \\ &= \left(p_1 \frac{\partial}{\partial p_1} + \dots + p_n \frac{\partial}{\partial p_n} \right)^{k+1} F_0 \end{aligned} \quad (1.102)$$

Если скобки (1.99) будут порождаться новой парой функций

$$F'_0 = a_{00}F_0 + a_{01}F_1, \quad F'_1 = a_{10}F_0 + a_{11}F_1$$

линейно зависящих от F_0, F_1 , то можно показать, что соответствующие выражения для скобок (1.99) в новых и старых функциях будут также линейно зависими. Это свойство скобок будет использовано в главе 6.

1.3.4. Достаточное условие

Из результатов, полученных в разделе 1.1, следует, что нехарактеристическая задача не имеет непрерывного C^2 -решения. Таким образом, решение нерегулярной задачи 1.5 следует искать в более широком классе функций. Такой класс функций, соответствующий данной поверхности Γ , обозначим через $K(\Gamma)$. Предположим, что задана окрестность D некоторой точки $x^* \in \mathbb{R}^n$ и гладкая гиперповерхность Γ делит D на два открытых подмножества, то есть $D = D_0 + \Gamma + D_1$. Класс функций $K(\Gamma)$ задается либо на всем множестве D , либо на одном из его подмножеств $D_0 + \Gamma$ или $D_1 + \Gamma$. Потребуем выполнение свойств дифференцируемости

$$u(x) \in C^1(D), \quad u(x) \in C^2(D_i), \quad i = 0, 1$$

для функций, заданных на D , и свойств дифференцируемости

$$u(x) \in C^1(D_i + \Gamma), \quad u(x) \in C^2(D_i)$$

для функций, определенных на D_i . Включение $u(x) \in C^1(D_i + \Gamma)$ означает, что градиент функции $u(x)$ имеет непрерывное продолжение с подмножества D_i на границу Γ . Это позволяет в классическом смысле рассматривать решение уравнения $F(x, u(x), \partial u / \partial x) = 0$ на $D_i + \Gamma$. Таким образом, не требуется непрерывность второй производной функции $u(x) \in K(\Gamma)$, хотя $C^2(D) \subset K(\Gamma)$.

Предположим, что функции $F(z), v(x)$, а также многообразие B являются достаточно гладкими.

Теорема 1.5. Пусть функция G в (1.93) – (1.95) имеет вид $G(z) = F_0^{k-1}$ для некоторого $k \geq 2$ при $F_0 = F, F_1 = u - v(x)$, а также выполнены следующие условия:

- 1) существует решение p^* системы (1.94) при $x = x^*$;
- 2) векторы $F_p(z^*), y^1(x^*), \dots, y^{n-2}(x^*)$ линейно независимы в точке $z^* = (x^*, v(x^*), p^*)$;
- 3) $\{GF_0\} \neq 0, \{F_1G\} = F_0^k \neq 0$ при $z = z^*$;
- 4) $F_0^i(z) = 0$ при $z \in \Sigma_1, i = 1, \dots, k-1$, где Σ_1 – интегральная поверхность,

существующая и единственная вследствие выполнения условий 1)–3), а также леммы 1.4.

Тогда справедливы следующие утверждения.

а) Поверхность Σ_1 и ее проекция $\Gamma = \pi\Sigma_1$ могут быть построены на основе решения задачи Коши для системы сингулярных характеристик

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F_p, \quad \dot{u} = \langle p, F_p \rangle \\ \dot{p} &= -F_x - pF_u - \frac{\{GF_0\}}{\{F_1G\}}(p - q), \quad z(0) \in \Sigma_2 \end{aligned} \quad (1.103)$$

б) Скобки Якоби уровней $0, 1, \dots, k-1$, порожденные функциями F_0 и F_1 , тождественно равны нулю на Σ_1 , то есть эти скобки задают инвариантные многообразия для системы (1.103). Все скобки порядка k отличны от нуля. При этом скобки, которые содержат нечетное число функций F_1 , при четном k имеют такой же знак, как и величина $\{GF_0\}$, в частности, $\text{sign}F_1^k = \text{sign}\{GF_0\}$.

в) При нечетном k существует единственная функция $u(x) \in K(\Gamma)$, определенная на всем множестве D и имеющая неограниченную вторую производную на Γ .

г) При четном k существуют две функции $u_1(x), u_2(x) \in K(\Gamma)$, определенные только на одном подмножестве $D_i + \Gamma$, где $i = 0$, если $\{GF_0\} > 0$ и $i = 1$, если $\{GF_0\} < 0$. Здесь подмножество D_0 обозначает ту окрестность поверхности Γ , $D = D_0 + \Gamma + D_1$, в сторону которой направлен вектор $p - q$, рис. 1.4. При этом обе функции на Γ имеют неограниченные пределы второй производной.

Доказательство. В соответствии с теоремой 1.4 и леммой 1.4 условия 1)–3) обеспечивают существование и единственность начальной поверхности Σ_2 , а также поверхности Σ_1 и ее проекции $\Gamma = \pi\Sigma_1$, построенных на основе решения задачи Коши (1.103). Система (1.103) соответствует гамильтониану (1.95) с параметром $\mu = \{F_1G\}$, другими словами, в (1.96) произведена замена независимой переменной “время”.

Так как поверхности Σ_1 и Γ существуют, мы приходим к нерегулярной задаче, рассмотренной в разделе 1.1. Функции $u(x)$ и $u_i(x)$ из утверждений в) и г), соответственно, являются решениями этой задачи. Нерегулярная (нехарактеристическая) задача более подробно исследуется в следующем разделе. Оставшаяся часть доказательства будет приведена в теореме 1.6. Это будет завершением доказательства рассматриваемой теоремы.

Некоторые замечания к теореме 1.5.

Нерегулярная задача наименьшей размерности соответствует $k = 2$, при этом многообразии W_3 определяется функциями (1.95) вида

$$W_3 : F_0 = F = 0, \quad F_1 = u - v(x) = 0, \quad F_{-1} = \{F_1F\} = \langle F_p, p - q \rangle = 0 \quad (1.104)$$

Система (1.103), записанная при помощи двух функций F и v , имеет вид

$$\dot{x} = F_p, \quad \dot{u} = \langle p, F_p \rangle, \quad \dot{p} = -F_x - pF_u - \frac{\{\{F_1F\}F\}}{\{\{F_1F\}F_1\}}(p - q) \quad (1.105)$$

Данная форма уравнений (1.103) будет встречаться очень часто.

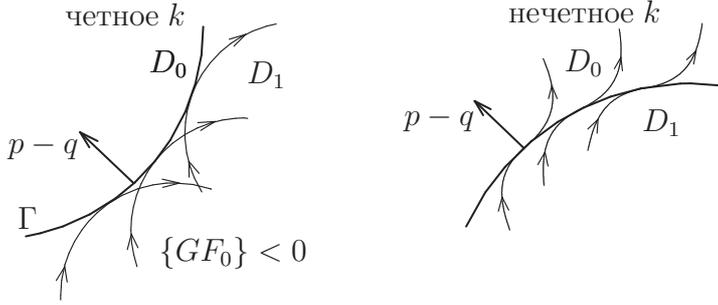


Рис. 1.5

Утверждение г) теоремы означает, что двузначное решение, задаваемое функциями $u_1(x)$ и $u_2(x)$, имеет ребро возврата на поверхности Γ . Данное свойство отмечено в [18].

Как установлено в теореме 1.3, поверхность Γ , рассматриваемая в теореме 1.5, состоит из семейства кривых, представляющих собой x -части решений системы (1.103), рис. 1.4. Так как x -компоненты систем (1.6) и (1.103) одинаковы ($\dot{x} = F_p$), то x -части решений (1.103) являются огибающими семейства x -компонент регулярных характеристик. Эти кривые заполняют одну из двух окрестностей Γ , рис. 1.5. Данное свойство уточняется ниже в теореме 1.6.

1.3.5. Классическая нерегулярная нехарактеристическая задача

Рассмотрим классическую задачу (1.1), (1.5):

$$\begin{aligned} F(x, u(x), p(x)) &= 0, \quad x \in D \\ u(x) &= v(x), \quad x \in M \quad (v(x) \in C^2(D)) \end{aligned} \tag{1.106}$$

Предположим, что на поверхности M задана вектор-функция $p = r(x)$, $x \in M$, которая удовлетворяет следующему условию интегральности (см. (1.13)):

$$\begin{aligned} F(x, v(x), r(x)) &= 0, \\ \langle r(x) - q(x), y^j(x) \rangle &= 0, \quad j = 1, \dots, n-1 \quad (q(x) = \partial v(x)/\partial x) \end{aligned} \tag{1.107}$$

Здесь $y^j(x)$, $j = 1, \dots, n-1$, — векторы, образующие базис пространства $T_x M$ в точке x . Другими словами, определена начальная интегральная поверхность

$$\Sigma = \{z = (x, u, p) \in \mathbb{R}^{2n+1} : u = v(x), p = r(x), x \in M\} \tag{1.108}$$

где $v(x)$ и $r(x)$ — заданные функции. Параметрическое описание этой поверхности имеет вид (1.28). Поверхность Σ_1 , построенная в предыдущем разделе на основе (1.103), параметризуется через переменные s, t , где s — $(n-2)$ -мерный параметр, заданный на Σ_2 , а t — “время” из системы (1.103).

Предположим, что для всех точек на Σ условие трансверсальности (1.15) не выполнено:

$$\langle F_p, p - q(x) \rangle = 0, \quad z \in \Sigma \quad (p = r(x)) \tag{1.109}$$

Данное равенство означает нарушение условия (1.15), если имеет место неравенство

$$r(x) - q(x) \neq 0, \quad x \in M \quad (1.110)$$

Будем полагать, что последнее выполняется. Это неравенство не накладывает каких-либо ограничений, так как вектор $r - q$ всегда можно сделать ненулевым путем изменения функции $v(x)$. Таким образом, неравенство (1.110) достигается с помощью соответствующего выбора функции $v(x)$.

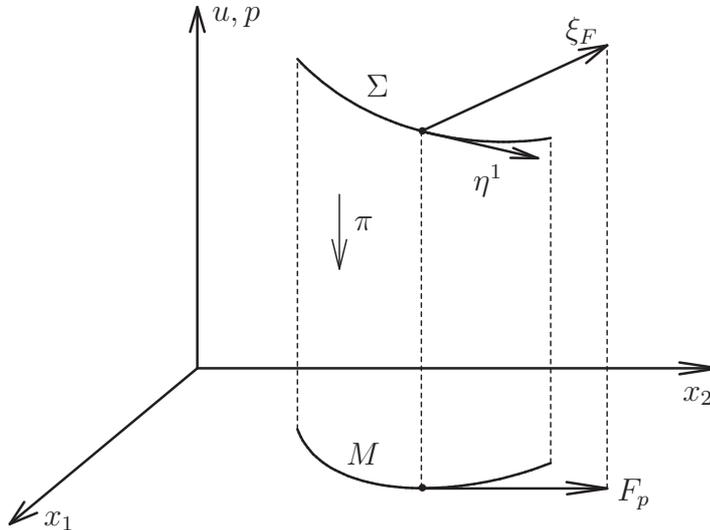


Рис. 1.6

Задача, для которой поверхность Σ представляет собой характеристическое многообразие, была рассмотрена ранее в теореме 1.2 из раздела 1.1. Для задачи (1.106) предполагается, что Σ не является характеристическим многообразием, то есть вектор ξ_F не касается Σ , несмотря на то что F_p касается M , как показано на рис. 1.6. Более точно, мы не говорим о нехарактеристичности задачи при формулировке нижеприведенной теоремы 1.6, но это свойство является следствием теоремы.

Теорема 1.6 дает достаточное условие существования решения задачи (1.106)–(1.109) в классе функций $K(M)$. Доказательство приведено для так называемой *простой задачи*. Затем показано, как свести к ней более общую задачу. Простая задача формулируется для $n = 2$, то есть $x = (x_1, x_2)$. Случай $n > 2$ рассматривается аналогичным образом. Поверхность M в простой задаче совпадает с координатной осью $x_1 = 0$, а функция $v(x)$ на ней тождественно равна нулю:

$$M = \{(x_1, x_2) : x_1 = 0, x_2 = s, s \in \mathbb{R}^1\}; \quad u(0, x_2) = 0, \quad x_2 = s \in \mathbb{R}^1 \quad (1.111)$$

В доказательстве рассматривается отрезок $|x_2| \leq \delta$ с точкой отсчета x^* , совпадающей с началом координат. Дифференцируя граничное условие (1.111) по переменной x_2 , получим $p_2 = \partial u / \partial x_2 = 0$ на M . Условия (1.107) при этом выполняются для

двумерных векторов $y^1 = (0, 1)$, $q = (0, 0)$, $r = (r_1, 0)$, а первое из них принимает вид

$$F(0, x_2, 0, p_1, 0) = 0, \quad x_2 \in \mathbb{R}^1 \quad (p_1 = r_1 = \text{const}) \quad (1.112)$$

В простой задаче считаем, что величина r_1 является ненулевой постоянной. Таким образом, поверхность Σ в (1.108) представляет собой прямую линию в 5-мерном пространстве:

$$\Sigma = \{(x_1, x_2, u, p_1, p_2) : x_1 = 0, x_2 = s, u = 0, p_1 = r_1, p_2 = 0, s \in \mathbb{R}^1\} \quad (1.113)$$

Пусть $F_1(x, u) = u - v(x)$, а функции F_1^i определяются соотношениями (1.101), где $F_0 = F$. Предполагается достаточная гладкость функций F , v и поверхности M .

Теорема 1.6. *Нерегулярная задача Коши (1.106) с заданной начальной поверхностью Σ вида (1.108) разрешима в классе функций $K(M)$, если для некоторого целого $k \geq 2$ выполнены следующие условия:*

$$\begin{aligned} F_0^i(z) &= 0, \quad z \in \Sigma, \quad i = 0, 1, \dots, k-1 \\ F_0^k(z^*) &\neq 0, \quad \{F_0^{k-1}F_0\} \neq 0 \quad \text{для } z^* \in \Sigma \end{aligned}$$

При этом для нечетного k решение единственно и определено на всем множестве D .

Для четного k скобки Якоби F_1^k и $\{F_0^{k-1}F_0\}$ имеют один и тот же знак и существуют два решения (или одно двузначное). В случае $F_1^k > 0$ они определены в той полукрестности поверхности M , куда направлен вектор $r - q$, и в другой полукрестности, если $F_1^k < 0$, рис. 1.5. Решения как для четных k , так и для нечетных k имеют неограниченную вторую производную на M .

Следствие 1. Все скобки Якоби уровней $0, 1, \dots, k-1$, порожденные функциями $F_0 = F$ и F_1 , обращаются тождественно в нуль на Σ . Все скобки уровня k отличны от нуля. Последние, включающие в себя скобки с нечетным количеством функций F_1 , имеют при четном k такой же знак, как и скобки $\{F_0^{k-1}F_0\}$. Этот знак сохраняется при подстановке $F \rightarrow -F$.

Следствие 2. Простая нерегулярная задача имеет решение в классе функций $K(M)$ тогда, когда при некотором $k \geq 2$ в точках $(0, x_2, 0, r_1, 0) \in \Sigma$ выполняются следующие условия:

$$\frac{\partial F}{\partial p_1} = 0, \dots, \frac{\partial^{k-1} F}{\partial p_1^{k-1}} = 0, \quad \frac{\partial^k F}{\partial p_1^k} \neq 0, \quad F_{x_1} + p_1 F_u \neq 0$$

Для четных k двузначное решение определено в полуплоскости $x_1 \geq 0$ в случае, если произведение $(-F_{x_1} - p_1 F_u) \partial^k F / \partial p_1^k$ положительно, и в полуплоскости $x_1 \leq 0$, если это произведение отрицательно.

Доказательство теоремы. Приведем доказательство для простой задачи (1.111)–(1.113). Способ сведения к ней общей задачи будет изложен в приложении.

Доказательство состоит из трех этапов.

Этап 1. Выражения для скобок Якоби. Предположения теоремы включают, в частности, выполнение условия касания (1.109), из которого для простой задачи,

вследствие выполнения для нее соотношений $p_1 \neq 0$ и равенств $p_2 = 0, q_1 = q_2 = 0$, следует

$$F^1 = \{F_1 F\} = p_1 F_{p_1} + p_2 F_{p_2} = p_1 F_{p_1} = 0, \quad F_{p_1} = 0$$

Здесь и ниже в обозначениях F_0^k, F_0 мы опускаем нижний нулевой индекс, так как роль F_0 выполняет гамильтониан F .

Дифференцируя тождество (1.112), получим на Σ равенство $F_{x_2} = 0$. Таким образом, для простой задачи на поверхности Σ выполняются равенства

$$u = 0, \quad p_1 = r_1 \neq 0, \quad F_{x_2} = 0, \quad F_{p_1} = 0 \quad (1.114)$$

Система характеристических уравнений на Σ имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 = F_{p_1} = 0, \quad \dot{x}_2 = F_{p_2}, \quad \dot{u} = p_1 F_{p_1} + p_2 F_{p_2} = p_1 F_{p_1} = 0 \\ \dot{p}_1 = -F_{x_1} - p_1 F_u, \quad \dot{p}_2 = -F_{x_2} - p_2 F_u = 0 \end{aligned} \quad (1.115)$$

Пусть некоторая функция $G(z)$ обращается в нуль на Σ . Дифференцируя несколько раз равенство $G = 0$ по переменной x_2 , получим

$$G(0, x_2, 0, r_1, 0) = 0, \quad \frac{\partial^m G}{\partial x_2^m} = 0, \quad m = 1, 2, \dots, \quad z \in \Sigma \quad (1.116)$$

Эти уравнения, совместно с (1.114), приводят к следующим выражениям для скобок $\{GF\}$ и $\{GF_1\}$ на Σ :

$$\begin{aligned} \{GF_1\} &= -p_1 G_{p_1} - p_2 G_{p_2} = -p_1 \frac{\partial G}{\partial p_1} \\ \{GF\} &= (G_{x_1} + p_1 G_u) F_{p_1} + (G_{x_2} + p_2 G_u) F_{p_2} - \\ &- (F_{x_1} + p_1 F_u) G_{p_1} - (F_{x_2} + p_2 F_u) G_{p_2} = -(F_{x_1} + p_1 F_u) \frac{\partial G}{\partial p_1} \end{aligned} \quad (1.117)$$

Используя (1.117) для $G = F^{k-1}$ и предположения теоремы, заключаем, что $p_1 = r_1 \neq 0$ и $F_{x_1} + p_1 F_u \neq 0$ на Σ . Сравнивая далее касательный к поверхности Σ вектор η^1 и вектор ξ_F (представляющий собой правую часть (1.115) на Σ), а именно,

$$\eta^1 = (0, 1, 0, 0, 0), \quad \xi_F = (0, F_{p_2}, 0, -F_{x_1} - p_1 F_u, 0) \quad (-F_{x_1} - p_1 F_u \neq 0)$$

получаем, что векторы η^1 и ξ_F не коллинеарны из-за четвертой компоненты, рис. 1.6. Таким образом, имеем нехарактеристическую задачу.

Просчитаем функции F^m на Σ . Из (1.102) следует, что

$$F^m = \left(p_1 \frac{\partial}{\partial p_1} \right)^m F + p_2 R_m, \quad m = 1, 2, \dots$$

Отсюда и из предположений теоремы имеем для $z \in \Sigma$ (где $p_2 = 0, p_1 \neq 0$)

$$\begin{aligned} F^m = p_1^m \frac{\partial^m}{\partial p_1^m} F = 0, \quad m = 1, \dots, k-1; \quad F^k = p_1^k \frac{\partial^k}{\partial p_1^k} F \neq 0, \quad z \in \Sigma \\ \frac{\partial F}{\partial p_1} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial p_1^2} = 0, \dots, \quad \frac{\partial^{k-1} F}{\partial p_1^{k-1}} = 0, \quad \frac{\partial^k F}{\partial p_1^k} \neq 0 \end{aligned} \quad (1.118)$$

Соотношения (1.114)–(1.118) приводят к следующей формуле для скобок Якоби уровня k на Σ , в то время как скобки меньших уровней обращаются в нуль:

$$G_m = 0, \quad m = 1, \dots, k-1; \quad G_k = (-p_1)^s (-F_{x_1} - p_1 F_u)^{k-s} \frac{\partial^k F}{\partial p_1^k} \quad (1.119)$$

$$G_m = \{ \dots \{ F_0 F_1 \} F_{j_3} \dots F_{j_{m+1}} \}, \quad m = 1, \dots, k$$

Здесь j_ν равняется либо нулю, либо единице, а s — число единиц в векторе $(j_1, j_2, \dots, j_{m+1})$ с $j_1 = 0$ и $j_2 = 1$. Напомним, что $F_0 = F$.

Действительно, используя метод математической индукции, можно доказать справедливость следующего выражения для скобки G_m в окрестности поверхности Σ :

$$\begin{aligned} G_m &= (-p_1)^s (-F_{x_1} - p_1 F_u)^{m-s} D_1^m F + R_m \\ R_m &= p_2 Q_m + \sum_{ij} P_{ij} D_1^i D_2^j F, \quad 1 \leq i+j \leq m, \quad 0 \leq i \leq m+1, \quad j \geq 0 \\ G_1 &= \{ F F_1 \} = -p_1 F_{p_1} - p_2 F_{p_2} = -p_1 D_1 F + p_2 Q_1 \\ &\quad (D_1 = \partial/\partial p_1, \quad D_2 = \partial/\partial x_2) \end{aligned} \quad (1.120)$$

Здесь Q_m, P_{ij} — некоторые функции от $z = (x, u, p)$. Используя соотношения (1.117) и (1.120) для вычисления скобок следующего уровня, $G_{m+1} = \{ G_m F \}$ или $G_{m+1} = \{ G_m F_1 \}$, можно проверить, что G_{m+1} имеет структуру, аналогичную (1.120). Метод индукции стартует с выражения для G_1 , которое в этом случае в точности имеет вид (1.120). Используя (1.114), (1.116), (1.118), можно также проверить, что R_k и G_m при $m < k$ равны нулю на Σ . Таким образом, соотношения (1.119) доказаны.

Чтобы получить выражения для скобок, стартующих с $\{ F_1 F_0 \} = -\{ F_0 F_1 \}$, следует изменить знак в правой части (1.119). Частным случаем (1.119) является (1.118), где вектор индексов имеет вид $(1, 0, 1, \dots, 1)$. Из (1.118) вытекает, что все скобки уровня k отличны от нуля.

При четных k все скобки с нечетным s имеют такой же знак, как и скобка $\{ F_0^{k-1} F_0 \}$, для которой вектор индексов равен $(1, 0, 1, \dots, 1, 0)$ и $s = k+1-2 = k-1$:

$$\{ F_0^{k-1} F_0 \} = \{ F^{k-1} F \} = (p_1)^{k-1} (-F_{x_1} - p_1 F_u) \frac{\partial^k F}{\partial p_1^k}$$

Этап 2. Ненулевая производная от x_1 . Вычислим производные по времени от функции $x_1(t)$, являющейся решением системы (1.115):

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= F_{p_1}, \quad \frac{d^2 x_1}{dt^2} = \{ F_{p_1} F \}, \quad \dots \\ \frac{d^k x_1}{dt^k} &= \{ \dots \{ F_{p_1} F \} \dots F \} \quad (k-1 \text{ скобок}) \end{aligned}$$

На основе соотношений (1.120), которые были использованы для доказательства (1.119), можно получить следующие выражения для этих производных на Σ :

$$\frac{d^i x_1}{dt^i} = 0, \quad i = 1, \dots, k-1; \quad \frac{d^k x_1}{dt^k} = (-F_{x_1} - p_1 F_u)^{k-1} \frac{\partial^k F}{\partial p_1^k}, \quad z \in \Sigma \quad (1.121)$$

Соотношения (1.119) дают также следующие два выражения для производных, выраженных через скобки Якоби:

$$\begin{aligned} \frac{d^k x_1}{dt^k} &= F_1^k / p_1 = \{ \dots \{ F_1 F \} \dots F \} / p_1 \quad (k \text{ скобок}) \\ \frac{d^k x_1}{dt^k} &= \{ F^{k-1} F \} (-F_{x_1} - p_1 F_u)^{k-2} / (p_1)^{k-1} \end{aligned} \quad (1.122)$$

Из (1.121) и (1.122) следует, что при четном k и положительном p_1 производная $d^k x_1 / dt^k$, а также скобки $\{ F^{k-1} F \}$ и F_1^k имеют одинаковый знак. Отсюда получаем равенство

$$\text{sign}(p_1) \text{sign}(d^k x_1 / dt^k) = \text{sign}\{ F^{k-1} F \} = \text{sign} F_1^k \quad (1.123)$$

Этап 3. Построение решения. Рассмотрим решение системы (1.115) в предположении, что начальная поверхность Σ имеет вид (1.113). Другими словами, рассмотрим соотношения (1.18) для простой задачи

$$\begin{aligned} x_1 &= X_1(s, t), \quad x_2 = X_2(s, t), \quad u = U(s, t) \\ p_1 &= P_1(s, t), \quad p_2 = P_2(s, t), \quad |s| \leq \delta, \quad |t| \leq \varepsilon \end{aligned} \quad (1.124)$$

Начальные условия (1.113) означают, что функции в (1.124) при $t = 0$ принимают значения

$$\begin{aligned} 0 &= X_1(s, 0), \quad s = X_2(s, 0), \quad 0 = U(s, 0) \\ r_1 &= P_1(s, 0), \quad 0 = P_2(s, 0), \quad s \in \mathbb{R}^1 \end{aligned} \quad (1.125)$$

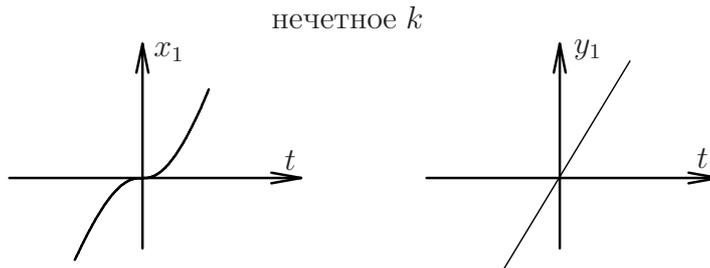


Рис. 1.7

Из формул (1.121) и (1.122) можно заключить следующее. При нечетном k функция $X_1(s, t)$ имеет точку перегиба и, в зависимости от знака $\{ F^{k-1} F \}$, является либо неубывающей, либо невозрастающей функцией, рис. 1.7.

При четном k и $\{ F^{k-1} F \} > 0$ функция $X_1(s, t)$, как функция от t , имеет в точке $t = 0$ локальный минимум и $X_1(s, t) \geq 0$ при всех $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$, рис. 1.8. Если же $\{ F^{k-1} F \} < 0$ при четном k , то $X_1(s, t)$ имеет в точке $t = 0$ локальный максимум и $X_1(s, t) \leq 0$, $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$.

Равенства (1.124) задают интегральную поверхность Σ_0 , проекция которой на (x, u) -пространство определяет решение $u(x)$. Из изложенного выше следует, что

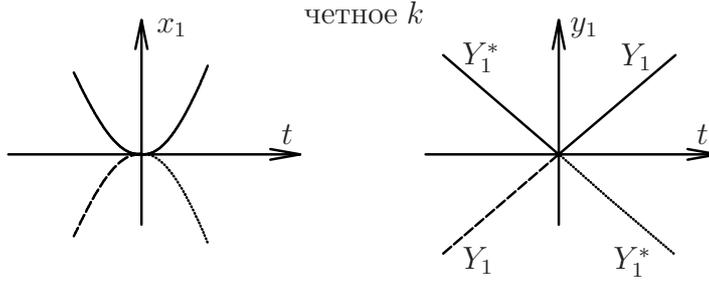


Рис. 1.8

при четном k функция $u(x)$ может быть определена только в одной из полуокрестностей $x_1 \geq 0$ или $x_1 \leq 0$.

Для вычисления решения $u(x)$ нужно обратить систему

$$x_1 = X_1(s, t), \quad x_2 = X_2(s, t) \quad (1.126)$$

и подставить функции $t = T(x_1, x_2)$, $s = S(x_1, x_2)$ в $U(s, t)$. Рассмотрим детерминанты $\Delta_m(s)$, $m = 1, \dots, k$:

$$\Delta_m(s) = \begin{vmatrix} a_m(s) & b(s) \\ c(s) & d(s) \end{vmatrix}, \quad a_m(s) = \frac{\partial^m X_1(s, 0)}{\partial t^m}$$

$$a_m = 0, \quad m = 1, \dots, k-1, \quad a_k \neq 0 \quad (1.127)$$

$$b(s) = \frac{\partial X_2(s, 0)}{\partial t} = F_{p_2}, \quad c(s) = \frac{\partial X_1(s, 0)}{\partial s} = 0, \quad d(s) = \frac{\partial X_2(s, 0)}{\partial s} = 1$$

Элементы матрицы здесь вычислены по формулам (1.121) и (1.125). Все детерминанты, кроме одного, обращаются в нуль:

$$\Delta_m(s) = a_m(s) = 0, \quad m = 1, \dots, k-1, \quad \Delta_k(s) \neq 0$$

Детерминант $\Delta_1(s)$ представляет собой якобиан системы (1.126) при $t = 0$. Таким образом, условия теоремы о неявной функции не выполнены. Но мы имеем $\Delta_k(s) \neq 0$. Это особый случай для теоремы о неявной функции. Подобная задача может быть сведена к условиям для классической теоремы о неявной функции путем следующей замены переменной x_1 , рис. 1.7, 1.8:

$$y_1 = x_1^{1/k} \quad \text{для } k \text{ нечетного или четного, но } X_1(s, t) \geq 0$$

$$y_1 = (-x_1)^{1/k} \quad \text{для } k \text{ четного, } X_1(s, t) \leq 0 \quad (1.128)$$

Случай нечетного k . Используя (1.126) и (1.128), новые переменные y_1, x_2 можно выразить через s, t следующим образом:

$$y_1 = Y_1(s, t) \equiv X_1^{1/k}(s, t), \quad x_2 = X_2(s, t) \quad (1.129)$$

Замена (1.129) отображает окрестность точки $s = 0, t = 0$ в окрестность точки $y_1 = 0, x_2 = 0$. Вычислив якобиан системы (1.129) при $t = 0$, можно показать, что он удовлетворяет условиям теоремы о неявной функции. Вначале заметим, что

$$\frac{\partial Y_1(s, 0)}{\partial t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{k} \frac{\dot{X}_1}{X_1^{(k-1)/k}} = \left(\frac{1}{k!} \frac{\partial^k X_1(s, 0)}{\partial t^k} \right)^{1/k} \neq 0 \quad (1.130)$$

Предел (1.130) может быть вычислен с помощью разложения в ряд Тейлора функций Y_1 и X_1 :

$$\begin{aligned} X_1(s, t) &= g(s)t^k + o(t^k), \quad \partial^k X_1(s, 0)/\partial t^k = k!g(s) \\ Y_1(s, t) &= (g(s)t^k + o(t^k))^{1/k} = (g(s))^{1/k}t + h(s, t), \quad h(s, t) = o(t) \end{aligned} \quad (1.131)$$

Для производной по s при $t = 0$ из (1.125) имеем

$$Y_1(s, 0) = 0, \quad \partial Y_1(s, 0)/\partial s = 0$$

Непрерывность производной $\partial Y_1(s, t)/\partial s$ при $t = 0$ можно доказать, используя (1.131):

$$\begin{aligned} h(s, t) &= h(0, t) + s\partial Y_1(0, t)/\partial s + o(s) \\ \frac{\partial Y_1(0, t)}{\partial s} &= \frac{1}{s}(h(s, t) - h(0, t)) + \frac{o(s)}{s} \rightarrow \frac{o(s)}{s}, \quad t \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Ввиду того что второе соотношение справедливо при любых достаточно малых s и $o(s)/s \rightarrow 0$, если $s \rightarrow 0$, то следовательно $\partial Y_1(0, t)/\partial s \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$. Аналогичные рассуждения справедливы также и для производной $\partial Y_1(s, 0)/\partial s$ при достаточно малых s .

Таким образом, функции $Y_1(s, t), X_2(s, t)$ в (1.129) имеют непрерывные первые производные при $t = 0$. В других точках (s, t) -плоскости данные функции такие же гладкие, как и правые части системы (1.115).

Используя (1.127) и (1.130), можно получить следующее выражение для якобиана системы (1.129) при $t = 0$:

$$\det \left(\frac{\partial(Y_1, X_2)}{\partial(s, t)} \right) = \frac{\partial Y_1(s, 0)}{\partial t} \neq 0 \quad (t = 0)$$

Отсюда следует существование в малом обратной функции

$$t = T(y_1, x_2), \quad s = S(y_1, x_2) \quad (1.132)$$

где функции T, S имеют первые производные в D и являются такими же гладкими, как функции Y_1, X_2 или X_1, X_2 при $y_1 \neq 0$.

Случай четного k . Рассмотрим случай $X_1(s, t) \geq 0$. Случай $X_1(s, t) \leq 0$ исследуется аналогично. Обратная функция $(x_1, x_2) \rightarrow (s, t)$ здесь двузначна и определена только в полуплоскости $x_1 \leq 0$. Начало координат $x_1 = 0, x_2 = 0$ лежит на границе рассматриваемой области. Для применения теоремы об обратной функции

следует проверить достаточное условие в некоторой внутренней точке. Рассмотрим отображение $(s, t) \rightarrow (y_1, x_2)$ вида (1.129) с модифицированной функцией Y_1 :

$$\begin{aligned} Y_1(s, t) &= X_1^{1/k}(s, t) && \text{при } t \geq 0 \\ Y_1(s, t) &= -X_1^{1/k}(s, t) && \text{при } t \leq 0 \end{aligned} \quad (1.133)$$

Второй возможный вариант функции Y_1 может быть таким:

$$\begin{aligned} Y_1^*(s, t) &= X_1^{1/k}(s, t) && \text{при } t \leq 0 \\ Y_1^*(s, t) &= -X_1^{1/k}(s, t) && \text{при } t \geq 0 \end{aligned} \quad (1.134)$$

Графики функций Y_1, Y_1^* проиллюстрированы на рис. 1.8.

Модифицированные функции Y_1, Y_1^* принимают как положительные, так и отрицательные значения. Вообще говоря, вторые соотношения в (1.133) и (1.134) вводятся искусственно и не являются единственно возможными. Основная цель такого представления заключается в получении гладкой функции $Y_1(s, t)$, определенной во всей области $|s| \leq \delta, |t| \leq \varepsilon$. Можно проверить, что функция $Y_1(s, t)$ в (1.133) является гладкой функцией. Для четного k выражение (1.131) принимает вид

$$Y_1(s, t) = X_1^{1/k} = (g(s)t^k + o(t^k))^{1/k} = (g(s))^{1/k}|t| + h(s, t)$$

Отсюда следует, что функции Y_1, Y_1^* в (1.133) и (1.134) имеют непрерывные частные производные по t при $t = 0$:

$$\frac{\partial Y_1(s, 0)}{\partial t} = -\frac{\partial Y_1^*(s, 0)}{\partial t} = (g(s))^{1/k} = \left(\frac{1}{k!} \frac{\partial^k X_1(s, 0)}{\partial t^k} \right)^{1/k} \neq 0$$

Непрерывность производной $\partial Y_1^*/\partial s$ проверяется так же, как и в случае нечетного k .

Таким образом, система (1.129) с функцией Y_1 вида (1.133) или (1.134) определяет две гладкие обратные функции:

$$\begin{aligned} t &= T(y_1, x_2), & s &= S(y_1, x_2) \\ t &= T^*(y_1, x_2), & s &= S^*(y_1, x_2) \end{aligned} \quad (1.135)$$

Здесь решение имеет вид

$$u(x_1, x_2) = U(S(y_1, x_2), T(y_1, x_2)), \quad y_1 = x_1^{1/k} \quad (1.136)$$

с первой производной

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \left(\frac{\partial U}{\partial s} \frac{\partial S}{\partial y_1} + \frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial T}{\partial y_1} \right) \frac{1}{k} x_1^{1/k-1} \quad (1.137)$$

Используя уравнения (1.115), можно доказать справедливость следующего разложения функции $U(s, t)$, похожего на (1.131):

$$U(s, t) = r_1 g(s) t^k + o(t^k)$$

Отсюда получаем, что первое слагаемое в (1.137) стремится к нулю, а второе к величине r_1 при $x_1 \rightarrow 0$ или, что эквивалентно, при $t \rightarrow 0$. Таким образом, $\partial u / \partial x_1 \rightarrow r_1$. Это также следует из основных свойств характеристической системы, рассмотренной в разделе 1.1. Аналогично можно показать, что вторая производная $\partial^2 u / \partial x_1^2$ не ограничена при $x_1 \rightarrow 0$. Другие производные функции (1.136) существуют при $x_1 \neq 0$ в зависимости от гладкости решения (1.124).

Для четного k , как следует из построений, функция (1.136) должна рассматриваться только в полукрестности $x_1 \geq 0$. Второе решение $u^*(x)$, также определенное в этом случае при $x_1 \geq 0$, может быть получено подстановкой функций T^*, S^* из (1.135) в (1.136). Две ветви $u(x)$ и $u^*(x)$ решения могут трактоваться как значения некоторой двузначной функции.

При нечетном k функция (1.136), определенная на всем множестве D , является единственным решением задачи.

В случае, когда вектор x имеет размерность большую двух, основные соотношения (1.121)–(1.122) остаются верными. Выражение для G_1 в (1.120) изменяется соответствующим образом.

Следствие 1 вытекает из (1.119), а следствие 2 из (1.118) и (1.119). Теорема доказана.

Теорема 1.6 позволяет определить тип решения задачи (1.106), (1.109) по вычислению определенных скобок Якоби в точках начальной поверхности Σ . Отметим, что скобка Якоби не меняется при преобразованиях в x -пространстве. Поскольку произвольная гладкая начальная поверхность M может быть отображена на плоскость $x_1 = 0$, то условия теоремы 1.6 инвариантны и не зависят от выбора системы координат. Заметим, что условия, приведенные в следствии 2, имеют место только в специальной координатной системе, где множеством M является плоскость $x_1 = 0$. По поводу алгоритма сведения исходной задачи к задаче с $v(x) \equiv 0$ см. упражнение 1.6.

Теорема 1.6 не является необходимо связанной с задачей Коши с подвижной границей. Тем не менее, она подсказывает полезность введения функции $F_1(x, u) = u - v(x)$ и указывает на использование двух скобок Якоби, представляющих собой в уравнении (1.103) числитель и знаменатель перед множителем $p - q$. Неравенство нулю данных скобок входит в достаточные условия теоремы, тем самым обеспечивая инвариантность ее формулировки.

Достаточные условия в простой задаче не подразумевают, что $r_1 \neq 0$, хотя в инвариантной формулировке такое условие требуется. Как было отмечено ранее, данное обстоятельство не является критичным и может быть преодолено с помощью соответствующего выбора функции $v(x)$.

1.3.6. Иллюстративный пример

Несмотря на то что доказательство теоремы 1.6 приведено для двумерного случая, результаты остаются верными и в скалярном случае.

Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\begin{aligned} F = F(x, p) = p^m - x = 0, \quad x \in \mathbb{R}^1 \quad (p = du/dx) \\ u(0) = 0 \quad (u(x) = v(x) \equiv x \text{ при } x = 0) \end{aligned} \quad (1.138)$$

Здесь x, u, p — скаляры, а начальная поверхность M представляет собой точку $x = 0$ (размерность M равна нулю). В (1.138) заданы оба типа начальных условий вида (1.4) и (1.5). Таким образом, функция w в (1.4) тождественно равна нулю, а $v(x) \equiv x$ в (1.5). Такие же граничные условия можно задать и с помощью функции $v(x) \equiv 0$, но в этом случае не будут выполнены достаточные условия теоремы 1.6, так как здесь $p - q = 0$, а в первом случае $p - q = -1 \neq 0$. Начальная поверхность Σ в рассматриваемом случае имеет нулевую размерность, а параметр p на ней удовлетворяет условию $F(0, p) = p^m = 0$. Следовательно, $\Sigma = \{(0, 0, 0)\}$.

Введем $F_1(u, x) = u - v(x) = u - x$. Нетрудно проверить выполнение условий нерегулярности (1.97), то есть $\{F_1 F\} = F_p(p - 1) = 0$ при $F_p = mp^{m-1}$ и $p = 0$ на Σ . Таким образом, задача является нерегулярной.

Запишем характеристическую систему с соответствующими начальными условиями на Σ :

$$\begin{aligned} \dot{x} = F_p = mp^{m-1}, \quad \dot{u} = pF_p = mp^m, \quad \dot{p} = -F_x = 1 \\ x(0) = 0, \quad u(0) = 0, \quad p(0) = 0 \end{aligned} \quad (1.139)$$

Единственный касательный вектор η к Σ и характеристический вектор ξ_F на Σ имеют вид

$$\eta = (0, 0, 0), \quad \xi_F = (0, 0, 1)$$

Это означает, что рассматриваемая задача является нехарактеристической. Таким образом, к ней можно применить теорему 1.6 (проверка достаточных условий теоремы дается как упражнение 1.7).

Решение задачи (1.139) представляется в виде

$$x(t) = t^m, \quad u(t) = \frac{m}{m+1}t^{m+1}, \quad p(t) = t \quad (1.140)$$

При нечетном m из первых двух уравнений в (1.140) следует

$$t = x^{1/m}, \quad u(x) = \frac{m}{m+1}x^{(m+1)/m} \quad (1.141)$$

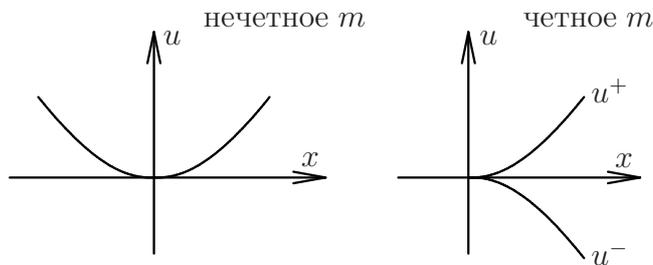


Рис. 1.9

В случае четного m функция $x(t)$ в (1.140) положительна и обратная к ней функция имеет две ветви:

$$t = x^{1/m}, \quad t = -x^{1/m} \quad (x \geq 0)$$

Подстановкой во второе равенство в (1.140) получаем два решения

$$u^+(x) = \frac{m}{m+1}x^{(m+1)/m}, \quad u^-(x) = -\frac{m}{m+1}x^{(m+1)/m}, \quad x \geq 0 \quad (1.142)$$

определенные при $x \geq 0$, рис. 1.9. Функции (1.141), (1.142) дифференцируемы в точке $x = 0$. Вторые производные не ограничены при $m > 1$ и ограничены при $m = 1$, что соответствует свойствам регулярной задачи.

Конечно, решения (1.141), (1.142) могут быть получены прямым интегрированием системы (1.138) без использования теоремы 1.6.

Упражнения

1.1. Пусть система (1.61) имеет одномерное множество решений, то есть размерность ядра матрицы C равна единице. Показать, что из линейной зависимости форм dF_i и α следует справедливость равенства $\xi_H(z) = 0$, $z \in W_{2m+1}$, для характеристического вектора (1.59).

1.2. Найти многообразие $\Sigma \subset W_1$, состоящее из характеристических точек многообразия $W_1 = \{z : F(x, u) \equiv u - f(x) = 0\}$, где $f(x)$ — заданная гладкая функция.

1.3. Для $F(x, u, p) = \sqrt{\langle A(x, u)p, p \rangle} + f(x, u)$ показать, что

$$\{F_1 F\} = F - f - \langle q, F_p \rangle, \quad \{\{F_1 F\} F_1\} = -\{F_1 F\} - \langle F_{pp} q, q \rangle$$

где A — заданная симметрическая матрица, $A = A^T$, и $F_1(x, u) = u - v(x)$, $q = \partial v / \partial x$ при некоторой заданной функции $v(x)$.

1.4. Вычислить $\{F_1 F\}$, $\{\{F_1 F\} F_1\}$ для $F(x, u, p) = \frac{1}{2} \langle A(x, u)p, p \rangle$, где $F_1(x, u) = u - v(x)$ с некоторыми заданными $v(x)$ и $A = A^T$.

1.5. Показать, что $\{F_1 F\} = 2F$ и $\{\{F_1 F\} F_1\} = -4F$ для

$$F(x, u, p) = \frac{1}{2} \langle A(x, u)(p - q(x)), p - q(x) \rangle, \quad F_1(x, u) = u - v(x)$$

с заданными $v(x)$, $q = \partial v / \partial x$ и $A = A^T$.

1.6. Пусть $u' = u - v(x)$, $p' = p - q(x)$, где $q = \partial v / \partial x$. Показать, что при заданных функциях $F(x, u, p)$, $G(x, u, p)$ и отображениях

$$F'(x, u', p') = F(x, u' + v, p' + q), \quad G'(x, u', p') = G(x, u' + v, p' + q)$$

имеет место равенство

$$\{F' G'\} - \{F G\} = \langle V G_p, F_p \rangle - \langle V F_p, G_p \rangle = 0$$

Здесь V — симметрическая матрица $\|\partial^2 v / \partial x_i \partial x_j\|$ (гессиан функции $v(x)$) и скобка Якоби $\{F' G'\}$ вычисляется в переменных x, u', p' .

1.7. Показать, что достаточные условия теоремы 1.6 выполняются для задачи (1.138) при $k = m$. При доказательстве использовать функции $F_0 = p^m - x$, $F_1 = u - x$. Что изменится, если взять $v(x) \equiv -x$ и, соответственно, $F_1 = u + x$?

ГЛАВА 2

Обобщенные решения и сингулярные характеристики УЧП первого порядка

2.1. Вязкостные решения и их сингулярные многообразия

2.1.1. Определение вязкостного решения

Классическое решение нелинейного УЧП первого порядка

$$\begin{aligned} F(x, u, \partial u / \partial x) &= 0, & x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ u(x) &= v(x), & x \in M \subset \partial \Omega \end{aligned} \quad (2.1)$$

обычно определяется как функция, принадлежащая классу $C^1(\Omega)$, то есть решение $u(x)$ должно иметь частные производные $\partial u(x) / \partial x_i, i = 1, \dots, n$, непрерывные по x в области Ω . Для того, чтобы формально проверить, является ли данная непрерывная функция решением или нет, следует прежде всего убедиться в существовании ее частных производных. Могут быть функции, для которых эти частные производные, будучи разрывными, существуют в одной системе координат и не существуют в другой. Требование на непрерывность позволяет определить решение, инвариантное по отношению к выбору системы координат.

Во многих задачах теории управления и математической физики требуется найти решение уравнения (2.1) в классе функций $u(x) \in C(\Omega)$, то есть непрерывных, но не гладких по x . Эти функции, называемые обобщенными решениями, не удовлетворяют уравнению (2.1) во всех точках Ω в классическом смысле. В точках негладкости они вместо равенства (2.1) (которое в данных точках не может быть проверено) должны удовлетворять некоторым дополнительным условиям. В задачах теории управления эти условия вытекают из принципа оптимальности, а в задачах математической физики они следуют, в основном, из некоторых физических законов.

Существует несколько способов математического введения обобщенного решения. Некоторые из них могут порождать решение, которое дает адекватное описание рассматриваемого физического явления, другие, возможно, нет. Таким образом, выбор того или иного понятия обобщенного решения должен удовлетворять определенным требованиям, предъявляемым к классу рассматриваемых задач.

В связи с этим во многих приложениях, включая оптимальное управление и дифференциальные игры, введено понятие так называемого вязкостного решения. С заданным УЧП связывают два вида обобщенных вязкостных решений: решение задачи с заданными начальными значениями (ЗНЗ) и решение задачи с заданными терминальными значениями (ЗТЗ). Поясним это для задачи (2.1) специально-

го вида, имеющего большое значение в разделах математической физики, механики, теории управления, для которого различие между ЗНЗ и ЗТЗ достаточно прозрачно.

В некоторых приложениях задачи (2.1) характерно наличие определенной компоненты вектора x (обычно это время, которое будем полагать последней компонентой x_n вектора x), при помощи которой область Ω может быть задана неравенствами $a < x_n < b$. В этом случае (2.1) принимает форму уравнения Гамильтона – Якоби:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_n} + H(x, u(x), \bar{p}(x)) &= 0, \quad x \in \Omega, \quad \bar{p} = (p_1, \dots, p_{n-1}) \\ u(x) &= v(x), \quad x \in M = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = a\} \quad (F = p_n + H) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь краевое условие записано для ЗНЗ. В случае ЗТЗ полагаем $M = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = b\}$.

Определение вязкостного решения для ЗНЗ и ЗТЗ использует понятие гладкой тест-функции $\varphi(x) \in C^1(\Omega)$.

Непрерывная функция $u : \Omega + M \rightarrow \mathbb{R}^1$ называется вязкостным решением ЗНЗ для (2.1) или (2.2), если

- 1) $u(x) = v(x)$, $x \in M$;
- 2) для любой тест-функции $\varphi(x) \in C^1(\Omega)$, такой что локальный минимум (максимум) разности $u(x) - \varphi(x)$ достигается в некоторой точке $x^0 \in \Omega$, справедливо неравенство

$$F(x^0, u(x^0), \varphi_x(x^0)) \geq 0 \quad (F(x^0, u(x^0), \varphi_x(x^0)) \leq 0) \quad (2.3)$$

Для определения вязкостного решения ЗТЗ в неравенствах (2.3) следует изменить знак на противоположный, а в качестве поверхности M в задаче (2.2) нужно взять плоскость $x_n = b$.

Будем говорить, что непрерывная функция $u(x) \in C(D)$, заданная на открытом множестве $D \subset \Omega$, является вязкостным решением ЗНЗ или ЗТЗ для (2.1) на D (локальным вязкостным решением), если во всех точках $x^0 \in D$ выполняется лишь одно условие 2).

Отметим, что тест-функция $\varphi(x)$, обеспечивающая минимум (максимум), не обязательно существует. Определение вязкостного решения предполагает выполнение соответствующего условия только в случае существования данной тест-функции.

Вообще говоря, при формулировке ЗНЗ или ЗТЗ в качестве поверхности M следует брать различные части M_1 и M_2 границы $\partial\Omega$. Для некоторых задач, как в случае задачи (2.2), справедливо равенство $M_1 + M_2 = \partial\Omega$. Способ определения соответствующей части $\partial\Omega$, которую можно взять в качестве M , приведен в [33]. Более общий подход к формулировке граничных условий рассмотрен в [21].

Понятие вязкостного решения первоначально было введено [45, 19] как предел по параметру решения сингулярно возмущенной задачи, полученной добавлением в (2.1) производных второго порядка (лапласиана), умноженных на малый параметр (малая вязкость). Этот прием систематически использовался С.Н. Кружковым при исследовании нелинейных уравнений первого порядка [40, 41]. Некоторые

другие модификации понятия вязкостного решения предложены в работах [45, 19]. В статье [20] введено определение, основанное на гладких тест-функциях, используемых в данной главе. Другое понятие обобщенного (минимаксного) решения, было предложено в работе [77], которое, как показано, эквивалентно вязкостному решению.

2.1.2. Регулярные и сингулярные точки решения. Простейшая сингулярность

Для описания точек, в окрестности которых классический метод характеристик не применим, введем понятия регулярных и сингулярных точек данного вязкостного решения.

Точка $x^ \in \Omega$ называется регулярной точкой рассматриваемого вязкостного решения $u(x)$ уравнения (2.1), если существует такая окрестность $D \subset \Omega$ точки x^* , что функция $u(x)$ дважды непрерывно дифференцируема в D , $u(x) \in C^2(D)$, и гамильтониан $F(x, u, p)$ дважды непрерывно дифференцируем при $(x, u, p) \in N$, $F \in C^2(N)$, где $N \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ — некоторая окрестность точки (x^*, u^*, p^*) в пространстве \mathbb{R}^{2n+1} векторов (x, u, p) , $u^* = u(x^*)$, $p = \partial u(x^*)/\partial x$.*

Все точки множества Ω , которые не являются регулярными, называются сингулярными точками решения $u(x)$. Сингулярная кривая, поверхность или многообразие состоят из сингулярных точек.

Поскольку Ω — открытое множество в \mathbb{R}^n , то регулярная точка является внутренней точкой Ω .

Отметим, что в регулярных точках решение удовлетворяет уравнению в классическом смысле. Действительно, тест-функции, обеспечивающие максимум и минимум в (2.3), в этом случае существуют, так как само решение может играть роль тест-функции, $\varphi(x) = u(x)$. Для такой тест-функции имеем $u(x) - \varphi(x) \equiv 0$, $\partial\varphi/\partial x \equiv \partial u/\partial x$, и оба экстремума достигаются в каждой точке $x^0 \in D$. Таким образом, в (2.3) должны выполняться два неравенства, $F \leq 0$ и $F \geq 0$, которые при $\partial\varphi/\partial x = \partial u/\partial x$ приводят к равенству $F(x, u, \partial u/\partial x) = 0$. Это верно и для точек, в окрестности которых решение принадлежит классу C^1 . Тем не менее, в приведенном выше определении предполагается непрерывность второй производной (а не первой), как того требует классический метод характеристик. Показано, что в ряде задач поверхность, на которой $u(x)$ и/или F принадлежат классу C^1 , может обладать некоторыми свойствами нерегулярности.

Сингулярные поверхности (многообразия) будем обозначать буквой Γ , используя при этом в некоторых случаях нижний индекс: Γ_m . Этот индекс показывает коразмерность данной поверхности в \mathbb{R}^n , $\dim \Gamma_m = n - m$. В рамках локальных рассуждений условимся считать, что поверхность Γ_m является гладкой. Предполагаем также существование продолжения градиента $p = \partial u/\partial x$ на многообразии Γ . Таким образом, мы ограничим наше рассмотрение поверхностями Γ , являющимися частью границы некоторого открытого множества $D \subset \Omega$ такого, что $u(x) \in C^2(D)$, $\Gamma \subset \partial D$, а градиент $\partial u/\partial x$ имеет непрерывное продолжение на замыкание \bar{D} . Данное обстоятельство будем обозначать включением $u(x) \in C^1(\bar{D})$.

Во многих случаях множество Ω удастся разбить на несколько подмножеств Ω_i , состоящих только из регулярных точек, в то время как сингулярные точки решения

принадлежат границам $\partial\Omega_i$. Построение решения на каждом открытом подмножестве Ω_i может быть осуществлено с помощью классического метода характеристик и соответствующих граничных условий, заданных на некоторой части границы $\partial\Omega_i$. Такой подход может потребовать построения сингулярных поверхностей, состоящих из определенных частей $\partial\Omega_i$.

Наши исследования в основном ограничиваются рассмотрением гиперповерхностей, другими словами поверхностей размерности $n - 1$ и, соответственно, коразмерности 1. Поверхность коразмерности 2 будет обсуждаться только в главе 6.

Пусть $u(x)$ — непрерывное локальное вязкостное решение ЗНЗ для (2.1), а его сингулярные точки образуют гладкую гиперповерхность Γ в открытой окрестности D некоторой фиксированной точки $x^* \in \Gamma \subset D \subset \mathbb{R}^n$. Таким образом, $u(x) \in C(D)$, и, по определению, $u_i(x) \in C^2(D_i)$, $i = 0, 1$, где D_0, D_1 — некоторые открытые полукрестности Γ , $D = D_0 + \Gamma + D_1$, а $u_i(x)$ — сужение $u(x)$ на D_i , $i = 0, 1$, см. рис. 2.1. Предположим, что имеет место скачок градиента функции $u(x)$ на Γ , в то время как производная $\partial u / \partial x$ может быть непрерывно продолжена с D_0 и D_1 на Γ . В этом случае, как следует из леммы подраздела 2.1.3, каждая функция $u_i(x)$, $x \in D_i$, $i = 0, 1$, имеет непрерывное продолжение на D . Таким образом, негладкое решение $u(x)$ порождает две гладкие функции $u_0(x), u_1(x) \in C^1(D)$. При этом все три функции определены на всем D , см. рис. 2.2. Функции $u_i(x)$ будем далее называть двумя гладкими ветвями решения $u(x)$.

Как предполагалось выше, $p_1(x) - p_0(x) \neq 0$ при $x \in \Gamma$, где $p_i(x) = \partial u_i / \partial x$, $i = 0, 1$. Заметим, что вектор $p_1 - p_0$ является нормалью к Γ в каждой точке $x \in \Gamma$. Действительно, так как поверхность Γ может быть задана равенством $g(x) = 0$, где $g(x) = u_1(x) - u_0(x)$, то градиент $\partial g(x) / \partial x = p_1 - p_0$ является нормалью к Γ . Далее будем рассматривать два типа негладкости. Для первого типа ненулевой вектор нормали $p_1 - p_0$ направлен из D_1 к D_0 , а решение может быть выражено через

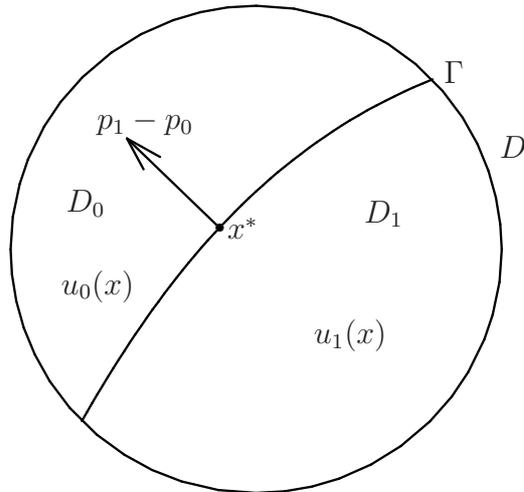


Рис. 2.1

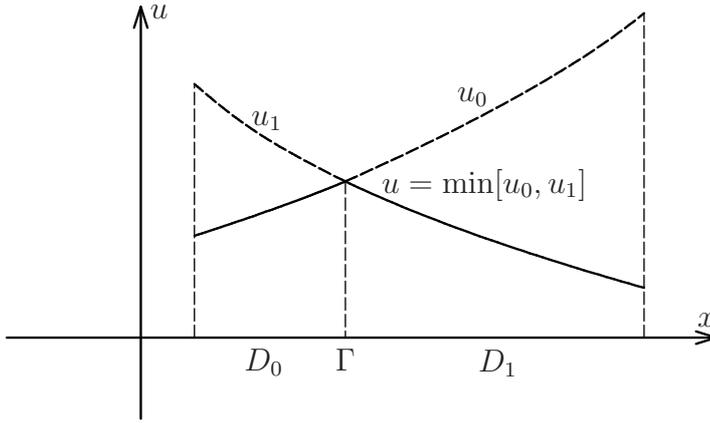


Рис. 2.2

его гладкие ветви в виде $u(x) = \min[u_0(x), u_1(x)]$, $x \in D$. В самом деле, функция $g(x)$ возрастает в направлении ее градиента $p_1 - p_0$, поэтому имеем $u_1 < u_0$ в D_1 и $u_1 > u_0$ в D_0 . Для второго типа вектор нормали $p_1 - p_0$ направлен от D_0 к D_1 . В этом случае $u(x) = \max[u_0(x), u_1(x)]$, $x \in D$.

Рассмотрим два открытых множества $N_i \subset \mathbb{R}^{2n+1}$, представляющих собой окрестности точек $(x^*, u(x^*), p_i(x^*))$, $i = 0, 1$, в пространстве векторов $(x, u, p) \in \mathbb{R}^{2n+1}$. Предполагается, что на каждом таком множестве гамильтониан $F(x, u, p)$ в (2.1) либо дважды непрерывно дифференцируем, $F \in C^2(N_i)$, либо имеет одну из форм $F = \max[F^+, F^-]$ или $F = \min[F^+, F^-]$, где $F^\pm(x, u, p) \in C^2(N_i)$.

В некоторых случаях будем использовать более простую запись, опускающая нижний индекс 1 при обозначении ветви решения $u_1(x)$ и ее градиента p_1 . Ветвь $u_0(x)$, а также ее градиент p_0 , в свою очередь, будут обозначаться через $v(x)$ и q ($q = \partial v / \partial x = p_0$). Гамильтониан F с аргументами x, v, q или, что эквивалентно, x, u, p_0 обозначим через G , $G = G(x, v, q) = F(x, v, q)$. Такой вид записи назовем u, v - или F, G - или p, q -обозначением.

Сингулярная гиперповерхность, описанная выше, является сингулярным многообразием негладкого решения. При этом гамильтониан может быть как гладкой, так и негладкой функцией. Заметим, что сингулярную поверхность может также иметь и классическое гладкое решение. В этом случае гамильтониан обязательно будет негладкой функцией, например, $F = \min[F^+, F^-]$. Такого типа сингулярная поверхность будет рассмотрена в главе 6.

Сингулярную гиперповерхность Γ , соответствующую либо негладкому решению (с гладким или негладким гамильтонианом), либо классическому решению с негладким гамильтонианом, будем называть *простейшей сингулярностью*.

Сначала исследуем решение ЗНЗ, а затем сделаем нужные замечания для ЗТЗ.

2.1.3. Необходимые условия простейшей сингулярности

В этой главе будем использовать понятие простейшей сингулярности, сформулированное в предыдущем разделе. Рассмотрим случай $u = \min[u_0, u_1]$. Случай $u = \max[u_0, u_1]$ может быть изучен аналогичным образом.

Лемма 2.1. Пусть на простейшей сингулярной поверхности Γ ненулевой вектор $p_1 - p_0$ направлен от D_1 к D_0 . Тогда справедливы следующие утверждения.

- 1) Функции $u_i(x) \in C^2(D_i)$, которые являются сужением вязкостного решения $u(x) \in C(D)$ на множества D_i , имеют C^1 -продолжения на все множество D с представлением $u(x) = \min[u_0(x), u_1(x)]$, $x \in D$.
- 2) Не существует такой тест-функции $\varphi(x)$, что локальный минимум разности $u - \varphi$ достигается при $x \in \Gamma$.
- 3) Для однопараметрического семейства тест-функций вида

$$\varphi(x) = \lambda u_1(x) + (1 - \lambda)u_0(x), \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

максимум

$$\max_{x \in D} (u(x) - \varphi(x)) = 0$$

реализуется при $x \in \Gamma$. Для любой тест-функции $\varphi(x) \in C^1(D)$, такой что максимум разности $u - \varphi$ достигается при $x \in \Gamma$, градиент имеет вид $\partial\varphi/\partial x = \lambda p_1 + (1 - \lambda)p_0$ для некоторого $\lambda \in [0, 1]$.

Следствие. Для сингулярности вида $u = \min[u_0, u_1]$ не нужно проверять первое равенство в (2.3). Достаточно проверить выполнение второго неравенства для однопараметрического семейства функций $\varphi = \lambda u_1 + (1 - \lambda)u_0$.

Доказательство. Рассмотрим вначале случай, когда Γ является гиперплоскостью $x_n = 0$, D_1 задается неравенством $x_n > 0$, а D_0 неравенством $x_n < 0$. Продолжение $u_0(x)$ из D_0 на все множество D в классе C^1 -функций может быть представлено, например, в виде

$$u_0(\bar{x}, x_n) = u_0(\bar{x}, 0) + x_n \frac{\partial u_0(\bar{x}, -0)}{\partial x_n}, \quad x_n \geq 0 \quad (\bar{x} = (x_1, \dots, x_{n-1}))$$

Аналогичным образом можно продолжить и функцию u_1 из D_1 на D для $x_n \leq 0$.

Из предположения о направлении вектора $p_1 - p_0$ следует, что его последняя компонента отрицательна, то есть

$$\partial u_0/\partial x_n > \partial u_1/\partial x_n, \quad x \in \Gamma \quad (2.4)$$

Остальные компоненты векторов p_0 и p_1 равны на Γ . Это позволяет записать решение в виде $u = \min[u_0, u_1]$.

Если, в нарушение второго утверждения леммы, предположить, что существует функция φ , доставляющая минимум разности $u - \varphi$ при $x_n = 0$, то в этом случае должны выполняться неравенства

$$\partial u_0/\partial x_n \leq \partial\varphi/\partial x_n \leq \partial u_1/\partial x_n \quad \text{при } x_n = 0$$

Последнее противоречит (2.4). Следовательно, такой функции φ не существует.

Для функции φ , доставляющей максимум разности $u - \varphi$, имеем

$$\partial u_0 / \partial x_n \geq \partial \varphi / \partial x_n \geq \partial u_1 / \partial x_n, \quad x_n = 0$$

что приводит при определенном λ , $0 \leq \lambda \leq 1$, к равенству

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_n} = \lambda \frac{\partial u_1}{\partial x_n} + (1 - \lambda) \frac{\partial u_0}{\partial x_n}, \quad \lambda = (u_{0x_n} - \varphi_{x_n}) / (u_{0x_n} - u_{1x_n}) \quad (2.5)$$

Необходимые условия максимума гладких функций $u_i(\bar{x}, 0) - \varphi(\bar{x}, 0)$, $i = 0, 1$, от $\bar{x} = (x_1, \dots, x_{n-1})$ имеют вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = \frac{\partial u_1}{\partial x_k} = \frac{\partial u_0}{\partial x_k}, \quad k = 1, \dots, n-1$$

Таким образом, соотношение (2.5) выполняется для всех остальных компонент вектора $\partial \varphi / \partial x$ при любых $\lambda \in [0, 1]$, что позволяет записать равенство (2.5) в векторной форме

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \lambda \frac{\partial u_1}{\partial x} + (1 - \lambda) \frac{\partial u_0}{\partial x} \quad (2.6)$$

Произвольная гладкая поверхность Γ в x -пространстве может быть преобразована в плоскость $y_n = 0$ из y -пространства, $x, y \in \mathbb{R}^n$, с помощью гладкой взаимно-однозначной замены переменных $y = g(x)$. Для любой функции $u(x)$ справедливо $\partial u / \partial x = A \partial u / \partial y$, где $A(x) = \partial g / \partial x$ — невырожденная квадратичная матрица. Умножая (2.6) на матрицу A , можно получить аналогичное представление в исходной системе координат. Указанная замена переменных позволяет получить продолжения решений $u_0(x)$, $u_1(x)$ подобно продолжениям, полученным выше для случая гиперплоскости $x_n = 0$. Это завершает доказательство.

Отметим один простой случай, когда ветви решения $u_i(x)$ могут иметь C^2 -продолжение на D . Пусть, например, характеристики из подобласти D_1 пересекают Γ . Тогда продолжение $u_1(x) \in C^2(D_1)$ может быть задано как дважды дифференцируемое решение задачи

$$F(x, u, p) = 0, \quad x \in D; \quad u(x) = u_1(x), \quad x \in \Gamma$$

Данное решение, в соответствии с теоремой 1.1, существует и определено на всем множестве D , так как вектор $p^* = p_1(x^*)$ удовлетворяет условиям этой теоремы и выполняются условия трансверсальности.

Дальнейшее развитие следствия леммы 2.1 приводит к следующему утверждению, обеспечивающему, в частности, необходимое и достаточное условие того, что рассматриваемая выше функция $u(x) \in C(D)$ является локальным вязкостным решением уравнения (2.1).

Лемма 2.2. Для $x \in \Gamma$ и любого $\lambda \in [0, 1]$ имеет место неравенство

$$f(\lambda) \equiv F(x, u(x), p_\lambda(x)) \leq 0, \quad p_\lambda(x) = \lambda p_1(x) + (1 - \lambda) p_0(x) \quad (2.7)$$

При этом функция $f(\lambda)$ непрерывна на отрезке $[0, 1]$ и обладает следующими свойствами, обусловленными гладкостью гамильтониана в соответствующих точках:

$$f'(\lambda) = \langle F_p(x, u, p_\lambda), p_1 - p_0 \rangle \quad (2.8)$$

$$f(0) = 0, \quad f'(0) \leq 0; \quad f(1) = 0, \quad f'(1) \geq 0$$

Значения производных $f'(0)$ и $f'(1)$ представляют собой скалярные произведения вектора F_p характеристического поля и вектора $p_1 - p_0$ нормали к поверхности Γ . Это означает, что выполнение условий (2.7), (2.8) существенно зависит от поведения классических характеристик в окрестности Γ . На основании этого поведения будет предложена классификация простейших сингулярностей. Кроме того, из (2.7), (2.8) будут получены условия для различных типов соответствующих сингулярностей.

Заметим, что в случае, когда вектор $p_1 - p_0$ направлен от D_0 к D_1 , в вышеприведенных утверждениях должны быть сделаны следующие изменения. Решение можно представить в виде $u = \max[u_0, u_1]$. В (2.3) необходимо проверить только первое неравенство для однопараметрического семейства тест-функций $\varphi = \lambda u_1 + (1 - \lambda)u_0$. В неравенствах (2.7), (2.8) следует изменить знак на противоположный.

2.1.4. Сингулярные характеристики: определение и классификация

Произвольной простейшей сингулярности Γ негладкого вязкостного решения $u(x)$ соответствуют следующие две $(n - 1)$ -мерные поверхности в расширенном пространстве \mathbb{R}^{2n+1} :

$$\begin{aligned}\Sigma^{(0)} &= \{(x, u, p) \in \mathbb{R}^{2n+1} : u = u_0(x), p = \partial u_0(x)/\partial x, x \in \Gamma\} \\ \Sigma^{(1)} &= \{(x, u, p) \in \mathbb{R}^{2n+1} : u = u_1(x), p = \partial u_1(x)/\partial x, x \in \Gamma\}\end{aligned}\quad (2.9)$$

При этом каждая из поверхностей относится к одной из двух сторон Γ . Если же вязкостное решение гладкое, а гамильтониан негладкий, то только одна интегральная поверхность Σ соответствует Γ .

В более общем случае, сингулярной поверхности Γ_m , рассматриваемой в подразделе 2.1.2, соответствует одна или несколько поверхностей Σ_m размерности $n - m$. Можно проверить, что данные поверхности являются интегральными поверхностями 1-формы $\alpha = du - p dx$, введенной в разделе 1.2, $\Sigma^{(0)}, \Sigma^{(1)}, \Sigma_m \in I^0$. Такие поверхности могут быть решениями обобщенных задач Коши 1.3, 1.4. Для формулировки подобной задачи требуется построить многообразие W_{2m+1} из раздела 1.2, положив для простейшей сингулярности $m = 1$. Многообразие W_{2m+1} задается $2m + 1$ уравнением вида $F_i(x, u, p) = 0$.

На данном этапе наша цель заключается в том, чтобы попытаться использовать такие равенства в качестве необходимых условий для вязкостного решения. Среди этих условий присутствует и уравнение (2.1), так как оно выполняется на Γ вследствие непрерывного продолжения градиента на эту поверхность. В дополнение к равенствам, необходимые условия будут также включать и некоторые неравенства, отражающие свойства самого вязкостного решения.

Многообразие W_{2m+1} , соответствующее сингулярной поверхности Γ_m , назовем сингулярным многообразием в \mathbb{R}^{2n+1} .

Систему обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующую характеристическому полю многообразия W_{2m+1} , назовем системой сингулярных характеристик для нелинейного УЧП первого порядка вида (2.1).

Сингулярные и регулярные (классические) характеристики вместе образуют обобщенные характеристики для УЧП первого порядка вида (2.1).

Отметим, что поскольку сингулярная поверхность Γ_m соответствует некоторому определенному вязкостному решению, то правая часть системы сингулярных характеристик в общем случае зависит от этого решения, в то время как система регулярных (классических) характеристик записывается только с использованием одного гамильтониана.

Для сингулярной гиперповерхности (имеется ввиду простейшая сингулярность) полезно ввести понятия сингулярной и несингулярной сторон поверхности. Для этого будем использовать обозначения D_0 - и D_1 -сторон.

Будем называть D_1 -сторону гиперповерхности Γ сингулярной, если необходимые условия вида $F_i = 0$ выполнены в переменных (x, u, p_1) , $F_i(x, u, p_1) = 0$. Аналогично, D_0 -сторону назовем сингулярной, если необходимые условия имеют вид $F_i(x, u, p_0) = 0$.

Одно из самых важных свойств классических характеристик заключается в том, что для гладкого случая решение УЧП можно свести к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом классические характеристики должны быть выпущены из всех точек границы поверхности M . Сингулярные характеристики сохраняют эту идею и в негладком случае. Однако здесь классические характеристики должны быть выпущены не только из точек границы M , а также из некоторых внутренних точек области Ω . Эти точки являются сингулярными точками решения и определяются интегрированием соответствующей системы сингулярных характеристик.

Обобщенные (сингулярные) характеристики вводятся в виде определенной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Для того чтобы записать данную систему, следует предварительно исследовать поведение регулярных характеристик в малой окрестности точек сингулярности. Данный подход применим только к локальным построениям и не позволяет определить свойства всего решения в целом. Более общее определение характеристик, как решений некоторых дифференциальных включений, предложено А.И. Субботиным [77].

2.1.5. Некоторые свойства задач с начальными и терминальными значениями

Задачу (2.1) в общепринятой терминологии называют граничной задачей, задачу (2.2) — задачей с заданными начальными условиями, а задачу (2.2) вместе с заданным на множестве M ($x_n = b$) условием $u(x) = v(x)$ — терминальной задачей. Для последних двух случаев терминология, которая используется в книге, полностью совпадает с общепринятой. При этом термины “начальный” и “терминальный” будем относить к переменной x_n , которая в большинстве случаев обозначает время.

В зависимости от знака неравенства в (2.3), задача (2.1) порождает два вязкостных решения, каждое из которых имеет одну из двух граничных поверхностей: $M_1, M_2 \subset \partial\Omega$. Таким образом, парам (F, M_1) и (F, M_2) , состоящим из гамильтониана и граничной поверхности, соответствуют два, в общем случае, различных вязкостных решения. Одно из этих решений относится к тому же неравенству (2.3), что и задача (2.2). Второе — к неравенству, соответствующему терминальной задаче. Это обстоятельство позволяет называть одну из функций решением ЗНЗ (2.1), а другую — решением ЗТЗ (2.1). Данная терминология связана с возможностью выбора

направления вспомогательной переменной “время”, которая входит непосредственно в уравнения регулярных характеристик (1.6): $\dot{x} = dx/dt = F_p$.

В некоторых случаях граничные поверхности для ЗНЗ и ЗТЗ могут совпадать, то есть $M_1 = M_2 = M$; например, $M = \partial\Omega$. Но это не относится к задаче (2.2). Вязкостное решение $u(x)$, соответствующее задаче ЗНЗ (ЗТЗ), порожденное парой (F, M) , будем обозначать $I(F, M)$ ($T(F, M)$). Можно проверить, что в общем случае имеет место соотношение

$$I(F, M) \neq T(F, M) = I(-F, M)$$

Отсюда следует, что уравнения $F = 0$ и $-F = 0$, вообще говоря, имеют различные вязкостные решения. Подобное свойство отсутствует в случае регулярного (классического) решения.

Для примера рассмотрим скалярную задачу

$$F \equiv u_x^2 - 1 = 0, \quad x \in (0, 1); \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0$$

где $\Omega = (0, 1)$, а поверхность $M = \partial\Omega$ состоит из двух точек 0, 1. Можно показать, что в этом случае $I(F, M)$ есть функция $u = h(x)$ вида

$$h(x) = x, \quad x \in [0, 1/2]; \quad h(x) = 1 - x, \quad x \in [1/2, 1]$$

а $T(F, M)$ — функция $u = -h(x)$.

2.2. Рассеивающая поверхность

2.2.1. Основные условия

Для классификации сингулярных поверхностей воспользуемся терминологией, применяемой в теории дифференциальных игр и оптимальном управлении [33]. Отметим, что эта терминология относится к задаче ЗТЗ. Классификация основывается на поведении регулярных характеристик вблизи сингулярной поверхности и учитывает направление движения фазовой точки вдоль этих характеристик. Таким образом, одна и та же сингулярность в ЗНЗ и ЗТЗ подразумевает движение в противоположных направлениях вдоль рассматриваемых регулярных характеристик. Задача ЗНЗ будет рассматриваться первой. Классификация сингулярных поверхностей в ней соответствует движению вдоль траектории в обратном времени в задаче управления или дифференциальной игре.

Рассмотрим вначале сингулярную рассеивающую поверхность, для построения которой не требуются сингулярные характеристики. *Рассеивающая поверхность* — это простейшая сингулярность, к которой регулярные характеристики приближаются с обеих сторон с ненулевым углом (транскверсально), а $F \in C^2(N_i)$, $i = 0, 1$, рис. 2.3. Для случая, когда вектор $p_1 - p_0$, $x \in \Gamma$, направлен от D_1 к D_0 , это означает

$$\langle F_p(x, u, p_0), p_1 - p_0 \rangle < 0; \quad \langle F_p(x, u, p_1), p_1 - p_0 \rangle > 0 \quad (2.10)$$

Приведенные неравенства согласуются с необходимыми условиями (2.8), и, таким образом, ни одна из сторон поверхности Γ не является сингулярной. Тем не

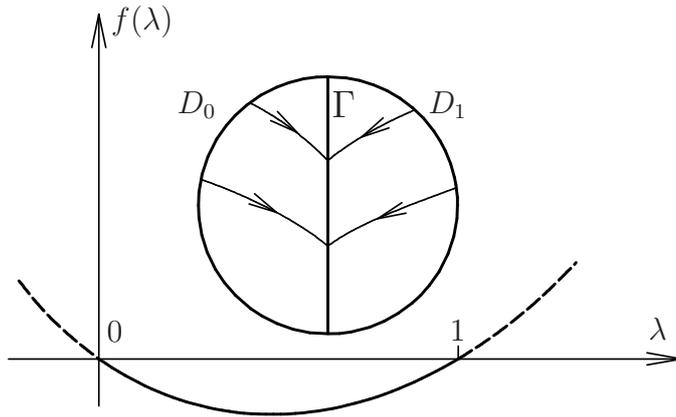


Рис. 2.3

менее, проверка неравенства $f(\lambda) \leq 0$ в (2.7) для $\lambda \in [0, 1]$ остается необходимой и помогает обнаружить границу (край) рассеивающей поверхности Γ . Отметим, что функция $f(\lambda)$ на рис. 2.3 удовлетворяет данному условию.

Для сингулярности вида $u = \max[u_0, u_1]$, когда вектор $p_1 - p_0$ направлен от D_0 к D_1 , неравенства в (2.10) меняются на противоположные и начинают противоречить соответствующим неравенствам в (2.7). Это означает, что решение ЗНЗ не может иметь рассеивающую сингулярную поверхность с таким представлением решения.

2.2.2. Линейные и нелинейные гамильтонианы

Как было сказано выше, проверка условия (2.7) при $\lambda \in [0, 1]$ помогает найти границу рассеивающей поверхности Γ . Однако это не так в случае задачи с кусочно-линейным гамильтонианом вида $F = \max[F_0, F_1]$, $F_i = \langle a_i, p \rangle + b_i$, где a_i, b_i — функции от x и u соответственно, $i = 0, 1$. Подобный тип гамильтониана возникает в задаче оптимального управления, в которой уравнения динамики линейны относительно скалярного параметра управления. Функция $f(\lambda)$ в этом случае кусочно-линейная, непрерывная, неположительная и линейная на каждом из отрезков $[0, \lambda^*]$ и $[\lambda^*, 1]$, где $\lambda^* = (\langle a_1 - a_0, p_0 \rangle + b_1 - b_0) / (\langle a_0 - a_1, p_1 - p_0 \rangle)$, см. рис. 2.4. Отметим, что здесь неравенство (2.7), рассматриваемое на интервале $[0, 1]$, следует из условий (2.8) на краях отрезка.

Примеры другого типа можно встретить в игровой задаче простого преследования на многообразии, рассматриваемой в главе 4, а также в ЗНЗ на плоскости, приведенной в данной главе. В этих задачах гамильтониан является достаточно гладкой функцией, но невыпуклой по p . Две гладкие ветви $u_0(x)$ и $u_1(x)$ так называемого первичного решения, а также поверхность $\Gamma_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : u_0(x) = u_1(x)\}$ можно рассматривать в качестве основных кандидатов на вязкостное решение. Тем не менее, только часть Γ поверхности Γ_0 удовлетворяет требованиям вязкостного решения, рис. 2.5. Анализ функции $f(\lambda)$ показывает, что для ЗНЗ она имеет локаль-

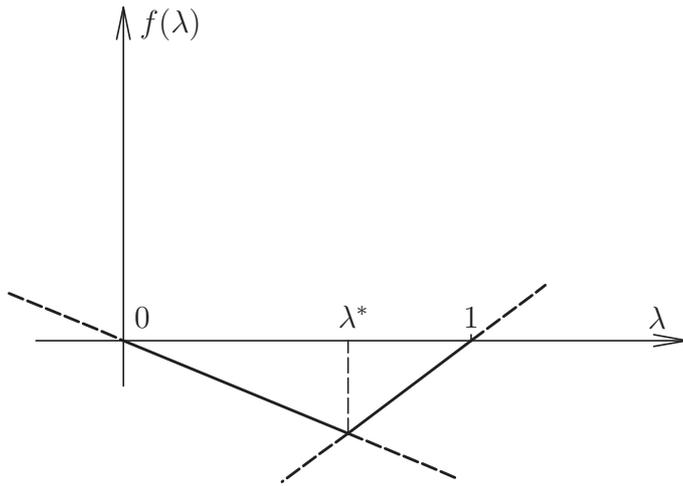


Рис. 2.4

ный внутренний максимум при некотором $\lambda^* \in (0, 1)$ и два локальных минимума на интервалах $(0, \lambda^*)$, $(\lambda^*, 1)$. В зависимости от точки $x \in \Gamma_0$ величина $f(\lambda^*)$ либо положительна, либо отрицательна. Можно показать, что условия

$$f(\lambda^*) = 0, \quad f'(\lambda^*) = 0, \quad x \in \Gamma_0$$

задают $(n-2)$ -мерное подмногообразие B многообразия Γ_0 , которое разделяет точки Γ_0 с положительными и отрицательными значениями величины $f(\lambda^*)$. Таким образом, подмножество B есть граница, где оканчивается рассеивающая поверхность.

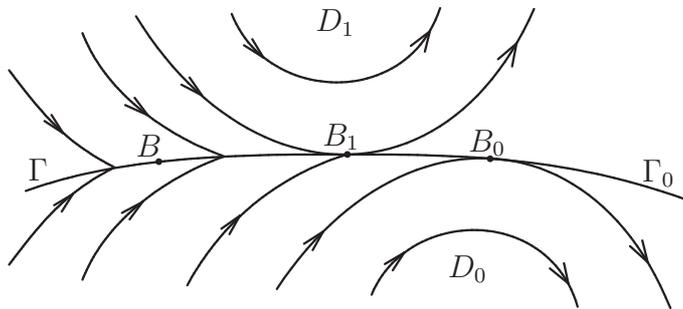


Рис. 2.5

На рис. 2.5 часть кривой Γ_0 между точками B и B_1 имеет, с геометрической точки зрения, вид рассеивающей поверхности, однако она не может быть отнесена к вязкостному решению. В точках B_0, B_1 регулярные характеристики касаются Γ_0

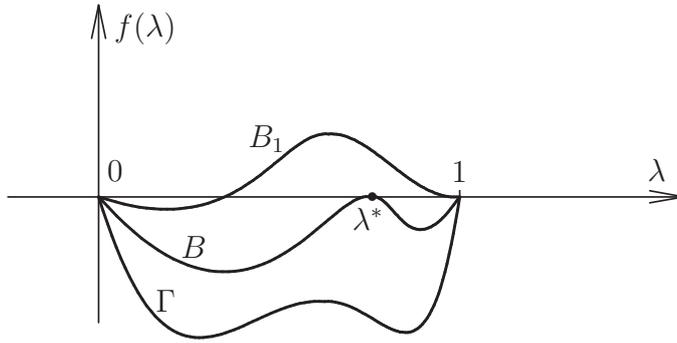


Рис. 2.6

со сторон подобластей D_0 и D_1 соответственно, см. рис. 2.5. В некоторых случаях точки B_0 и B_1 могут совпадать. В общем случае фазовый портрет траекторий, аналогичный изображенному на рис. 2.5, не позволяет сделать вывод о том, какая из частей Γ_0 может представлять вязкостное решение. Для этого требуется знать вид функции $f(\lambda)$ в каждой точке $x \in \Gamma_0$, подобно представленным на рис. 2.6, 2.7. Приведенные выше примеры демонстрируют нарушение условия $f(\lambda) \leq 0$, возникающее внутри промежутка $\lambda \in [0, 1]$, см. рис. 2.6. Такой вид нарушения имеет место, когда функция $f(\lambda)$ соответствует точкам справа от точки B , рис. 2.5.

Условие $f(\lambda) \leq 0$ может также нарушаться и на одном из концов промежутка $[0, 1]$. На рис. 2.7 проиллюстрировано подобное нарушение для $\lambda = 1$. Здесь в вязкостное решение включается вся геометрически рассеивающая часть кривой Γ_0 слева от точки B_1 . Заметим, что касание характеристик в точке B_1 на рис. 2.5, а также касание при $\lambda = 1$ на рис. 2.7 следуют из формул (2.8). На рис. 2.7 изображе-

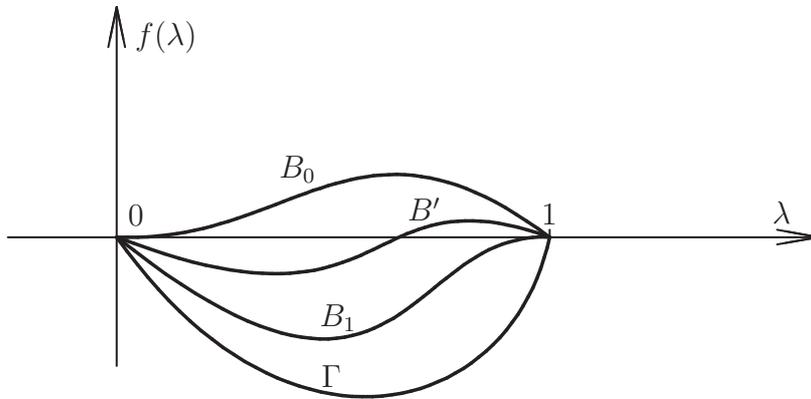


Рис. 2.7

на кривая B' . Она соответствует некоторой точке, которая лежит на участке B_1, B_0 кривой Γ_0 на рис. 2.5.

2.3. Сингулярные характеристики для экивокальной поверхности

2.3.1. Четыре типа поверхностей, необходимые условия

В этом разделе полагаем, что в фазовом пространстве характеристики достигают поверхность Γ со стороны подмножества D_0 без касания (трансверсально) и покидают ее по направлению к подмножеству D_1 (возможно, по касательной к Γ). С геометрической точки зрения для рассматриваемого случая $u = \min[u_0, u_1]$, когда вектор $p_1 - p_0$ направлен от D_1 к D_0 , данное условие может быть выражено следующим образом:

$$\langle F_p(x, u, p_0), p_1 - p_0 \rangle < 0, \quad \langle F_p(x, u, p_1), p_1 - p_0 \rangle \leq 0, \quad x \in \Gamma \quad (2.11)$$

Отметим, что здесь и далее через u обозначено общее значение на Γ для обеих ветвей $u_0 = u_1 = u$.

Будем различать четыре типа сингулярных экивокальных поверхностей в зависимости от представления $u = \min[u_0, u_1]$ или $u = \max[u_0, u_1]$, а также в зависимости от гладкости или негладкости гамильтониана.

Соотношения (2.11) должны быть согласованы с неравенствами в (2.8). Первое неравенство в (2.11) согласуется с соответствующим в (2.8). Можно показать, что для второго неравенства требуется выполнение на Γ со стороны D_1 определенного условия. Вид данного условия зависит от того, является ли гамильтониан гладким в окрестности N_1 . Чтобы сформулировать соответствующее утверждение, предположим, что $u_0(x)$ является известной функцией и введем функцию $F_1(x, u) = u - u_0(x)$. Скобки Якоби в нижеприведенных соотношениях выражены в переменных x, u, p для $p = p_1$.

Лемма 2.3. Пусть $F \in C^2(N_i)$, $i = 0, 1$, $u = \min[u_0, u_1]$. Тогда для вязкостного решения на Γ выполнены следующие необходимые условия, представляющие собой одно равенство (условие касания) и два неравенства:

$$\begin{aligned} f'(1) &= \{F_1 F\} = \langle F_p(x, u(x), p_1(x)), p_1(x) - p_0(x) \rangle = 0 \\ -f''(1) &= \{\{F_1 F\} F_1\} \geq 0, \quad \{\{F F_1\} F\} \geq 0, \quad x \in \Gamma \end{aligned} \quad (2.12)$$

Доказательство. Гамильтониан и функция $f(\lambda)$ в (2.7) являются дважды дифференцируемыми. Равенство в (2.12) следует из сравнения двух правых неравенств в (2.8), (2.11). Если в противоречие левому неравенству в (2.12) предположить, что $f''(1) > 0$, то для достаточно малого интервала $\lambda \in (1 - \varepsilon, 1)$ будет иметь место неравенство $f'(\lambda) < 0$ (поскольку $f'(1) = 0$). Отсюда для функции $f(\lambda)$ на этом интервале справедливо $f(\lambda) > 0$ (так как $f(1) = 0$), что противоречит неравенству в (2.7). Выполнение второго неравенства в (2.12) можно также доказать от противного. А именно, предположение справедливости неравенства $\{\{F F_1\} F\} < 0$

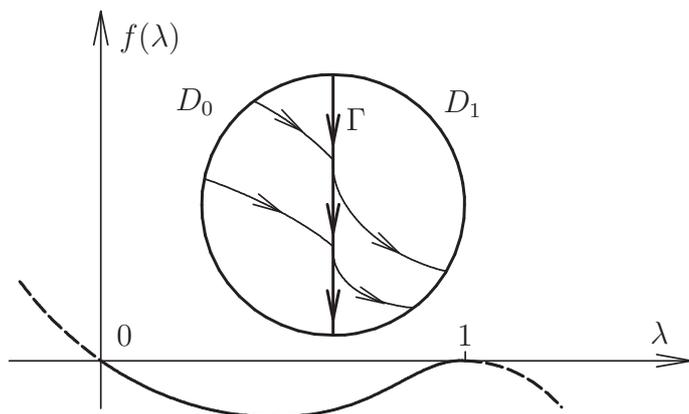


Рис. 2.8

противоречит утверждению теоремы 1.6 (для $k = 2$) о свойствах функции $u_1(x)$ как решения нерегулярной задачи Коши. Лемма доказана.

Поскольку вектор $p_1 - p_0$ является нормалью к Γ , то равенство в (2.12) означает, что регулярные характеристики в x -пространстве касаются поверхности Γ . Таким образом, эта поверхность представляет собой оболочку семейства регулярных характеристик в D_1 .

В соответствии с направлением движения фазовой точки вдоль характеристик, рис. 2.8, ветвь решения $u_0(x)$ может быть построена до построения ветви $u_1(x)$. Поэтому, рассматривая экивокальную поверхность Γ , ветвь $u_0(x)$ можно считать известной функцией. Следовательно, равенство в (2.12) выполняется лишь на одной

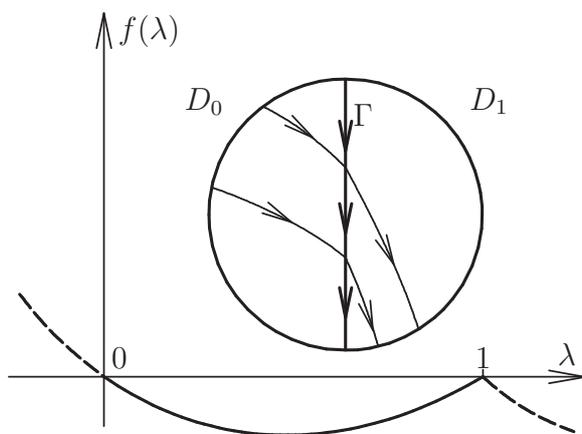


Рис. 2.9

интегральной поверхности $\Sigma^{(1)}$ из (2.9), то есть, для стороны D_1 , которая в связи с этим является сингулярной.

Следующий тип экивокальной поверхности соответствует негладкому гамильтониану, рис. 2.9. В данном случае при формулировке соответствующих утверждений для ветвей гамильтониана удобно воспользоваться введенными ранее F^- , G -обозначениями: $F(z) = F(z)$, $z \in N_1$ и $G(z) = F(z)$, $z \in N_0$, $z = (x, u, p)$. Таким образом, имеют место равенства

$$\begin{aligned} F(x, u_1(x), u_{1x}(x)) &= 0, & x \in D_1 \\ G(x, u_0(x), u_{0x}(x)) &= 0, & x \in D_0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Лемма 2.4. Пусть $u = \min[u_0, u_1]$, $F = \min[F^+, F^-]$ при $G, F^+, F^- \in C^2$, а также имеют место соотношения

$$F^-(x, u_1(x), u_{1x}(x)) \geq F^+(x, u_1(x), u_{1x}(x)) = 0, \quad x \in D_1 \quad (2.14)$$

(то есть часть F^+ ветви F действует в D_1). Предположим, что оба неравенства в (2.12) являются строгими; другими словами, характеристики из подобласти D_1 трансверсальны к Γ . Тогда для вязкостного решения на Γ выполнены следующие необходимые условия, представляющие собой одно равенство и два неравенства:

$$\begin{aligned} F^-(x, u_1(x), u_{1x}(x)) &= 0, & x \in \Gamma \\ \{F_1 F^-\} &= \langle F^-_p(x, u(x), p_1(x)), p_1(x) - p_0(x) \rangle \geq 0, & x \in \Gamma \\ \{F^+ F_1\} &= -\langle F^+_p(x, u(x), p_1(x)), p_1(x) - p_0(x) \rangle \geq 0, & x \in \Gamma \end{aligned} \quad (2.15)$$

Доказательство. Вначале отметим, что с учетом (2.14) второе неравенство в (2.15) следует из правого неравенства в (2.11), которое справедливо в силу сделанных предположений. Используя эти же предположения, получаем, что для некоторого промежутка $[\lambda, 1] \subset [0, 1]$ функция f из (2.7) имеет вид

$$f(\lambda) = \min[f^+(\lambda), f^-(\lambda)]$$

а из (2.8), (2.14) следуют соотношения $f(1) = f^+(1)$ и $f^-(1) \geq f^+(1)$. Заметим, что, во-первых, должно выполняться равенство $f^-(1) = f^+(1)$, иначе в достаточно малой левой полукрестности точки $\lambda = 1$ функция $f(\lambda) = f^+(\lambda)$ будет положительной. Во-вторых, первое неравенство в (2.15) следует из (2.8), так как $f'(1-0) = f'^-(1)$. Лемма доказана.

Итак, если в D_1 выполнено уравнение $F^+ = 0$, то функция F^- также равна нулю на Γ . Отметим, что функция F вида $F = \max[F^+, F^-]$ не удовлетворяет условиям (2.8). Однако сингулярность вида $u = \max[u_0, u_1]$ совместима с гамильтонианом вида $F = \max[F^+, F^-]$.

2.3.2. Уравнения сингулярных характеристик

На основе вышеизложенных построений получаем, что следующие три равенства выполняются на Γ со стороны подобласти D_1 , то есть для точек интегральной поверхности $\Sigma = \Sigma^{(1)}$ в (2.9):

$$\begin{aligned} W_3 : \quad F_0 &\equiv F(x, u, p) = 0, & F_1(x, u) &\equiv u - u_0(x) = 0 \\ & & F_{-1}(x, u, p) &\equiv \{F_1 F\} = \langle F_p(x, u, p), p - p_0(x) \rangle = 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

Индексы при u_1, p_1 здесь опущены, то есть $p = p_1, u = u_1 = u_0$. Первое равенство в (2.16) представляет собой УЧП, второе выражает непрерывность решения на Γ , третье — это условие касания, полученное в лемме 2.3.

В случае негладкого гамильтониана условия (2.16) остаются в силе, за исключением третьего:

$$W_3 : \quad F_0 = 0, \quad F_1 = 0, \quad F_{-1} \equiv F^-(x, u, p) = 0 \quad (2.17)$$

Последнее равенство здесь вытекает из леммы 2.4. Следуя обозначениям теории управления, равенство $F^- = 0$ назовем условием переключения (переключение с F^+ на F^-).

Три равенства в (2.16) или в (2.17) задают в пространстве векторов $(x, u, p) \in \mathbb{R}^{2n+1}$ многообразие W_3 коразмерности 3. Таким образом, поверхность Σ и ее проекция $\Gamma = \pi\Sigma$ являются решениями соответствующих задач 1.3, 1.4 из подраздела 1.2.2.

С другой стороны, если ветвь решения $u_0(x)$ полагается известной, то пара $\Gamma, u_1(x)$ является решением задачи 1.5 (задача Коши с подвижной границей из раздела 1.3). Случай (2.17) при негладком гамильтониане соответствует регулярной задаче, рассмотренной в теореме 1.4, а случай (2.16) — нерегулярной задаче и теореме 1.5. Отметим, что между задачей из данного раздела и задачей 1.5 существует одно важное отличие, заключающееся в том, что функция $v(x)$ в (1.93), определяющая значение решения на границе, является произвольной, в то время как функция $u_0(x)$ в (2.16), (2.17) представляет собой еще одно гладкое решение того же УЧП.

Для построения многообразий Σ и Γ в теоремах 1.4, 1.5 используются уравнения (1.96), (1.103) или (1.105), которые задают на W_3 характеристическое поле.

Пусть соотношения в (2.12) выполняются строго:

$$\{\{F_1, F\}F_1\} \neq 0, \quad \{\{F, F_1\}F_1\} \neq 0$$

Тогда, в соответствии с (1.105), уравнения для сингулярной поверхности — оболочки (в случае гладкого гамильтониана) — имеют вид

$$\dot{x} = F_p, \quad \dot{u} = \langle p, F_p \rangle, \quad \dot{p} = -F_x - pF_u - \frac{\{\{FF_1\}F\}}{\{\{F_1F\}F_1\}}(p - p_0(x)) \quad (2.18)$$

Согласно введенным выше определениям, систему (2.18) назовем уравнениями сингулярных характеристик для УЧП (2.1), или сингулярными характеристиками для (2.1), соответствующими многообразию (2.16). Отметим, что уравнения регулярных характеристик выражаются с помощью единственной функции — гамильтониана $F(x, u, p)$. Уравнения же для сингулярных характеристик (2.18), так же как и многообразия (2.16), выражаются с помощью двух функций — гамильтониана $F(x, u, p)$ и функции $u_0(x)$ — гладкого решения уравнения (2.1). В этом смысле сингулярные характеристики являются зависимыми от этого решения.

В случае негладкого гамильтониана характеристические уравнения для многообразия (2.17), являющиеся в то же время и уравнениями сингулярных характери-

стик УЧП (2.1), принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \lambda_+ F_p^+ + \lambda_- F_p^-, \quad \dot{u} = \lambda_+ \langle p, F_p^+ \rangle + \lambda_- \langle p, F_p^- \rangle \\ \dot{p} &= -\lambda_+ (F_x^+ + p F_u^+) - \lambda_- (F_x^- + p F_u^-) - \frac{\{F^- F^+\}}{\mu} (p - p_0(x)) \\ \lambda_+ &= \{F_1 F^-\} / \mu, \quad \mu = \{F_1 F^-\} + q \{F^+ F_1\}, \quad \lambda_+ + \lambda_- = 1 \end{aligned} \quad (2.19)$$

Система (2.19) получается из (1.96) масштабированием переменной “время” — параметра дифференцирования. Другими словами, система (1.96) получена из соотношения (1.67) при $\mu = 1$, а также системы (2.19) с параметром μ , удовлетворяющим условию нормировки (1.68). Подобная нормировка соответствует так называемому скользящему режиму в x -пространстве.

В случае сингулярности вида $u = \max[u_0, u_1]$ в лемме 2.4 следует использовать функцию $F = \max[F^+, F^-]$ (другой вид функции F здесь неприменим). Кроме этого, неравенства в (2.12), (2.15) должны рассматриваться с противоположным знаком.

2.3.3. Некоторые свойства характеристической системы

Одно из свойств, которое будет использовано в следующем разделе, заключается в том, что система (2.18) (система (1.105)) инвариантна по отношению к замене функции $u_0(x)$ (функции $v(x)$) на некоторую другую функцию $w(x) \in C^2(D)$, $w(x) = u_0(x) = v(x)$, $x \in \Gamma$. Таким образом, новая функция должна быть дважды дифференцируемой и равняться старой функции только на поверхности Γ . Рассмотрим уравнение (1.105) или, что то же самое, уравнение (2.18), в p, q -обозначениях. Поскольку функция $v(x)$ входит только в последний член уравнения для p , то достаточно показать инвариантность только этой части уравнения.

Заметим, что поверхность Γ может быть задана двумя равнозначными способами: $u(x) - v(x) = 0$ или $u(x) - w(x) = 0$. Это означает, что градиенты функций $u - v$ и $u - w$, как нормали к Γ , коллинеарны, то есть

$$p - q = a(p - r), \quad p = \partial u / \partial x, \quad q = \partial v / \partial x, \quad r = \partial w / \partial x \quad (2.20)$$

где $a = a(x)$ — некоторая скалярная функция. Используя равенство (2.20), для $x \in \Gamma$ имеем

$$\begin{aligned} \{F_1 F\} &= \langle F_p, p - q \rangle = a \langle F_p, p - r \rangle = \{F_1^* F\} = 0 \\ \{\{F_1 F\} F_1\} &= -\{F_1 F\} - \langle F_{pp}(p - q), p - q \rangle = \\ &= -a^2 \langle F_{pp}(p - r), p - r \rangle = a^2 \{\{F_1^* F\} F_1^*\} \\ F_1(x, u) &= u - v(x), \quad F_1^*(x, u) = u - w(x) \end{aligned} \quad (2.21)$$

поскольку, согласно (2.18), член $\{F_1 F\} = \langle F_p, p - q \rangle$ обращается в нуль на Γ . Числитель последнего слагаемого в третьем уравнении (2.18) имеет вид

$$\begin{aligned} \{\{F F_1\} F\} &= \langle F_{pp}(p - q), F_x \rangle - \langle F_{px}(p - q), F_p \rangle + F_u \langle F_{pp}(p - q), p \rangle - \\ &- \langle p, F_p \rangle \langle F_{pu}, p - q \rangle + \langle F_x + p F_u, F_p \rangle - \langle v_{xx} F_p, F_p \rangle \end{aligned} \quad (2.22)$$

Все слагаемые здесь, за исключением последних двух, линейно зависят от вектора $p - q$. Два последних слагаемых, в свою очередь, обладают следующим свойством. Дифференцируя (2.20) вдоль решения (2.18), получаем

$$\dot{p} - v_{xx}F_p = \dot{a}(p - q) + a(\dot{p} - w_{xx}F_p) \quad (2.23)$$

Умножая (2.23) скалярно на F_p , а также используя условие касания (2.12) и последнее уравнение (2.18), имеем

$$\begin{aligned} \langle \dot{p} - v_{xx}F_p, F_p \rangle &= a \langle \dot{p} - w_{xx}F_p, F_p \rangle \\ \langle F_x + pF_u + v_{xx}F_p, F_p \rangle &= a \langle F_x + pF_u + w_{xx}F_p, F_p \rangle \end{aligned} \quad (2.24)$$

Из (2.22) и (2.24) следует равенство

$$\{\{FF_1\}F\} = a\{\{FF_1^*\}F\} \quad (2.25)$$

которое, в силу (2.20) и (2.21), после сокращения на a^2 приводит к соотношению

$$\frac{\{\{FF_1\}F\}}{\{\{F_1F\}F_1\}}(p - q) = \frac{\{\{FF_1^*\}F\}}{\{\{F_1^*F\}F_1^*\}}(p - r) \quad (2.26)$$

означающему инвариантность системы уравнений (2.18) по отношению к замене $u_0(x) \rightarrow w(x)$ (или $v(x) \rightarrow w(x)$), для которой $u_0(x) = w(x)$ при $x \in \Gamma$. Используя первое равенство в (2.21), можно показать, что при $F = F^+$ и $F = F^-$ система (2.19) инвариантна по отношению к такой же замене переменных. Таким образом, чтобы построить многообразие Γ , в (2.18) или (2.19) не требуется использовать само решение $u_0(x)$. Для этого можно взять произвольную функцию $w(x) \in C^2(D)$, удовлетворяющую единственному требованию: $w(x) = u_0(x)$ при $x \in \Gamma$.

Пусть $u_0(x)$ — решение УЧП (2.1). Используя обозначения из раздела 1.1, которые были введены в (1.29), систему (2.18) можно записать в виде

$$\dot{z} = \Phi(z), \quad z = (x, u, p) \in \mathbb{R}^{2n+1} \quad (2.27)$$

Здесь Φ — $(2n + 1)$ -мерный вектор, компонентами которого являются соответствующие правые части уравнений (2.18). Напомним, что характеристическая система для УЧП (2.1) (см. (1.6), (1.29)) имеет вид

$$\dot{z} = \xi_F(z) \quad (2.28)$$

Из разделов 1.1, 1.2 следует, что n -мерная поверхность $(\Sigma_0$ в (1.46))

$$\Sigma = \{z = (x, u, p) \in \mathbb{R}^{2n+1} : u = u_0(x), p = q(x) \equiv u_{0x}(x), x \in D\} \quad (2.29)$$

представляет собой инвариантное многообразие для $(2n + 1)$ -мерной системы (2.28), то есть, если начальная точка $z(0) = z^0$ принадлежит Σ , то и все решение лежит на этой поверхности: $z(t) \in \Sigma$, $|t| \leq t_0$. Сравнивая системы (2.27) и (2.28), видим, что поверхность Σ может быть инвариантной также и по отношению к уравнению (2.27) в случае, если множитель перед $p - q$ в (2.26) стремится к нулю при $p \rightarrow q$. Такая

(стабильная) инвариантность Σ означает, что скачок градиента обращается в нуль при движении вдоль сингулярной эквивокальной характеристики при $t \rightarrow \infty$.

Для исследования этого можно линеаризовать систему (2.27) относительно δz , положив

$$z(t) = \zeta(t) + \delta z(t), \quad \delta z = (\delta x, \delta u, \delta p), \quad z(0) = z^0 = \zeta^0 + \delta z^0$$

где $\zeta(t)$ — решение (2.28), а $\zeta(0) = \zeta^0$. Множитель перед $p - q$ в (2.26) имеет некоторую особенность в точках многообразия Σ . Таким образом, линеаризация (2.27) в окрестности Σ является в общем случае регулярной лишь при некотором определенном δz . В приведенном ниже примере на плоскости многообразии Σ представляет собой стабильное инвариантное многообразие для уравнения (2.27). Линеаризацию (2.27) предлагается проделать в качестве упражнения.

2.4. Сингулярные характеристики для фокальной поверхности

2.4.1. Шесть типов поверхностей, необходимые условия

В этом разделе предполагается, что регулярные характеристики отходят от сингулярной поверхности Γ с обеих сторон D_0 и D_1 , возможно, с касанием. Следуя логике исследования описанных выше типов сингулярностей, рассмотрим сначала случай $u = \min[u_0, u_1]$, когда вектор $p_1 - p_0$ направлен от D_1 к D_0 . Будем применять p, q -обозначения, используя переменные F, u, p для D_1 -стороны и G, v, q для D_0 -стороны. Предположения о поведении регулярных характеристик формально можно записать следующим образом:

$$\langle F_p(x, u, p), p - q \rangle \leq 0, \quad \langle G_q(x, u, q), p - q \rangle \geq 0, \quad x \in \Gamma \quad (2.30)$$

Из приведенных далее рассмотрений следует, что обе стороны фокальной поверхности являются сингулярными. С геометрической точки зрения существуют три типа фокальных поверхностей:

- 1) регулярные характеристики касаются Γ с двух сторон, рис. 2.10;
- 2) характеристики касаются Γ только с одной стороны, рис. 2.11;
- 3) характеристики отходят от Γ трансверсально (под ненулевым углом) с обеих сторон, рис. 2.12.

Соответствующий вид функций $f(\lambda)$ также представлен на данных рисунках. Случай $u = \max[u_0, u_1]$ удваивает количество типов фокальных поверхностей.

Из сравнения неравенств (2.30) с соответствующими неравенствами (2.8), которые выражают необходимые условия для вязкостного решения, следует, что они имеют противоположные знаки. Анализ эквивокальной поверхности показывает, что для совместимости этих неравенств функция $f(\lambda)$ должна иметь локальный гладкий или негладкий максимум по λ на соответствующем краю промежутка $[0, 1]$, в то время как гладкий гамильтониан совместим только с касательными характеристиками.

Результаты лемм 2.3 и 2.4 позволяют следующим образом суммировать необходимые условия, имеющие место для каждой из сторон D_0, D_1 поверхности Γ для трех типов фокальных поверхностей.

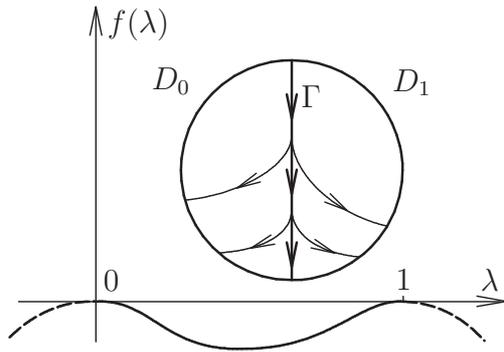


Рис. 2.10

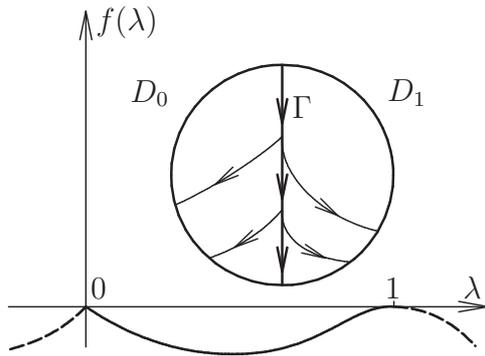


Рис. 2.11

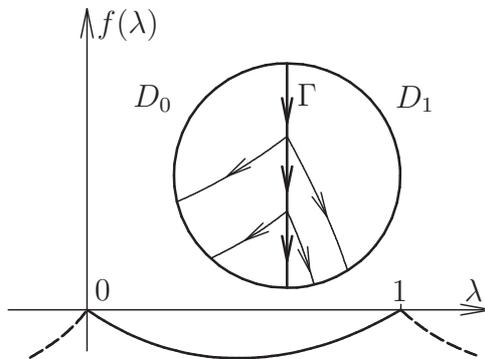


Рис. 2.12

Тун 1. Характеристики касаются Γ с обеих сторон:

$$\begin{aligned} D_1 : \langle F_p, p - q \rangle = 0, \quad \{\{F_1^* F\} F_1^*\} \geq 0, \quad \{\{F F_1^*\} F\} \geq 0 \\ D_0 : \langle G_q, q - p \rangle = 0, \quad \{\{G_1^* G\} G_1^*\} \geq 0, \quad \{\{G G_1^*\} G\} \geq 0 \\ F_1^*(x, u) = u - w(x), \quad G_1^*(x, v) = v - w(x), \quad F, G \in C^2 \end{aligned} \quad (2.31)$$

Тун 2. Характеристики касаются Γ со стороны D_1 и трансверсальны со стороны D_0 :

$$\begin{aligned} D_1 : \langle F_p, p - q \rangle = 0, \quad \{\{F_1 F\} F_1\} \geq 0, \quad \{\{F F_1\} F\} \geq 0 \\ D_0 : G^- = 0, \quad \langle G_q^-, q - p \rangle \geq 0, \quad \langle G_q^+, q - p \rangle \leq 0 \\ G^+ = 0, \quad x \in D_0; \quad G = \min[G^-, G^+] \\ F_1(x, u) = u - v(x), \quad G_1(x, v) = v - u(x); \quad F, G^\pm \in C^2 \end{aligned} \quad (2.32)$$

Тун 3. Характеристики трансверсальны с обеих сторон Γ :

$$\begin{aligned} D_1 : \quad F^- = 0, \quad \langle F_p^-, p - q \rangle \geq 0, \quad \langle F_p^+, p - q \rangle \leq 0 \\ \quad F^+ = 0, \quad x \in D_1; \quad F = \min[F^-, F^+] \\ D_0 : \quad G^- = 0, \quad \langle G_q^-, q - p \rangle \geq 0, \quad \langle G_q^+, q - p \rangle \leq 0 \\ \quad G^+ = 0, \quad x \in D_0; \quad G = \min[G^-, G^+] \\ F_1(x, u) = u - v(x), \quad G_1(x, v) = v - u(x); \quad F^\pm, G^\pm \in C^2 \end{aligned} \quad (2.33)$$

Если характеристики трансверсальны к Γ с обеих сторон D_1 и D_0 , то функции $u(x)$ и $v(x)$, входящие в (2.32), (2.33), имеют C^2 -продолжения из подмножеств D_0 , D_1 на D . При этом $u(x)$ и $v(x)$ входят в выражения для функций F_1 , G_1 в (2.32), (2.33). Если же имеет место касание характеристик, то существуют только C^1 -продолжения, а функции $u(x)$, $v(x)$ не могут входить в выражения для F_1 и G_1 , поскольку двойные скобки Якоби $\{\{F F_1\} F\}$ и $\{\{G G_1\} G\}$ содержат вторые производные от $u(x)$ и $v(x)$, см. (2.22). По этой причине в (2.31) используется вспомогательная функция $w(x)$. На эту функцию накладываются следующие требования:

$$w(x) = u(x) = v(x), \quad x \in \Gamma; \quad w(x) \in C^2(D)$$

$$p - q = a(p - r), \quad q - p = b(q - r), \quad a, b > 0; \quad r = \partial w / \partial x$$

Можно показать, что такая функция $w(x)$ существует, если поверхность Γ и сужение $u(x)$ на Γ дважды дифференцируемы. Действительно, в системе координат, в которой Γ является гиперплоскостью $x_n = 0$, функция $w(x)$ может быть определена в виде

$$w(x) = u(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) + cx_n, \quad c = (p_n(x^*) + q_n(x^*)) / 2 = \text{const}$$

Соотношения (2.31)–(2.33) задают для каждой из сторон Γ многообразие W_3 вида (2.16) или (2.17). Характеристическое поле этого многообразия может быть использовано для построения поверхностей (2.9). Однако, в отличие от случая с экивокальной поверхностью, ни функцию $u(x)$, ни функцию $v(x)$ здесь нельзя считать

заранее известной при построении Γ в соответствии с поведением регулярных характеристик. В фокальном случае поверхность Γ и сужения функций $u(x)$, $v(x)$ на Γ вместе с их градиентами p, q должны быть построены одновременно.

Соотношения (2.31)–(2.33) позволяют записать два варианта системы (2.18) (для каждой из сторон Γ), дающих вместе формально систему обыкновенных дифференциальных уравнений порядка $L = 2(2n+1)$. Но последняя не является замкнутой и не может быть использована для определения векторного поля в L -мерном пространстве. Для каждой точки $x \in \Gamma$ имеем только $3n+1$ переменных x, u, p, q . Эффективная процедура построения Γ должна основываться на замкнутой системе обыкновенных дифференциальных уравнений в переменных x, u, p, q .

Существует два препятствия для получения подобной системы из двух вариантов системы (2.18). Во-первых, векторы \dot{x} в (2.18) и (2.19), соответствующие различным сторонам Γ , в общем случае не совпадают и не являются коллинеарными. Во-вторых, правые части (2.18), (2.19) включают в себя помимо переменных x, u, p, q также некоторые дополнительные переменные, например, элементы матриц Гессе: u_{xx}, v_{xx}, w_{xx} . Чтобы преодолеть указанные затруднения, рассмотрим далее два специфических случая. Первый, когда Γ является гиперплоскостью, и второй, когда векторы \dot{x} , соответствующие разным сторонам D_0, D_1 , коллинеарны.

Для сингулярности вида $u = \max[u_0, u_1]$, по аналогии с эквивокальным случаем, в неравенствах (2.31)–(2.33) следует изменить знак на противоположный, а гамильтонианы должны иметь вид $F = \max[F^+, F^-]$, $G = \max[G^+, G^-]$.

2.4.2. Фокальная поверхность — гиперплоскость

Пусть из соображений симметрии или по некоторым другим причинам поверхность Γ можно считать гиперплоскостью. В этом случае будем также говорить, что рассматривается симметричная фокальная поверхность. Без ограничения общности, положим, что эта поверхность задается уравнением $x_n = 0$, то есть последняя компонента вектора x обращается в нуль на Γ .

Вспомогательную функцию $w(x)$ в таком случае можно задать следующим образом:

$$w(x_1, \dots, x_n) = u_i(x_1, \dots, x_{n-1}, 0), \quad x \in D_i, \quad i = 0, 1 \quad (2.34)$$

Отсюда получаем соотношения между компонентами векторов $p = (p_1, \dots, p_n)$, $q = (q_1, \dots, q_n)$ и $r = (r_1, \dots, r_n)$, являющимися градиентами функций $u = u_1$, $v = u_0$ и w соответственно:

$$\begin{aligned} r_k &= p_k = q_k, \quad k = 1, \dots, n-1, \quad r_n = 0, \quad x \in \Gamma \\ p - r &= (0, \dots, 0, p_n), \quad q - r = (0, \dots, 0, q_n) \end{aligned} \quad (2.35)$$

Соотношения (2.34), (2.35) приводят к следующим упрощенным выражениям для скобок Якоби (2.18), (2.19) на поверхности Γ :

$$\{F_1 F\} = F_n p_n, \quad \{\{F_1 F\} F_1\} = F_{nn} p_n^2, \quad \{\{F F_1\} F\} = \{F_n F\} p_n \quad (2.36)$$

Здесь и ниже через F_k, F_n, F_{nn} обозначены первая и вторая производные по переменным p_k, p_n . Аналогичные (2.36) соотношения верны и в обозначениях G, v, q .

Равенства (2.36) позволяют существенно упростить системы (2.18), (2.19). Соответствующие выкладки приводятся далее для каждого типа сингулярной поверхности.

Тун 1. Соотношения (2.36) упрощают условия касания и позволяют записать их в виде $F_n p_n = 0$, $G_n q_n = 0$. Отсюда получаем, что величины p_n , q_n являются двумя различными корнями уравнения (относительно p_n)

$$F_n(x_1, \dots, x_{n-1}, 0, u, p_1, \dots, p_{n-1}, p_n) = 0, \quad x \in \Gamma \quad (2.37)$$

где x , u и другие координаты вектора p фиксированы. Предполагается, что оба этих корня отличны от нуля. По крайней мере, один из них всегда не равен нулю в силу предположения о скачке градиента: $p - q \neq 0$. Непосредственный расчет с учетом (2.37) показывает, что система (2.18) сводится к следующей:

$$\begin{aligned} \dot{x}_k &= F_k(x_1, \dots, x_{n-1}, 0, u, p_1, \dots, p_{n-1}, p_n) \\ \dot{x}_n &= F_n(x_1, \dots, x_{n-1}, 0, u, p_1, \dots, p_{n-1}, p_n) = 0 \\ \dot{u} &= \langle p, F_p \rangle = p_1 F_1 + \dots + p_{n-1} F_{n-1} \\ \dot{p}_k &= -F_{x_k}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0, u, p_1, \dots, p_{n-1}, p_n) - p_k F_u \\ \dot{p}_n &= -F_{x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0, u, p_1, \dots, p_{n-1}, p_n) - p_n F_u - \{F_n F\} / F_{nn} \\ k &= 1, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (2.38)$$

Равенство $\dot{x}_n = 0$ вытекает из упрощенного условия касания (2.37) и означает, что $x_n = 0$ вдоль сингулярных характеристик. Покажем, что уравнения для x_n, p_n могут быть исключены из (2.38) и, таким образом, можно отдельно рассматривать оставшуюся систему из $2(n-1) + 1$ уравнения.

Пусть $p_n = P_n(\bar{x}, u, \bar{p})$, $q_n = Q_n(\bar{x}, u, \bar{p})$ — два различных решения (корня) уравнения (2.37), выраженные как функции от $\bar{x} = (x_1, \dots, x_{n-1})$, u и $\bar{p} = (p_1, \dots, p_{n-1})$. Подставив P_n в уравнения для x_k, u, p_k , можно проинтегрировать последние и найти p_n . Нетрудно показать, что оставшаяся система порядка $2(n-1) + 1$, после исключения из (2.38) уравнений для x_n и p_n , является системой регулярных характеристик, соответствующих гамильтониану (см. упражнение 2.4)

$$\bar{F}(\bar{x}, u, \bar{p}) = F(\bar{x}, 0, u, \bar{p}, P_n(\bar{x}, u, \bar{p})) \quad (2.39)$$

Другой способ получения уравнения для p_n в (2.38) заключается в дифференцировании равенства $F_n = 0$ в (2.37) вдоль решений уравнений (2.38):

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} F_n = \sum_{k=1}^{n-1} F_{n x_k} \dot{x}_k + F_{n u} \dot{u} + \sum_{k=1}^{n-1} F_{n p_k} \dot{p}_k + F_{n n} \dot{p}_n = \\ &= \sum_{k=1}^n F_{n x_k} F_k + F_{n u} \langle p, F_p \rangle + \sum_{k=1}^n F_{n p_k} (-F_{x_k} - p_k F_u) + \\ &\quad + F_{n n} (F_{x_n} + p_n F_u) + F_{n n} \dot{p}_n = \{F_n F\} + F_{n n} (F_{x_n} + p_n F_u) + F_{n n} \dot{p}_n \end{aligned}$$

Здесь первая сумма расширена до n членов, поскольку $F_n = 0$. Решение этого уравнения относительно \dot{p}_n приводит к последнему уравнению в (2.38).

Напомним, что (2.18) — характеристическая система для многообразия (2.16). Аналогично этому, можно показать, что система (2.38) является характеристической для многообразия

$$W_3 : \quad F = 0, \quad F_1 \equiv x_n = 0, \quad F_{-1} \equiv \{F_1 F\} = F_n = 0 \quad (2.40)$$

где функция F_1 зависит только от последней компоненты x_n вектора x , откуда следует равенство $\{x_n F\} = F_n$.

Система аналогичная (2.38) имеет место и для другой стороны поверхности. Эти две системы могут быть проинтегрированы независимо. Каждая из них, в общем случае, порождает различные семейства кривых, лежащих в плоскости $x_n = 0$. В некоторых случаях, например, для фокальных поверхностей в дифференциальных играх, имеет место равенство $F_p = G_q$, и эти два семейства кривых совпадают. Однако нет необходимости интегрировать обе системы, так как после интегрирования, скажем, системы (2.38), кроме вектора p получаем также и вектор q для каждой точки $x \in \Gamma$ (поскольку $q_k = p_k$ и $q_n = Q_n(\bar{x}, u, \bar{p})$). Это позволяет продолжить конструирование функций $u_0(x), u_1(x)$ (или $u(x), v(x)$) на D_0, D_1 , используя регулярные характеристики.

Тун 2. Для D_1 -стороны поверхности можно получить ту же самую систему (2.38). Для D_0 -стороны следует упростить систему (2.19), используя равенства (2.35), (2.36). Это приводит к следующей системе сингулярных характеристик:

$$\begin{aligned} \dot{x}_k &= \lambda_+ G_k^+ + \lambda_- G_k^-, \quad k = 1, \dots, n-1 \\ \dot{x}_n &= \frac{G_n^-}{G_n^- - G_n^+} G_n^+ + \frac{G_n^+}{G_n^+ - G_n^-} G_n^- \\ \dot{u} &= \lambda_+ \langle p, G_p^+ \rangle + \lambda_- \langle p, G_p^- \rangle \\ \dot{q}_k &= -\lambda_+ (G_{x_k}^+ + q_k G_u^+) - \lambda_- (G_{x_k}^- + q_k G_u^-) \\ \dot{q}_n &= -\lambda_+ (G_{x_n}^+ + q_n G_u^+) - \lambda_- (G_{x_n}^- + q_n G_u^-) - \frac{\{G^- G^+\}}{G_n^- - G_n^+} \\ \lambda_+ &= \frac{G_n^-}{G_n^- - G_n^+}, \quad \lambda_- = \frac{G_n^+}{G_n^+ - G_n^-}, \quad \lambda_+ + \lambda_- = 1 \end{aligned} \quad (2.41)$$

При заданных значениях λ_{\pm} правая сторона уравнения для \dot{x}_n тождественно равна нулю.

Аналогично предыдущему типу поверхности, система (2.19) является характеристической для многообразия (2.17). Она порождается модифицированным многообразием с новой, более простой функцией F_1 :

$$W_3 : \quad F = 0, \quad F_1 \equiv x_n = 0, \quad F_{-1} = F^- = 0 \quad (2.42)$$

Тун 3. Сингулярные характеристики для обеих сторон Γ имеют форму аналогичную (2.41), записанную в обозначениях F, u, p и G, v, q соответственно.

Таким образом, для всех трех типов фокальных поверхностей получены две системы характеристик для D_0 - и D_1 -сторон Γ . Эти системы являются независимыми вследствие начального предположения о том, что Γ — гиперплоскость, и, следовательно, могут быть проинтегрированы по отдельности. Как упоминалось выше,

достаточно проинтегрировать только одну систему, например, для D_1 -стороны, а затем, используя равенства $q_k = p_k$, $k = 1, \dots, n-1$, найти вектор q для D_0 -стороны. Последняя компонента q_n этого вектора может быть найдена или как второй корень уравнения $F_n = 0$ (если имеет место касание характеристик на D_0 -стороне), или как корень уравнения $F^- = 0$ (в случае трансверсальности характеристик к D_0 -стороне).

2.4.3. Несимметричная поверхность, коллинеарные поля

В этом подразделе предполагается, что поверхность Γ — произвольная (не обязательно гиперплоскость), а векторы \dot{x} , соответствующие характеристическим полям с D_0 - и D_1 -сторон Γ , являются коллинеарными. Условие коллинеарности всегда имеет место в плоском случае ($n = 2$). Задачи такого типа будут рассмотрены в главе 7.

Тун 1. В этом случае условие коллинеарности означает, что равенство $F_p = c G_q$ верно для любой точки $x \in \Gamma$ при некотором ненулевом скалярном параметре c :

$$F_p(x, u, p) = c G_q(x, v, q) \quad (c = c(x, u, p, q))$$

Параметр c может быть выражен как отношение двух соответствующих компонент векторов F_p и G_q , например, последних:

$$c(x, u, p, q) = \frac{F_{p_n}(x, u, p)}{G_{q_n}(x, v, q)}$$

Для гамильтониана вида (2.2) имеем $c = 1$.

В отличие от дифференциально-алгебраических уравнений из предыдущего раздела, в рассматриваемом случае можно получить в чистом виде систему обыкновенных дифференциальных уравнений в переменных x, u, p, q , описывающую сингулярные характеристики для фокальной поверхности.

Запишем два варианта уравнений (2.18) для каждой из сторон поверхности Γ , используя при этом функции F^*, G^* из (2.31) вместе со вспомогательной дважды непрерывно дифференцируемой функцией $w(x)$:

$$\dot{x} = F_p, \quad \dot{u} = \langle p, F_p \rangle, \quad \dot{p} = -F_x - p F_u - \frac{\{\{F F_1^*\} F\}}{\{\{F_1^* F\} F_1^*\}} (p - r(x)) \quad (2.43)$$

$$x' = G_q, \quad u' = \langle q, G_q \rangle, \quad q' = -G_x - q G_u - \frac{\{\{G G_1^*\} G\}}{\{\{G_1^* G\} G_1^*\}} (q - r(x)) \quad (2.44)$$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \quad x' = \frac{dx}{d\tau}, \quad \frac{d\tau}{dt} = c(x, u, p, q)$$

Здесь применяются различные независимые переменные для разных сторон поверхности Γ , как это следует из предположения о коллинеарности. Эти переменные обозначены через t, τ и связаны дифференциальным соотношением $d\tau/dt = c$. Если $c = 1$, то переменные t и τ совпадают.

Соотношения (2.43), (2.44) не могут вместе рассматриваться как расширенная система в переменных x, u, p, q , так как их правая часть включает вектор градиента r , а также элементы матрицы Гессе w_{xx} для неизвестной вспомогательной

функции $w(x)$, которые входят в выражения для $\{\{FF_1^*\}F\}$, $\{\{GG_1^*\}G\}$. Эти переменные можно исключить следующим образом.

Аналогично (2.20), запишем условие того, что векторы $p - q$, $p - r$ и $q - r$, как нормали к Γ , коллинеарны:

$$p - r = a(p - q) = b(q - r) \quad (a, b \neq 0) \quad (2.45)$$

Продифференцировав первое равенство в (2.45) вдоль решения системы (2.43) с D_1 -стороны, то есть по t , получаем

$$\frac{d}{dt}(p - r) = \dot{p} - w_{xx}F_p = \dot{a}(p - q) + a(\dot{p} - \dot{q}) \quad (2.46)$$

Для \dot{q} здесь имеем

$$\dot{q} = \frac{dq}{dt} = \frac{dq}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = c q'$$

Подставим это соотношение в (2.46) и заменим в нем \dot{p} соответствующим выражением из (2.43), а q' из (2.44). Умножая далее каждый член в (2.46) скалярно на F_p (или на $cG_q = F_p$) и используя соотношения (2.43), (2.44), а также условия касания $\langle F_p, p - q \rangle = 0$ и $\langle G_p, p - q \rangle = 0$, приходим к равенству

$$-\langle F_x + pF_u, F_p \rangle - \langle w_{xx}F_p, F_p \rangle = a(c^2 \langle G_x + qG_u, G_q \rangle - \langle F_x + pF_u, F_p \rangle) \quad (2.47)$$

Сравнивая его с (2.22) и используя первое равенство в (2.45), получаем следующее выражение для третьего члена в уравнении для p в (2.43):

$$\begin{aligned} \frac{\{\{FF_1^*\}F\}}{\{\{F_1^*F\}F_1^*\}}(p - r) &= \frac{\{\{FF_1\}F\}^*}{\{\{F_1F\}F_1\}}(p - q) \\ \{\{FF_1\}F\}^* &= \langle F_{pp}(p - q), F_x \rangle - \langle F_{px}(p - q), F_p \rangle + F_u \langle F_{pp}(p - q), p \rangle - \\ &- \langle p, F_p \rangle \langle F_{pu}, p - q \rangle + \langle F_x + pF_u, F_p \rangle - c^2 \langle G_x + qG_u, G_q \rangle \\ F_1 &= u - v(x), \quad F_1^* = u - w(x) \end{aligned} \quad (2.48)$$

Здесь F_{pp} , F_{px} — квадратные матрицы, а F_{pu} — вектор вторых производных. Можно проверить, что $\{\{FF_1\}F\}^*$ не является классическими скобками Якоби, а представляет собой формальное выражение, полученное из скобок Якоби $\{\{FF_1\}F\}$ путем замены члена $\langle v_{xx}F_p, F_p \rangle$ (заметим, что вторая производная v_{xx} не существует) на $-c^2 \langle G_x + qG_u, G_q \rangle$. Выражение $\{\{F_1F\}F_1\}$ представляет собой классические скобки Якоби, так как включает в себя только первую производную от $v(x)$. Используя соотношение (2.48), можно записать уравнение для p в (2.43) в виде

$$\dot{p} = -F_x - pF_u - \frac{\{\{FF_1\}F\}^*}{\{\{F_1F\}F_1\}}(p - q) \equiv K(x, u, p, q)$$

где последнее равенство определяет функцию K .

Рассматривая аналогичным образом другую сторону поверхности Γ , имеем следующие уравнения для q :

$$q' = K(x, u, q, p), \quad \dot{q} = cK(x, u, q, p)$$

Здесь аргументы p и q функции K переставлены по сравнению с выражением для \dot{p} . Объединяя эти уравнения с условием коллинеарности, можно вместо (2.43), (2.44) получить следующую систему сингулярных характеристик порядка $3n + 1$:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F_p(x, u, p) = c G_q(x, u, q), \quad \dot{u} = \langle p, F_p \rangle = c \langle q, G_q \rangle \\ \dot{p} &= -F_x - p F_u - \frac{\{\{F F_1\} F\}^*}{\{\{F_1 F\} F_1\}} (p - q) = K(x, u, p, q) \\ \dot{q} &= -c(G_x + q G_u + \frac{\{\{G G_1\} G\}^*}{\{\{G_1 G\} G_1\}} (q - p)) = cK(x, u, q, p) \\ F_1 &= u - v(x), \quad G_1 = v - u(x) \end{aligned} \quad (2.49)$$

Тун 2. В этом случае система вида (2.18) верна для D_1 -стороны и вида (2.19) — для D_0 -стороны поверхности Γ с условием коллинеарности

$$F_p = \lambda_+ G_q^+ + \lambda_- G_q^-$$

С целью упрощения выкладок этот и следующие типы рассматриваются в предположении $c = 1$, то есть независимые переменные t и τ для D_1 и D_0 сторон совпадают. Правая часть системы (2.19) полностью выражена через x, u, p, q . Согласно (2.32), задача состоит в том, чтобы исключить вторые производные функции $v(x)$ в правой части (2.18). Для этого типа задач функция $v(x)$ является дважды дифференцируемой и процедура исключения проще по сравнению с (2.45)–(2.47). Используя производные по направлению, а также условие коллинеарности, можно получить

$$\begin{aligned} v_{xx} F_p &= \partial q / \partial F_p = \partial q / \partial (\lambda_+ G_q^+ + \lambda_- G_q^-) = \\ &= \dot{q} = -\lambda_+ (G_x^+ + q G_u^+) - \lambda_- (G_x^- + q G_u^-) - \frac{\{G^- G^+\}}{\{G_1 G^-\} + \{G^+ G_1\}} (q - p) \\ \langle v_{xx} F_p, F_p \rangle &= \langle -\lambda_+ (G_x^+ + q G_u^+) - \lambda_- (G_x^- + q G_u^-), F_p \rangle = \\ &= \langle -\lambda_+ (G_x^+ + q G_u^+) - \lambda_- (G_x^- + q G_u^-), \lambda_+ G_q^+ + \lambda_- G_q^- \rangle \end{aligned}$$

Введем еще одно формальное выражение с одним измененным членом

$$\{\{F F_1\} F\}^{**} = \{\{F F_1\} F\}$$

где сделана замена

$$\langle v_{xx} F_p, F_p \rangle = \langle -\lambda_+ (G_x^+ + q G_u^+) - \lambda_- (G_x^- + q G_u^-), \lambda_+ G_q^+ + \lambda_- G_q^- \rangle$$

Используя это выражение, можно написать следующую систему характеристик порядка $3n + 1$ для фокальной поверхности типа 2:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F_p(x, u, p), \quad \dot{u} = \langle p, F_p \rangle \\ \dot{p} &= -F_x - p F_u - \frac{\{\{F F_1\} F\}^{**}}{\{\{F_1 F\} F_1\}} (p - q) \\ \dot{q} &= -\lambda_+ (G_x^+ + q G_u^+) - \lambda_- (G_x^- + q G_u^-) - \frac{\{G^- G^+\}}{\{G_1 G^-\} + \{G^+ G_1\}} (q - p) \equiv Q(x, u, q, p) \end{aligned} \quad (2.50)$$

Тип 3. Условие коллинеарности в этом случае имеет вид

$$\lambda_+ F_p^+ + \lambda_- F_p^- = \lambda_+ G_q^+ + \lambda_- G_q^-$$

Два варианта (2.19) образуют следующую систему сингулярных характеристик с правой частью, зависящей только от x, u, p, q :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \lambda_+ F_p^+ + \lambda_- F_p^-, & \dot{u} &= \langle p, \lambda_+ F_p^+ + \lambda_- F_p^- \rangle \\ \dot{p} &= Q(x, u, p, q), & \dot{q} &= Q(x, u, q, p) \end{aligned} \quad (2.51)$$

Отметим перестановку аргументов p и q функции Q в последних двух уравнениях.

Общие замечания. Во всех трех случаях производную \dot{x} в первых уравнениях можно выразить двумя способами вследствие выполнения условия коллинеарности. Для типа 1, например, имеем $\dot{x} = F_p$ или $\dot{x} = c G_p$. Уравнение для u , в свою очередь, можно записать четырьмя различными способами: $\dot{u} = \langle p, \dot{x} \rangle = \langle q, \dot{x} \rangle$ с двумя вариантами выражений для \dot{x} . Это следует из равенства $\langle \dot{x}, p - q \rangle = 0$, которое является условием касания для системы (2.18) или свойством системы (2.19), унаследованным от (1.96).

Система вида (2.49) может быть получена также и для типов 2 и 3 при условии справедливости условия коллинеарности $\dot{x} = c x'$. В заключение отметим, что для типа 1 параметр $c(x, u, p, q)$ удовлетворяет условию

$$c(x, u, p, q) = \frac{1}{c(x, u, q, p)} \quad (2.52)$$

где аргументы p и q переставлены.

2.4.4. Вырожденные поверхности

Системы сингулярных характеристик вида (2.18), (2.19), (2.49) имеют в уравнениях для сопряженной переменной p член с дробью, умноженной на $p - q$. В общем случае и числитель и знаменатель такого члена не обращаются в нуль. Эти системы остаются справедливыми и в случае, когда числитель тождественно равен нулю, а знаменатель отличен от нуля. Например, для системы (2.18) это условие может быть записано следующим образом:

$$\{\{F F_1\}F\} = 0, \quad \{\{F_1 F\}F_1\} \neq 0$$

Подобные условия появляются, если регулярные характеристики имеют вид, аналогичный представленному на рис. 2.13. В этом случае поверхность Γ состоит из регулярных характеристик стороны D_1 . Здесь, как и в случае с рассеивающей поверхностью, не требуется специальной техники, чтобы построить поверхность Γ . Необходимо только проверить на ней выполнение условий (2.7). Подобные поверхности будем называть вырожденными.

Отметим еще один особый случай, когда система (2.19) принимает вид (2.18). Это имеет место, если тождественно выполняется равенство $\lambda_- = 0$, или, что эквивалентно, $\{F^+ F_1\} = 0$. В этом случае функцию F^- в (2.17) можно взять в виде $F^- = \{F^+ F_1\}$.

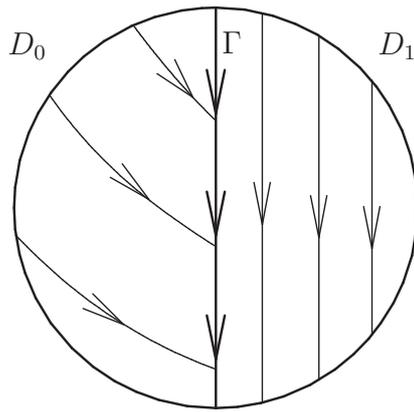


Рис. 2.13

2.4.5. Начальные условия и идентификация сингулярных поверхностей

Для построения однозначно определяемой поверхности Γ с помощью систем сингулярных характеристик (2.18), (2.19), (2.38), (2.41), (2.49)–(2.51) следует вначале определить начальное условие на некоторой интегральной поверхности Σ_2 . Такая поверхность, синтезированная на основе ее проекции $B = \pi\Sigma_2$, должна быть найдена при построении решения для каждой конкретной задачи. Не существует общего алгоритма, как точно определить проекцию B в начале решения задачи. Тем не менее, как правило, эта проекция является краем некоторой другой сингулярной поверхности или некоторой сингулярностью в начальных граничных условиях.

Для того чтобы определить тип сингулярности на поверхности Γ и, соответственно, какую из вышеуказанных систем уравнений следует рассматривать, требуется вначале проверить, какие из необходимых условий (2.16), (2.17), (2.31)–(2.33) выполняются на B . В некоторых случаях, чтобы удовлетворить этим условиям, требуется рассмотреть возможность присутствия нескольких типов сингулярностей одновременно. Такой подход к идентификации демонстрируется в следующем разделе. Более подробный анализ поиска нескольких типов сингулярностей будет рассмотрен в главе 7.

Эффективный подход к анализу развития сингулярностей в уравнениях Гамильтона – Якоби приведен в [34, 37].

2.4.6. Изменения для задач с терминальными значениями

Выкладки, аналогичные сделанным в разделах 2.1–2.4, могут быть также выполнены и для ЗТЗ. При этом в определениях рассеивающей, эквивокальной и фокальной поверхностей направление движения фазовой точки вдоль соседних регулярных характеристик должно быть изменено на противоположное. С сингулярностью вида $u = \min[u_0, u_1]$ совместим только негладкий гамильтониан вида $F = \max[F^+, F^-]$. В неравенствах, соответствующих необходимым условиям в (2.7), (2.8), (2.12), (2.15), (2.31)–(2.33), нужно выполнить замену $F \rightarrow -F$.

Для сингулярности вида $u = \max[u_0, u_1]$ в ЗТЗ следует рассматривать только негладкий гамильтониан вида $F = \min[F^+, F^-]$. Неравенства в необходимых условиях должны быть заменены на противоположные по сравнению с ЗНЗ и функцией $u = \min[u_0, u_1]$.

2.5. Пример задачи с заданными начальными условиями

2.5.1. Постановка задачи

В разделе будет продемонстрировано на примере, как использовать необходимые условия, сформулированные выше в данной главе, для аналитического, а также численного построения вязкостного решения. Доказательство достаточности будет приведено в кратком виде.

В качестве ЗНЗ возьмем уравнение (1.36) из предыдущей главы, но изменим граничные (начальные) условия, добавив негладкий член. Рассмотрим следующую задачу Коши (с заданными начальными условиями) относительно функции $u(x, y)$ двух переменных $x, y \in \mathbb{R}^1$:

$$\begin{aligned} F(x, y, p, q) &= p + \sqrt{a^2 + q^2} - x\sqrt{b^2 + q^2} = 0, \quad x > 0 \\ u(0, y) &= -|y| + cy \quad (p = \partial u / \partial x, \quad q = \partial u / \partial y, \quad a, b, c = \text{const}) \end{aligned} \quad (2.53)$$

Здесь снова применена замена обозначений переменных, а именно, вместо переменных x_1, x_2, p_1, p_2 используются x, y, p, q . Параметры a, b, c — действительные положительные числа, значение c ограничивается неравенством $0 \leq c < 1$. Случай $-1 \leq c < 0$ может быть сведен к рассматриваемому с помощью замены $y \rightarrow -y$. Данная замена показывает, что при $c = 0$ задача имеет симметрию относительно оси x . Задача с $c = 0$ называется симметричной задачей и была рассмотрена в [63].

Задача (2.53) представляет собой частный случай (2.2), где областью Ω является правая полуплоскость, а граничной поверхностью M — ось y . Наша цель заключается в том, чтобы с помощью метода характеристик построить вязкостное решение для задачи (2.53). Можно проверить, что в данном случае гамильтониан является гладким, то есть $F \in C^2$. Однако начальное условие имеет негладкость вида

$$u(0, y) = \min[y + cy, -y + cy]$$

Наличие этого типа сингулярности можно ожидать и в вязкостном решении.

Система регулярных характеристик (1.6) и соответствующие начальные условия (полученные из граничных условий вида (1.17)) для задачи (2.53) принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F_p = 1, \quad \dot{y} = F_q = q/\sqrt{a^2 + q^2} - xq/\sqrt{b^2 + q^2} \\ \dot{u} &= pF_p + qF_q, \quad \dot{p} = -F_x = \sqrt{b^2 + q^2}, \quad \dot{q} = -F_y = 0 \\ p &= -\sqrt{a^2 + k_+^2}, \quad q = c - 1 = k_+, \quad x = 0, \quad y > 0 \\ p &= -\sqrt{a^2 + k_-^2}, \quad q = c + 1 = k_-, \quad x = 0, \quad y < 0 \\ u &= -|y| + cy, \quad x = 0, \quad y \in \mathbb{R}^1 \end{aligned} \quad (2.54)$$

Поскольку $\dot{x} = 1$, то переменную x можно рассматривать в качестве времени, то есть параметра дифференцирования в (2.54). Так как переменная q постоянна вдоль решений (2.54), а производная \dot{y} линейна по x , то после интегрирования этой системы получаем, что регулярные характеристики задачи (2.54) образуют следующее однопараметрическое семейство парабол в плоскости (x, y) с вертикальной осью симметрии $x = x_s$:

$$y - C = \frac{qx}{\sqrt{a^2 + q^2}} - \frac{qx^2}{2\sqrt{b^2 + q^2}}, \quad C = \text{const}, \quad x_s = \sqrt{\frac{b^2 + q^2}{a^2 + q^2}} \quad (2.55)$$

Учитывая в этом семействе начальные условия $q = k_+$ и $q = k_-$, для верхней и нижней частей оси y имеем, соответственно, верхнее и нижнее семейства характеристик с осями симметрии

$$x_s^+ = \sqrt{\frac{b^2 + k_+^2}{a^2 + k_+^2}}, \quad x_s^- = \sqrt{\frac{b^2 + k_-^2}{a^2 + k_-^2}} \quad (2.56)$$

Эти семейства определяют две гладкие ветви решений $u^+(x, y)$ и $u^-(x, y)$. Интегрируя в (2.54) уравнение для u , которое также линейно по x , с начальными значениями $q = k_+$ и $q = k_-$ при положительных и отрицательных y , соответственно, можно получить ветви решений, образующие следующую функцию, называемую первичным решением:

$$u(x, y) = \min[u^+(x, y), u^-(x, y)] \quad (2.57)$$

$$u^\pm(x, y) = k_\pm y + \frac{1}{2}x^2 \sqrt{b^2 + k_\pm^2} - x\sqrt{a^2 + k_\pm^2}$$

Верхнее и нижнее семейства парабол пересекаются в некоторой подобласти (x, y) -плоскости, где определены обе ветви u^\pm . Приравнивая эти ветви, можно найти кривую Γ_0 , представляющую собой параболу, на которой имеет место совпадение $u^+ = u^-$:

$$\Gamma_0: \quad y = \alpha x - \beta x^2/2 \quad (2.58)$$

$$\alpha = \frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + k_-^2} - \sqrt{a^2 + k_+^2}), \quad \beta = \frac{1}{2}(\sqrt{b^2 + k_-^2} - \sqrt{b^2 + k_+^2})$$

Из (2.54) и (2.58) получаем, что одна из парабол верхнего (нижнего) семейства регулярных характеристик (2.54) касается параболы Γ_0 в точке (x_t^+, y_t^+) (в точке (x_t^-, y_t^-)):

$$x_t^\pm = \frac{1 - \alpha^2}{1 - \beta^2} x_s^\pm, \quad y_t^\pm = \alpha x_t^\pm - \beta (x_t^\pm)^2/2 \quad (2.59)$$

Такие параболы назовем критическими. Вычислим также координаты вершины параболы Γ_0 :

$$x_* = \alpha/\beta, \quad y_* = \alpha^2/2\beta \quad (2.60)$$

Эти точки указаны на рис. 2.17.

Из анализа уравнений (2.54) можно установить, что поведение регулярных характеристик в малой окрестности параболы Γ_0 на интервале $x \in (0, x_m)$, $x_m = \min[x_t^+, x_t^-]$, соответствует рассеивающей поверхности (линии), которая рассматривалась в разделе 2.2. Далее будет показано, что некоторая часть Γ_0 действительно является рассеивающей линией. Часть области $x > 0$ выше (ниже) Γ_0 будем

обозначать через D_0^+ (D_0^-). Таким образом, обозначения u^+, u^-, D_0^+, D_0^- здесь соответствуют обозначениям u_1, u_0, D_1, D_0 из раздела 2.2.

В случае симметрии, когда $c = 0$, парабола (2.58) вырождается в прямую линию. Положительная часть оси x и все пять чисел x_s^\pm, x_t^\pm, x_* становятся равными одной и той же величине; обозначим ее x_0 . Первичное решение упрощается следующим образом:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \min[u^+, u^-] = -|y| + \frac{1}{2}x^2\sqrt{b^2+1} - x\sqrt{a^2+1} \\ u^\pm(x, y) &= \mp y + \frac{1}{2}x^2\sqrt{b^2+1} - x\sqrt{a^2+1} \end{aligned} \quad (2.61)$$

Рассмотрим сначала симметричный (и более простой) случай, когда $c = 0$; затем приведем необходимые изменения для случая $c \neq 0$.

На основании соотношения между двумя другими параметрами задачи удобно различать три возможных случая

$$\begin{aligned} 1) \quad a < b & \quad (1 < x_0 < x_1 < x_2) \\ 2) \quad a = b & \quad (1 = x_0 = x_1 = x_2) \\ 3) \quad a > b & \quad (1 > x_0 > x_1 > x_2) \end{aligned} \quad (2.62)$$

где

$$x_0 = \sqrt{\frac{b^2+1}{a^2+1}}, \quad x_1 = \frac{\sqrt{a^2+1}-a}{\sqrt{b^2+1}-b}, \quad x_2 = \frac{b}{a}$$

Прежде, всего с помощью проверки неравенства (2.7) следует найти ту часть Γ_0 , которая является рассеивающей линией. Градиенты с D_0^+ - и D_0^- -сторон имеют следующие компоненты:

$$p^+ = p^- = x\sqrt{b^2+1} - \sqrt{a^2+1}, \quad q^+ = -q^- = -1, \quad x \geq 0, \quad y = 0$$

Введя в неравенстве (2.7) параметр $\theta = 2\lambda - 1$ вместо λ , можно записать это неравенство в виде

$$\begin{aligned} f(\theta) &= F(x, 0, \frac{1+\theta}{2}p^+ + \frac{1-\theta}{2}p^-, \frac{1+\theta}{2}q^+ + \frac{1-\theta}{2}q^-) = \\ &= x\sqrt{b^2+1} - \sqrt{a^2+1} + \sqrt{a^2+\theta^2} - x\sqrt{b^2+\theta^2} \leq 0, \quad |\theta| \leq 1 \end{aligned} \quad (2.63)$$

Полученное соотношение будет далее проанализировано для каждого случая отдельно.

2.5.2. Случай 1), $a < b$

Можно проверить, что для рассматриваемого случая неравенство (2.63) выполняется при любых θ и $x : \theta \leq x \leq x_0$. Таким образом, все точки отрезка $[0, x_0]$, являющегося частью поверхности Γ_0 , удовлетворяют условиям вязкостного решения. С другой стороны, прямые расчеты показывают, что при $x > x_0$ выполняется неравенство $f'(1) < 0$, которое противоречит (2.8). Это означает, что рассеивающая поверхность заканчивается в точке $(x_0, 0)$.

Обе критические параболы касаются Γ_0 (оси x) в точке $(x_0, 0)$. Это позволяет предположить, что точка $(x_0, 0)$ может являться началом фокальной линии. Поскольку исходная задача двумерная и гамильтониан гладкий, то условие коллинеарности из раздела 2.4.3 выполняется и уравнения для фокальной поверхности (линии) имеют вид (2.49). Отметим, что для рассматриваемой задачи есть и более простой путь нахождения фокальной линии. Можно показать, что для фокальной линии справедливо уравнение

$$\dot{y} = F_q = 0 \quad (2.64)$$

Действительно, для каждой стороны фокальной линии можно выписать первоначальное уравнение (2.53) и условие касания (см. (2.31)):

$$\begin{aligned} p + \sqrt{a^2 + q^2} - x\sqrt{b^2 + q^2} &= 0, & p &= p^\pm, & q &= q^\pm \\ p^+ - p^- + (q^+ - q^-)F_q(x, q) &= 0, & q &= q^\pm \\ F_q &= \frac{q}{\sqrt{a^2 + q^2}} - \frac{xq}{\sqrt{b^2 + q^2}} \end{aligned} \quad (2.65)$$

Эта система из четырех уравнений относительно неизвестных p^\pm, q^\pm имеет одно тривиальное решение $p^+ = p^-, q^+ = q^-$ и одно нетривиальное решение $p^+ = p^-, q^+ = -q^-$. Для второго решения, которое соответствует сингулярной поверхности, из (2.65) следует равенство $F_q = 0$. Таким образом, фокальная линия также является прямой (частью оси x), и здесь применима методика раздела 2.4.2.

Из равенства $F_q = 0$ (см. (2.64)) можно найти значение переменной q в точке $x = \xi, y = 0$ для обеих сторон оси x :

$$\begin{aligned} q^\pm &= \mp a\sqrt{(x_2^2 - \xi^2)/(\xi^2 - 1)}, & x_0 &\leq \xi \leq x_2 \\ 0 &\leq |q| \leq 1, & x &= \xi, & y &= 0 \end{aligned} \quad (2.66)$$

Поскольку задача имеет симметрию относительно оси x , будем рассматривать только верхнюю сторону, опуская индекс “+”. Это означает, что далее все величины без индекса относятся к верхнему квадранту. Подстановка q из (2.66) в (2.55) приводит к семейству характеристик

$$C = \pm\xi/2\sqrt{(x_2^2 - \xi^2)/(x_2^2 - 1)}, \quad x_0 \leq \xi \leq x_2, \quad x \geq x_s = \xi$$

которое заполняет оставшуюся часть полуплоскости $x \geq 0$. Таким образом, фокальная линия заканчивается в точке $x = x_2$. Последние две характеристики верхнего и нижнего семейств, проходящие через точку $(x_2, 0)$, совпадают друг с другом и с полуосью $x \geq x_2$. Соответствующий фазовый портрет характеристик приведен на рис. 2.14.

Значение функции u в точке (x, y) может быть найдено путем интегрирования третьего уравнения в (2.54) вдоль характеристики:

$$u(x, y) = \int_\xi^x (p + qF_q)dx \quad (2.67)$$

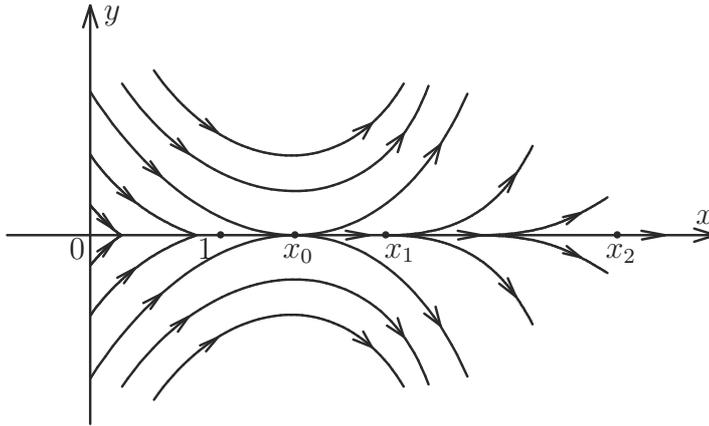


Рис. 2.14

Здесь $\xi = \xi(x, y)$ соответствует характеристике, проходящей через точку (x, y) . Величина $q(\xi)$, являющаяся постоянной вдоль любой регулярной характеристики, должна быть взята из (2.54), а p можно найти из уравнения $F = 0$.

Полученная в результате функция будет непрерывной в Ω и гладкой на всем Ω , за исключением полуинтервала $[0, x_2)$. На указанном полуинтервале она удовлетворяет необходимому условию для вязкостного решения, а также уравнению (2.54). Это означает, что построенная функция является единственным вязкостным решением ЗНЗ (2.54). Таким образом, в рассматриваемом случае одновременно существуют две сингулярные линии — рассеивающая и фокальная. Следует сделать одно замечание: несмотря на гладкость решения на полуоси $x \geq x_2, y = 0$, вторые производные с верхней и нижней сторон оси x имеют здесь различные пределы, откуда, согласно подразделу 2.1.2, следует сингулярность этой полуоси.

2.5.3. Случай 2), $a = b$

В этом случае точка x_2 совпадает с x_0 , $x_2 = x_0 = 1$, фокальная линия исчезает, и может быть построено следующее однопараметрическое семейство характеристик (воронка с параметром q), стартующих из точки $(x_0, 0)$:

$$y(x) = -q(x-1)^2 / [2\sqrt{a^2 + q^2}], \quad |q| \leq 1 \quad (2.68)$$

Интервал $(0, x_0)$ здесь снова является рассеивающей линией, см. рис. 2.15. Интеграл (2.67) может быть вычислен вдоль характеристик (2.68) при $a = b$ и $\xi = 1$. Таким образом, в области справа от критических парабол (с $|q| = 1$ в (2.68)) получаем так называемое вторичное решение. Это решение обозначим через $v(x, y)$:

$$v(x, y) = u(x, y) = -1/2\sqrt{a^2 + 1} + a\sqrt{(x-1)^4/4 - y^2} \quad (2.69)$$

$$|y| \leq 1/2(x-1)^2/\sqrt{a^2 + 1}, \quad x \geq 1$$

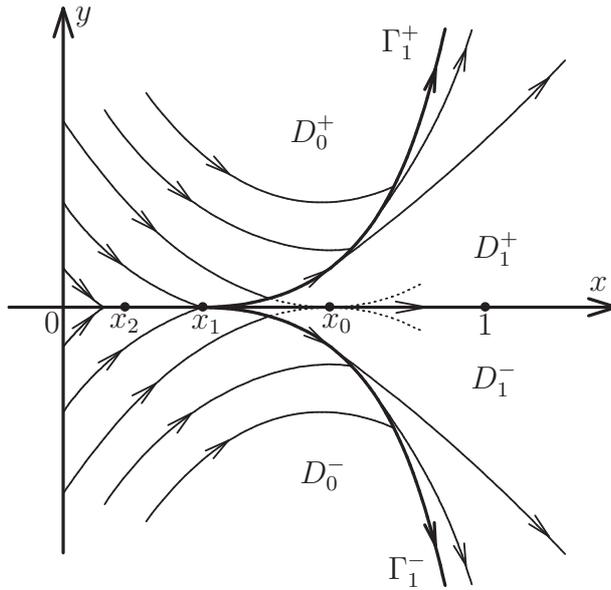


Рис. 2.16

Интервал (x_1, x_0) не является частью рассеивающей поверхности и должен быть исключен из рассмотрения (хотя поведение прилегающих к нему характеристик с геометрической точки зрения соответствует рассеивающей поверхности). Таким образом, рассеивающая поверхность заканчивается при $x = x_1$, как показано на рис. 2.16.

Чтобы идентифицировать условия, связанные с краем рассеивающей линии, рассмотрим точку $\theta^* \in [-1, 1]$, доставляющую функции $f(\theta)$ внутренний максимум, в которой и сама эта функция обращается в нуль:

$$f'(\theta^*) = 0, \quad f(\theta^*) = 0 \quad (2.71)$$

Рассмотрим также следующий вектор (p^*, q^*) (см. (2.63)):

$$p^* = \frac{1 + \theta^*}{2} p^+ + \frac{1 - \theta^*}{2} p^-, \quad q^* = \frac{1 + \theta^*}{2} q^+ + \frac{1 - \theta^*}{2} q^- \quad (2.72)$$

Используя (2.8), можно показать, что векторы (p^+, q^+) , (p^*, q^*) удовлетворяют равенству (2.12) (как векторы p_0, p_1) для экивокальной поверхности, рис. 2.8. Другая пара векторов (p^-, q^-) , (p^*, q^*) обладает тем же свойством. Это позволяет предположить, что из точки $x = x_1$ стартуют две экивокальные линии Γ_1^+ и Γ_1^- , другими словами, имеет место бифуркация.

В соответствии с этим предположением полуплоскость Ω представима в виде $\Omega = D_0 + D_1$, где $D_0 = D_0^+ + D_0^-$ — первичная область слева от экивокальных линий $\Gamma_1 = \Gamma_1^+ + \Gamma_1^-$, а $D_1 = D_1^+ + D_1^-$ — область справа от них, см. рис. 2.16. В D_0 решение задачи (2.53) задается (2.61). Для решения в области D_1 будет использовано

обозначение $v(x, y)$. При гладком гамильтониане F в (2.53) уравнения сингулярных характеристик (2.18), в которых $F_1 = u - u^+$ для верхней ветви Γ_1^+ и $F_1 = u - u^-$ для нижней ветви Γ_1^- , принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{y} &= F_q, & \dot{q} &= \frac{\sqrt{b^2 + k^2} - (b^2 + kq)/\sqrt{b^2 + q^2}}{(q - k)F_{qq}}, & x &\geq x_1 \\ y(x_1) &= 0, & q(x_1) &= q^* = 0 & (q &= \partial v / \partial y, \quad k = k_{\pm} = \mp 1) \end{aligned} \quad (2.73)$$

Уравнение $\dot{x} = F_p = 1$ здесь опущено, так же как и уравнение для p , поскольку после интегрирования (2.73) последнее может быть получено из равенства $F = 0$. Величина q^* в (2.72) обращается в нуль, так как $\theta^* = 0$ и $q^+ = -q^-$. Использование одной и той же величины q^* для обеих ветвей означает, что функция $v(x, y)$ имеет непрерывный градиент вплоть до точки $(x_1, 0)$.

Отметим, что в (2.73) имеет место упрощение системы (2.18) вследствие малой размерности задачи. Другой поход к получению (2.73) будет далее развит в главе 7.

Анализ показывает, что уравнения (2.73) определяют две гладкие кривые, соответствующие $k = k_{\pm}$ и касательные к оси x в точке $x = x_1$, и $q \rightarrow k$ при $x \rightarrow +\infty$. Для получения вторичного решения $v(x, y)$ в области D_1 следует проинтегрировать систему регулярных характеристик (2.54) с начальными условиями на эквивокальной кривой Γ_1 . Начальные значения p и q вычисляются в процессе построения эквивокальной кривой.

Существует одна регулярная характеристика с $q = q^*$, касающаяся обеих ветвей Γ_1^+ и Γ_1^- (см. рис. 2.18), которая в случае симметрии ($c = 0$) совпадает с полуосью $x \geq x_1$. Несмотря на то что функция $v(x, y)$ на этой полуоси гладкая, можно показать, что вторые производные на ней не являются непрерывными. Последнее делает полуось $x \geq x_1$ сингулярной линией.

В результате, вязкостное решение (2.53) представляет собой функцию гладкую повсюду, за исключением рассеивающего отрезка и эквивокальных линий, где она удовлетворяет условиям для вязкостного решения из разделов 2.2, 2.3.

2.5.5. Некоторые изменения для несимметричного случая

При $c > 0$ рассеивающая линия Γ является частью параболы (2.58). Используя в (2.63) производные функций из (2.57), а также координаты точки $(x, \alpha x - \beta x^2/2)$ параболы (2.58) в качестве первых двух аргументов F , получаем условие (2.63) с модифицированной функцией $f(\theta)$:

$$\begin{aligned} f(\theta) &= -\alpha_1 + \beta_1 x + (\alpha - \beta x)\theta + \\ &+ \sqrt{a^2 + (\theta - c)^2} - x\sqrt{b^2 + (\theta - c)^2} \leq 0, \quad |\theta| \leq 1 \\ \alpha_1 &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{a^2 + k_-^2} + \sqrt{a^2 + k_+^2} \right), \quad \beta_1 = \frac{1}{2} \left(\sqrt{b^2 + k_-^2} + \sqrt{b^2 + k_+^2} \right) \end{aligned} \quad (2.74)$$

где α и β определяются равенствами в (2.58).

Случай $a < b$. В этом случае точки (2.56), (2.59), (2.60) располагаются в следующем порядке (см. рис. 2.17):

$$1 < x_t^- < x_s^- < x_* < x_t^+ < x_s^+$$

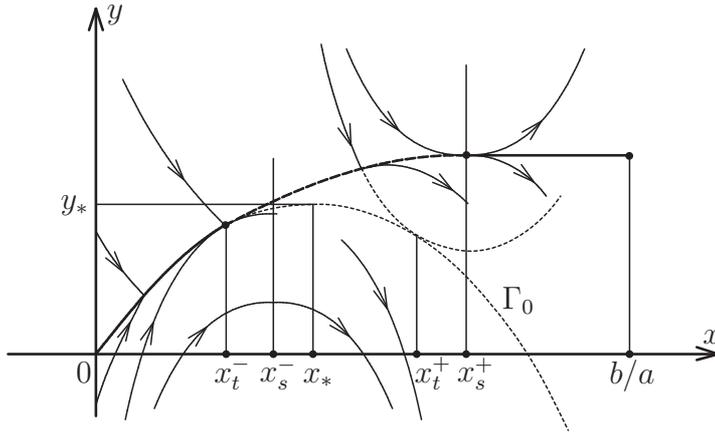


Рис. 2.17

Можно установить, что условие (2.74) выполняется при $x \in [0, x_t^-]$ и нарушается для $x > x_t^-$. В точке x_t^- , определяемой по (2.59), происходит касание Γ_0 с нижней критической параболой. Проверка условий в окрестности точки x_t^- показывает, что рассеивающая линия продолжается экивокальной линией, которую можно построить численно путем интегрирования (2.73) при $k = k_+$ с начальными условиями

$$y(x_t^-) = y_t^-, \quad q(x_t^-) = k_-$$

Экивокальная линия заканчивается тогда, когда ее в некоторой точке (x_f, y_f) касается одна из верхних первичных парабол, подготавливая тем самым условия для появления фокальной линии. В точке (x_f, y_f) должны выполняться соотношения (2.65). Получаем

$$x_f = x_s^+, \quad q^+ = -q^- = k_+$$

где x_s^+ задается в (2.56). Анализ фокальной линии, которая заканчивается при $x = b/a$, аналогичен симметричному случаю.

Таким образом, возмущение с ненулевым значением c симметричной задачи приводит к появлению криволинейной (параболической) рассеивающей линии и к вставке экивокальной линии между рассеивающей и фокальной. Последняя, так же как и в невозмущенной задаче, представляет собой прямолинейный отрезок, см. рис. 2.17.

Случай $a = b$. Это случай является предельным для предыдущего, когда экивокальная и фокальная линии вырождаются в точку

$$x = x_f = x_s^\pm = x_t^\pm = x_* = 1, \quad y = y_* = \alpha/2$$

которая представляет собой вершину параболы Γ_0 . Однопараметрическая интегральная воронка характеристик, представляющая собой обобщение (2.68), имеет вид

$$y(x) = \frac{\alpha}{2} - \frac{q(x-1)^2}{2\sqrt{a^2 + q^2}}, \quad k_+ \leq q \leq k_-$$

Соответствующее вторичное решение (2.69) задается равенством

$$v(x, y) = \frac{1}{4} \left(k_+ \sqrt{a^2 + k_-^2} - k_- \sqrt{a^2 + k_+^2} \right) + \frac{a}{2} \sqrt{(x-1)^4 - (2y-\alpha)^2}$$

Таким образом, если сравнить этот случай с симметричным, то картина качественно не меняется за исключением того, что рассеивающей линией вместо прямой здесь является парабола, см. рис. 2.17.

Случай $a > b$. В этом случае точки (2.56), (2.59), (2.60) располагаются в следующем порядке:

$$x_s^+ < x_t^+ < x_* < x_s^- < x_t^- < 1$$

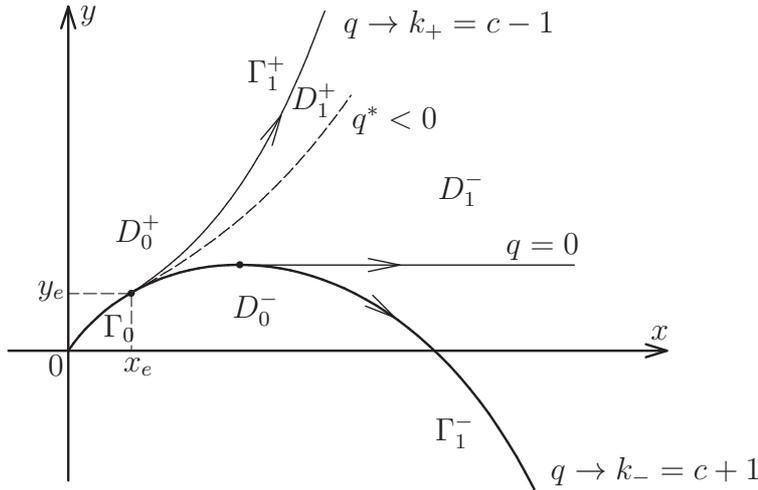


Рис. 2.18

При достаточно малом c , $0 \leq c < c^*$, имеем картину, аналогичную случаю $c = 0$, с параболической линией рассеивания (вместо отрезка прямой), см. рис. 2.18. Рассеивающая линия заканчивается в точке (x_e, y_e) , которая определяется условиями (2.71), означающими, что уравнение $f(\theta) = 0$ имеет двойной корень в некоторой точке $\theta \in (-1, 1)$. Обе экивокальные линии строятся интегрированием (2.73) с начальными условиями

$$y(x_e) = \alpha x_e - \beta x_e^2 / 2, \quad q(x_e) = q^*$$

где q^* имеет вид (2.72). При относительно больших c , $c^* \leq c < 1$, все с геометрической точки зрения рассеивающие точки $x \in [0, x_t^+]$ удовлетворяют условию (2.74), и соотношения (2.71) имеют место при $\theta^* = 1$. Критическое значение c^* может быть определено как наименьшая величина, для которой двойной корень уравнения $f(\theta) = 0$ соответствует $\theta = 1$. В этом случае бифуркация отсутствует и, как показывают условия на конце рассеивающей поверхности, существует только одна нижняя экивокальная линия Γ_1^- .

2.5.6. Заключительные замечания

Приведенные выше построения показывают, что все сингулярные линии в задаче соответствуют виду $u = \min[u_0, u_1]$, обусловленному граничным условием.

Определенное сглаживание решения имеет место для случаев 1) и 2), когда линия скачка градиента заканчивается при $x = b/a$. В случае 3) этот вид сингулярности стремится к бесконечности вдоль одной или двух эквивокальных линий.

Наличие сингулярных линий меняет ситуацию регулярного случая, при котором только одна точка границы определяет решение в фиксированной внутренней точке области Ω . Например, значение решения в некоторой области (x, y) -плоскости задают точки фокальной линии, как в случае 1). Фокальная линия начинается на правом конце рассеивающей линии, которая определяется классическими характеристиками, стартующими из точек $|y| < y_c$ границы, где значения $\pm y_c$ соответствуют критическим параболом. Если задать граничные условия в виде

$$u(0, y) = -|y| + cy + w(y)$$

где $w(y)$ — некоторая гладкая и достаточно малая функция, обращающаяся в нуль вне интервала $|y| < y_c$, то положение точки конца рассеивающей линии также изменится. Это приведет к возмущению фокальной линии и дальнейшему возмущению решения в тех точках, где решение определяется точками фокальной линии. В результате получаем, что для каждой из таких точек область влияния представляет собой весь интервал $(-y_c, y_c)$, а не единственную точку границы. Такая особенность, как известно, свойственна задачам второго порядка с заданными граничными значениями.

Упражнения

2.1. Используя правило дифференцирования сложной функции, доказать справедливость соотношений (2.8) и (2.12) для производных $f'(\lambda)$ и $f''(\lambda)$.

2.2. Доказать, что функция $u = h(x) = \min[x, 1 - x]$:

$$h(x) = x, \quad x \in [0, 1/2]; \quad h(x) = 1 - x, \quad x \in [1/2, 1]$$

является вязкостным решением $I(F, M)$ и $T(-F, M)$ для скалярной задачи

$$F \equiv u_x^2 - 1 = 0, \quad x \in (0, 1); \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0$$

где $\Omega = (0, 1)$, а $M = \partial\Omega$ состоит из двух точек $x = 0$ и $x = 1$. Показать, что функция $u = -h(x) = \max[-x, x - 1]$ представляет собой вязкостное решение $T(F, M)$ и $I(-F, M)$.

2.3. Вывести линеаризованное уравнение для (2.27) относительно δz вблизи опорного решения $\zeta(t)$ системы (2.28).

2.4. Показать, что система (2.38) без уравнений для x_n, p_n является системой регулярных характеристик, соответствующих гамильтониану (2.39).

2.5. Показать, что системы (2.38) и (2.41) являются системами характеристик многообразий (2.40) и (2.42) соответственно.

2.6. Проверить условие (2.52).

2.7. Используя общие уравнения (2.18), получить систему (2.73) для сингулярных линий Γ_1^+ и Γ_1^- .

2.8. Для каждого случая задачи раздела 2.5 найти на плоскости x, y множество точек, в которых значение решения зависит от граничных условий в более чем одной точке оси y .

ГЛАВА 3

УЧП первого порядка в вариационном исчислении, оптимальном управлении и дифференциальных играх

3.1. Уравнение Гамильтона – Якоби в вариационном исчислении

3.1.1. Формула первой вариации

Нелинейные уравнения в частных производных первого порядка возникают, как правило, в экстремальных задачах динамики, то есть в вариационном исчислении, оптимальном управлении и дифференциальных играх. В вариационном исчислении такое уравнение называется уравнением Гамильтона – Якоби.

Основная задача вариационного исчисления – минимизировать интегральный функционал вида

$$J[x] = \int_{t_0}^{t_1} L(x, \dot{x}, t) dt \rightarrow \min_{x(t)} \quad (3.1)$$

Здесь допустимые кривые $x = x(t)$ – гладкие n -вектор-функции скалярного параметра t , $x \in \mathbb{R}^n$, $x(t) \in C^1[t_0, t_1]$; скалярная функция $L \in C^2$ называется лагранжианом. Задача минимизации рассматривается с граничными условиями

$$(x^0, t_0) \in M_0, \quad (x^1, t_1) \in M_1 \quad (x^0 = x(t_0), \quad x^1 = x(t_1)) \quad (3.2)$$

где $M_0, M_1 \subset \mathbb{R}^{n+1}$ – заданные поверхности (многообразия) некоторых размерностей в (x, t) -пространстве. В случае, когда M_0, M_1 вырождаются до отдельных точек, имеем задачу с фиксированными граничными точками: $x(t_0) = x^0$, $x(t_1) = x^1$.

Рассмотрим некоторую номинальную допустимую функцию $x(t) \in C^1[t_0, t_1]$. Зафиксируем два числа $\delta t_0, \delta t_1$, два вектора $\delta x^0, \delta x^1$ и гладкую n -вектор-функцию $h(t) \in C^1[t_0, t_1]$, такую что

$$h(t_0) = \delta x^0, \quad h(t_1) = \delta x^1, \quad (\delta x^0, \delta t_0) \in T_{x^0, t_0} M_0, \quad (\delta x^1, \delta t_1) \in T_{x^1, t_1} M_1$$

Таким образом, значения $(\delta x^i, \delta t_i)$ принадлежат касательному пространству к многообразию M_i , $i = 0, 1$. Положим

$$\delta X = (\delta t_0, \delta t_1, \delta x^0, \delta x^1; h(t), t \in [t_0, t_1]) \quad (3.3)$$

Множество δX , состоящее из $2n + 2$ чисел и n скалярных функций, называется вариацией номинальной кривой $x(t)$, $t \in [t_0, t_1]$.

Пусть \bar{t} — новое время, линейно зависящее от t :

$$\bar{t} = t + \varepsilon \frac{\delta t_1(t_0 - t) - \delta t_0(t_1 - t)}{t_1 - t_0 + \varepsilon(\delta t_1 - \delta t_0)}, \quad |\varepsilon| \leq 1 \quad (3.4)$$

Получаем отображение (при достаточно малых $\delta t_0, \delta t_1$) отрезка

$$a_0(\varepsilon) = t_0 + \delta t_0 \varepsilon \leq t \leq t_1 + \delta t_1 \varepsilon = a_1(\varepsilon) \quad (3.5)$$

t -оси в отрезок $[t_0, t_1]$ \bar{t} -оси.

Введем однопараметрическое семейство допустимых функций

$$z(t, \varepsilon) = x(\bar{t}(t, \varepsilon)) + \varepsilon h(\bar{t}(t, \varepsilon)), \quad a_0(\varepsilon) \leq t \leq a_1(\varepsilon), \quad |\varepsilon| \leq 1 \quad (3.6)$$

каждая из которых определена на своем интервале $[a_0(\varepsilon), a_1(\varepsilon)]$. Отметим, что в силу (3.4), (3.5) значения функции (3.6) на отрезке $[a_0(\varepsilon), a_1(\varepsilon)]$ выражаются через значения $x(t), h(t)$ на номинальном отрезке $[t_0, t_1]$. При $\varepsilon = 0$ получаем из (3.4)–(3.6), что

$$t = \bar{t}, \quad z(t, 0) = x(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1 \quad (\varepsilon = 0) \quad (3.7)$$

Рассмотрим функционал (3.1) на кривых семейства (3.6) как функцию от ε :

$$\varphi(\varepsilon) = \int_{a_0(\varepsilon)}^{a_1(\varepsilon)} L \left(z(t, \varepsilon), \frac{\partial z(t, \varepsilon)}{\partial t}, t \right) dt, \quad |\varepsilon| \leq 1 \quad (3.8)$$

Значение $\varphi'(0)$ называется первой вариацией функционала (3.1), соответствующей вариации δX в (3.3) номинальной функции $x(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, и обозначается δJ или $\delta J[x, \delta X]$. Используя правила дифференцирования параметрического интеграла вида (3.8) и интегрирование по частям, можно получить следующее выражение для первой вариации:

$$\begin{aligned} \delta J[x, \delta X] = \varphi'(0) &= \int_{t_0}^{t_1} \left\langle \left(L_x - \frac{d}{dt} L_{\dot{x}} \right), \bar{h}(t) \right\rangle dt + \\ &+ \left(\langle \delta x^1, L_{\dot{x}} \rangle - \bar{H} \delta t_1 \right) \Big|_{t=t_1} - \left(\langle \delta x^0, L_{\dot{x}} \rangle - \bar{H} \delta t_0 \right) \Big|_{t=t_0} \\ \bar{h}(t) &= h(t) + \dot{x} \frac{\partial \bar{t}}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = h(t) + \dot{x}(t) \frac{\delta t_1(t_0 - t) - \delta t_0(t_1 - t)}{t_1 - t_0} \\ \bar{H} &= \langle \dot{x}, L_{\dot{x}} \rangle - L = \sum_{i=1}^n \dot{x}_i L_{\dot{x}_i} - L \end{aligned} \quad (3.9)$$

Пусть номинальная функция $x(t)$ доставляет минимум в (3.1). Следовательно, функция $\varphi(\varepsilon)$ в (3.8) имеет локальный минимум при $\varepsilon = 0$. Это дает основное необходимое условие вариационного исчисления, которое устанавливает, что первая вариация (3.9) должна быть равна нулю, то есть

$$\delta J[x, \delta X] = 0$$

для всех допустимых δX . Так как δX с $\delta t_i = 0$, $\delta x^i = 0$, $i = 0, 1$, допустимо, основная лемма вариационного исчисления приводит к системе уравнений Эйлера

$$L_x - \frac{d}{dt}L_{\dot{x}} = 0, \quad t \in [t_0, t_1] \quad (3.10)$$

Граничные условия состоят из (3.2) и некоторых равенств, получаемых из анализа других слагаемых в (3.9). Они называются естественными граничными условиями, или условиями трансверсальности.

Эти условия могут быть выведены следующим образом. Пусть поверхности M_i размерности $n - m_i$ определяются равенствами

$$M_i = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}: g_k^i(x, t) = 0, \quad k = 1, \dots, m_i\}, \quad 0 < m_i < n, \quad i = 0, 1$$

где g_k^i — гладкие скалярные функции. Допустимые вариации $\delta x^i, \delta t_i$ на левом ($i = 0$) и правом ($i = 1$) концах подчиняются уравнениям

$$\left\langle \frac{\partial g_k^i}{\partial x}, \delta x^i \right\rangle + \frac{\partial g_k^i}{\partial t} \delta t_i = 0, \quad k = 1, \dots, m_i, \quad i = 0, 1$$

Из условия $\delta J = 0$ следует, что для $\delta x^i, \delta t_i$, удовлетворяющих этим уравнениям, терминальные части в (3.9) должны быть равны нулю:

$$\left(\langle \delta x^0, L_{\dot{x}} \rangle - \bar{H} \delta t_0 \right) \Big|_{t=t_0} = 0, \quad \left(\langle \delta x^1, L_{\dot{x}} \rangle - \bar{H} \delta t_1 \right) \Big|_{t=t_1} = 0$$

Это означает, что $(n + 1)$ -векторы

$$(L_{\dot{x}}, -\bar{H}) \Big|_{t=t_0}, \quad (L_{\dot{x}}, -\bar{H}) \Big|_{t=t_1}$$

обязаны принадлежать линейным оболочкам в \mathbb{R}^{n+1} , соответственно, m_0 и m_1 векторов:

$$\left(\frac{\partial g_k^0}{\partial x}, \frac{\partial g_k^0}{\partial t} \right), \quad k = 1, \dots, m_0; \quad \left(\frac{\partial g_k^1}{\partial x}, \frac{\partial g_k^1}{\partial t} \right), \quad k = 1, \dots, m_1$$

Таким образом, существуют множители ν_k^0 (соответственно ν_k^1), не равные нулю одновременно, такие что

$$\begin{aligned} L_{\dot{x}} \Big|_{t=t_0} &= \sum_{k=1}^{m_0} \nu_k^0 \frac{\partial g_k^0}{\partial x}, & \bar{H} \Big|_{t=t_0} &= - \sum_{k=1}^{m_0} \nu_k^0 \frac{\partial g_k^0}{\partial t} \\ L_{\dot{x}} \Big|_{t=t_1} &= \sum_{k=1}^{m_1} \nu_k^1 \frac{\partial g_k^1}{\partial x}, & \bar{H} \Big|_{t=t_1} &= - \sum_{k=1}^{m_1} \nu_k^1 \frac{\partial g_k^1}{\partial t} \end{aligned}$$

Это и есть условия трансверсальности. Параметры ν_k^0, ν_k^1 — неизвестные постоянные, которые должны быть найдены в процессе решения. В задачах с фиксированными значениями t_0 и/или t_1 имеют силу только условия для $L_{\dot{x}}$.

3.1.2. Случай неоднородного лагранжиана

Особый интерес представляет случай положительно однородного лагранжиана, когда

$$L(x, \lambda \dot{x}, t) = \lambda L(x, \dot{x}, t) \quad (3.11)$$

для всех $\lambda > 0$ и всех (x, \dot{x}, t) . Дифференцируя равенство (3.11) по λ , подставляя $\lambda = 1$ и дифференцируя полученное тождество по компонентам \dot{x} , получаем основные свойства положительно однородного лагранжиана в виде скалярного и векторного тождеств

$$\langle \dot{x}, L_{\dot{x}}(x, \dot{x}, t) \rangle = L(x, \dot{x}, t), \quad L_{\dot{x}\dot{x}}\dot{x} = 0 \quad (3.12)$$

которые, в частности, означают, что функция $\bar{H}(x, \dot{x}, t)$ тождественно равна нулю и $\det L_{\dot{x}\dot{x}} = 0$.

В этом разделе предполагаем, что функция \bar{H} не равна тождественно нулю, точнее, не равен нулю следующий гессиан:

$$\det L_{\dot{x}\dot{x}} \neq 0 \quad (\bar{H}_{\dot{x}} = L_{\dot{x}\dot{x}}\dot{x}) \quad (3.13)$$

Рассмотрим семейство задач (3.1) с фиксированным правым концом и введем величину $S(x, t)$, которая является минимальным значением функционала $J[x]$ как функции правого конца:

$$S(x^1, t_1) = \min_{x(t)} \int_{t_0}^{t_1} L(x, \dot{x}, t) dt, \quad (x^0, t_0) \in M_0, \quad x(t_1) = x^1 \quad (3.14)$$

Здесь левая точка лежит на поверхности M_0 и множество правых точек рассматривается в некоторой области $(x^1, t_1) \in D_1 \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Мы предполагаем, что для каждой точки $(x^1, t_1) \in D_1$ кривая $x(t)$, доставляющая минимум (3.14) и, таким образом, удовлетворяющая уравнению Эйлера (3.10), существует и единственна.

В дополнение к уравнению Эйлера, в качестве необходимого условия для вариационной задачи с фиксированным правым концом (3.14) можно получить обращение в нуль последнего члена в (3.9):

$$\left(\langle \delta x^0, L_{\dot{x}} \rangle - \bar{H} \delta t \right) \Big|_{t=t_0} = 0, \quad (\delta x^0, \delta t_0) \in T_{x^0, t_0} M_0$$

Чтобы найти выражение для дифференциала (вариации) δS функции (3.14), нужно снова применить формулу (3.9) для свободного правого конца и положить $\delta S = \delta J$. Согласно уравнению Эйлера и приведенному выше равенству, в выражении для δJ остаются только члены, соответствующие $t = t_1$ в (3.9):

$$\delta S(x, t) = \left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, \delta x \right\rangle + \frac{\partial S}{\partial t} \delta t = \langle \delta x, L_{\dot{x}} \rangle - \bar{H} \delta t \quad (3.15)$$

Из (3.15) получаем

$$\frac{\partial S}{\partial x} = L_{\dot{x}}, \quad \frac{\partial S}{\partial t} = -\bar{H} \quad (3.16)$$

Заметим теперь, что условие (3.13) с помощью теоремы о неявной функции позволяет разрешить уравнение $p = L_{\dot{x}}(x, \dot{x}, t)$ относительно \dot{x} и найти $\dot{x} = \omega(x, p, t)$. Определим гамильтониан как функцию от (x, p, t) :

$$H^r(x, p, t) = \bar{H}(x, \omega(x, p, t), t) \quad (\dot{x} = \omega(x, p, t)) \quad (3.17)$$

Здесь индекс r показывает, что величина $S(x, t)$ рассматривается как функция правого конца экстремалей. Теперь, используя второе уравнение в (3.16) и (3.17) с $p = \partial S / \partial x$, получаем

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H^r(x, \frac{\partial S}{\partial x}, t) = 0, \quad (x, t) \in D_1 \quad (3.18)$$

Соотношение (3.18) — уравнение Гамильтона – Якоби. К нему подсоединяем граничное условие

$$S(x, t) = 0, \quad (x, t) \in M_0$$

вытекающее из определения (3.14) функции $S(x, t)$. Размерность поверхности M_0 заключена между 0 (фиксированный левый конец) и n , в то время как регулярное граничное условие для (3.18) (как для уравнения вида (1.1) с $(n+1)$ -мерной переменной (x, t)) должно быть задано на n -мерной поверхности. Более общие граничные условия для (3.18), когда функция $S(x, t)$ не обязательно равна нулю на M_0 , могут быть сформулированы путем введения терминальных членов в (3.1). Это будет сделано в дальнейшем для задачи оптимального управления с функционалом (3.1) некоторого частного вида.

Наконец, если вместо (3.14) рассматривается функция $S(x^0, t_0)$ начальной точки $(x^0, t_0) \in D_0$, соотношения (3.16), (3.18) будут иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial x} = -L_{\dot{x}}, \quad \frac{\partial S}{\partial t} = \bar{H}, \quad \frac{\partial S}{\partial t} + H^l(x, \frac{\partial S}{\partial x}, t) = 0, \quad (x, t) \in D_0 \\ H^l(x, p, t) = -H^r(x, -p, t) = \omega(x, -p, t)p + L(x, \omega(x, -p, t), t) \end{aligned} \quad (3.19)$$

где $\omega(x, q, t)$, как и выше, является решением уравнения $q = L_{\dot{x}}(x, \dot{x}, t)$ относительно \dot{x} и введен “левый” гамильтониан H^l .

3.1.3. Вариационная задача о минимальной геодезической

Одним из важных примеров однородного лагранжиана вида (3.11) является лагранжиан

$$L(x, \dot{x}) = \sqrt{\langle G(x)\dot{x}, \dot{x} \rangle}, \quad G(x) = \|g_{ij}\|, \quad i, j = 1, \dots, n \quad (3.20)$$

где $G(x)$ — симметрическая ($G = G^T$), положительно определенная квадратная матрица, $\det G(x) \neq 0$, называемая метрическим тензором многообразия K , локально описываемого координатами $x \in \mathbb{R}^n$. Говорят, что матрица G определяет риманову метрику на многообразии K с элементом ds длины дуги:

$$ds^2 = \langle G(x)dx, dx \rangle, \quad ds = Ldt = \sqrt{\langle G\dot{x}, \dot{x} \rangle} dt \quad (3.21)$$

Рассмотрим функционал (3.1) с лагранжианом (3.20) как функцию левого и правого концов кривой $x(t)$:

$$\begin{aligned} J = S(y, z) = \min_{x(t)} \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\langle G(x(t))\dot{x}(t), \dot{x}(t) \rangle} dt, \\ x(t_0) = y, \quad x(t_1) = z \end{aligned} \quad (3.22)$$

Таким образом, $S(y, z)$ — длина минимальной геодезической линии, соединяющей точки y и z . В общем случае геодезическая линия экстремальна, то есть является решением уравнения Эйлера (3.10) с лагранжианом (3.20).

Используя формулу первой вариации (3.9) и принимая во внимание уравнение Эйлера (3.10), можно записать следующие соотношения для дифференциала функции (3.22):

$$\begin{aligned} \delta S &= \left\langle \frac{\partial S}{\partial y}, \delta y \right\rangle + \left\langle \frac{\partial S}{\partial z}, \delta z \right\rangle = \langle G(z)b_1, \delta z \rangle + \langle G(y)b_0, \delta y \rangle \\ b_0 &= -\frac{\dot{x}(t_0)}{\sqrt{\langle G(y)\dot{x}(t_0), \dot{x}(t_0) \rangle}}, \quad b_1 = \frac{\dot{x}(t_1)}{\sqrt{\langle G(z)\dot{x}(t_1), \dot{x}(t_1) \rangle}} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Члены $\bar{H}\delta t_i$ здесь отсутствуют (то есть $\partial S/\partial t_i = 0$), поскольку функция \bar{H} тождественно равна нулю, см. (3.12). Кроме того, параметры t_0, t_1 отсутствуют в качестве аргументов функции $S(y, z)$ в (3.22). Соотношения (3.23) дают следующие выражения для градиентов S :

$$\frac{\partial S}{\partial y} = G(y)b_0, \quad \frac{\partial S}{\partial z} = G(z)b_1 \quad (3.24)$$

Из (3.23), (3.24) получаем, что

$$\langle G(y)b_0, b_0 \rangle = 1, \quad \langle G(z)b_1, b_1 \rangle = 1 \quad (3.25)$$

то есть b_0, b_1 — единичные векторы, касательные к кривой $x(t)$ в ее концевых точках $x^0 = x(t_0)$, $x^1 = x(t_1)$ и направленные в стороны от кривой. Квадрат длины касательного вектора b записывается в виде

$$\|b\|_x^2 = \langle G(x)b, b \rangle, \quad b \in T_x K$$

Хотя, как следует из (3.12), гессиан $\det L_{\dot{x}\dot{x}}$ тождественно равен нулю, предположение $\det G \neq 0$ означает, что гессиан квадрата L^2 не равен нулю:

$$\det G = \det(L^2)_{\dot{x}\dot{x}} \neq 0 \quad (G = (L^2)_{\dot{x}\dot{x}}) \quad (3.26)$$

Последнее позволяет разрешить (3.24) относительно b_i :

$$b_0 = G^{-1}(y)\frac{\partial S}{\partial y}, \quad b_1 = G^{-1}(z)\frac{\partial S}{\partial z} \quad (3.27)$$

Подставляя эти выражения в (3.25), получаем уравнения

$$\left\langle G^{-1}(y)\frac{\partial S}{\partial y}, \frac{\partial S}{\partial y} \right\rangle = 1, \quad \left\langle G^{-1}(z)\frac{\partial S}{\partial z}, \frac{\partial S}{\partial z} \right\rangle = 1 \quad (3.28)$$

которые эквивалентно записываются в виде соотношений

$$\sqrt{\left\langle G^{-1}(y)\frac{\partial S}{\partial y}, \frac{\partial S}{\partial y} \right\rangle} = 1, \quad \sqrt{\left\langle G^{-1}(z)\frac{\partial S}{\partial z}, \frac{\partial S}{\partial z} \right\rangle} = 1 \quad (3.29)$$

Здесь левые части положительно однородны по отношению к градиентам функции $S(y, z)$. Более общий вывод уравнений (3.29) приведен в следующем подразделе.

Уравнения (3.29) суть нелинейные уравнения в частных производных первого порядка, они играют роль уравнений Гамильтона – Якоби для однородного случая. В отличие от уравнений (3.18), (3.19), оба уравнения (3.29) имеют одинаковый вид для обоих концов экстремали, то есть так называемые “правый” и “левый” гамильтонианы совпадают.

3.1.4. Классический однородный лагранжиан

Этот случай можно проанализировать с помощью некоторого обобщения результатов предыдущего подраздела. Для простоты будем считать, что левый конец закреплен, и рассмотрим функцию (3.22) только относительно второго аргумента, используя обозначения $x = z$ и $S(x)$.

В общем случае рассматривается однородный автономный лагранжиан $L = L(x, \dot{x})$, который не зависит от t , так как это — необходимое условие существования поля экстремалей, определяющего функцию $S(x)$. Кроме того, мы предполагаем гессиан L^2 не равным нулю, см. (3.26):

$$\det(L^2)_{\dot{x}\dot{x}} \neq 0 \tag{3.30}$$

Это означает, что уравнение

$$q = \frac{1}{2}(L^2)_{\dot{x}} = LL_{\dot{x}} = Lp \quad \left(p = \frac{\partial S}{\partial x} \right) \tag{3.31}$$

может быть разрешено относительно \dot{x} :

$$\dot{x} = \omega(x, q), \quad \omega(x, \lambda q) = \lambda \omega(x, q), \quad \lambda > 0 \tag{3.32}$$

Однородность ω по q следует из (3.31) и соответствующего свойства L , см. (3.11); выражение для p в (3.31) подставляется из (3.16).

В дальнейшем мы должны различать два случая: в последующих выражениях верхний (нижний) знак относится к случаю, когда значение $L(x, \dot{x})$ положительно (отрицательно) на единичной сфере $|\dot{x}| = 1$. Введем вектор

$$\pm b = \frac{\omega(x, q)}{L} = \frac{\omega(x, Lp)}{L} = \frac{\pm L\omega(x, \pm p)}{L} = \pm \omega(x, \pm p) \tag{3.33}$$

Вычислим величину $L(x, \pm b)$:

$$L(x, \pm b) = L\left(x, \pm \frac{\omega}{L}\right) = \pm \frac{1}{L}L(x, \omega) = \pm 1 \tag{3.34}$$

Рассмотрим для случаев $L > 0$ и $L < 0$ на $|\dot{x}| = 1$ гамильтонианы

$$H(x, p) = L(x, \omega(x, p)), \quad H(x, p) = L(x, \omega(x, -p)) \tag{3.35}$$

Теперь из соотношений (3.34) и (3.35) можно получить следующие уравнения Гамильтона – Якоби:

$$H\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}\right) = 1, \quad H\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}\right) = -1 \tag{3.36}$$

Уравнения вида (3.36) справедливы для функции $S(y, z)$ в (3.22) при фиксированном z и $x = y$, то есть $S(y, z)$ рассматривается как функция от левого конца. В этом случае так называемые “левые” гамильтонианы получаются из “правых” гамильтонианов (3.35) перестановкой вариантов для положительного и отрицательного L .

Для задачи предыдущего подраздела имеем: $L > 0$, левый и правый гамильтонианы существуют, и оба тождественно равны друг другу, так как

$$\begin{aligned} H^r(x, p) &= L(x, \omega(x, p)) = \sqrt{G^{-1}(x)p, p} = \sqrt{G^{-1}(x)(-p), (-p)} = \\ &= L(x, \omega(x, -p)) = H^l(x, p) \end{aligned}$$

3.2. Уравнение Беллмана в оптимальном управлении

3.2.1. Задача с фиксированным временем

Одна из традиционных постановок задачи оптимального управления включает в себя уравнение динамики

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad u \in U \subset \mathbb{R}^m, \quad t \in [t_0, T] \quad (3.37)$$

граничные условия

$$x(t_0) = x^0, \quad x(T) \text{ — свободно} \quad (3.38)$$

и функцию платы (функционал)

$$J[x, u] = \int_{t_0}^T L(x, u, t) dt + \Phi(x(T)) \rightarrow \min_{u(t)} \quad (3.39)$$

Здесь x — n -мерный вектор состояния, u — m -мерный вектор переменных управления, U — выпуклое множество в \mathbb{R}^m , называемое множеством ограничений на управление. Допустимые управления — кусочно-непрерывные функции $u(t)$, $t \in [t_0, T]$, удовлетворяющие ограничению $u(t) \in U$ для каждого t . Функции f, L, Φ непрерывно дифференцируемы, и, кроме того, функция f удовлетворяет некоторым общим условиям, обеспечивающим существование и единственность глобального решения дифференциального уравнения

$$\dot{x} = f(x, u(t), t), \quad t \in [t_0, T], \quad x(t_0) = x^0 \quad (3.40)$$

для каждого допустимого $u(t)$ и $x^0 \in \mathbb{R}^n$.

Правый край T интервала времени предполагается зафиксированным. Более общая формулировка позволяет свободное T и граничные условия вида (см. (3.2))

$$(x^0, t_0) \in M_0, \quad (x^1, t_1) \in M_1 \quad (x^0 = x(t_0), \quad x^1 = x(t_1), \quad t_1 = T) \quad (3.41)$$

и аддитивные члены в функции платы (3.39), соответствующие обоим концам: $\Phi_0(x(t_0), t_0)$, $\Phi_1(x(t_1), t_1)$.

Будем использовать следующую терминологию для различных версий задачи (3.37)–(3.39):

1. Задача Больца: L, Φ, U — общего вида;
2. Задача Лагранжа: $\Phi \equiv 0$;
3. Задача Майера: $L \equiv 0$;
4. Задача вариационного исчисления: $m = n, f \equiv u, U = \mathbb{R}^n$.

Задача оптимального управления — найти допустимое $u(t)$, $t \in [t_0, T]$, такое что пара $(x(t), u(t))$ минимизирует функционал (3.39), где $x(t)$ — решение (3.40), соответствующее $u(t)$.

Есть два основных метода решения поставленной задачи оптимального управления: принцип максимума Понтрягина [70] и динамическое программирование [5]. Второй подход сводит анализ задачи к соответствующему УЧП первого порядка, известному как уравнение Беллмана. Суть динамического программирования состоит в следующем.

Предположим, что для каждого $(x^0, t_0) \in \Omega = \mathbb{R}^n \times [t_0, T]$ существует допустимое $u(t)$, доставляющее (вместе с соответствующим $x(t)$) минимум в (3.39). Обозначим через $S(x^0, t_0)$ оптимальное значение функционала (3.39). Таким образом, вводится функция

$$S(x, t), \quad (x, t) \in \Omega = \mathbb{R}^n \times [t_0, T] \quad (3.42)$$

Можно показать, что функция (3.42) непрерывна и удовлетворяет условию

$$\lim_{t \rightarrow T-0} S(x, t) = \Phi(x) \quad (3.43)$$

В общем случае функция $S(x, t)$ — негладкая, но в точках Ω , где $S(x, t)$ дифференцируема, она удовлетворяет уравнению Беллмана

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \min_{u \in U} \left(\left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, f(x, u, t) \right\rangle + L(x, u, t) \right) = 0 \quad (3.44)$$

Для вывода этого уравнения рассмотрим следующие представления функции $S(x^0, t_0)$, где первое равенство — ее определение:

$$\begin{aligned} S(x^0, t_0) &= \min_{u(t)} \left(\int_{t_0}^T L(x, u, t) dt + \Phi(x(T)) \right) = \\ &= \min_{u^0(t)} \min_{u^1(t)} \left(\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} L(x, u^0, t) dt + \int_{t_0+\Delta t}^T L(x, u^1, t) dt + \Phi(x(T)) \right) = \\ &= \min_{u^0(t)} \left(\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} L(x, u^0, t) dt + S(x^0 + \Delta x, t_0 + \Delta t) \right) \\ &u(t), t \in [t_0, T]; \quad u^0(t), t \in [t_0, t_0 + \Delta t]; \quad u^1(t), t \in [t_0 + \Delta t, T] \end{aligned} \quad (3.45)$$

Здесь $\Delta t > 0$ — достаточно малое число, $u^0(t)$, $u^1(t)$ — сужения оптимального управления $u(t)$ на соответствующие подынтервалы промежутка $[t_0, T]$. Так как функция $u(t)$ кусочно-непрерывна, то есть имеет конечное число скачков, она может считаться непрерывной справа при $t = t_0$. Значение приращения $\Delta x = x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)$ определяется формулой (3.40) и $u^0(t)$.

Минимумы по отношению к $u^0(t)$ и $u^1(t)$ в (3.45) вычисляются независимо. Поэтому два последних члена во второй строке дают значение $S(x^0 + \Delta x, t_0 + \Delta t)$. Это

свойство известно как принцип оптимальности, который утверждает, что последний промежуток оптимального пути тоже является оптимальным [5].

Используя упомянутые выше свойства, можно представить члены в (3.45) следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} L(x, u^0, t) dt &= L(x, u^0, t) \Delta t + o(\Delta t) \\ \Delta x &= f(x^0, u^0(t_0), t_0) \Delta t + o(\Delta t) \\ S(x^0 + \Delta x, t_0 + \Delta t) &= S(x^0, t_0) + \left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, \Delta x \right\rangle + \frac{\partial S}{\partial t} \Delta t + o(\Delta t) \end{aligned}$$

В результате переписываем (3.45) в виде

$$S(x^0, t_0) = \min_{u \in U} \left(S(x^0, t_0) + \left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, f(x^0, u, t_0) \right\rangle \Delta t + \frac{\partial S}{\partial t} \Delta t + L(x^0, u, t_0) \Delta t \right) + o(\Delta t)$$

После вычеркивания $S(x^0, t_0)$ и деления на Δt приходим при $\Delta t \rightarrow 0$ к (3.44). Заметим, что здесь, как и в (3.44), минимум берется по конечномерной переменной $u \in \mathbb{R}^m$, в то время как в (3.45) минимумы берутся по допустимым управлениям, то есть по бесконечномерной переменной. Подчеркиваем это, используя аргумент t , как в $u(t)$.

Уравнение (3.44) с условием (3.43) образуют следующую краевую задачу, где мы вводим гамильтониан $H(x, p, t)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} + H(x, \frac{\partial S}{\partial x}, t) &= 0, \quad (x, t) \in \Omega; \quad S(x, T) = \Phi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \\ H(x, p, t) &= \min_{u \in U} (\langle p, f(x, u, t) \rangle + L(x, u, t)) \end{aligned} \quad (3.46)$$

Для задачи вариационного исчисления, где $f \equiv u$, $U = \mathbb{R}^n$, гамильтониан (3.46) должен совпадать с “левым” гамильтонианом (3.19), поскольку $S(x^0, t_0)$ в (3.45) — функция левого конца экстремали. Таким образом, имеем другие представления для H^l и H^r в (3.19), см. упражнение 3.2:

$$\begin{aligned} H^l(x, p, t) &= \min_{u \in U} (\langle p, u \rangle + L(x, u, t)) \\ H^r(x, p, t) &= \max_{u \in U} (\langle p, u \rangle - L(x, u, t)) \end{aligned} \quad (3.47)$$

В оптимальном управлении в основном используется левый гамильтониан (3.46). Но также могут быть введены функция $S(x^1, t_1)$ и правый гамильтониан, при этом “левый” и “правый” гамильтонианы связаны как H^r и H^l в (3.19):

$$H^r(x, p, t) = -H^l(x, -p, t) = \max_{u \in U} (\langle p, f(x, u, t) \rangle - L(x, u, t)) \quad (3.48)$$

3.2.2. Задача быстрогодействия

Рассмотрим задачу оптимального управления, описываемую автономным уравнением динамики

$$\dot{x} = f(x, u), \quad u \in U \subset \mathbb{R}^m, \quad t \in [t_0, T] \quad (3.49)$$

граничными условиями

$$x(0) = x^0 \in \mathbb{R}^n \setminus D_T, \quad x(T) \in D_T \subset \mathbb{R}^n \quad (3.50)$$

и функцией платы

$$J[x, u] = T + \Phi(x(T)) \rightarrow \min_{u(t)} \quad (3.51)$$

Таким образом, интервал времени $[0, T]$ не фиксирован и параметр T (правый конец и длина интервала) является частью функционала, который минимизируется. Множество D_T — выпуклое замкнутое множество в \mathbb{R}^n , называемое терминальным множеством. Допустимые управления по-прежнему предполагаются кусочно-непрерывными и, для определенности, непрерывными справа в точках скачка. В отличие от задачи предыдущего раздела, каждое допустимое управление $u(t)$ имеет собственный интервал определения $t \in [0, T]$, где T зависит в общем случае от x^0 , так как для различных x^0 и режимов управления $u(t)$ время достижения множества D_T меняется. Кроме того, не для всех x^0 из $\mathbb{R}^n \setminus D_T$ требуемое допустимое $u(t)$ может существовать. Из некоторых начальных состояний задача приведения фазового вектора $x(t)$ на множество D_T за конечное время может не иметь решения вовсе, то есть система (3.49) не для каждой точки из $\mathbb{R}^n \setminus D_T$ может быть управляемой до D_T .

Рассмотрим функцию Беллмана

$$S(x), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \setminus D_T \quad (3.52)$$

где $S(x^0)$ означает минимальную величину (3.51) как функцию начальной точки (3.50); Ω является подмножеством $\mathbb{R}^n \setminus D_T$, откуда система (3.49) управляема в D_T . Для упрощения рассмотрения предполагаем, что существует оптимальное допустимое управление $u(t)$, доставляющее минимум (3.51).

Можно показать, что функция $S(x)$, которая в общем случае может быть разрывной, в точках ее гладкости удовлетворяет уравнению Беллмана

$$\min_{u \in U} \left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, f(x, u) \right\rangle + 1 = 0 \quad (3.53)$$

Действительно, пусть $x^0 \in \Omega$ — точка, в окрестности которой $S(x)$ является гладкой. Начав с определения $S(x^0)$, можно сделать следующие выкладки, аналогичные (3.45):

$$\begin{aligned} S(x^0) &= \min_{u(t)} (T + \Phi(x(T))) = \min_{u^0(t)} \min_{u^1(t)} (\Delta t + T - \Delta t + \Phi(x(T))) = \\ &= \min_{u^0(t)} (\Delta t + S(x^0 + \Delta x)) = S(x^0) + \min_{u \in U} \left(\left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, f(x^0, u) \right\rangle + 1 \right) \Delta t + o(\Delta t) \\ &\quad u(t), t \in [0, T]; \quad u^0(t), t \in [0, \Delta t]; \quad u^1(t), t \in [\Delta t, T] \end{aligned}$$

После вычеркивания $S(x^0)$ и деления на Δt получаем (3.53), полагая $\Delta t \rightarrow 0$. В промежуточных выкладках величина

$$S(x^0 + \Delta x) = \min_{u^1(t)} (T - \Delta t + \Phi(x(T)))$$

есть оптимальное значение функционала для процесса, начинающегося в момент $t = \Delta t$ из состояния $x = x^0 + \Delta x$, где $\Delta x = x(\Delta t) - x^0$ и $x(\Delta t)$ — правый конец решения уравнения

$$\dot{x} = f(x, u^0(t)), \quad x(0) = x^0, \quad t \in [0, \Delta t]$$

Выше были использованы также следующие разложения:

$$\Delta x = x(\Delta t) - x(0) = f(x^0, u^0(0))\Delta t + o(\Delta t)$$

$$S(x^0 + \Delta x) = S(x^0) + \left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, \Delta x \right\rangle + o(\Delta x) = S(x^0) + \left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, f(x^0, u^0(0)) \right\rangle \Delta t + o(\Delta t)$$

Поскольку решения $x(t)$ системы (3.49) являются непрерывными функциями, то фазовый вектор из Ω достигнет множества D_T в точках границы ∂D_T . Однако даже для системы (3.49), управляемой относительно D_T из всей области $\mathbb{R}^n \setminus D_T$, не все точки границы ∂D_T могут служить концами некоторого оптимального пути. Обозначим через M часть ∂D_T , которая состоит из концов оптимальных путей (в [33] она называется допустимой областью). Можно проверить, что $S(x) \rightarrow \Phi(x^1)$ при $x \rightarrow x^1 \in M$, по крайней мере, по оптимальной траектории. Таким образом, функция $S(x)$ удовлетворяет следующей краевой задаче:

$$\begin{aligned} H\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}\right) + 1 = 0, \quad x \in \Omega; \quad S(x) = \Phi(x), \quad x \in M \\ H(x, p) = \min_{u \in U} \langle p, f(x, u) \rangle \end{aligned} \quad (3.54)$$

Здесь $H(x, p)$ — “левый” гамильтониан.

Если ввести $S(x)$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \setminus D_T$, как функцию правого конца пути, то есть как минимум

$$S(x^1) = \min_{u(t)} (T + \Phi_0(x^0)) \quad (3.55)$$

где минимизация проводится по управлениям $u(t)$, которые решают задачу

$$\dot{x} = f(x, u(t)), \quad x(0) = x^0 \in M_0 \subset \partial D_T, \quad x(T) = x^1$$

тогда, аналогично (3.54), можно показать, что функция (3.55) удовлетворяет краевой задаче с “правым” гамильтонианом

$$\begin{aligned} H^r\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}\right) - 1 = 0, \quad x \in \Omega; \quad S(x) = \Phi_0(x), \quad x \in M_0 \\ H^r(x, p) = -H^l(x, -p) = \max_{u \in U} \langle p, f(x, u) \rangle \end{aligned} \quad (3.56)$$

где $H^l \equiv H$ дано в (3.54). Такое же соотношение между H^r и H^l остается, если мы включим в гамильтонианы член ± 1 с соответствующими знаками:

$$H^l(x, p) = \min_{u \in U} \langle p, f(x, u) \rangle + 1 = -(\max_{u \in U} \langle -p, f(x, u) \rangle - 1) = -H^r(x, -p)$$

В более общей постановке задачи (3.49)–(3.51) с

$$J[x, u] = \int_0^T L(x, u) dt + \Phi(x(T))$$

имеем

$$H^l(x, p) = \min_{u \in U} (\langle p, f(x, u) \rangle + L(x, u)) = -H^r(x, -p)$$

В задаче оптимального быстрогодействия $L(x, u) \equiv 1$.

3.2.3. Управления обратной связи

Пусть функция Беллмана $S(x, t)$ известна в некоторой задаче вида (3.37)–(3.39). Продифференцируем ее (если возможно) по x , подставим в уравнение (3.44) и вычислим минимум. Минимизирующий вектор будет зависеть от (x, t) , определяя так называемое управление обратной связи или стратегию

$$u = u(x, t), \quad u(x, t) \in U, \quad (x, t) \in \Omega \quad (3.57)$$

В общем случае величина $u(x^0, t_0)$ равна значению $u(t_0)$ оптимального программного управления $u(t)$, $t \in [t_0, T]$, в начальный момент. Управления вида $u = u(x, t)$ могут изначально участвовать в постановке задачи вместо программных управлений. По отношению к программному управлению, стратегия обратной связи — более гибкий способ управления системой (3.37), поскольку она дает лучший ответ на возможные возмущения вектора состояния $x(t)$. Но при использовании стратегии обратной связи возникают дополнительные математические трудности в определении соответствующего решения системы

$$\dot{x} = f(x, u(x, t), t) \equiv g(x, t), \quad x(t_0) = x^0, \quad t \in [t_0, T] \quad (3.58)$$

так как даже для гладкой функции Беллмана $S(x, t)$ отвечающая ей стратегия $u(x, t)$ может быть многозначной и/или разрывной. В результате функция $g(x, t)$ из (3.58) не удовлетворяет стандартным требованиям существования и единственности решения [17]. Если функция $u(x, t)$ разрывна, то решение уравнения (3.58) соответствует скользящему режиму [79].

Управления обратной связи являются более важными в дифференциальных играх, где один игрок с точки зрения другого постоянно возмущает вектор состояния.

3.3. Уравнение Айзекса в дифференциальных играх

3.3.1. Игра с фиксированным моментом окончания. Функция цены

Дифференциальная игра двух игроков с нулевой суммой (антагонистическая игра) на фиксированном временном промежутке описывается динамическим уравнением

$$\dot{x} = f(x, u, v, t), \quad u \in U \subset \mathbb{R}^m, \quad v \in V \subset \mathbb{R}^s, \quad t \in [t_0, T] \quad (3.59)$$

граничными условиями

$$x(t_0) = x^0, \quad x(T) \text{ — свободно} \quad (3.60)$$

и функцией платы (функционалом)

$$J[x, u, v] = \int_{t_0}^T L(x, u, v, t) dt + \Phi(x(T)) \rightarrow \min_u \max_v \quad (3.61)$$

Здесь x — n -мерный вектор состояния, u — m -мерный вектор управляющих переменных минимизирующего игрока P , v — s -мерный вектор управляющих переменных максимизирующего игрока E ; U и V — выпуклые и замкнутые множества ограничений на управления в \mathbb{R}^m и \mathbb{R}^s .

В дифференциальных играх, в отличие от вариационного исчисления и оптимального управления, в общем случае программные управления $u(t)$ ($v(t)$) не обеспечивают наилучшее минимальное (максимальное) значение $J[x, u, v]$ для игрока P (игрока E), и требуется более сложный способ, регулирующий систему (3.59). Большинство подходов используют стратегии обратной связи и/или так называемую информационную дискриминацию игрока–противника, когда игрок знает заранее выбор управления противника, мгновенный или на некотором интервале времени. В [39, 28, 30] используются дискретные аппроксимации, основанные на стратегиях $u(x, t)$, $v(x, t)$ обратной связи, или контрстратегиях вида $u(x, t, v)$, $v(x, t, u)$. В [24, 73] стратегия игрока вводится как функция времени, фактически как оператор над множеством программных управлений противника. Кусочно-программные управления, используемые в [15, 14] для исследования дифференциальных игр с неполной информацией, представляют собой промежуточный случай между управлениями обратной связи и программными управлениями.

В соответствии с [39], позиционное (с обратной связью) управление, например, игрока P задается однозначной функцией $u = u(x, t)$, удовлетворяющей ограничению (3.59), вместе с разбиением Δ интервала $[t_0, T]$:

$$\begin{aligned} u &= u(x, t), \quad u(x, t) \in U, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^n \times [t_0, T] \\ \Delta &: \quad t_0 < t_1 < \dots < t_N = T \end{aligned} \quad (3.62)$$

Нет никаких других требований, налагаемых на $u(x, t)$, таких как гладкость или непрерывность. Пара (3.62) будет обозначаться через u_Δ .

Зафиксируем некоторое программное управление $v(t)$, $t \in [t_0, T]$, игрока E , удовлетворяющее некоторым общим требованиям, например, кусочной непрерывности или интегрируемости по Лебегу. Введем ломаную Эйлера как абсолютно непрерывную функцию $x_\Delta(t)$, удовлетворяющую на промежутках $[t_i, t_{i+1})$ дифференциальному уравнению

$$\begin{aligned} \dot{x}_\Delta(t) &= f(x_\Delta(t), u(x^i, t_i), v(t)), \quad t_i \leq t < t_{i+1} \\ x_\Delta(t_0) &= x^0, \quad x^i = x(t_i), \quad i = 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (3.63)$$

Таким образом, управление игрока P на полуинтервале $[t_i, t_{i+1})$ постоянно и равно $u(x_i, t_i)$. Используя ломаную Эйлера $x_\Delta(t)$, кусочно-постоянное u_Δ и программное $v(t)$, можно вычислить значение $J = J[x_\Delta, u_\Delta, v]$ функции платы (3.61).

Подобные построения могут быть выполнены для пары v_Δ, u , включая позиционное управление $v = v(x, t)$ игрока E , разбиение Δ в (3.62) и программное управление $u(t)$ игрока P .

Предположим, что выполнено следующее условие минимаксной перестановки для всех рассматриваемых x, t и p (в [39] оно называется условием седловой точки

в маленькой игре):

$$\begin{aligned} H(x, p, t) &= H^*(x, p, t) = H_*(x, p, t), \quad (x, t) \in \Omega, \quad p \in \mathbb{R}^n \\ H^*(x, p, t) &= \min_{u \in U} \max_{v \in V} (\langle p, f(x, u, v, t) \rangle + L(x, u, v, t)) \\ H_*(x, p, t) &= \max_{v \in V} \min_{u \in U} (\langle p, f(x, u, v, t) \rangle + L(x, u, v, t)) \end{aligned} \quad (3.64)$$

Условие (3.64) гарантирует, что значения $S^*(x, t)$ и $S_*(x, t)$ так называемых мини-максной и максиминной игр совпадают, определяя цену игры $S(x, t)$, и этот факт рассматривается как ситуация седловой точки в игре (3.59)–(3.61):

$$\begin{aligned} S(x^0, t_0) &= S^*(x^0, t_0) = S_*(x^0, t_0), \quad (x^0, t_0) \in \Omega = \mathbb{R}^n \times [t_*, T] \\ S^*(x^0, t_0) &= \inf_{u_\Delta} \sup_v J[x_\Delta, u_\Delta, v], \quad S_*(x^0, t_0) = \sup_{v_\Delta} \inf_u J[x_\Delta, u, v_\Delta] \end{aligned} \quad (3.65)$$

Экстремумы здесь берутся по всем позиционным управлениям $u(x, t)$, $v(x, t)$ и разбиениям (3.62) для всех натуральных чисел N и всех допустимых $u(t)$, $v(t)$. Величина $S^*(x^0, t_0)$ (величина $S_*(x^0, t_0)$) — минимальное (максимальное) значение функции платы, которое игрок P (игрок E) может гарантировать для себя в данном классе стратегий.

Как показано в [15, 14], используя в (3.63) кусочно-программные управления $u(x_i, t)$, $t \in [t_i, t_{i+1})$, вместо кусочно-постоянных, можно получить, что для некоторых задач оптимальные управления, доставляющие минимум в (3.65), базируются только на дискретном или даже конечном количестве моментов времени t_i в разбиении (3.62), то есть значение $\max_i(t_{i+1} - t_i)$ не обязано стремиться к нулю для достижения нижней грани в (3.65).

Установлено, что функция $S(x, t)$ непрерывна и при $t \rightarrow T - 0$ удовлетворяет условию $S(x, t) \rightarrow \Phi(x)$.

С ценой игры $S(x, t)$ связана краевая задача

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} + \min_{u \in U} \max_{v \in V} \left(\left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, f(x, u, v, t) \right\rangle + L(x, u, v, t) \right) &= \\ = \frac{\partial S}{\partial t} + \max_{v \in V} \min_{u \in U} \left(\left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, f(x, u, v, t) \right\rangle + L(x, u, v, t) \right) &= \\ = \frac{\partial S}{\partial t} + H(x, \frac{\partial S}{\partial x}, t) = 0, \quad (x, t) \in \Omega; \quad S(x, T) = \Phi(x) \end{aligned} \quad (3.66)$$

где гамильтониан $H(x, p, t)$ определен в (3.64). Уравнение (3.66) называется уравнением Айзекса. В точках гладкости $S(x, t)$, используя предположения о единственности экстремумов (3.66), это уравнение может быть получено при помощи рассуждений, аналогичных тем, что использованы для (3.44), (3.45) [33, 30].

Если условие (3.64) не выполнено, то верхняя (минимаксная) и нижняя (максиминная) игры рассматриваются в более широком классе стратегий. Значения $S^*(x, t)$, $S_*(x, t)$ этих игр определяются аналогично (3.65) со следующими изменениями: в определении (3.63) ломаных Эйлера следует использовать контрстратегию $u(x_i, t_i, v_i)$ вместе с кусочно-постоянными функциями $v_i = v(t_i)$, см. [30]. Для определения S^* , S_* могут быть также использованы стратегии в смысле [24, 73]. Функции $S^*(x, t)$, $S_*(x, t)$ непрерывны, стремятся к $\Phi(x)$ при $t \rightarrow T - 0$ и удовлетворяют

неравенству

$$S^*(x, t) \geq S_*(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \quad (3.67)$$

Аналогично (3.66), следующие краевые задачи могут быть сопоставлены верхним и нижним значениям $S^*(x, t)$, $S_*(x, t)$:

$$\frac{\partial S^*}{\partial t} + H^*(x, \frac{\partial S^*}{\partial x}, t) = 0, \quad (x, t) \in \Omega; \quad S^*(x, T) = \Phi(x) \quad (3.68)$$

$$\frac{\partial S_*}{\partial t} + H_*(x, \frac{\partial S_*}{\partial x}, t) = 0, \quad (x, t) \in \Omega; \quad S_*(x, T) = \Phi(x) \quad (3.69)$$

Здесь $H^*(x, p, t)$ и $H_*(x, p, t)$ называются верхним (или минимаксным) и нижним (или максиминным) гамильтонианами и определены в (3.64).

3.3.2. Игры преследования

Дифференциальные игры с нефиксированным временем окончания часто называют играми преследования-уклонения, в то время как игры с фиксированным моментом окончания рассматриваются как игры сближения. Рассмотрим следующую дифференциальную игру с нефиксированным временем окончания, описываемую автономным уравнением динамики

$$\dot{x} = f(x, u, v), \quad u \in U \subset \mathbb{R}^m, \quad v \in V \subset \mathbb{R}^s, \quad t \in [t_0, T] \quad (3.70)$$

граничными условиями

$$x(0) = x^0 \in \mathbb{R}^n \setminus D_T, \quad x(T) \in D_T \subset \mathbb{R}^n \quad (3.71)$$

и функцией платы

$$J[x, u, v] = \int_0^T L(x, u, v) dt + \Phi(x(T)) \rightarrow \min_u \max_v \quad (3.72)$$

Таким образом, игра заканчивается, когда так называемое условие захвата (3.71) выполнено, то есть вектор $x(T)$ принадлежит терминальному множеству D_T , которое предполагается выпуклым и замкнутым.

Пусть выполнено условие седловой точки в маленькой игре:

$$\begin{aligned} H(x, p) &= \min_{u \in U} \max_{v \in V} (\langle p, f(x, u, v) \rangle + L(x, u, v)) = \\ &= \max_{v \in V} \min_{u \in U} (\langle p, f(x, u, v) \rangle + L(x, u, v)) \end{aligned} \quad (3.73)$$

Тогда значение функции $S(x)$, зависящее только от вектора состояния, существует в некоторой области $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$. Функция $S(x)$ определяется соотношениями (3.65) со следующими изменениями. Позиционные управления $u(x)$, $v(x)$ также являются функциями только вектора состояния. Разбиение (3.62) для некоторого фиксированного x^0 должно быть выбрано при $t_0 = 0$ и достаточно большом T . Функционал J

в (3.72) вычисляется на интервале $[0, T_1]$, где $t = T_1$ — минимальное положительное число, удовлетворяющее условию захвата $x_\Delta(T_1) \in \partial D_T$ для решения $x_\Delta(t)$, $x_\Delta(0) = x^0$, уравнения (3.63).

С ценой игры $S(x)$ связана следующая краевая задача:

$$H\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}\right) = 0, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \setminus D_T; \quad S(x) = \Phi(x), \quad x \in M \subset \partial D_T \quad (3.74)$$

Здесь Ω — подмножество $\mathbb{R}^n \setminus D_T$, откуда игра может закончиться за конечное время, множество M является допустимой областью границы ∂D_T , гамильтониан $H(x, p)$ определен в (3.73). Для неседловой ситуации минимаксная и максиминная игры могут иметь свои собственные Ω и M . В точках гладкости функция $S(x)$, которая может быть также разрывной, удовлетворяет уравнению (3.74) в классическом смысле.

Гамильтонианы в уравнениях (3.66), (3.68), (3.69), (3.74) есть “левые” гамильтонианы, то есть функции $S(x, t)$, $S(x)$ — функции левого конца экстремалей. Как и в предыдущих двух разделах, могут быть рассмотрены функции $S(x, t)$, $S(x)$ правого конца. Они удовлетворяют тем же уравнениям с “правыми” гамильтонианами, один из них, например, для случая (3.73) имеет вид

$$H^r(x, p) = -H^l(x, -p) = \max_{u \in U} \min_{v \in V} (\langle p, f(x, u, v) \rangle - L(x, u, v))$$

где экстремумы и знак при L изменены.

3.4. Обобщенные решения уравнения Гамильтона – Якоби – Беллмана – Айзекса

3.4.1. Классические и вязкостные решения

Уравнения Гамильтона – Якоби – Беллмана – Айзекса (ГЯБА), полученные в предыдущих трех подразделах, — это уравнения в частных производных первого порядка вида

$$F\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}\right) = 0, \quad x \in \Omega; \quad S(x) = \Phi(x), \quad x \in M \quad (3.75)$$

где x — либо n -мерный, либо $(n + 1)$ -мерный вектор, если мы добавим время t в качестве последней компоненты x_{n+1} к исходному $x \in \mathbb{R}^n$. Функцию F в (3.75) будем называть расширенным гамильтонианом или просто гамильтонианом. Хотя эти уравнения имеют один и тот же вид, решение задачи в каждой из предметных областей — в вариационном исчислении (ВИ), оптимальном управлении (ОУ), дифференциальных играх (ДИ) — имеет свой собственный качественный характер в основном за счет следующих свойств гамильтониана $F(x, p)$:

ВИ: $F(x, p)$ — гладкая и выпуклая по p ;

ОУ: $F(x, p)$ — негладкая и выпуклая по p ;

ДИ: $F(x, p)$ — негладкая, не является ни выпуклой, ни вогнутой по p .

Конечно, каждый последующий случай может быть также прост, как предыдущий, например, функция $F(x, p)$ для задачи ОУ может быть гладкой, как в задаче ВИ; свойства, приведенные выше, качественно различают эти проблемы по существу.

Традиционно задачи ВИ рассматривались с помощью гладких (классических) решений. В ОУ и ДИ очень немногие задачи обладают классическим решением, наиболее известные задачи такого рода — линейно-квадратичные задачи, где функция $f(x, u, v, t)$ линейна по x, u, v , функция $L(x, u, v, t)$ квадратична по x, u, v и $\Phi(x)$ квадратична по x .

Многие задачи в ОУ и ДИ имеют негладкую функцию цены $S(x)$, которая, таким образом, может не удовлетворять уравнению (3.75) в классическом смысле. Если она использует уравнение (3.75) для своего описания, то для надлежащей стыковки гладких ветвей $S(x)$ в двух соседних подобластях следует вернуться к самому определению функции цены, подобному (3.45) и (3.65). Аналогичная стыковка в физической задаче требует использования соответствующего физического закона. Это означает, что в неклассическом подходе соотношения (3.75) не могут рассматриваться как замкнутая математическая задача, порождающая единственное решение. Надо помнить о содержательном аспекте задачи.

Введение понятия вязкостного решения применительно к задаче (3.75) дает следующее улучшение для широкого круга задач: во-первых, задача (3.75) обладает единственным решением, во-вторых, это решение совпадает с функцией цены, подобной (3.45) и (3.65). Таким образом, задачу (3.75) можно рассматривать как замкнутую математическую задачу, которая может быть полностью решена (без привлечения дополнительных сведений) как только вычислен гамильтониан $F(x, p)$ на основе описания динамики и функции платы.

Заметим, что функция Беллмана $S(x)$ как функция левого конца экстремали является вязкостным решением терминальной задачи (3.75) с левым гамильтонианом $F(x, p)$ (задачи Коши с условием на правом конце, как введено в главе 2). Функция Беллмана как функция правого конца экстремали является вязкостным решением начальной задачи (3.75) с правым гамильтонианом (задачи Коши с условием на левом конце). Расширенные левый F^l и правый F^r гамильтонианы связаны соотношением (см., например, (3.48), (3.56))

$$F^r(x, p) = -F^l(x, -p) \quad (3.76)$$

Аналогичное преобразование гамильтониана имеет место в задаче ВИ, ОУ или ДИ, если сначала обратить время, $\tau = T - t$, а затем изменить знак гамильтониана. Действительно, обращение времени меняет местами левый и правый концы экстремали, а смена знака гамильтониана преобразует вязкостное решение ЗТЗ в вязкостное решение ЗНЗ. Например, для дифференциальной игры с фиксированным

временем в случае седловой ситуации (3.64) имеем

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{d\tau} &= -\frac{dx}{dt} = -\dot{x} = -f(x, u, v, T - \tau) \quad (t = T - \tau) \\
F^l\left(x, t, \frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial t}\right) &= \\
&= \frac{\partial S}{\partial t} + \min_{u \in U} \max_{v \in V} \left(\left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, f(x, u, v, t) \right\rangle + L(x, u, v, t) \right) = \\
&= -\left[\frac{\partial S}{\partial \tau} + \max_{u \in U} \min_{v \in V} \left(\left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, -f(x, u, v, t) \right\rangle - L(x, u, v, t) \right) \right] = \\
&= -F^r\left(x, t, \frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial \tau}\right)
\end{aligned} \tag{3.77}$$

где мы следуем определению F^r , приведенному в (3.76). Таким образом, функция $S(x, t)$ — решение ЗТЗ для уравнения

$$F^l\left(x, t, \frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial t}\right) = 0$$

и функция $\bar{S}(x, \tau) = S(x, T - \tau)$ — решение ЗНЗ для уравнения

$$F^r\left(x, T - \tau, \frac{\partial \bar{S}}{\partial x}, \frac{\partial \bar{S}}{\partial \tau}\right) = 0$$

Вязкостные решения, возникающие в задачах ВИ и ОУ, исследованы в книгах Р.-Л. Lions [45], У.Н. Fleming и Н.М. Soner [29], А.И. Субботина [77], М. Vardi и I. Dolcetta [2] и в отдельных публикациях. Приложения вязкостных решений к дифференциальным играм рассмотрены в [26, 25, 46]. Достаточно полный обзор публикаций можно найти в работе М.Г. Crandall, Н. Ishii и Р.-Л. Lions [21].

3.4.2. Обобщенное основное уравнение, неравенства А.И. Субботина

Во многих игровых задачах функция цены $S(x)$, хотя и не является гладкой, но обладает производными по направлениям. Используя это, А.И. Субботин обнаружил [76], что необходимыми и достаточными условиями совпадения функции $S(x)$ с ценой игры (например, игры (3.70)–(3.72)) служат следующие два неравенства, а не одно равенство в (3.75):

$$\min_{u \in U} \max_{v \in V} \left(\frac{\partial S}{\partial f} + L(x, u, v) \right) \geq 0 \geq \max_{v \in V} \min_{u \in U} \left(\frac{\partial S}{\partial f} + L(x, u, v) \right) \tag{3.78}$$

Здесь скаляр $\partial S / \partial f$, зависящий от x, u, v , является производной функции $S(x)$ в направлении $f(x, u, v)$, правой части уравнений динамики (3.70). Множества $(f(x, u, V), L(x, u, V)), (f(x, U, v), L(x, U, v)) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ предполагаются выпуклыми для всех $u \in U$ и $v \in V$. Соотношения (3.78) вместе с граничным условием $S(x) = \Phi(x), x \in M$, в общем случае также образуют замкнутую математическую задачу с единственным решением. Для задачи ОУ соотношения (3.78) упрощаются до одного равенства.

Как и в определении вязкостного решения предыдущей главы, соотношения (3.78) включают два неравенства, а не одно равенство. На основании (3.78) вводится понятие минимаксного решения УЧП первого порядка — еще одно новое понятие обобщенного решения. Было доказано [77], что во многих случаях минимаксное решение совпадает с вязкостным решением.

Чтобы продемонстрировать соотношения (3.78) для довольно простого случая, предположим, что локально (в области $D = D_0 + \Gamma + D_1$) функция цены имеет негладкость вида

$$\begin{aligned} S(x) &= \min[S_0(x), S_1(x)] \\ S(x) &= S_0(x), \quad x \in D_0, \quad S(x) = S_1(x), \quad x \in D_1 \end{aligned}$$

с гладкими функциями $S_i(x) \in C^1(D)$ и гладкой поверхностью Γ , определяемой равенством $S_0(x) = S_1(x)$. Производные по направлению функций $S_0(x), S_1(x)$ имеют следующие представления в зависимости от того, находится ли точка x на Γ или нет:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_i}{\partial f} &= \left\langle \frac{\partial S_i}{\partial x}, f(x, u, v) \right\rangle, \quad x \in D \\ \frac{\partial S}{\partial f} &= \min \left[\frac{\partial S_0}{\partial f}, \frac{\partial S_1}{\partial f} \right], \quad x \in \Gamma \end{aligned} \quad (3.79)$$

Тогда соотношения (3.78) принимают следующий вид для точек из D_0 и D_1 :

$$\begin{aligned} H\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}\right) &= 0, \quad x \in D_0 \cup D_1 \\ H(x, p) &= \min_{u \in U} \max_{v \in V} Q(x, p, u, v) = \max_{v \in V} \min_{u \in U} Q(x, p, u, v) \\ Q(x, p, u, v) &= \langle p, f(x, u, v) \rangle + L(x, u, v) \end{aligned} \quad (3.80)$$

и для точек на Γ :

$$\min_{u \in U} \max_{v \in V} \min_{i \in \{0,1\}} Q\left(x, \frac{\partial S_i}{\partial x}, u, v\right) \geq 0 \geq \max_{v \in V} \min_{u \in U} \min_{i \in \{0,1\}} Q\left(x, \frac{\partial S_i}{\partial x}, u, v\right) \quad (3.81)$$

Теперь, используя соотношение минимакса и максимина

$$\min_{a \in A} \max_{b \in B} g(a, b) \geq \max_{b \in B} \min_{a \in A} g(a, b)$$

а также (3.80), можно получить неравенство

$$\min_{u \in U} \max_{v \in V} \min_{i \in \{0,1\}} Q\left(x, \frac{\partial S_i}{\partial x}, u, v\right) \leq 0$$

Учитывая (3.81), приходим после этого к следующим условиям для цены игры на особой поверхности Γ :

$$\begin{aligned} \min_{u \in U} \max_{v \in V} \min_{i \in \{0,1\}} Q\left(x, \frac{\partial S_i}{\partial x}, u, v\right) &= 0 \\ \max_{v \in V} \min_{u \in U} \min_{i \in \{0,1\}} Q\left(x, \frac{\partial S_i}{\partial x}, u, v\right) &\leq 0, \quad x \in \Gamma \end{aligned} \quad (3.82)$$

Второе соотношение в виде неравенства здесь несущественно, это просто общее свойство пары функций, удовлетворяющих (3.81). Основная информация содержится фактически в первом соотношении, имеющем вид равенства.

Заметим, что для производной по направлению в (3.79) используем формулы (см., например, [23])

$$S(x) = \min_{a \in A} V(x, a) = V(x, a^*), \quad a^* \in A^* \subset A$$

$$\frac{\partial S}{\partial h} = \min_{a \in A^*} \frac{\partial V(x, a)}{\partial h}, \quad h \in \mathbb{R}^n$$

Здесь A^* — множество экстремальных элементов в выражении для $S(x)$.

3.5. Сингулярные траектории и сингулярные характеристики

3.5.1. Сингулярные поверхности и траектории: определение и классификация

Обозначим через $u = \varphi(x, p)$, $v = \psi(x, p)$ векторы из U , V , которые обеспечивают минимум и максимум в (3.73). Выпишем уравнение (3.74):

$$H\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}\right) = 0, \quad x \in \Omega$$

$$H(x, p) = \min_{u \in U} \max_{v \in V} Q(x, p, u, v) = \max_{v \in V} \min_{u \in U} Q(x, p, u, v) \quad (3.83)$$

$$u = \varphi(x, p), \quad v = \psi(x, p)$$

$$Q(x, p, u, v) = \langle p, f(x, u, v) \rangle + L(x, u, v)$$

Дифференцируя, где это возможно, цену игры $S(x)$ и подставляя $p = \partial S(x)/\partial x$ в $\varphi(x, p)$, $\psi(x, p)$, получаем позиционные управления

$$u(x) = \varphi\left(x, \frac{\partial S(x)}{\partial x}\right), \quad v(x) = \psi\left(x, \frac{\partial S(x)}{\partial x}\right) \quad (3.84)$$

Величины $u(x)$ и $v(x)$ как функции x могут быть негладкими, разрывными или многозначными. Построение решения дифференциальной игры существенно зависит от того, насколько регулярна система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x, u(x), v(x)), \quad t \in [0, T] \quad (3.85)$$

Для простоты здесь рассматриваем автономный случай. Чтобы охватить общий случай, когда есть зависимость от времени, нужно ввести дополнительные компоненты $x_{n+1} = t$ и $f_{n+1} = 1$ в (3.85).

В области, где экстремумы (3.83) достигаются на единственных элементах, векторное уравнение (3.85) совпадает с x -подсистемой характеристической системы для уравнения Айзекса (3.83), которая имеет вид

$$\dot{x} = H_p = f(x, \varphi(x, p), \psi(x, p)), \quad \dot{S} = \langle p, H_p \rangle, \quad \dot{p} = -H_x \quad (3.86)$$

Регулярные пути или траектории в дифференциальной игре соответствуют однозначным непрерывным и гладким функциям $u(x)$, $v(x)$, определяемым через φ , ψ по формулам (3.84). Эти регулярные траектории могут быть построены с помощью характеристической системы (3.86). В случае, когда $u(x)$ и/или $v(x)$ разрывны на некоторой поверхности Γ , она может содержать (или не содержать) так называемые сингулярные траектории — нерегулярные пределы ломаных Эйлера, определенных в (3.63). В общем случае сингулярные (особые) траектории являются скользящими режимами для системы (3.85) с разрывной правой частью. При наличии такой поверхности Γ система (3.86) для построений неприменима. Это обстоятельство используется в [33, глава 6], чтобы описать понятие сингулярной поверхности (корузмерности один). Классификация таких поверхностей, приведенная в [33] и многих других публикациях, основана на различном геометрическом поведении регулярных путей по обе стороны от сингулярной поверхности и сингулярных траекторий (если они есть).

Одна из возможностей сформулировать строгое определение сингулярных поверхностей и траекторий в дифференциальных играх, которые включают в себя как частный случай также задачи оптимального управления, состоит в том, чтобы в первую очередь дать определение регулярных точек. Такое определение (используемое в этой книге) приведено в главе 2 для вязкостного решения.

Регулярной точкой дифференциальной игры будем называть внутреннюю точку $x^ \in \Omega$ из области определения цены игры $S(x)$, $x \in \Omega$, такую что функция $S(x)$ дважды непрерывно дифференцируема в окрестности D точки x^* , $S(x) \in C^2(D)$, и гамильтониан (3.83) также два раза непрерывно дифференцируем, $H(x, p) \in C^2(N)$, где $N \subset \mathbb{R}^{2n}$ — окрестность точки (x^*, p^*) , $p^* = \partial S(x^*)/\partial x$, в $2n$ -мерном пространстве векторов (x, p) .*

Сингулярная точка — любая точка из Ω , которая не является регулярной.

Сингулярная траектория, поверхность или многообразие в Ω состоят из сингулярных точек.

Это определение соответствует геометрическим определениям в [33, 7, 4] и других источниках.

На рис. 3.1 представлено качественное поведение регулярных и сингулярных траекторий для различных типов сингулярных гиперповерхностей (корузмерности единица). Некоторые из этих поверхностей содержат сингулярные траектории, другие не содержат, как это имеет место для рассеивающей поверхности или поверхности переключения. Некоторые поверхности связаны со скачком градиента $p = \partial S/\partial x$ ($p_0 \neq p_1$), другие не связаны ($p_0 = p_1$), подобно поверхности переключения или универсальной поверхности. Это показывает, в частности, что для описания таких поверхностей как сингулярных в приведенном выше определении регулярной точки нужно потребовать непрерывность вторых производных функции $S(x)$, а не только первых. Здесь $p_0(x)$, как и прежде, обозначает градиент функции $S(x)$, определенный в левой окрестности D_0 поверхности Γ , и $p_1(x)$ относится к правой окрестности D_1 .

Заметим, что фазовый портрет одинаков для универсальной ($p_0 = p_1$) и фокальной ($p_0 \neq p_1$) поверхностей. Таким образом, только геометрическая картина не содержит всю необходимую информацию о сингулярной поверхности. В частности, существуют геометрически индифферентные поверхности, см. рис. 3.1, для

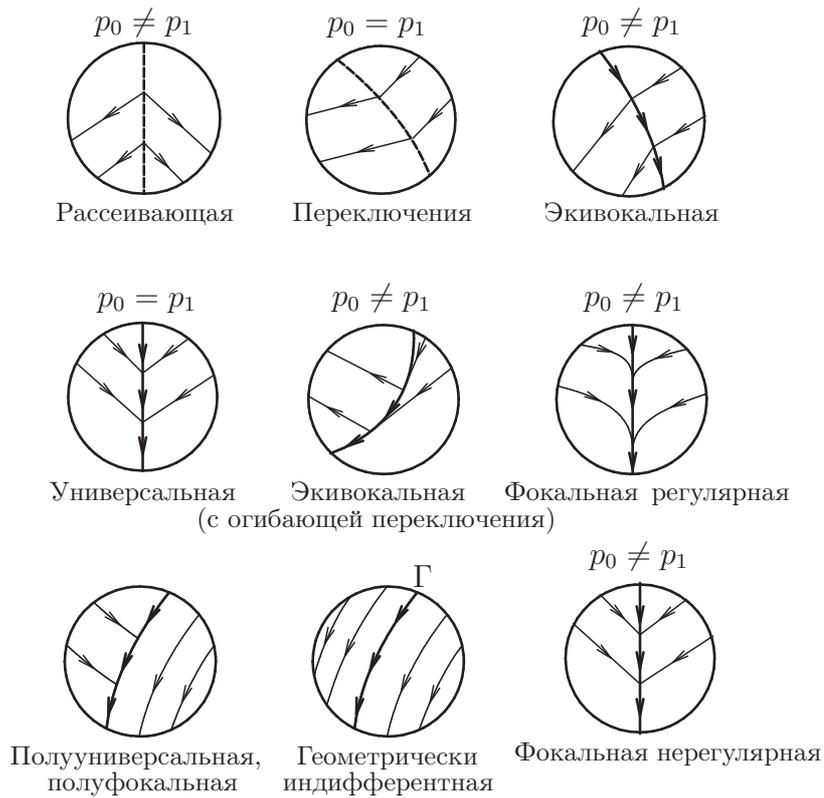


Рис. 3.1

которых (регулярные) траектории не указывают на какую-либо нерегулярность. Дополнительно надо знать степень гладкости функции $S(x)$. Согласно используемому определению, даже при $p_0 = p_1$ (но $\partial p_0/\partial x \neq \partial p_1/\partial x$) поверхность может быть сингулярной. Такой является поверхность, представляющая собой границу интегральной воронки в примере ЗНЗ главы 2 при $a = b$, см. подраздел 2.5.3. Особый характер этой поверхности (линии) становится ясным, если мы напомним, что при некоторых малых возмущениях параметров a, b поверхность переходит в экивокальные кривые. В [48] найдена геометрически индифферентная поверхность со скачком градиента, $p_0 \neq p_1$.

Классификация, представленная на рис. 3.1, не полная. Это просто список сингулярностей, которые встречались до сих пор и более или менее полностью исследованы. Кроме того, эти картинки соответствуют двумерному случаю. Для размерности 3 и более, например, для фокальной поверхности регулярные пути, касающиеся ее с разных сторон могут определять на ней два различных поля. Такие поверхности до сих пор не исследованы, за исключением случаев, когда они плоские. Конечно, большой опыт дифференциальных игр, оптимального управления и вариационного исчисления дает ощущение, что все важные особые поверхности уже описаны. Ско-

рее всего, исчерпывающая классификация может быть получена на основе теории особенностей дифференцируемых отображений, используемой в [34].

Тот факт, что цена $S(x)$ дифференциальной игры является вязкостным решением краевой задачи (3.75), означает, что при решении дифференциальной игры можно перейти к задаче (3.79), взяв от исходной задачи только гамильтониан, например (3.83), и соответствующее граничное условие. Метод сингулярных характеристик (МСХ), предложенный в этой книге, является одним из возможных методов построения решения. В регулярных областях x -проекции характеристик (3.86) представляют собой в то же время оптимальные пути (траектории) дифференциальной игры. В общем случае, чтобы применить МСХ, необходимо исследовать, совпадают ли сингулярные пути с сингулярными характеристиками, так как они имеют разные определения. В действительности, этот вопрос возникает только для эквивокальных (регулярной и огибающей переключения) и универсальных поверхностей. Все типы фокальных поверхностей основаны на самом деле на теории эквивокальных поверхностей. Мы рассмотрим здесь эквивокальные поверхности. Универсальной поверхности будет посвящено специальное рассмотрение в главе 6.

3.5.2. Эквивокальная поверхность

Используя обозначения, аналогичные обозначениям локального исследования в главе 2, рассмотрим здесь открытую подобласть $D \subset \Omega$, где цена игры $S(x)$ определяется при следующих предположениях. Область D делится на две открытые подобласти гладкой гиперповерхностью, то есть $D = D_0 + \Gamma + D_1$. Сужения $S_i(x)$ функции $S(x)$ на D_i дважды непрерывно дифференцируемы, $S_i(x) \in C^2(D_i)$, $i = 0, 1$, и градиенты имеют непрерывное продолжение вплоть до Γ . Как показано в главе 2, функции $S_i(x)$ имеют продолжения класса C^1 на всю D . Градиенты $p_i = \partial S_i / \partial x$ принимают различные значения на Γ ($p_0(x) \neq p_1(x)$, $x \in \Gamma$) и ненулевой вектор $p_1 - p_0$, нормаль к Γ , направлен от D_1 к D_0 , так что справедливо представление $S(x) = \min[S_0(x), S_1(x)]$.

Регулярные оптимальные траектории подходят к Γ с D_1 -стороны, может быть, с касанием. Со стороны D_0 оптимальные пути отходят от Γ с ненулевым углом. Заметим, что никакие сингулярные траектории не предполагаются заранее на Γ , их существование будет следствием других предположений.

Рассмотрим две области N_0, N_1 в \mathbb{R}^{2n} -пространстве (x, p) , где N_i является окрестностью точки (x^*, p_i^*) , $x^* \in \Gamma$, $p_i^* = \partial S_i(x^*) / \partial x$, $i = 0, 1$, рис. 3.2. Множества N_i можно также рассматривать в пространстве $(x, S, p) \in \mathbb{R}^{2n+1}$. В отличие от гамильтониана (3.83), в некоторых игровых задачах гамильтонианы зависят также от функции Беллмана S . Такая зависимость может быть результатом замены переменных, см. главу 5. Благодаря условию непрерывности дополнительная переменная S играет существенную роль в МСХ.

Обе функции φ , ψ в (3.83) предполагаются однозначными для $(x, p) \in N_0$. Функция $\varphi(x, p)$ однозначна также для $(x, p) \in N_1$. Относительно максимума в (3.83) для области N_1 будем различать два случая.

Гладкий случай: функция $\psi(x, p)$ является однозначной для $(x, p) \in N_1$.

Негладкий случай: функция $\psi(x, p)$ однозначна для каждой полукрестности

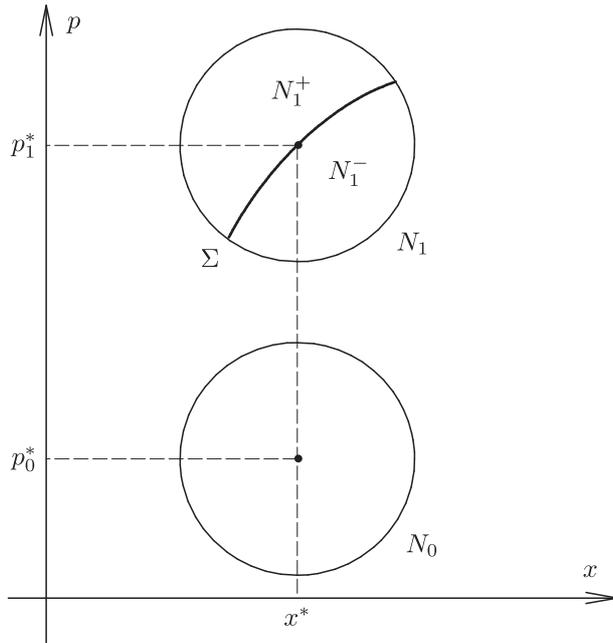


Рис. 3.2

N_1^\pm из $N_1 = N_1^+ + \Sigma + N_1^-$:

$$\begin{aligned} \psi &= \psi^+(x, p), (x, p) \in N_1^+; \quad \psi = \psi^-(x, p), (x, p) \in N_1^- \\ f^+ &= f(x, \varphi(x, p), \psi^+(x, p)) \neq f(x, \varphi(x, p), \psi^-(x, p)) = f^-, \quad (x, p) \in \Sigma \end{aligned} \quad (3.87)$$

Здесь Σ — гладкая гиперповерхность. Считаем, что функции $\psi^+(x, p)$, $\psi^-(x, p)$ имеют гладкие однозначные продолжения на все N_1 . Условие скачка $f^+ \neq f^-$ означает, что максимум в (3.83) для $(x, p) \in \Sigma$ достигается при двух значениях $v = \psi^+$, $v = \psi^-$, а также, по крайней мере, в точках v из отрезка в \mathbb{R}^n , соединяющего f^+ и f^- . Последнее связано с тем, что множество $f(x, u, V)$ выпукло.

Регулярные траектории в D_1 для негладкого случая трансверсальны к Γ . Гамильтониан (3.83) на множестве N_0 в обоих случаях и на множестве N_1 для гладкого случая имеет вид

$$H(x, p) = \langle p, f(x, \varphi(x, p), \psi(x, p)) \rangle + L(x, \varphi(x, p), \psi(x, p)) \quad (3.88)$$

В негладком случае на N_1 предполагаем представление

$$\begin{aligned} H(x, p) &= \max[H^+(x, p), H^-(x, p)], \quad (x, p) \in N_1 \\ H^\pm(x, p) &= \langle p, f(x, \varphi(x, p), \psi^\pm(x, p)) \rangle + L(x, \varphi(x, p), \psi^\pm(x, p)) \end{aligned} \quad (3.89)$$

Таким образом, поверхность Σ может быть определена равенством $H^+ = H^-$. Функ-

ция $S_1(x)$ для негладкого случая удовлетворяет уравнению

$$H^+\left(x, \frac{\partial S_1(x)}{\partial x}\right) = 0, \quad x \in D_1 \quad (3.90)$$

то есть ветвь H^+ гамильтониана (3.89) работает в D_1 . Гамильтонианы $H(x, p)$, $H^+(x, p)$, $H^-(x, p)$, по крайней мере, дважды непрерывно дифференцируемы.

Сформулированные условия суть весьма детальные предположения о локальных свойствах рассматриваемой сингулярной поверхности. Для вывода из них некоторых следствий о существовании сингулярных траекторий напомним, что функция $S(x)$ — локальное вязкостное решение терминальной задачи (3.83) в области D . Предположения, приведенные выше, отвечают описанию эквивокальной поверхности для ЗТЗ главы 2. Модификация на случай ЗТЗ необходимых условий (2.12) и (2.15), полученных для ЗНЗ, немедленно дает

$$\begin{aligned} \{F_1 H\} &= \langle H_p(x, p_1(x)), p_1(x) - p_0(x) \rangle = 0, \quad x \in \Gamma \\ \{\{F_1 H\} F_1\} &\leq 0, \quad \{\{H F_1\} H\} \geq 0, \quad F_1(x, S) = S - S_0(x) \end{aligned} \quad (3.91)$$

для гладкого случая и

$$\begin{aligned} H^-\left(x, \frac{\partial S_1(x)}{\partial x}\right) &= 0, \quad x \in \Gamma \\ \{F_1 H^-\} &= \langle H_p^-, p_1 - p_0 \rangle \leq 0, \quad \{H^+ F_1\} = -\langle H_p^+, p_1 - p_0 \rangle \leq 0 \end{aligned} \quad (3.92)$$

для негладкого случая. Эти необходимые условия получены в [49] с помощью прямой методики; подход вязкостного решения представляется значительно проще.

Второе неравенство в (3.92) отражает наше предположение о том, что регулярные пути подходят к Γ с D_1 -стороны (вектор $p_1 - p_0$ направлен из D_1 к D_0). Используя оба неравенства в (3.92), можно найти вектор, касательный к Γ :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \lambda H_p^- + (1 - \lambda) H_p^+ = \lambda f^- + (1 - \lambda) f^+ = \\ &= \lambda f(x, u_1(x), v^-(x)) + (1 - \lambda) f(x, u_1(x), v^+(x)) \\ \lambda &= \frac{\{F_1 H^+\}}{\{F_1 H^+\} - \{F_1 H^-\}}, \quad x \in \Gamma \\ u_i(x) &= \varphi\left(x, \frac{\partial S_i(x)}{\partial x}\right), \quad i = 0, 1, \quad v_0(x) = \psi\left(x, \frac{\partial S_0(x)}{\partial x}\right) \\ v^\pm(x) &= \psi^\pm\left(x, \frac{\partial S_1(x)}{\partial x}\right), \quad v_1(x) \equiv v^+(x), \quad x \in D \end{aligned} \quad (3.93)$$

Случай $\lambda = 0$ (что эквивалентно $\{F_1 H^+\} = 0$) соответствует гладкому случаю, когда вектор $\dot{x} = H_p = f$ касателен к Γ (равенство $\{F_1 H^+\} = 0$ следует также из условия касания в (3.91)). Таким образом, в гладком случае поверхность Γ является огибающей регулярных траекторий в D_1 .

Рассмотрим соотношения (3.93) для негладкого случая. Заметим, что первоначальные предположения означают, что если игроки используют управления $u_i(x)$, $v_i(x)$, $x \in D_i$, $i = 0, 1$, то оптимальные траектории проходят через поверхность Γ из D_1 в D_0 с переключением на Γ управлений обоих игроков с u_1, v_1 на u_0, v_0 . Соотношения (3.93) показывают вторую возможность оптимального поведения. Игрок P

использует $u_1(x)$ без переключения на $u_0(x)$ на Γ , а игрок E реализует скользящий режим, комбинируя $v_1(x) \equiv v^+(x)$ с $v^-(x)$. С фиксированным $u_1(x)$ ситуация для игрока E подобна ситуации на поверхности переключения, но после переключения с $v^+(x)$ на $v^-(x)$ траектория возвращается к поверхности переключения.

Уравнения (3.90) и (3.92) показывают, что такой скользящий режим оптимален. Соответственно, можно показать, что $\min \max \min$ в (3.82) имеет два минимума при $u = u_1(x)$ и $u = u_0(x)$. Кроме того, вместо скользящего режима можно найти эквивалентное $v \in V$, порождающее тот же сингулярный путь.

Таким образом, по решению игрока P , который выбирает $u_1(x)$ или $u_0(x)$ на Γ , реализуется либо регулярный путь, ведущий в D_0 , либо сингулярное движение вдоль Γ . Оба они являются оптимальными. В этом случае будем говорить, что игрок P управляет сингулярной поверхностью Γ .

Точно так же может быть рассмотрена экивокальная поверхность, управляемая игроком E . В том случае цена имеет вид $S = \max[S_0, S_1]$ и гамильтониан в N_1 записывается в виде $H = \min[H^+, H^-]$, что связано с неоднозначностью минимума по u в (3.83). Здесь также различают гладкий и негладкий случаи. Таким образом, может быть указано четыре типа экивокальных поверхностей, которые удовлетворяют классификации главы 2.

3.5.3. Сингулярные траектории и характеристики

Как показано в главе 2, поверхность Γ состоит из сингулярных характеристик (2.19) уравнений в частных производных (3.90). В то же время известно, что поверхность Γ состоит из сингулярных путей (траекторий), описываемых (3.93). Совпадают ли эти два множества кривых, образующие одну и ту же Γ ? Чтобы ответить на этот вопрос, надо получить дифференциальные уравнения эволюции градиента $p_1(x)$ вдоль сингулярных путей (3.93).

Рассмотрим сначала негладкий случай, когда обе ветви $S_0(x)$, $S_1(x)$ имеют C^2 -продолжение на все D в качестве решений уравнений в частных производных (3.83) и (3.90); соответствующие граничные условия удовлетворяют достаточному условию главы 1 благодаря трансверсальности подхода регулярных путей к Γ . Таким образом, нужна производная функции $p_1(x) = \partial S_1(x)/\partial x$ в направлении (3.93). Продифференцируем тождество (3.90) по компоненте x_k вектора x :

$$\frac{\partial H^+}{\partial x_k} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial H^+}{\partial p_1^j} \frac{\partial p_1^j}{\partial x_k} = \frac{\partial H^+}{\partial x_k} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial H^+}{\partial p_1^j} \frac{\partial p_1^k}{\partial x_j} = 0, \quad k = 1, \dots, n \quad (3.94)$$

Здесь компоненты вектора p_1 обозначаются верхними индексами. Первое равенство в (3.92) и равенство $S_1(x) - S_0(x) = 0$ не являются тождественными по x , но они определяют ту же самую поверхность Γ . Таким образом, функции, стоящие с левой стороны, должны иметь коллинеарные градиенты, что приводит к равенствам

$$\frac{\partial H^-}{\partial x_k} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial H^-}{\partial p_1^j} \frac{\partial p_1^k}{\partial x_j} + \nu \left(\frac{\partial S_1}{\partial x_k} - \frac{\partial S_0}{\partial x_k} \right) = 0, \quad k = 1, \dots, n \quad (3.95)$$

В этих соотношениях используется равенство $\partial p_1^k / \partial x_j = \partial p_1^j / \partial x_k$. Умножая (3.94) на $(1 - \lambda)$ и (3.95) на λ , затем складывая их, получим следующее выражение для

производной \dot{p} вектора $p = p_1$ по направлению (3.93), или, что эквивалентно, дифференциальное уравнение, описывающее эволюцию p вдоль сингулярного пути:

$$\begin{aligned}\dot{p} &= -\lambda H^-_x - (1 - \lambda)H^+_x - \lambda\nu(p - p_0) \\ \dot{S} = \langle p, \dot{x} \rangle &= \lambda \langle p, H^-_p \rangle + (1 - \lambda) \langle p, H^+_p \rangle\end{aligned}\quad (3.96)$$

Нижний индекс в p_1 здесь опускается. Второе уравнение следует из правила дифференцирования сложной функции и (3.93). Если мы теперь потребуем от функций $H^+(x, p)$, $H^-(x, p)$ и $S - S_0(x)$ быть первыми интегралами системы (3.93), (3.96), то получим для множителей λ , $1 - \lambda$ и $\lambda\nu$ выражения раздела 1.2. Система (3.93), (3.96) будет иметь форму характеристических уравнений (2.19). Таким образом, для негладкого случая сингулярные пути совпадают с характеристиками.

Описанная выше процедура нуждается в некоторой модификации для гладкого случая, поскольку функция $S_1(x)$ не является дважды дифференцируемой. Как показано в главе 1, вторая производная не существует, вообще говоря, в направлении нормали к Γ . Можно рассмотреть специальную систему координат, в которой Γ задается равенством $x_n = 0$ и повторить аналогичную процедуру дифференцирования только по x_1, \dots, x_{n-1} . Для сингулярных путей это приведет к системе, совпадающей с характеристической системой (2.19). Последняя может быть также формально выведена из (3.96), если положить $H = H^+$ и $\{F_1 H\} \rightarrow 0$ при $(\lambda \rightarrow 0)$.

Полученный результат характеризует МСХ как удобный инструмент, поскольку используя его для построения цены игры $S(x)$ как вязкостного решения, можно быть уверенным, что сингулярные характеристики, так же как и регулярные, дают оптимальные (сингулярные) пути.

3.6. Линейная игра преследования с эллиптическими вектограммами

3.6.1. Постановка задачи

В этом разделе метод сингулярных характеристик применяется к линейной игре преследования-уклонения с эллиптическими вектограммами. Игра представляет собой математическую модель перехвата ракетой самолета в предположении о постоянной и достаточно большой скорости разностного номинального движения в трехмерном евклидовом пространстве. Такое предположение, наряду с предположением о малой величине корректирующих ускорений объектов в процессе преследования, позволяет использовать линеаризацию динамики относительно номинального курса столкновения и рассматривать линейную дифференциальную игру с фиксированным моментом окончания. Боковые корректирующие ускорения игроков, перпендикулярные векторам скоростей, ограничены. Спроектированные на двумерную плоскость, ортогональную номинальной линии визирования, номинальные координаты этих боковых ускорений создают эллиптическую вектограмму для каждого игрока (если только соответствующие скорости объектов не лежат на одной прямой с линией визирования, в последнем случае вектограммы — круговые). В игре имеются два параметра: отношение скоростей игроков $\gamma = V_E/V_P < 1$ и отношение их максимальных боковых ускорений $\mu = (a_P)_{\max}/(a_E)_{\max} > 1$.

В [75] игра была решена с помощью обычных методов, требующих много интуиции для идентификации и построения сингулярных поверхностей. Обновленный анализ сингулярных поверхностей этой игры, использующий подход МСХ, проведен в [63]. В этом разделе мы следуем изложению [63]. Как и в [75], динамика игры записывается в безразмерных относительных координатах и нормированном обратном времени. Динамика игры, ограничения на управления и функция платы имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= dy/d\tau = -\psi(\tau)u + \tau v; & 0 \leq \tau \leq \tau_0; & \quad y, u, v \in R^2 \\ u \in U &= \{u : \langle R_P u, u \rangle \leq \mu^2\}, & v \in V &= \{v : \langle R_E v, v \rangle \leq 1\} \\ \psi(\tau) &= \tau + e^{-\tau} - 1, & R_i &= \begin{vmatrix} k_i^{-2} & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, & k_i &= \cos \chi_i, \quad i = P, E \end{aligned} \quad (3.97)$$

$$J = \Phi(y(0)) = |y(0)| = \sqrt{y_1^2(0) + y_2^2(0)}$$

Здесь y — безразмерный вектор из двух компонент в плоскости, перпендикулярной к номинальной линии визирования. Независимая переменная τ — нормированное оставшееся время (обратное время), u и v — управляющие векторы преследователя P и убегающего E , χ_P (χ_E) — угол между вектором номинальной скорости игрока P (соответственно, игрока E) и номинальной линией визирования. Цель игрока P (E) — при помощи управления u (v) минимизировать (максимизировать) функцию платы J . Связь между отношением скоростей γ и параметрами χ_P и χ_E выражается соотношением

$$\gamma = V_E/V_P = \sin \chi_P / \sin \chi_E = \sqrt{(1 - k_P^2)/(1 - k_E^2)}$$

Мы рассмотрим лишь случай, когда $\gamma \leq 1$. Для более подробной информации о формулировке игры см. [75].

Расширенный фазовый вектор игры задается соотношениями

$$x = (y_1, y_2, \tau), \quad x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2, \quad x_3 = \tau$$

Расширенный гамильтониан (3.75) как функция от расширенного фазового вектора и градиента $p = \partial S / \partial x$ функции цены имеет вид

$$\begin{aligned} F(x, p) &= p_3 + \max_u \min_v \langle q, \dot{y} \rangle \\ q &= (q_1, q_2), \quad q_1 = p_1, \quad q_2 = p_2, \quad p = (p_1, p_2, p_3) \end{aligned} \quad (3.98)$$

Здесь и в дальнейшем удобно рассматривать двумерные y, q и трехмерные x, p . Так как в уравнениях динамики (3.97) используется обратное время, то в соответствии с (3.76), (3.77), гамильтониан (3.98) является “правым” гамильтонианом, определяемым начальной задачей Коши для функции цены $S(x)$. В частности, это причина того, что экстремумы в (3.98) записаны именно так. Оптимальные управления игроков (функции φ, ψ в (3.83)), полученные из (3.98), имеют вид

$$\begin{aligned} u^* &= -\mu M_P^2 q / |M_P q|, & v^* &= -M_E^2 q / |M_E q| \\ M_i^2 &= R_i^{-1}, & M_i &= \begin{vmatrix} k_i & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad i = P, E \end{aligned} \quad (3.99)$$

Подстановка этих результатов в (3.98) дает

$$F(x, p) = p_3 + \mu\psi\sqrt{p_1^2 k_P^2 + p_2^2} - \tau\sqrt{p_1^2 k_E^2 + p_2^2} \quad (3.100)$$

Используя (3.97), (3.98), получаем соответствующее уравнение Айзекса, и начальная задача принимает вид

$$F(x, p) = 0, \quad 0 < x_3 \leq \tau_0; \quad S(x_1, x_2, 0) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad (3.101)$$

Система регулярных характеристик для (3.101) с соответствующими начальными данными записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \psi\mu k_P^2 q_1 / |MPq| - \tau k_E^2 q_1 / |MEq|, & y_1(0) &= \alpha \\ \dot{y}_2 &= \psi\mu q_2 / |MPq| - \tau q_2 / |MEq|, & y_2(0) &= \beta \end{aligned} \quad (3.102)$$

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= 0, & q_1(0) &= \alpha / \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \\ \dot{q}_2 &= 0, & q_2(0) &= \beta / \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \end{aligned} \quad (3.103)$$

Уравнение $\dot{x}_3 = 1$ здесь опускается, и $p_3(\tau)$ может быть найдено из условия первого интеграла $F = 0$ после интегрирования (3.102), (3.103). Из (3.102), (3.103) также следует

$$\dot{y}_1 = f_1(\tau, \alpha, \beta), \quad \dot{y}_2 = f_2(\tau, \alpha, \beta) = \beta f_2^0(\tau, \alpha, \beta)$$

Интегрирование системы (3.102), (3.103) дает

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha + P(\tau) \frac{k_P^2 \alpha}{\sqrt{k_P^2 \alpha^2 + \beta^2}} - E(\tau) \frac{k_E^2 \alpha}{\sqrt{k_E^2 \alpha^2 + \beta^2}} = F_1(\tau, \alpha, \beta) \\ y_2 &= \beta + P(\tau) \frac{\beta}{\sqrt{k_P^2 \alpha^2 + \beta^2}} - E(\tau) \frac{\beta}{\sqrt{k_E^2 \alpha^2 + \beta^2}} = F_2(\tau, \alpha, \beta) = \\ &= \beta F_2^0(\tau, \alpha, \beta), \quad P(\tau) = \mu(\tau^2/2 - \psi(\tau)), \quad E(\tau) = \tau^2/2 \end{aligned} \quad (3.104)$$

Формулы (3.104) определяют все первичные пути (траектории). В основном, они не пересекаются друг с другом. Однако они не охватывают всего игрового пространства.

3.6.2. Рассеивающая поверхность

Два семейства первичных путей пересекаются друг с другом и создают рассеивающую поверхность в плоскости симметрии $y_2 = 0$. Границей этой области является криволинейный треугольник со сторонами L_d^+ , L_d^- и L_0 . На рис. 3.3 показана (в силу симметрии) только его верхняя часть с обозначением L_d вместо L_d^+ ; за верхней частью линии L_0 сохранено обозначение L_0 .

Вдоль линии L_0 регулярные первичные пути касаются плоскости $y_2 = 0$, то есть в точках этой линии имеет место равенство $\dot{y}_2 = 0$. Таким образом, линия L_0 определяется равенством

$$L_0 : \quad y_1 = F_1(\tau, \alpha^0(\tau), \beta^0(\tau)), \quad \tau_s \leq \tau \leq \tau_x$$

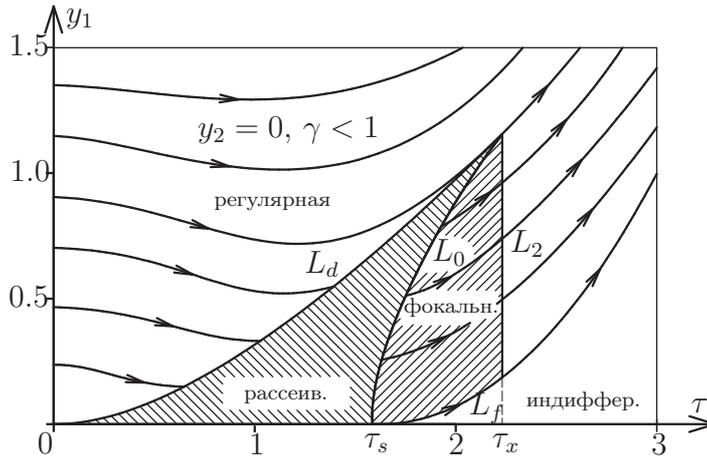


Рис. 3.3

где α^0, β^0 удовлетворяют системе $y_2 = 0, \dot{y}_2 = 0$ с $\beta \neq 0$, или

$$F_2^0(\tau, \alpha, \beta) = 0, \quad f_2^0(\tau, \alpha, \beta) = 0$$

Значения τ_s, τ_x — отличные от нуля корни уравнений:

$$\tau_s : \tau = \mu\psi(\tau), \quad \tau_x : k_P\tau = \mu k_E\psi(\tau) \quad (3.105)$$

Эти уравнения имеют конечные корни только тогда, когда $\mu > 1$ и $(\mu k_E/k_P) > 1$.

Рассеивающая зона для задачи (3.101) начинается в плоскости $y_2 = 0$ не сразу на границе $\tau = 0$, а в точках двух симметричных линий L_d^+, L_d^- . Линии L_d^+, L_d^- состоят из точек, для которых уравнение

$$y_2 = \beta F_2^0(\tau, \alpha, \beta) = 0$$

имеет только один тривиальный корень $\beta = 0$. Во всех других точках рассеивающей поверхности последнее уравнение имеет, кроме того, два ненулевых симметричных корня $\pm\beta^*$, которые соответствуют двум путям, начинающимся (в прямом времени) на рассеивающей поверхности. Это дает условие на L_d в виде

$$\partial F_2(\tau, \alpha, 0)/\partial\beta = F_2^0(\tau, \alpha, 0) = 0$$

приводящее к соотношению

$$\alpha^*(\tau) = E(\tau)/k_E - P(\tau)/k_P$$

и к явному выражению для L_d :

$$L_d : \quad y_1 = F_1(\tau, \alpha^*(\tau), 0) = P(\tau)(k_P - 1/k_P) - E(\tau)(k_E - 1/k_E) \\ y_2 = 0, \quad 0 \leq \tau \leq \tau_x$$

Задача (3.97)–(3.101) имеет две плоскости симметрии: $y_1 = 0$ и $y_2 = 0$. Градиент p испытывает скачок в плоскости $y_2 = 0$, в то время как компоненты p_1, p_3 непрерывны. Из соображений симметрии равенство $p_2^+ = -p_2^- = p_2$ выполняется для $y_2 = 0$, поэтому, используя параметр $\theta = 2\lambda - 1$, как в (2.63), выпишем функцию (2.7) в виде

$$f(\theta) = F(x, p_0, p_1, \theta p_2) = p_0 + \mu\psi\sqrt{p_1^2 k_P^2 + \theta^2 p_2^2} - \theta\sqrt{p_1^2 k_E^2 + \theta^2 p_2^2} \quad (3.106)$$

Анализ показывает, что неравенство $p_2^+ > 0$ при $y_2 = 0$ ведет к представлению функции цены в виде $S = \max[S^+, S^-]$ в окрестности плоскости $y_2 = 0$. Таким образом, вместо условия (2.7), которое справедливо для $S = \min[S^+, S^-]$, для рассеивающей поверхности используем условие оптимальности $f(\theta) \geq 0, |\theta| \leq 1$. При $\gamma \leq 1$ функция (3.106) удовлетворяет этому условию для всех точек рассеивающей поверхности “в геометрическом смысле” и соответствует построениям в [75]. Рассеивающая поверхность заканчивается на L_0 , где характеристики (траектории) достигают плоскости симметрии с касанием. Для того чтобы продолжить решение за пределы этой линии, должна быть рассмотрена сингулярность нового типа.

3.6.3. Фокальная поверхность

Тангенциальное поведение характеристик вдоль линии L_0 подсказывает тип особенности, описанный в главе 2 как фокальная поверхность, соответствующая гладкому гамильтониану (3.100). Определение этой сингулярной поверхности и построение соответствующих оптимальных траекторий представляет основную трудность в [75]. Так как этот феномен связан с плоскостью симметрии $y_2 = 0$, уравнения упрощаются.

Для задачи, сформулированной в (3.101), уравнения для фокальных путей (2.38), лежащих в фокальной плоскости, имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \partial F / \partial q_1, & \dot{y}_2 &= 0 \\ \dot{q}_1 &= 0, & \dot{q}_2 &= -\frac{\partial^2 F}{\partial \tau \partial q_2} / \frac{\partial^2 F}{\partial q_2^2} \end{aligned} \quad (3.107)$$

Порядок этой системы может быть уменьшен, как указано в подразделе 2.4.2. Из равенства $\partial F / \partial q_2 = 0$ можно найти

$$\left(\frac{q_2}{q_1}\right)^2 = \frac{(\tau k_P)^2 - (\mu\psi k_E)^2}{\mu^2 \psi^2 - \tau^2} = g^2(\tau)$$

Подстановка в первое уравнение (3.107) дает

$$\dot{y}_1 = \frac{\partial F}{\partial q_1} = \mu\psi(\tau) \frac{k_P^2}{\sqrt{k_P^2 + g^2(\tau)}} - \tau \frac{k_E^2}{\sqrt{k_E^2 + g^2(\tau)}} \quad (3.108)$$

Последнее уравнение упрощает процедуру построения, предложенную в [75]. Каждая фокальная линия определяется на некотором отрезке $[\tau_*, \tau_x]$, $\tau_s \leq \tau_* \leq \tau_x$, и, естественно, заканчивается в τ_x на линии L_2 , когда $g(\tau_x) = 0$, так как $g^2(\tau)$ должно быть неотрицательным.

Таким образом, граница фокальной области состоит из кривой L_0 , отрезка L_2 прямой $\tau = \tau_x$, $y_2 = 0$ и “предельного” фокального пути L_f , определяемого как решение уравнения (3.108) на отрезке $[\tau_s, \tau_x]$ с учетом начального условия $y_1(\tau_s) = 0$.

Оптимальные управления игроков на фокальной поверхности также определяются соотношениями (3.99), где q теперь не константа, а является решением системы (3.107). Подстановка этих управлений в уравнения движения (3.97) дает, в частности, уравнение (3.108).

За пределами фокальной зоны семейство регулярных путей, стартующих из точек отрезка L_2 , остается на плоскости $y_2 = 0$. Линия L_f от момента τ_s сама является траекторией. Траектории, стартующие из L_f , образуют поверхность Γ_z , которая отделяет некоторую область, включая часть плоскости $y_2 = 0$ между осью τ и линией L_f , от остальной части игрового пространства. В этой области цена игры везде одинакова и равна $S(0, 0, \tau_s) = C_m$. Такая область, названная в [75] *минимальной трубкой*, обозначается здесь как “индифферентная” зона. Граница Γ_z — сингулярная поверхность, вдоль которой, как показано ниже, удовлетворяются условия вязкостного решения.

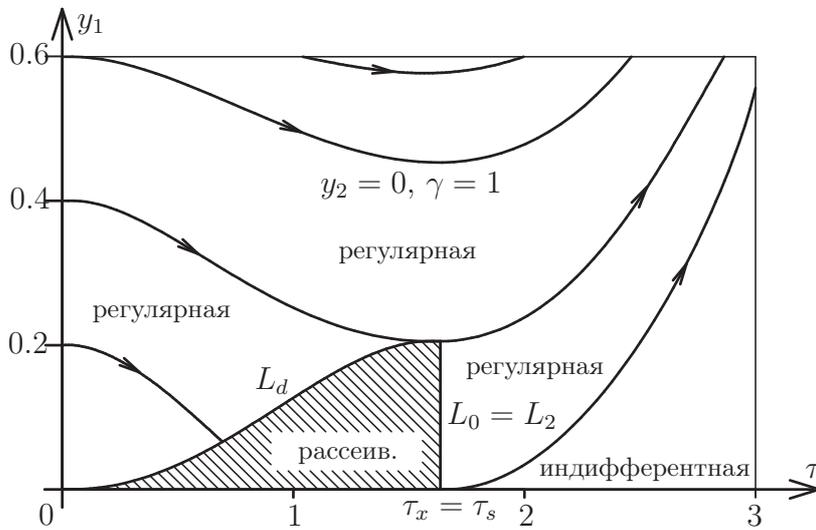


Рис. 3.4

Если $\gamma = 1$ ($k_E = k_P$), то $\tau_s = \tau_x$ и можно показать, что в этом случае L_0 ($= L_2$) становится отрезком прямой линии, параллельной y_1 -оси, как это видно на рис. 3.4. Как следствие, фокальная зона исчезает.

Если $\gamma > 1$ ($k_E \geq k_P$) (этот случай не рассматривается в [75]), то может случиться, что не все точки предварительно построенной рассеивающей поверхности проходят тест оптимальности $h(\theta) \geq 0$. Сравнение с примером ЗНЗ в разделе 2.5 показывает, что в этом случае можно ожидать появление эквивокальных поверхностей.

3.6.4. Граница индифферентной зоны

Индифферентная зона (ИЗ), которая имеет место в рассматриваемой задаче, вообще говоря, может быть определена как подобласть Ω_z игрового пространства Ω , где цена игры постоянна и, следовательно, имеет нулевой вектор градиента:

$$S(x) = C = \text{const}, \quad p = \partial S / \partial x = 0, \quad x \in \Omega_z \subset \Omega$$

Поскольку, вообще говоря, $p \neq 0$ при $x \in \Omega \setminus \Omega_z$, граница $\partial\Omega_z$ является сингулярной поверхностью в соответствии с определениями раздела 3.5 и главы 2. Такие зоны могут возникать в игровой задаче или задаче управления с положительно однородным гамильтонианом, как это имеет место в (3.100), и в общей задаче (3.59)–(3.61) с $L(x, u, v) \equiv 0$ (время t включено в x):

$$F(x, \lambda p) = \lambda F(x, p), \quad \lambda > 0$$

Оптимальные управления, определенные в (3.83), являются произвольными в ИЗ, так как для $x \in \Omega_z$ имеем $\langle p, f(x, u, v) \rangle \equiv 0$. В ходе решения игры нет необходимости строить что-то внутри Ω_z , нужно только идентифицировать ее. Следующее рассмотрение дает достаточные условия для идентификации.

Предположим, что непрерывная функция $S^+(x)$ определена в области $\Omega \setminus \Omega_z$ и является локальным вязкостным решением задачи (3.75). Пусть $S^+(x) = C = \text{const}$ при $x \in \Gamma_z$, $\Gamma_z = \partial\Omega_z \setminus M$, то есть S^+ постоянна на основной части границы ИЗ. Пусть Γ_z — гладкая гиперповерхность и гамильтониан игры положительно однороден. Тогда функция $S(x)$, определенная в Ω соотношениями

$$S(x) = S^+(x), \quad x \in \Omega \setminus \Omega_z; \quad S(x) = S^-(x) \equiv C, \quad x \in \Omega_z$$

есть вязкостное решение задачи (3.75) или, другими словами, цена соответствующей игры.

Для проверки этого утверждения заметим, что постоянная функция удовлетворяет в Ω_z уравнению Айзекса с положительно однородным гамильтонианом. Для проверки условий вязкостного решения на поверхности Γ_z в соответствии с (2.7) следует проверить знак функции

$$\begin{aligned} f(\theta) &= F(x, (1 + \theta)/2p^+ + (1 - \theta)/2p^-) = F(x, (1 + \theta)/2p^+) = \\ &= (1 + \theta)/2F(x, p^+) = 0 \quad (\theta = 2\lambda - 1) \end{aligned}$$

которая обращается в нуль на Γ_z и, таким образом, тривиально удовлетворяет вязкостному условию (2.7), а также противоположному неравенству.

Граница индифферентной зоны — сингулярная поверхность, и она может быть добавлена в список сингулярных поверхностей этой главы.

Упражнения

3.1. Найти связь между частными производными функций $L(x, \dot{x}, t)$ и $H(x, p, t)$ в соответствующих точках при $\dot{x} = \omega(x, p, t)$ и получить характеристические уравнения для (3.18) из уравнения Эйлера (3.10).

3.2. Вывести формулу (3.17) и условие оптимальности Лежандра $L_{\dot{x}\dot{x}} \leq 0$ из (3.47).

3.3. Доказать, что одно из характеристических уравнений для (3.29) совпадает с уравнением Эйлера, если длина дуги берется в качестве независимой переменной t в (3.22).

3.4. Доказать представление (3.48) для правого гамильтониана.

3.5. Доказать следующие неравенства для функций $S_i(x)$, удовлетворяющих (3.80):

$$\min_{u \in U} \max_{v \in V} \min_{i \in \{0,1\}} Q(x, \frac{\partial S_i}{\partial x}, u, v) \leq 0; \quad \max_{v \in V} \min_{u \in U} \min_{i \in \{0,1\}} Q(x, \frac{\partial S_i}{\partial x}, u, v) \leq 0$$

3.6. Найти φ , ψ^\pm и H^\pm в (3.89) и уравнение, определяющее поверхность Σ , для игры со скалярными управлениями:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u + r(x)v, \quad u_0 \leq u \leq u_1, \quad v_0 \leq v \leq v_1$$

и с $L \equiv 1$.

3.7. Вывести аналог формул (3.96) для гладкого случая.

3.8. Сформулировать дифференциальную игру (3.59)–(3.61), для которой функция

$$F(x, y, p, q) = p + \sqrt{a^2 + q^2} - x\sqrt{b^2 + q^2}$$

представляет собой правый гамильтониан и задача (2.53) является ЗНЗ в обратном времени.

ГЛАВА 4

Дифференциальные игры с простыми движениями на многообразиях

4.1. Постановка задачи

4.1.1. Игры с простыми движениями

В этой главе рассматриваются дифференциальные игры, в которых игроки представляют собой управляемые по скорости точки на римановом многообразии. Игра преследования формулируется для случая, когда преследователь имеет преимущество в скорости. В противном случае рассматривается игра сближения с целью игры равной минимальному расстоянию между игроками при неограниченном времени движения. Несмотря на то что формулировки данных задач качественно различны, их решения имеют определенное сходство, что позволяет исследовать эти задачи параллельно. Существенную часть решения рассматриваемых задач составляет сингулярная поверхность, которая состоит из сингулярных линий (характеристик) и является огибающей поверхностью регулярных траекторий.

Дифференциальные игры с так называемыми простыми движениями представляли интерес для исследователей в течение всего развития теории дифференциальных игр, см., например, [33, 44].

Интерес к таким задачам можно объяснить простой динамикой игроков, а также тем, что многочисленные прикладные задачи могут быть смоделированы в терминах простого движения. Развитие многих методов теории началось с их применения к игровым задачам с простыми движениями.

Поскольку ограничения на скорости в играх с простыми движениями однородны, то геодезические линии играют существенную роль. Как правило, они представляют собой оптимальные траектории движения игроков. Во многих работах фазовым пространством игры является либо евклидово пространство, либо его подпространство, в котором для двух заданных точек существует единственная соединяющая их геодезическая (прямая) линия.

Из-за неединственности геодезических кривых, что типично для многообразий, в оптимальном фазовом портрете игры могут появиться особые траектории. Следует отметить, что на текущий момент существует не так много публикаций, посвященных игровым задачам на многообразиях. Исследование таких задач находится на начальном этапе своего развития.

В этой главе рассмотрены две игры с простыми движениями на многообразии, на котором определена невырожденная риманова метрика. В игре преследования платой является время захвата, а в игре сближения — минимальное расстояние между игроками при неограниченном времени движения. Локальное исследование

необходимых условий ограничивается здесь случаем таких многообразий (или их частей — подмногообразий), в которых для любой пары точек существует не более двух соединяющих их геодезических линий минимальной длины.

Получаемая величина функции платы вместе с соответствующими стратегиями игроков, выраженными в терминах минимальной геодезической линии и имеющими ту же форму, как и при решении игры в евклидовом пространстве, называется первичным решением игры. Часть фазового пространства, в котором решение игры первичное, называется первичной областью.

Доказано существование рассеивающей поверхности в первичной области. Получено достаточное условие для того, чтобы первичная область представляла собой все фазовое пространство. Показано, что преследователю во всем пространстве игры гарантировано достижение первичного результата. Во вторичной области преследователь имеет возможность улучшить первичный результат. Доказано, что первичная и вторичная области отделены особой (сингулярной) поверхностью, состоящей из особых (сингулярных) траекторий. В игре преследования это эквивокальная, а в игре сближения — универсальная поверхность.

Необходимые условия оптимальности выражаются с помощью неравенств А.И. Субботина и понятия вязкостного решения. Показано, что оптимальные траектории движения игроков во вторичной области по сути являются геодезическими линиями многообразия. Однако каждый из игроков при этом движется по своей собственной траектории, не совпадающей с линией, соединяющей игроков. Предложен алгоритм построения оптимальных траекторий в окрестности особых (сингулярных) поверхностей.

В игре сближения функция цены игры является непрерывной и удовлетворяет уравнению Айзекса с разрывным гамильтонианом. Таким образом, необходимые условия вязкостного решения здесь неприменимы. Чтобы привести эту задачу к задаче Коши с подвижной границей из главы 1, а также для получения уравнений особых (сингулярных) характеристик используются условия, подобные неравенствам А.И. Субботина.

Исследования общего характера применены в этой главе к играм простого преследования в евклидовом пространстве с препятствием, а в следующей главе к играм на двумерном конусе с метрикой, порожденной метрикой окружающего трехмерного евклидова пространства. В этой главе фактически приводится локальное решение в окрестности рассматриваемой сингулярной поверхности, в то время как в следующей — полное решение на всем многообразии.

4.1.2. Уравнения динамики

Пусть точки P (преследователь) и E (убегающий) движутся на n -мерном многообразии K с невырожденной римановой метрикой $ds^2 = \langle G(z)dz, dz \rangle$. Здесь s — длина дуги, $G(z)$ — положительно определенная $n \times n$ -матрица (метрический тензор), а $z \in \mathbb{R}^n$ — вектор локальных координат. Скорости $u, v \in \mathbb{R}^n$ точек P и E ограничены по модулю единицей и величиной ν соответственно. Уравнения движения игроков имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} P: \quad \dot{y} &= u, \quad u \in E_1(y), & E: \quad \dot{z} &= v, \quad v \in E_\nu(z) \\ E_\mu(z) &= \{u \in \mathbb{R}^n : |u|_z \leq \mu\}, & |u|_z^2 &= \langle G(z)u, u \rangle \end{aligned} \quad (4.1)$$

Здесь y, z — локальные координаты P и E , $E_\mu(z)$ — эллипсоид касательных векторов в точке $z \in K$. При этом модуль этих векторов не превышает величины $\mu > 0$. Угловые скобки обозначают обычное скалярное произведение. Поскольку векторы скоростей, являющиеся по сути управляющими параметрами игроков, подчиняются однородным ограничениям, то геодезические линии многообразия должны играть важную роль в построении оптимального фазового портрета.

Таким образом, пространство игры — многообразие K , а фазовое пространство — его квадрат: $K^2 = K \times K$. Точки из K^2 будут обозначаться через $Q = (P, E)$, $Q \in K^2$. Относительно многообразия K будем полагать выполненным следующее условие. Для любой пары точек $P, E \in K$, то есть для любой точки $Q \in K^2$, вариационная задача о геодезической линии (см. подраздел 3.1.3) вида

$$L(Q) = \min_{\xi(\cdot)} \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \sqrt{\langle G(\xi) \dot{\xi}, \dot{\xi} \rangle} d\sigma, \quad \xi(\sigma_0) = y, \quad \xi(\sigma_1) = z \quad (4.2)$$

имеет кусочно-гладкое решение $\xi(\sigma)$, $\sigma_0 \leq \sigma \leq \sigma_1$. При этом данное решение с минимальным значением $L(Q)$ является единственным для любой точки Q , за исключением точек из подмножества $\Gamma_0 \subset K^2$. Это подмножество характеризуется тем, что при $Q \in \Gamma_0$ существуют две минимальные геодезические. В некоторой окрестности $D(\Gamma_0) \subseteq K^2$ множества Γ_0 справедливо равенство

$$L(Q) = \min[L^+(Q), L^-(Q)], \quad Q \in D(\Gamma_0) \quad (4.3)$$

где $L^\pm(Q)$ — локальные минимумы функционала (4.2), которые дважды непрерывно дифференцируемы в $D(\Gamma_0)$, а функция $L(Q)$ дважды непрерывно дифференцируема на множестве $K^2 \setminus \Gamma_0$, рис. 4.1.

Таким образом, допускается только простейший тип неединственности геодезических. Он имеет место, например, когда мы рассматриваем в качестве K поверхности цилиндра или конуса в трехмерном евклидовом пространстве или евклидову

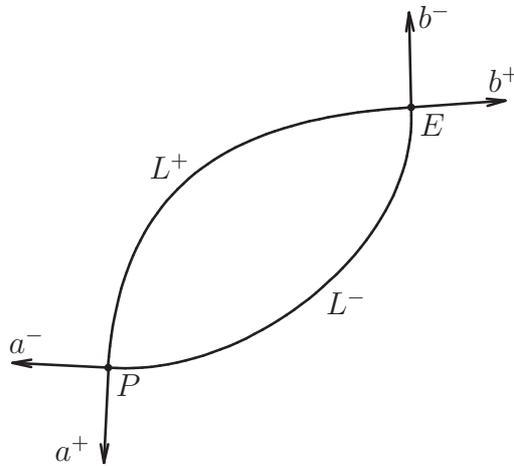


Рис. 4.1

плоскость с удаленными из нее выпуклыми ограниченными областями (препятствиями). В некоторых случаях локальные координаты будут использоваться в качестве аргументов для L и других функций. При этом будем применять запись $L(y, z)$ или $L(x)$, где $x = (y, z) \in \mathbb{R}^{2n}$ — вектор локальных координат точки $Q \in K^2$. Отметим, что в этой главе $L(Q)$ обозначает геодезическую длину, а не функцию Лагранжа, как в главе 3.

4.1.3. Функции платы для двух игр

Рассматриваются две игры с управляемыми точечными объектами (игроками) и позиционными стратегиями (4.1). Для случая $0 < \nu < 1$, когда игрок P имеет преимущество в скорости и может уменьшить расстояние $L(P, E)$ между игроками, мы исследуем игру преследования с радиусом захвата $h \geq 0$ на отрезке времени $[0, T]$. При $\nu \geq 1$ захват невозможен, и рассматривается игра сближения. Платой в этой игре является минимальное геодезическое расстояние между игроками на полубесконечном интервале времени $(0, \infty)$. Таким образом, функция платы в указанных задачах имеет следующий вид:

$$J = T, \quad Q(T) \in D_T = \{Q \in K^2 : L(Q) \leq h\} \quad (0 < \nu < 1) \quad (4.4)$$

$$J = \min_{0 \leq t < \infty} L(P(t), E(t)) \quad (\nu \geq 1) \quad (4.5)$$

$$J \rightarrow \min_u \max_v$$

Предположим, что цена игры $V(Q)$, $Q \in K^2 \setminus D_T$, существует в играх (4.4), (4.5) и реализуется для каждого из игроков в классе стратегий с обратной связью $u(Q), v(Q)$. Для игры (4.5) мы полагаем $D_T = \emptyset$.

Заметим, что хотя игры (4.4), (4.5) по существу различны, их решения имеют определенное сходство, что позволяет рассматривать эти задачи параллельно.

Отметим, что при отсутствии специальных замечаний все нижеприведенные утверждения применимы к обеим играм: игре преследования (4.4) и игре сближения (4.5).

4.2. Первичное решение

4.2.1. Свойства геодезической линии

Сформулированное далее определение первичного решения основано на следующих свойствах геодезической длины (функции $L(Q)$), которые ранее получены в подразделе 3.1.3 (но с использованием других обозначений). Частные производные решения $L(Q)$, $Q \in K^2 \setminus \Gamma_0$, вариационной задачи (4.2) (а также функций $L^\pm(Q)$ в области $D(\Gamma_0)$) имеют следующие свойства, вытекающие из классической формулы первой вариации, см. раздел 3.1:

$$\begin{aligned} L_y(Q) &= G(P)a(Q), \quad L_z(Q) = G(E)b(Q) \quad (|a|_y = |b|_z = 1) \\ a(Q) &= -\dot{\xi}(\sigma_0)/|\dot{\xi}(\sigma_0)|_y, \quad b(Q) = \dot{\xi}(\sigma_1)/|\dot{\xi}(\sigma_1)|_z \end{aligned} \quad (4.6)$$

Отсюда получаем уравнения эйконала

$$\langle G^{-1}(y)L_y, L_y \rangle = 1, \quad \langle G^{-1}(z)L_z, L_z \rangle = 1 \quad (4.7)$$

а также экстремальные соотношения для полной производной по времени

$$\begin{aligned} \min_u \max_v \dot{L} &= \nu - 1, \quad \dot{L} = \langle L_y, u \rangle + \langle L_z, v \rangle \\ u^*(Q) &= -a(Q) = -G^{-1}(P)L_y(Q) \\ v^*(Q) &= \nu b(Q) = \nu G^{-1}(E)L_z(Q) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Здесь и далее экстремумы по u, v взяты по эллипсоидам (4.1).

4.2.2. Первичная и вторичная области

Из простых геометрических соображений следует, что в некоторой части фазового пространства значениями цены и соответствующими гарантирующими управлениями обратной связи для игр (4.4), (4.5) будут функции

$$\begin{aligned} S(Q) &= (L(Q) - h)/(1 - \nu) \quad (\text{для (4.4)}) \\ S(Q) &= L(Q) \quad (\text{для (4.5)}) \\ u^1(Q) &= -a(Q), \quad v^1(Q) = \nu b(Q), \quad Q \in K^2 \end{aligned} \quad (4.9)$$

Здесь a, b — единичные, направленные вовне касательные векторы к геодезическим кривым в точках P и E , рис. 4.1.

В случае, когда фазовое пространство представляет собой n -мерное евклидово, $K = \mathbb{R}^n$, формулы (4.9) задают полные решения игр. Для произвольного многообразия K функция $S(Q)$ в (4.9) совпадает со значением цены игры, вообще говоря, лишь в некоторой части D_1 (содержащей D_T) фазового пространства K^2 . Эта часть множества D_1 называется первичной областью. Более точно, первичная область есть максимальная область $D_1 \subset K^2$, такая что $S(Q) = V(Q)$, $Q \in D_1$. Функции (4.9) называются первичным решением игр (4.4), (4.5).

Для игры (4.4) функция $S(Q)$ в (4.9) есть отношение начального расстояния между игроками (без радиуса захвата) к разности их скоростей. В игре (4.5) равенство $S(Q) = L(Q)$ означает, что оптимальный результат (минимальное расстояние между игроками) достигается в начальный момент времени.

Ввиду изложенных выше свойств функции $L(Q)$ первичное решение удовлетворяет необходимым условиям оптимальности из следующего раздела.

Лемма 4.1. *При использовании игроком P стратегии $u^1(Q)$ первичный результат $S(Q)$ гарантируется во всем фазовом пространстве K^2 , то есть*

$$V(Q) \leq S(Q), \quad Q \in K^2 \quad (4.10)$$

Если управление $u^1(Q)$ является многозначным в некоторых точках, то в этом случае можно использовать любое значение u^1 .

Доказательство леммы для игры (4.4) основано на свойствах (4.8). Для игры (4.5) оно следует из определения функции платы. В игре (4.5) результат $S(Q)$

достигается в начальный момент времени и, следовательно, здесь не требуется никакой гарантирующей стратегии для игрока P . Согласно определению первичной области, если область $D_2 = K^2 \setminus D_1$ непуста, то справедливо неравенство $V(Q) < S(Q)$, $Q \in D_2$, то есть игрок P может улучшить гарантированный результат $S(Q)$. Множество D_2 называется вторичной областью. Функцию цены при $Q \in D_2$ будем обозначать через $V_2(Q)$ или просто $V(Q)$.

4.3. Необходимые условия оптимальности

4.3.1. Обобщенное основное уравнение, регулярные траектории

Предположим, что функция цены $V(Q)$ имеет производную по всем направлениям $w = (u, v) \in \mathbb{R}^{2n}$. Тогда для игры (4.4) справедливы следующие необходимые условия оптимальности, основанные на неравенствах А.И. Субботина (3.78):

$$\min_u \max_v \partial V / \partial w \geq -k \geq \max_v \min_u \partial V / \partial w, \quad Q \in K^2 \setminus D_T \quad (4.11)$$

Здесь и далее $k = 1$ для игры преследования (4.4) и $k = 0$ для игры сближения (4.5).

Как показано в подразделе 3.4.2, если в окрестности гиперповерхности Γ цена игры имеет вид $V = \min[V^+, V^-]$ ($V = \max[V^+, V^-]$), где функции V^+ , V^- являются ценой игры в различных полуокрестностях Γ , и при $x \in \Gamma$ справедливо равенство $V^+ = V^-$, то левое (правое) неравенство в (4.11) переходит в равенство.

Ввиду специфического вида функции платы, игра (4.5) не может быть исследована с помощью классических уравнений Беллмана – Айзекса из раздела 3.3. Несмотря на это, могут быть доказаны некоторые локальные условия, аналогичные (4.11).

Лемма 4.2. *Для игры (4.5) во вторичной области D_2 справедливы оба неравенства (4.11), а в D_1 выполняется только левое неравенство в (4.11):*

$$\min_u \max_v \partial S / \partial w \geq 0, \quad Q \in D_1 \quad (4.12)$$

Доказательство. Докажем от противного, например, левое неравенство в (4.11). Пусть в некоторой точке x^0 справедливо противоположное неравенство

$$\min_u \max_v \partial V(x^0, w) / \partial w < 0$$

Предположим, что игрок P в течение малого временного интервала $[0, \vartheta]$ использует постоянное управление $u = u^*$, которое обеспечивает внешний минимум по u , а игрок E — произвольную кусочно-непрерывную функцию $v = v(t)$. Пусть $x(t)$ — соответствующее решение (4.1). В этом случае непрерывная функция $\varphi(t) = V(x(t))$ в точке $t = 0$ имеет правостороннюю производную $\dot{\varphi} = \partial V / \partial \dot{x}(0)$, вычисляемую в виде производной функции V по направлению $\dot{x}(0)$. Тогда справедливы неравенства

$$\dot{\varphi} \leq \max_v \partial V(x^0, u^*, v) / \partial w^* < 0, \quad w^* = (u^*, v(0))$$

Отсюда следует, что для достаточно малой величины ϑ выполнено неравенство $V(x(\vartheta)) < V(x(0))$. Однако из определения функционала (4.5) вытекает соотношение $V(x(\vartheta)) \geq V(x(0))$, поскольку уменьшение интервала минимизации может

только увеличивать результат. Но это противоречит предыдущему неравенству. Таким образом, левое неравенство в (4.11) доказано. Правое неравенство доказывается аналогично.

Противоположное к (4.12) предположение для внутренней точки $Q \in \text{int}D_1$ означает, что игрок P обладает стратегией обратной связи, которая гарантирует ему выполнение неравенства $\partial L/\partial w < 0$. Поэтому расстояние L_Δ при малом начальном промежутке времени Δ будет меньше, чем исходное. Последнее противоречит определению первичной области. Доказательство (4.12) для граничной точки Q сочетает в себе оба использованных выше подхода в зависимости от того, направлен ли вектор w в D_2 или в D_1 . Лемма доказана.

В точках гладкости функции V производную по направлению $\partial V/\partial w$ можно представить в виде $\partial V/\partial w = \langle V_y, u \rangle + \langle V_z, v \rangle$. Условия (4.11) в этом случае приводят к уравнению Беллмана – Айзекса и соответствующим оптимальным управлениям:

$$\begin{aligned} F(x, p) &= \min_u \max_v (\langle V_y, u \rangle + \langle V_z, v \rangle) + k = \\ &= -\langle G^{-1}(y)V_y, V_y \rangle^{1/2} + \nu \langle G^{-1}(z)V_z, V_z \rangle^{1/2} + k = \\ &= -|G^{-1}(y)V_y|_y + \nu |G^{-1}(z)V_z|_z + k = 0, \quad p = (V_y, V_z) \in \mathbb{R}^{2n} \quad (4.13) \\ u^*(x, p) &= -\eta/|\eta|_y, \quad v^*(x, p) = \nu\zeta/|\zeta|_z \\ \eta(x, p) &= G^{-1}(y)V_y, \quad \zeta(x, p) = G^{-1}(z)V_z \end{aligned}$$

Вследствие справедливости уравнений эйконала (4.7), первичное решение $S(x)$ для игры (4.4) удовлетворяет уравнению (4.13). Из тех же уравнений эйконала следует, что функция $S = L(x)$, являющаяся первичным решением игры (4.5), удовлетворяет уравнению

$$F(x, p) + 1 - \nu = 0, \quad x \in D_1 \quad (k = 0)$$

В то же время функция цены $V(x)$ для игры (4.5) во вторичной области D_2 удовлетворяет уравнению (4.13), то есть справедливо равенство $F(x, p) = 0$ (при $k = 0$). Таким образом, полная цена игры есть решение уравнения Айзекса с разрывным гамильтонианом.

Регулярные траектории для игры (4.4) во всем пространстве, а для игры (4.5) во вторичной области описываются системой регулярных характеристик для УЧП первого порядка (4.13)

$$\dot{x} = F_p, \quad \dot{p} = -F_x, \quad (\dot{V} = \langle p, F_p \rangle) \quad (4.14)$$

Поскольку функция F не зависит от V , то третье уравнение (в скобках) отщепляется от первых двух и характеристическая система имеет гамильтонов вид. Отметим, что оптимальные траектории для игры (4.5) в первичной области существенно неоднозначны. Убегающий игрок должен здесь заботиться только о выполнении неравенства $L(x(t)) \geq L(x(0))$, $t > 0$. Локально это неравенство может быть гарантировано его позиционной стратегией (4.8). Если предположить, что игрок P также использует стратегию (4.8), то для первичной области можно построить некоторые конкретные оптимальные траектории, которые удовлетворяют системе (4.14). Именно эти траектории для игры (4.5) и будем в дальнейшем считать оптимальными.

Лемма 4.3. Пусть в окрестности некоторой точки Q выполнены соотношения $V_y \neq 0$, $V_z \neq 0$. Тогда x -компоненты решения системы (4.14) реализуются в виде двух геодезических линий на многообразии K , которые являются траекториями игроков P и E .

Доказательство. Система (4.14) расщепляется на две независимые подсистемы, описывающие движение каждого игрока с помощью векторов y, V_y и z, V_z :

$$\begin{aligned} \dot{y} &= F_{V_y}^-, & \dot{V}_y &= -F_y^-, & \dot{z} &= F_{V_z}^+, & \dot{V}_z &= -F_z^+ \\ F^- &= -\sqrt{\langle G^{-1}(y)V_y, V_y \rangle}, & F^+ &= \nu\sqrt{\langle G^{-1}(z)V_z, V_z \rangle} \\ F &= F^- + F^+ + k \end{aligned}$$

Можно проверить, что если длину дуги (3.21) выбрать в качестве независимого параметра t , то первые компоненты $y(t), z(t)$ решений для указанных выше гамильтоновых систем удовлетворяют уравнению Эйлера (3.10) для вариационной задачи (4.2) или (3.22), см. упражнение 3.3. Лемма доказана.

Данные гамильтоновы системы представляют собой также характеристические системы для двух уравнений эйконала в (3.29), а отрицательный знак в квадратном корне при F^- показывает, что игрок P движется внутрь геодезической линии PE , а не наружу. При этом его скорость направлена противоположно изображенному на рис. 4.1 вектору a , см. также (4.8).

Таким образом, регулярные движения игроков осуществляются вдоль геодезических линий многообразия. При этом каждый игрок, вообще говоря, движется по своей собственной линии, отличной от линии, их соединяющей. Отметим, что первичные регулярные движения и первичное решение (4.9) определены в терминах общей геодезической линии, соединяющей точки P и E .

Если область D_2 непуста (в этом случае таковой является и поверхность Γ_0), то для построения цены игры требуются дополнительные необходимые условия оптимальности. В частности, возникает проблема построения границы ∂D_1 .

4.3.2. Сингулярная (особая) поверхность в первичной области

Вначале определим, какая часть поверхности

$$\Gamma_0 = \{Q \in K^2 : L^+(Q) = L^-(Q)\}$$

лежит в области D_1 . Некоторое продолжение $S^\pm(Q)$ первичного решения дает подстановка $L^\pm(Q)$ из (4.3) в (4.8).

Лемма 4.4. Для точек поверхности $\Gamma_1 = \Gamma_0 \cap D_1$ справедливы следующие условия:

$$F(x, S_x^0(x)) \geq 0, \quad Q \in \Gamma_1, \quad S^0(x) = (S^+(x) + S^-(x))/2 \quad (4.15)$$

Доказательство. Поскольку на гиперповерхности Γ_0 функция

$$S(x) = \min[S^+(x), S^-(x)]$$

не дифференцируема, то для проверки выполнения на ней условий (4.11), (4.12) нужно подставить в последние полученную с помощью (3.79) производную по направлению вида

$$\partial S/\partial w = \min[\dot{S}^+, \dot{S}^-], \quad \dot{S}^\pm = \langle S_y^\pm, u \rangle + \langle S_z^\pm, v \rangle, \quad x \in \Gamma_0$$

Чтобы доказать правое неравенство в (4.11) для игры (4.4), можно использовать неравенство, которое справедливо для всех точек $Q \in \Gamma_0$:

$$\max_v \min_u \min_{\pm} \dot{S}^\pm = \frac{\nu |b^+ + b^-|_z / 2 - 1}{1 - \nu} \leq -1$$

Это неравенство есть частный случай второго соотношения в (3.82). Что касается левого неравенства в (4.11), а также условия (4.12), то имеет место следующее равенство (представляющее собой первое соотношение в (3.82)):

$$\min_u \max_v \min_{\pm} \dot{S}^\pm = \min[0, F(x, S_x^0(x))] - k$$

Соотношение (4.15) следует теперь из сравнения этого равенства с левым неравенством в (4.11) и с условием (4.12). Лемма доказана.

В следующем разделе на основе свойств вязкостного решения получено другое, более простое доказательство утверждения (4.15).

Поверхность Γ_1 ограничивает область D_2 по множеству $B_1 = \Gamma_1 \cap \partial D_1$. В точках B_1 помимо равенства $L^+ = L^-$ имеет место соотношение $F = 0$ в (4.15). Введем многообразие B такое, что $B_1 \subset B$ и выполняются равенства

$$\begin{aligned} B: \quad L^+(Q) = L^-(Q), \quad F(x, S_x^0(x)) = 0 \\ (|a^+(Q) + a^-(Q)|_y - \nu |b^+(Q) + b^-(Q)|_z = 2k(1 - \nu)) \end{aligned} \quad (4.16)$$

Здесь равенство в скобках представляет собой геометрическую форму второго равенства $F(x, S_x^0(x)) = 0$ и выведено с использованием в (4.13) векторов

$$\begin{aligned} a^\pm &= (1 - \nu)G^{-1}S_y^\pm, \quad b^\pm = (1 - \nu)G^{-1}S_z^\pm \\ a^\pm &= G^{-1}S_y^\pm, \quad b^\pm = G^{-1}S_z^\pm \end{aligned}$$

Эти векторы получены из (4.6), (4.9) для задач (4.4) и (4.5) соответственно.

Если множество B пусто, то первичное решение удовлетворяет обобщенным уравнениям (4.11), (4.12), а также вязкостным условиям главы 2 (см. также следующий подраздел) во всем пространстве $K^2 \setminus D_T$. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Лемма 4.5. Пусть множество B пусто, множество Γ_0 — локально гладкая гиперповерхность и для всех точек $Q \in \Gamma_0$ выполнено неравенство $F(x, S_x^0(x)) \geq 0$. Тогда $\Gamma_0 \subset D_1$ и $S(Q) = V(Q)$, $Q \in K^2 \setminus D_T$, то есть первичное решение задает цену игры во всем пространстве.

Такая ситуация возникает, например, для игры на выпуклом цилиндре в евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 , см. рис. 4.2. Действительно, развернув цилиндр в плоскую

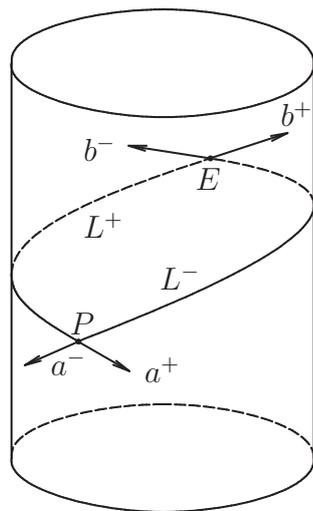


Рис. 4.2

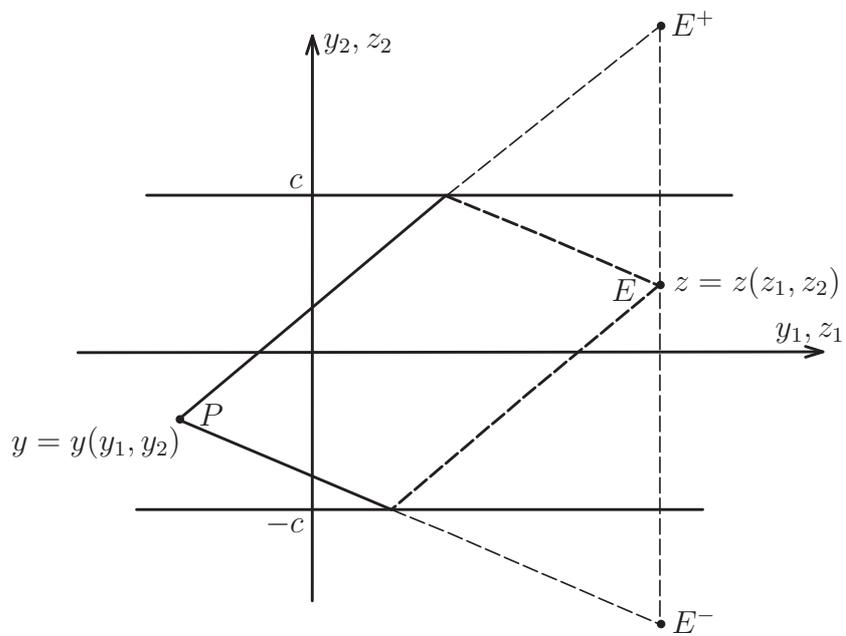


Рис. 4.3

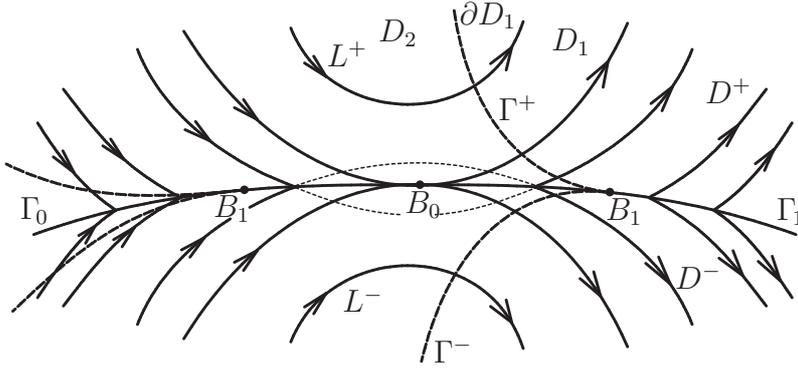


Рис. 4.4

полоску, можно ввести на ней локальные декартовы координаты, как показано на рис. 4.3, так, что будет выполнено равенство $2c = \pi r$, где r — радиус цилиндра. Геодезические длины L^+, L^- равны длинам отрезков PE^+, PE^- и могут быть выражены соотношениями

$$L^\pm = \sqrt{(y_1 - z_1)^2 + (y_2 + z_2 \mp 2c)^2} \tag{4.17}$$

Поверхность Γ_0 определяется условием $L^+ = L^-$ или, что эквивалентно, равенством $y_2 + z_2 = 0$. Проверка условия (4.15) остается в качестве упражнения.

Среди геометрически особых точек Γ_0 имеются такие, в которых первичные (регулярные) пути касаются Γ_0 . Определим множества B_0^+ и B_0^- , см. рис. 4.4, как множества точек, в которых первичные траектории со сторон L^+ и L^- , соответственно, касаются Γ_0 :

$$B_0^\pm : \quad L^+(Q) = L^-(Q), \quad \langle F_p(x, q^\pm), q^+ - q^- \rangle = 0 \tag{4.18}$$

$$q^+ = S_x^+, \quad q^- = S_x^-$$

Лемма 4.6. *Если одно из множеств B_0^+ или B_0^- не пусто, то и другое не пусто и оба множества совпадают: $B_0 = B_0^+ = B_0^-$. Для игры (4.4) имеем $B_0 \subset D_2$ и первичные траектории покидают поверхность Γ_1 под ненулевым углом (Γ_1 здесь является рассеивающей поверхностью). В игре (4.5) имеем $B_0 \subset D_1$, а траектории в окрестности B_1 подходят к Γ_1 под ненулевым углом. Часть Γ_1 между B_0 и B_1 представляет собой универсальную поверхность, а оставшаяся часть — рассеивающую. При этом в случае $\nu = 1$ справедливо равенство $B_1 = B_0$.*

Доказательство леммы 4.6 следует из результатов следующего подраздела.

Заметим, что утверждение леммы о поведении регулярных траекторий в окрестности множества B_1 означает, что для игр (4.4) и (4.5), соответственно, имеют место неравенства

$$\langle F_p(x, q^+), q^+ - q^- \rangle < 0, \quad \langle F_p(x, q^-), q^+ - q^- \rangle > 0$$

$$\langle F_p(x, q^+), q^+ - q^- \rangle > 0, \quad \langle F_p(x, q^-), q^+ - q^- \rangle < 0$$

Качественный фазовый портрет представлен на рис. 4.4. Подставляя в данные соотношения векторы

$$q^\pm = \frac{1}{1-\nu}(L_y^\pm, L_z^\pm), \quad q^\pm = (L_y^\pm, L_z^\pm)$$

а также используя уравнения эйконала (4.7) и единичные векторы (4.8), для задач (4.4) и (4.5) можно получить равенства

$$\begin{aligned} \langle F_p(x, q^+), q^+ - q^- \rangle &= -\langle F_p(x, q^-), q^+ - q^- \rangle = \frac{R}{1-\nu} \\ \langle F_p(x, q^+), q^+ - q^- \rangle &= -\langle F_p(x, q^-), q^+ - q^- \rangle = R \\ R &= -1 + \nu + \langle G(y)a^+(x), a^-(x) \rangle - \nu \langle G(z)b^+(x), b^-(x) \rangle \end{aligned} \quad (4.19)$$

Знак при величине R будет определен в следующем подразделе. Отметим также, что в общем случае в задачах такого типа множества B_0^+ , B_0^- не обязательно совпадают (см., например, точки B_1 и B_0 на рис. 2.5). Таким образом, в рассматриваемых играх имеет место некоторая симметрия.

4.3.3. Анализ поверхности Γ_0 с использованием условий вязкостного решения

Рассмотрим вначале игру (4.4). Для нее первичное решение

$$S(x) = \min[S^+(x), S^-(x)]$$

есть локальное вязкостное решение УЧП (4.13). Как указано выше, это решение вне поверхности Γ_0 удовлетворяет уравнению (4.13) в классическом смысле. Чтобы проверить условие для вязкостного решения (2.7), в дополнение к обобщенному основному уравнению нужно подставить в (4.13) вектор

$$p_\theta = \frac{1+\theta}{2}q^+ + \frac{1-\theta}{2}q^- \quad (4.20)$$

Это требуется для того чтобы, используя параметр $\theta = 2\lambda - 1$, получить функцию $f(\theta)$:

$$\begin{aligned} f(\theta) &= 1 + \frac{\nu}{1-\nu} \sqrt{\frac{1+\beta}{2} + \frac{1-\beta}{2}\theta^2} - \frac{1}{1-\nu} \sqrt{\frac{1+\alpha}{2} + \frac{1-\alpha}{2}\theta^2} \\ &\quad -1 \leq \theta \leq 1 \\ \alpha &= \langle G(z)a^+(x), a^-(x) \rangle, \quad \beta = \langle G(y)b^+(x), b^-(x) \rangle \\ &\quad |\alpha| \leq 1, \quad |\beta| \leq 1 \end{aligned} \quad (4.21)$$

Здесь $q^\pm = S_x^\pm$, а функции S^\pm имеют вид (4.9) с функциями L^\pm из (4.3). Скалярные произведения α, β единичных векторов a^\pm, b^\pm удовлетворяют ограничениям в (4.21).

Равенства в (4.21) для α и β задают отображение $Q \rightarrow (\alpha, \beta)$ фазового пространства K^2 в квадрат $|\alpha| \leq 1, |\beta| \leq 1$ на плоскости α, β . Нас будет интересовать это отображение в окрестности поверхности Γ_0 .

Поскольку мы рассматриваем задачу с заданными терминальными значениями, а сингулярность имеет вид минимума, то необходимым вязкостным условием для поверхности Γ_1 является неравенство

$$f(\theta) \geq 0, \quad |\theta| \leq 1$$

Отметим, что условие (2.7), которое должно выполняться для начальной задачи, в данном случае не подходит. Функция $f(\theta)$ очень удобна для исследования многообразий B_0 и B_1 . В случае B_0 заметим, что имеют место равенства

$$\begin{aligned} f'(1) &= \langle F_p(x, q^+), q^+ - q^- \rangle \\ f'(-1) &= \langle F_p(x, q^-), q^+ - q^- \rangle, \quad f'(1) = -f'(-1) \end{aligned} \quad (4.22)$$

Условия касания (4.18), выраженные через производную от функции $f(\theta)$, принимают вид $f'(1) = f'(-1) = 0$. Следовательно, множества B_0^+ и B_0^- совпадают (это является утверждением леммы 4.6), а множество B_0 отображается в прямую линию (линия 1 на рис. 4.5)

$$R = \alpha - \nu\beta + \nu - 1 = 0 \quad (4.23)$$

Здесь величина R введена в (4.19). Точки выше прямой линии 1 соответствуют той части Γ_0 , которую первичные траектории достигают с выполнением условия $R = \pm f'(\pm 1) > 0$. Область ниже этой прямой линии соответствует рассеивающей

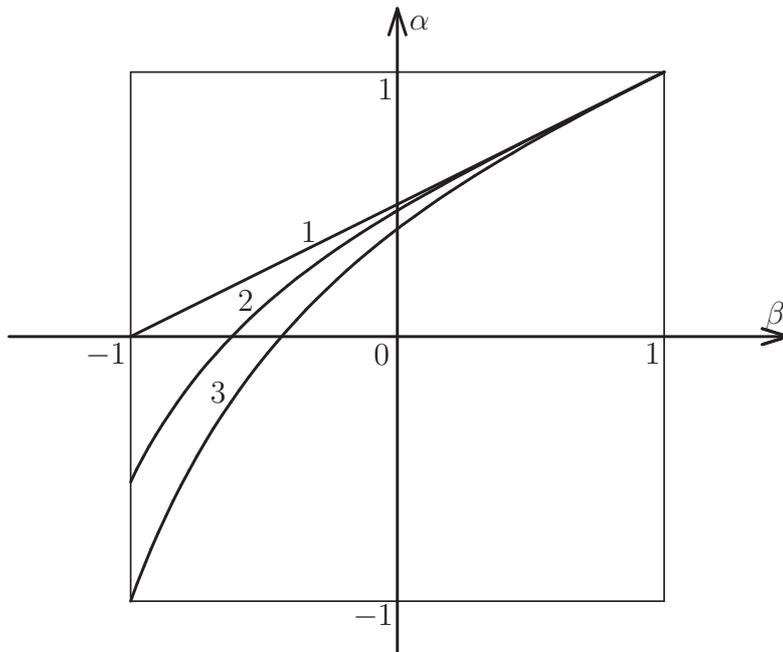


Рис. 4.5

поверхности, на которой выполнено условие $R = \pm f'(\pm 1) < 0$.

Исследование функции $f(\theta)$ в (4.21) показывает, что она имеет экстремум при $\theta = 0$, см. рис. 4.6. Если точка (α, β) находится над кривой 3 на рис. 4.5, то при $\theta = 0$ функция $f(\theta)$ имеет минимум, а также две точки максимума при $\theta = \theta^\pm$, $\theta^+ = -\theta^-$. Ниже кривой 3 существует единственный экстремум — максимум в точке $\theta = 0$. Кривая 3, в точках которой вторая производная $f''(0)$ меняет знак, определяется условием $f''(0) = 0$ или, что эквивалентно, равенством

$$\nu \frac{1 - \beta}{\sqrt{1 + \beta}} = \frac{1 - \alpha}{\sqrt{1 + \alpha}} \quad (4.24)$$

Таким образом, если значение $f(0)$ оказывается отрицательным (кривая d на рис. 4.6), то нарушение условия $f(\theta) \geq 0$ может иметь место только в окрестности точки $\theta = 0$. Такое нарушение условия имеет место в подобласти ниже прямой 1 и выше кривой 2 (рис. 4.5), задаваемой равенством $f(0) = 0$, или, что эквивалентно, соотношением

$$\sqrt{2}(1 - \nu) + \nu\sqrt{1 + \beta} - \sqrt{1 + \alpha} = 0 \quad (4.25)$$

Следовательно, в качестве необходимого условия оптимальности для рассеивающей поверхности может использоваться неравенство

$$f(0) = F(x, (q^+ + q^-)/2) \geq 0 \quad (4.26)$$

совпадающее с условием (4.15). Отметим, что равенство в (4.26) вытекает из определения функции f , поскольку при $\theta = 0$ вектор (4.20) равен $(q^+ + q^-)/2$.

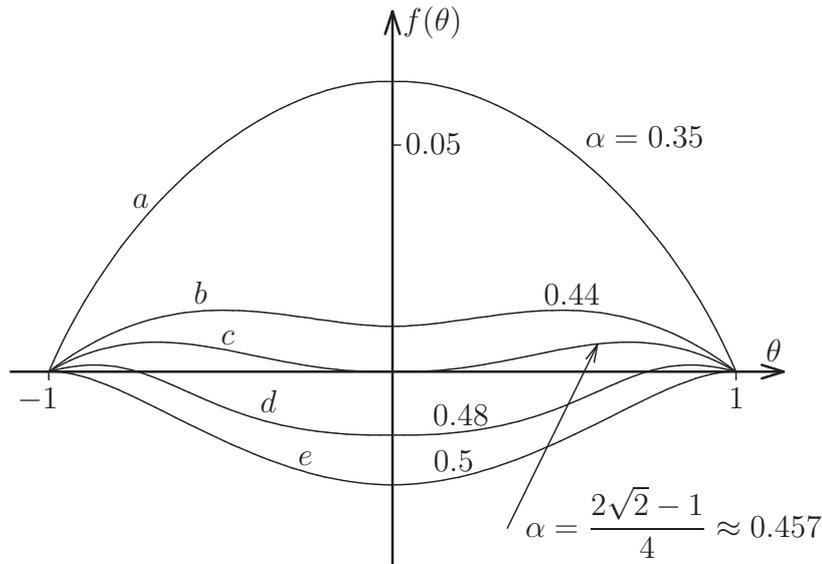


Рис. 4.6

В итоге получаем, что поверхность Γ_1 отображается в подобласть ниже кривой 2, рис. 4.5. Область между кривыми 1 и 2 с геометрической точки зрения также соответствует рассеивающей поверхности. Несмотря на это, последняя не удовлетворяет вязкостным условиям оптимальности.

Приведенные выше соображения представляют собой еще одно доказательство условия (4.15) леммы 4.4, а также другой способ построения границы (4.16) для рассеивающей поверхности Γ_1 .

На рис. 4.6 приведены графики функций $f(\theta)$ для случая $\nu = 1/2$, $\beta = 0$ и различных значений параметра α .

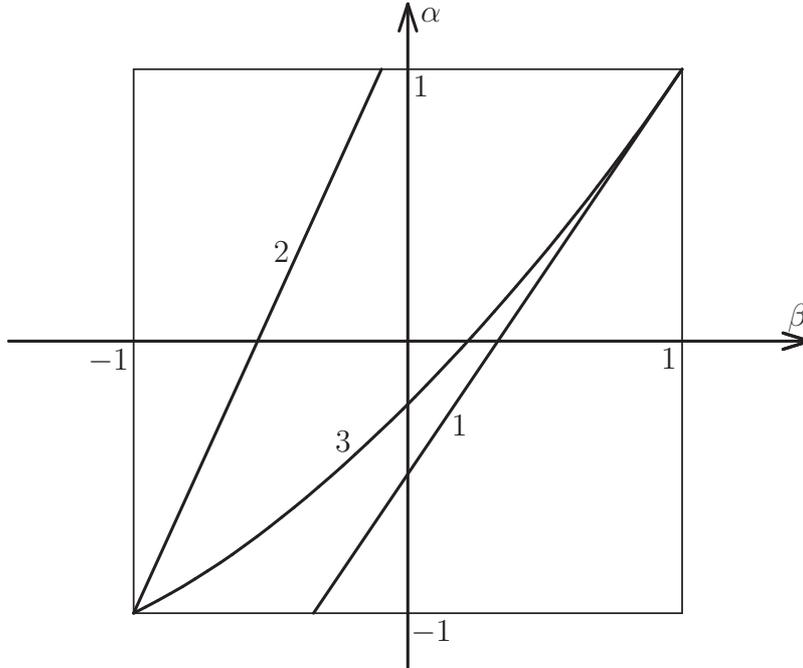


Рис. 4.7

Возвращаясь к игре (4.5), заметим, что для цены игры в общем случае невозможно сформулировать краевую задачу в терминах уравнений в частных производных с непрерывным гамильтонианом. Это связано с тем, что цена игры в областях D_1 и D_2 удовлетворяет различным уравнениям, а именно, $F(x, p) = 0$, $x \in D_2$; $F(x, p) + 1 - \nu = 0$, $x \in D_1$, где функция F задана в (4.13). Тем не менее, такой подход возможен, если формально ввести функцию

$$f(\theta) = \nu \sqrt{\frac{1+\beta}{2} + \frac{1-\beta}{2}\theta^2} - \sqrt{\frac{1+\alpha}{2} + \frac{1-\alpha}{2}\theta^2}, \quad |\theta| \leq 1 \quad (4.27)$$

При этом предполагается использование вектора (4.20) и гамильтониана F из (4.13) (а не гамильтониана $F + 1 - \nu$, который является эффективным для D_1). Используя

соотношения (4.22) и (4.26), можно проверить определения множеств B_1, B_0 в (4.16), (4.18) в терминах функции (4.27). Нетрудно также получить, что знак величины R в (4.19) определяет поведение первичных траекторий в окрестности поверхности Γ_0 : если $R > 0$, то траектории приближаются к Γ_0 , и отходят от этой поверхности, если $R < 0$. Кривые 1 и 3, заданные, соответственно, условиями $f'(1) = f'(-1) = 0$, $f''(0) = 0$, остаются теми же самыми, как и в игре (4.4), а кривая 2 уже имеет другой вид и описывается уравнением

$$\nu\sqrt{1+\beta} - \sqrt{1+\alpha} = 0$$

Взаимное расположение кривых также меняется, см. рис. 4.7. При этом допустимая часть Γ_0 , другими словами, поверхность Γ_1 , снова соответствует области ниже линии 2, которая в данном случае содержит прямую 1. Отсюда следует, что множество B_0 принадлежит Γ_1 .

Отметим, что при $\nu = 1$ все три кривые в обеих играх совпадают и лежат на прямой $\alpha = \beta$.

4.4. Две ветви экивокальной поверхности

4.4.1. Определение экивокальных поверхностей

Необходимые условия не позволяют продолжить поверхность Γ_1 за ее границу B_1 . Для этих построений следует проанализировать возможные особенности на B_1 . В первую очередь нужно исследовать сингулярности, которые ранее описаны в главах 2, 3. Вновь сначала рассмотрим игру (4.4). Напомним, что в терминах функции $f(\theta)$ множество B_1 удовлетворяет условию $f(0) = 0$, а точка $\theta = 0$ является точкой экстремума функции $f(\theta)$, $f'(\theta) = 0$. Таким образом, для B_1 имеем

$$B_1 : f(\theta^*) = 0, \quad f'(\theta^*) = 0 \quad (\theta^* = 0) \quad (4.28)$$

Если здесь второе равенство записать в виде (2.8), то есть

$$\begin{aligned} f'(\theta^*) &= \langle F_p(x, p^*), q^+ - q^- \rangle = 0 \\ p^* &= \frac{1 + \theta^*}{2} q^+ + \frac{1 - \theta^*}{2} q^- \end{aligned} \quad (4.29)$$

и учесть равенства

$$p^* - q^+ = \frac{1 - \theta^*}{2}(q^- - q^+), \quad p^* - q^- = \frac{1 + \theta^*}{2}(q^+ - q^-) \quad (4.30)$$

то получаем, что вектор p^* удовлетворяет необходимым условиям (2.16), в которых роль пары (u_0, p_0) играет либо (S^+, q^+) , либо (S^-, q^-) . Таким образом, в игре (4.4) могут иметь место две ветви экивокальной поверхности, для которых функции $S(x)^+, S(x)^-$ являются известными ветвями решения, аналогично $u_0(x)$ в (2.16). Поскольку векторы

$$q^+ - q^-, \quad p^* - q^+, \quad p^* - q^-$$

взаимно коллинеарны, что следует из (4.30), то они представляют собой нормали к поверхностям Γ_1 и двум ветвям Γ_2^+, Γ_2^- экивокальной поверхности (в случае ее существования). Поверхности $\Gamma_1, \Gamma_2^+, \Gamma_2^-$ касаются друг друга в точках множества B_1 ,

как показано на рис. 4.4 и 4.8. При этом поверхности $\Gamma_1 + \Gamma_2^+$ и $\Gamma_1 + \Gamma_2^-$ являются гладкими. Таким образом, рассеивающая поверхность Γ_1 может расщепляться на две ветви экивокальной поверхности.

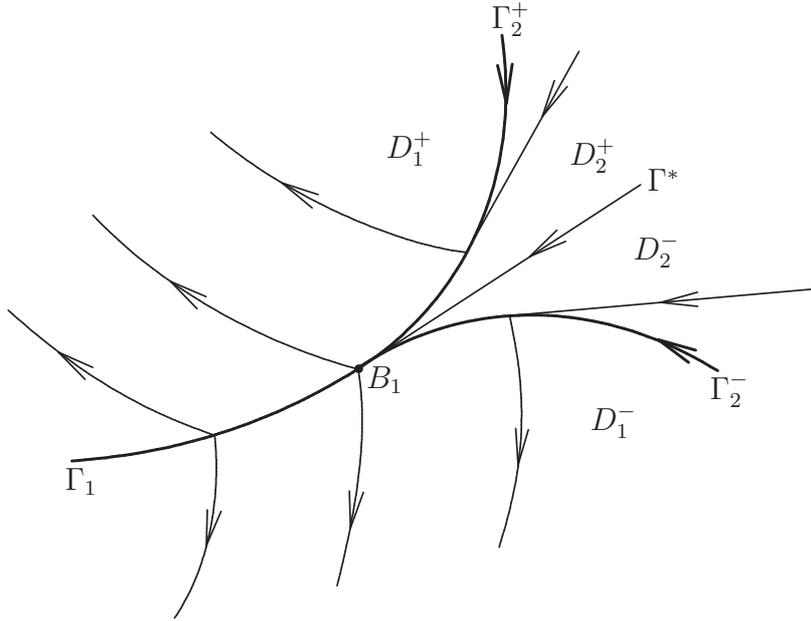


Рис. 4.8

Для построения Γ_2^\pm нужно задать начальную поверхность Σ_2 , другими словами, требуются начальные условия для системы (2.18). Дифференцируя равенство $V(x) - S^+(x) = 0$, $x \in B_1$, по касательным направлениям к B_1 , и добавляя два необходимых условия (2.16) (или (4.28)), можно получить для вектора $p = V_x$ систему

$$\begin{aligned} F(x, p) = 0, \quad \langle F_p(x, p), p - q^+(x) \rangle = 0 \\ \langle p - q^+(x), r_j(x) \rangle = 0, \quad j = 1, \dots, n-2, \quad x \in B_1 \end{aligned} \quad (4.31)$$

где векторы $r_j(x)$, $j = 1, \dots, n-2$, образуют базис в касательном пространстве $T_x B_1$. Отметим, что подобная процедура используется для получения системы (1.94) в задаче Коши с подвижной границей (см. главу 1). Вектор p^* из (4.29) является решением системы (4.31) и задает многообразие Σ_2 (здесь полагается $\theta^* = 0$):

$$\Sigma_2 = \{(x, V, p) \in \mathbb{R}^{4n+1} : p = (q^+(x) + q^-(x))/2, V = S^+(x), x \in B_1\} \quad (4.32)$$

Действительно, первые два уравнения в (4.31) выполнены вследствие соотношений (4.28) и (4.29), а оставшиеся $n-2$ уравнения справедливы, поскольку вектор $q^+ - q^-$ является нормалью к Γ_0 и $B_1 \subset \Gamma_0$. Система (4.31) соответствует ветви Γ_2^+ . Аналогичная система имеет место для Γ_2^- и, как можно показать, порождает такое же многообразие (4.32). Таким образом, для построения Γ_2^+ и Γ_2^- должна быть

проинтегрирована система (2.18) при $u_0 = S^+$, $u_0 = S^-$ и с одними и теми же начальными условиями (4.32). Отсюда, в частности, следует, что градиент p цены $V(x)$ имеет непрерывное продолжение вплоть до поверхности Γ_2 из области D_2 .

Чтобы для эквивокальной поверхности проанализировать необходимые условия типа неравенства (см. (2.12)), нужно знать, какой вид имеет функция цены $V(x)$ в окрестности Γ_2 . Направление векторов (4.30) показывает, что для обеих ветвей имеет место одно и то же представление: $V(x) = \min[V_2(x), S^\pm(x)]$, где $V_2(x)$ — некоторое гладкое продолжение $V(x)$ на D_2 . Таким образом, особенность вида $\min[S^+, S^-]$ расщепляется на две особенности того же вида: $\min[V_2, S^+]$, $\min[V_2, S^-]$.

Для задачи с заданными терминальными значениями и сингулярностью типа минимума согласно результатам главы 2 имеем

$$\begin{aligned} \{\{F_1^+ F\}F_1^+\} &\leq 0, & \{\{FF_1^+\}F\} &\geq 0, & x \in \Gamma_2^+ \\ \{\{F_1^- F\}F_1^-\} &\leq 0, & \{\{FF_1^-\}F\} &\geq 0, & x \in \Gamma_2^- \\ F_1^\pm(x, V) &= V - S^\pm(x) \end{aligned} \quad (4.33)$$

В терминах функции $f(\theta)$, $\theta = 2\lambda - 1$ (см. (2.7)), необходимые условия для Γ_2 принимают вид

$$\begin{aligned} f(\theta) = F(x, \frac{1+\theta}{2}p + \frac{1-\theta}{2}q) &\geq 0, & |\theta| &\leq 1, & x \in \Gamma_2 \\ (p = V_x, \quad q = S_x^\pm) \end{aligned} \quad (4.34)$$

Отсюда вытекает условие касания

$$f'(1) = \langle F_p(x, p), p - q \rangle = 0, \quad x \in \Gamma_2 \quad (q = S_x^\pm) \quad (4.35)$$

Поскольку $f'(1) = \{\{F_1 F\}F_1\}$, то первое соотношение в (4.33) имеет вид равенства.

Следует отметить, что исследования, основанные только на вязкостных условиях, для игры (4.5) не применимы. Как показано в предыдущем разделе, первичное решение $S(x)$ не является вязкостным для соответствующего УЧП в D_1 . Во вторичной области можно рассмотреть цену игры $V(x)$ как вязкостное решение уравнения (4.13). Подыгра, представляющая собой сужение (4.5) на область D_2 , имеет подвижную терминальную поверхность $\partial D_2 = \Gamma_2^+ + B_1 + \Gamma_2^-$. Для применения результатов этого раздела к построению Γ_2^\pm требуется получить некоторые свойства Γ_2^\pm , а именно, необходимые условия стыковки областей D_1 и D_2 .

Предположим, что оптимальные траектории достигают Γ_2 со стороны области D_2 . Тогда можно показать, что для игры (4.5) на достаточно малом интервале $1 - \varepsilon \leq \theta \leq 1$ выполнено неравенство (4.34) или, что эквивалентно, справедливы соотношения $f'(1) = 0$, $f''(1) \geq 0$. Это утверждение позволяет применить результаты данного раздела к игре (4.5).

Условие касания (4.35) приводит в случае игры (4.5) к еще одному следствию. Заметим вначале, что из уравнения Айзекса (4.13) для игры (4.5) вытекает равенство нулю полной производной по времени от функции цены: $\dot{V} = F(x, p) = 0$. Теперь из условия касания (4.35) получаем

$$0 = \langle F_p, p - q \rangle = \langle F_p, p \rangle - \langle F_p, q \rangle = \langle \dot{x}, p \rangle - \langle \dot{x}, q \rangle = \dot{V} - \dot{L} = -\dot{L}$$

Отсюда следует, что при движении вдоль оптимальных траекторий на Γ_2 расстояние между игроками остается постоянным.

4.4.2. Основной результат

Результаты предыдущих подразделов дают возможность сформулировать теорему, которая позволяет получить локальную картину оптимальных траекторий в окрестности множества B_1 .

Теорема 4.1. *Предположим, что гиперповерхность Γ_0 является локально гладкой в \mathbb{R}^{2n} , а $(n-2)$ -мерная поверхность $B_1 \subset \Gamma_0$ гладкой в окрестности некоторой заданной точки $x^* \in B_1$. Пусть в точках $x^* \in B_1$ и $(x^*, V^*, p^*) \in \mathbb{R}^{4n+1}$, где $V^* = S^\pm(x^*)$, $p^* = (q^+(x^*) + q^-(x^*))/2$, выполнены условия*

- 1) $V_y, V_z \neq 0, \quad q^+ + q^- \neq 0$;
- 2) $\{\{F_1^\pm F\}F_1^\pm\} < 0, \quad \{\{FF_1^\pm\}F\} > 0, \quad (F_1^\pm(x, V) = V - S^\pm(x))$;
- 3) вектор $F_p(x^*, p^*)$ (касательный к Γ_0) трансверсален к B_1 и направлен к Γ_1 . Тогда справедливы следующие утверждения.

а) Существует поверхность $\Gamma_2 = \Gamma_2^+ + B_1 + \Gamma_2^-$, включающая в себя две гладкие ветви Γ_2^+, Γ_2^- и ребро возврата на B_1 . Ветви Γ_2^\pm состоят из особых траекторий, которые задаются следующей системой уравнений сингулярных характеристик и начальными данными Коши:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F_p, \quad \dot{p} = -F_x - \frac{\{\{FF_1\}F\}}{\{\{F_1F\}F_1\}}(p - q) \\ p &= \frac{1}{2}(q^+(x) + q^-(x)), \quad x \in B_1 \quad (q^\pm = S_x^\pm) \end{aligned} \quad (4.36)$$

б) Поверхность Γ_2 делит окрестность точки x^* на две области D_1 и D_2 . Существует единственное гладкое решение $V_2(x)$, $x \in D_2$, уравнения Айзека $F(x, p) = 0$, $x \in D_2$, с граничным условием $V_2(x) = S(x)$, $x \in \Gamma_2$ (с непрерывным продолжением градиента p на Γ_2). В окрестности Γ_2^\pm решение имеет вид

$$V(x) = \min[V_2(x), S^\pm(x)] \quad (V(x) = V_2(x), \quad x \in D_2)$$

в) Поверхности $\Gamma_2^+, \Gamma_0, \Gamma_2^-$ в точках B_1 попарно касаются друг друга (рис. 4.8, 4.9). Вторичные регулярные траектории подходят к Γ_2 из области D_2 с касанием. При этом поверхности Γ_2^\pm в игре (4.4) — экивокальные, а в игре (4.5) — универсальные.

Доказательство. Из первого неравенства предположения 2) и предположения 3) следует, что выполнено условие теоремы о неявной функции для системы (4.31), которая, таким образом, однозначно определяет начальное многообразие (4.32). Тогда задача Коши (4.36) порождает две поверхности, соответствующие сужения которых задают единственные ветви Γ_2^+, Γ_2^- . Система (4.36) является системой сингулярных характеристик (2.18) без скалярного уравнения для V . Последнее отщепляется от других уравнений, поскольку гамильтониан $F(x, p)$ не зависит от V . Система (4.36) записана в прямом времени, хотя, аналогично задаче из

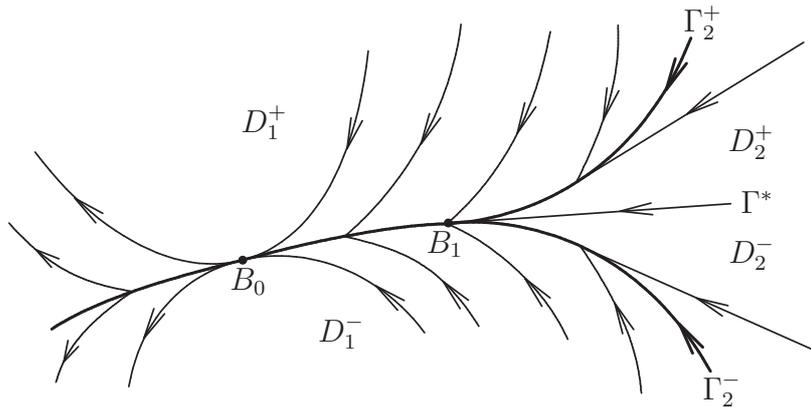


Рис. 4.9

раздела 3.6, построения более удобно производить в обратном времени. Поверхности Γ_2^+ , Γ_2^- (точнее, исходные поверхности в расширенном пространстве) определяют единственные (в силу предположения 2)) решения $V^+(x)$, $V^-(x)$ нерегулярных задач Коши

$$F\left(x, \frac{\partial V^\pm}{\partial x}\right) = 0, \quad x \in D_2^\pm; \quad V^\pm(x) = S^\pm(x), \quad x \in \Gamma_2^\pm$$

Решения такого вида подробно исследованы в разделе 1.3. Теперь функция $V_2(x)$ определяется соотношениями

$$V_2(x) = V^+(x), \quad x \in D_2^+, \quad V_2(x) = V^-(x), \quad x \in D_2^-$$

Поскольку две указанные выше задачи Коши имеют общий набор регулярных характеристик, проходящих через точки $x \in B_1$ при $p = (q^+ + q^-)/2$ и образующих, таким образом, поверхность Γ^* , то для функций $V^+(x)$, $V^-(x)$ имеет место гладкая стыковка. При этом Γ^* является общей касательной поверхностью для Γ_2^+ , Γ_2^- (см. рис. 4.8, 4.9). Правильная стыковка поверхностей Γ_2^\pm и функций V^\pm обусловлена знаком скобок Пуассона $\{\{FF_1^\pm\}F\}$ и теоремой 1.6.

Оставшиеся утверждения теоремы следуют из анализа направления векторов

$$q^+ - q^-, \quad p^* - q^\pm, \quad F_p(x, q^\pm), \quad F_p(x, (q^+ + q^-)/2)$$

проведенного в предыдущих разделах. Теорема доказана.

Хотя теорема 4.1 носит локальный характер, отметим следующее свойство, позволяющее продолжить локальные построения на достаточно большую область. Множитель при векторе $p - q$ в системе (4.36) положителен в силу неравенств предположения 2). Таким образом, дифференциальное уравнение (4.36), рассматриваемое в обратном времени τ , задает отрицательную обратную связь. При $\tau \rightarrow \infty$ в общем случае справедливы соотношения $p \rightarrow q$, $\dot{p} \rightarrow F_x$. Отсюда следует, что сингулярные траектории стремятся к первичным траекториям.

В евклидовом случае, когда $G(x) = I$ (I — единичная матрица), соотношения (4.13) и (4.36) упрощаются:

$$\begin{aligned} F(p) &= -\sqrt{p_1^2 + \dots + p_n^2} + \nu\sqrt{p_{n+1}^2 + \dots + p_{2n}^2} + k \\ \dot{x} &= F_p, \quad \dot{p} = \frac{\langle S_{xx}F_p, F_p \rangle}{\langle F_{pp}q, q \rangle}(p - q) \end{aligned} \quad (4.37)$$

Заметим, что поскольку регулярные траектории из области D_2 достигают поверхность Γ_2 по касательной, то сингулярные оптимальные траектории на Γ_2 являются огибающими геодезических линий (см. подраздел 3.5.2).

В случае $\nu = 1$ второе предположение теоремы нарушается, то есть имеет место равенство $\{\{F_1F\}F_1\} = 0$. Действительно, для каждой функции (4.21), (4.27) кривые 1, 2, 3 совпадают, см. (4.23)–(4.25). Это, в частности, означает, что $f''(0) = \{\{F_1F\}F_1\} = 0$ при $x \in B_1$. Обращение в нуль указанных скобок Якоби, во-первых, делает систему (4.36) не имеющей смысла, так как обращается в нуль знаменатель в коэффициенте при $p - q$. Во-вторых, как следствие, якобиан системы (4.31) также обращается в нуль. Ранг матрицы Якоби становится равным $n - 1$, и система (4.31) имеет однопараметрическое семейство решений в виде предельных значений вектора p из D_2 , то есть

$$p_\theta(x) = \frac{1 + \theta}{2}q^+(x) + \frac{1 - \theta}{2}q^-(x), \quad \theta \in [-1, 1], \quad x \in B_1 \quad (4.38)$$

а не единственное решение (4.29).

Лемма 4.7. Пусть $\nu = 1$ и все условия теоремы 4.1, за исключением первого, выполнены. Тогда также существует поверхность $\Gamma_2 = \Gamma_2^+ + B_1 + \Gamma_2^-$, разделяющая области D_1 и D_2 . Поверхность Γ_2^+ (Γ_2^-) состоит из пределов регулярных траекторий в области D_1^+ (D_1^-). При этом однопараметрическое семейство регулярных траекторий — решений системы (4.14) с граничными условиями (4.38) — достигает каждой точки $x \in B_1$, касаясь Γ_0 . В результате вторичная область D_2 заполняется интегральной воронкой траекторий, определяющих гладкое решение $V_2(x)$.

4.4.3. Алгоритм построения

Приведенные выше соображения позволяют в окрестности множества B_1 предложить алгоритм построения решений игр (4.4), (4.5), состоящий из четырех следующих шагов.

Шаг 1. Находим функции $L^+(x)$, $L^-(x)$ и первичные регулярные траектории как решения вариационной задачи (4.2).

Шаг 2. Используя формулы (4.16), строим многообразие V . Если V пусто, то решение найдено и задается формулами (4.9). В противном случае переходим к следующему шагу.

Шаг 3. Выполняем построение поверхностей Γ_2^+ и Γ_2^- , интегрируя систему (4.36) в обратном времени с соответствующими начальными условиями на многообразии B_1 .

Шаг 4. Находим функцию цены $V(x)$ при $x \in D_2$, интегрируя в обратном времени систему регулярных характеристик (4.14) с начальными условиями на Γ_2 . Последние соответствуют нерегулярной задаче Коши, и x -компоненты характеристик отходят от поверхности Γ_2 с касанием.

Отметим, что данный алгоритм предназначен для локальных построений.

В некоторых случаях вторичные регулярные траектории могут заполнять вторичную область D_2 не полностью. Тем не менее, такой подход позволяет продвигаться при построении полных решений конкретных игровых задач.

4.5. Игра преследования с препятствием

4.5.1. Постановки задачи

Пусть игроки P и E с простыми движениями перемещаются в n -мерном евклидовом пространстве \mathbb{R}^n в соответствии со следующими уравнениями:

$$P: \quad \dot{y} = u, \quad |u| \leq 1; \quad E: \quad \dot{z} = v, \quad |v| \leq \nu \quad (0 < \nu < 1) \quad (4.39)$$

Эти уравнения совпадают с системой (4.1), если в последней положить $G = I$, где I — единичная матрица. Зафиксируем выпуклое замкнутое множество D (препятствие) в \mathbb{R}^n , так что игроки не могут пересекать границу ∂D . Таким образом, пространством игры в данном случае является замкнутое множество $K = \mathbb{R}^n \setminus \text{int} D$ с границей ∂D . Уравнения (4.39) применимы для всех внутренних точек K . В случае, если игроки находятся на границе ∂D , то в дополнение к (4.39) должны быть выполнены следующие фазовые ограничения (условия непроникновения внутрь D):

$$\langle u, n(y) \rangle \geq 0, \quad \langle v, n(z) \rangle \geq 0$$

Здесь $n(y)$ — внешняя нормаль к касательной плоскости в точке $y \in \partial D$.

Рассмотрим для игроков (4.39) игру преследования с функцией цены (4.4) и радиусом захвата равным нулю, $h = 0$. Таким образом, терминальная поверхность задается соотношением

$$M = \{x = (y, z) \in \mathbb{R}^{2n} : y_i = z_i, i = 1, \dots, n\} \quad (4.40)$$

В общем случае геодезическая линия, соединяющая точки P и E , есть кривая $PP'E'E$, где PP' и $E'E$ — отрезки прямых линий, а $P'E'$ — дуга, лежащая на поверхности ∂D (рис. 4.10).

В зависимости от позиций игроков и структуры границы ∂D дуга $P'E'$ может вырождаться в точку (когда ∂D имеет угол или ребро, см. рис. 4.10). Отрезок PE совпадает с геодезической линией, если он не пересекает множество D . Геодезическая линия, в свою очередь, может быть не единственной только для тех позиций игроков, для которых отрезок PE пересекает множество D . Рассмотрим подпространство $X \subset K^2$, состоящее из точек, соответствующих таким позициям игроков.

Длина геодезической линии, соединяющей точки P и E , будет, как и раньше, обозначаться через $L(y, z)$ или $L(x)$, где $x = (y, z) \in \mathbb{R}^{2n}$. Отметим, что функция $L(y, z)$ не может быть представлена в виде интеграла (4.2) с тем же метрическим

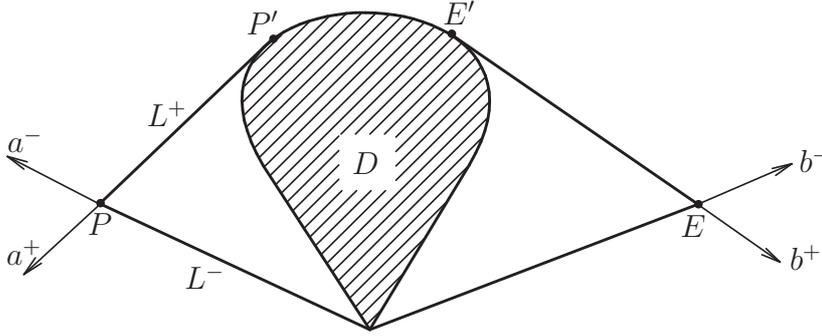


Рис. 4.10

тензором G на всем отрезке интегрирования. Для той части геодезической линии, которая лежит на ∂D , нужно использовать другой тензор G . Тем не менее, функция $L(y, z)$ по-прежнему удовлетворяет основному условию — уравнениям эйконала (4.7). Это позволяет для рассматриваемой задачи эффективно использовать результаты предыдущих разделов. Действительно, длину геодезической $L(y, z) = L(P, E)$ можно представить в виде

$$L(P, E) = J(PP') + J^*(P'E') + J(E'E)$$

Здесь первый и последний члены представляют собой функционалы вида (4.2) при $G = I$, а J^* — аналогичный функционал, но определенный на $(n - 1)$ -мерном многообразии ∂D . Полная вариация $L(P, E)$ имеет вид

$$\delta L = \delta J_P + \delta J_{P'} + \delta J_{P'}^* + \delta J_{E'}^* + \delta J_{E'} + \delta J_E$$

Такой вид обусловлен тем, что выполняются соответствующие уравнения Эйлера. По определению, геодезическая линия удовлетворяет условию $\delta L = 0$ при фиксированных P и E , то есть при $\delta J_P = \delta J_E = 0$. Таким образом, в приведенной выше сумме все внутренние члены исчезают, и для геодезической линии с подвижными концами P, E имеем

$$\delta L = \delta J_P + \delta J_E$$

Другими словами, вариация имеет структуру (3.23) с матрицей $G = I$. Следовательно, уравнения эйконала (4.7) выполнены и принимают форму

$$L_{y_1}^2 + L_{y_2}^2 + \dots + L_{y_n}^2 = 1, \quad L_{z_1}^2 + L_{z_2}^2 + \dots + L_{z_n}^2 = 1 \quad (4.41)$$

Напомним, основное предположение раздела 4.1 состоит в том, что на многообразии K справедливо представление

$$L(x) = \min[L^+(x), L^-(x)] \quad (4.42)$$

В этом разделе будут рассмотрены только такие препятствия, для которых существует не более двух минимальных геодезических линий. Это возможно, например, когда множество $\mathbb{R}^n \setminus D$ двусвязно. В евклидовой плоскости такой случай

имеет место, когда D — ограниченное выпуклое замкнутое множество. При размерности $n > 2$ это также возможно для односвязных пространств $K = \mathbb{R}^n \setminus D$, например, когда в \mathbb{R}^3 препятствием является конус.

В качестве примера двусвязного игрового пространства рассмотрим препятствие в виде плоской неограниченной полосы в \mathbb{R}^n вида

$$D = \{y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n : y_1 = 0, |y_2| \leq c\}$$

где c — полуширина полосы (см. рис. 4.11). Локальные минимумы (4.42) здесь имеют вид

$$L^\pm(y, z) = \left(\left(\sqrt{y_1^2 + (y_2 \pm c)^2} + \sqrt{z_1^2 + (z_2 \pm c)^2} \right)^2 + (y_3 - z_3)^2 + \dots + (y_n - z_n)^2 \right)^{1/2} \quad (4.43)$$

Данная формула может быть получена как решение задачи

$$\min_Q [L(P, Q) + L(Q, E)], \quad Q \in \gamma^+ \quad (Q \in \gamma^-)$$

где прямые γ^+ , γ^- представляют собой границу полосы D , а $L(P, Q)$ — евклидова длина отрезка PQ (рис. 4.11).

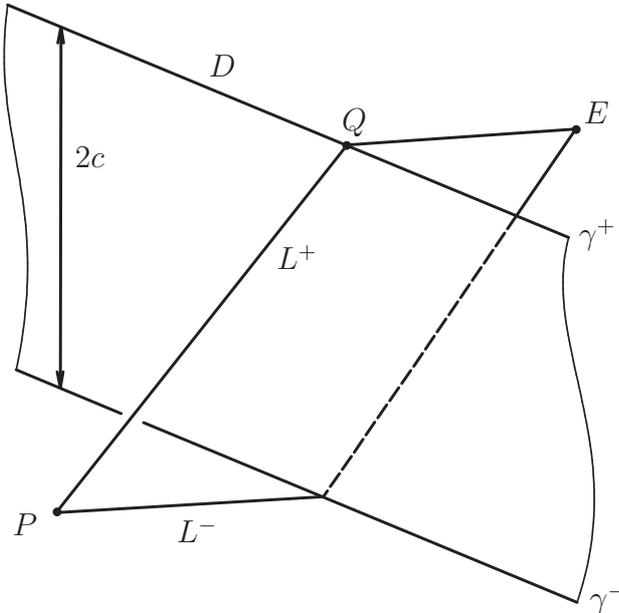


Рис. 4.11

Из простых геометрических соображений ясно, что оптимальное преследование возможно тогда, когда пути обоих игроков одновременно лежат на границе

препятствия. Эти пути представляют собой оптимальные траектории игры преследования раздела 4.1 на $(n - 1)$ -мерном многообразии ∂D . В отличие от последней рассмотренной задачи (4.5) этого раздела, в зависимости от поведения игрока E его оптимальная траектория может покидать границу препятствия по касательной и затем продолжаться вдоль прямой линии. Тогда игрок P должен покидать препятствие в том же месте. Таким образом, границу ∂K^2 фазового пространства можно рассматривать как специфическую (одностороннюю) сингулярную поверхность, содержащую, возможно, сингулярные пути.

4.5.2. Плоская задача

Рассмотрим двумерный случай, когда $K = \mathbb{R}^2 \setminus D$. Для простоты будем предполагать, что препятствие имеет достаточно гладкую границу ∂D . То есть функции $L^+(x)$, $L^-(x)$, по крайней мере, дважды непрерывно дифференцируемы. Эти функции удовлетворяют следующим уравнениям эйконала, см. (4.41):

$$\begin{aligned} L_{x_1}^2 + L_{x_2}^2 &= 1, & L_{x_3}^2 + L_{x_4}^2 &= 1 \\ (x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2, \quad x_3 = z_1, \quad x_4 = z_2) \end{aligned} \quad (4.44)$$

Первичное решение (4.9) задается соотношениями

$$\begin{aligned} S(x) &= \min[S^+(x), S^-(x)], & S^\pm(x) &= L^\pm(x)/(1 - \nu) \\ (u_1, u_2) &= -a = -(L_{y_1}, L_{y_2}), & (v_1, v_2) &= \nu b = \nu(L_{z_1}, L_{z_2}) \end{aligned} \quad (4.45)$$

Выражения для единичных векторов a , b в (4.9) получаются из (4.8) с помощью равенств $G = G^{-1} = I$. Поверхность

$$\Gamma_0 = \{x \in X \subset \mathbb{R}^4 : L^+(x) = L^-(x)\} \quad (4.46)$$

в данной задаче является трехмерной. Используя компоненты вектора $q = S_x = L_x/(1 - \nu)$ и те же самые единичные векторы a , b , можно получить следующие выражения для экстремальных значений производных вдоль направлений первичного решения (4.45) на поверхности (4.46), рассмотренной в подразделе 4.3.2:

$$\begin{aligned} \max_v \min_u \min_{\pm} \dot{S}^\pm &= \frac{1}{1 - \nu} \left(\frac{\nu}{2} |b^+ + b^-| - 1 \right) \leq -1 \\ \min_u \max_v \min_{\pm} \dot{S}^\pm &= \min \left[-1, \frac{1}{2(1 - \nu)} (-|a^+ + a^-| + \nu |b^+ + b^-|) \right] \geq -1 \\ \frac{1}{2} |b^+ + b^-| &= \frac{1}{2} \sqrt{\langle b^+ + b^-, b^+ + b^- \rangle} = \sqrt{(1 + \langle b^+, b^- \rangle)/2} \\ \langle b^+, b^- \rangle &= b_1^+ b_1^- + b_2^+ b_2^-, \quad a = L_y, \quad b = L_z \end{aligned} \quad (4.47)$$

Рассеивающая часть Γ_1 поверхности Γ_0 определяется неравенством

$$\Gamma_1 : -\sqrt{(1 + \langle a^+, a^- \rangle)/2} + \nu \sqrt{(1 + \langle b^+, b^- \rangle)/2} + 1 - \nu \geq 0 \quad (4.48)$$

Это неравенство эквивалентно может быть выражено условием

$$\begin{aligned} F \left(\frac{q^+ + q^-}{2} \right) &\geq 0, \quad q = \frac{L_x}{1 - \nu} = \frac{1}{1 - \nu} (a_1, a_2, b_1, b_2) \\ F(p) &= -\sqrt{p_1^2 + p_2^2} + \nu \sqrt{p_3^2 + p_4^2} + 1 \end{aligned} \quad (4.49)$$

где $F(p)$ — гамильтониан (4.37) для двумерного случая.

Край рассеивающей поверхности — множество B_1 — определяется соотношениями

$$B_1: \quad L^+(x) = L^-(x), \quad F\left(\frac{q^+ + q^-}{2}\right) = 0 \quad (4.50)$$

В рассматриваемой задаче множество B_1 двумерно и может быть взаимнооднозначно отображено на игровое пространство $K = \mathbb{R}^2 \setminus D$, то есть B_1 диффеоморфно K . Действительно, существует естественное отображение $B_1 \rightarrow K$, поскольку точкам из $B_1 \subset K^2$ соответствуют пары (P, E) , или в локальных координатах, векторы $x = (y, z) \in \mathbb{R}^4$. Точке $(P, E) \in B_1$ сопоставим точку $E \in K$. Обратное отображение $K \rightarrow B_1$ строится следующим образом. Зафиксируем некоторую точку $E^* \in K$ с координатами z^* . Равенство $L^+(y, z^*) - L^-(y, z^*) = 0$ определяет гладкую кривую $\gamma_E \subset K$ (множество позиций игрока P). Кривая γ_E начинается в точке границы ∂D и стремится к бесконечности. Можно показать, что функция $F((q^+(x) + q^-(x))/2)$, $x = (y, z^*)$, имеет единственный корень, $y^* \in \gamma_E$, так что вектор $x^* = (y^*, z^*)$, или соответствующая пара (P^*, E^*) , принадлежит B_1 . Таким образом, B_1 — двумерное многообразие с краем, как и многообразие K .

В предыдущем подразделе было отмечено, что все оптимальные траектории в игре являются прямыми линиями, за исключением сингулярных эквивокальных траекторий и траекторий, лежащих на границе ∂D . Для построения эквивокальных траекторий нужно проинтегрировать систему (4.37), используя первичное решение (4.45), гамильтониан (4.49) и начальные (в случае, если интегрирование идет в обратном времени) условия

$$p = \frac{1}{2}(q^+(x) + q^-(x)), \quad x \in B_1 \quad (4.51)$$

Опишем оптимальные траектории игроков, стартующие из вторичной области $X_2 \subset X$. Игроки движутся вначале по прямым, которые в принципе могут лежать на линии, соединяющей игроков. Когда фазовый вектор $x = (y, z)$ достигает (по касательной) поверхности Γ_2 , то либо оба игрока одновременно переключаются на регулярные первичные движения по прямым линиям, касательным к препятствию D (огигающим препятствие), либо игроки начинают криволинейные движения вдоль сингулярных траекторий. В последнем случае игроки могут также переключиться на первичные движения в любой момент по решению игрока P , который контролирует сингулярную поверхность в соответствии с терминологией главы 3. Такое криволинейное движение может длиться до тех пор, пока фазовый вектор не достигнет множества B_1 , на котором оба игрока должны переключиться на первичное движение. Снова игрок P определяет, какое из двух эквивалентных движений реализуется: L^+ -движение или L^- -движение.

Таким образом, для каждого игрока на поверхности Γ_2 существуют два оптимальных вектора скорости: первичный и эквивокальный. Эти векторы определяются первыми двумя (соответствующими игроку P) или двумя последними (соответствующими игроку E) координатами вектора фазовой скорости

$$\dot{x} = F_p(p) = \left(\frac{-p_1}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}}, \frac{-p_2}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}}, \frac{\nu p_3}{\sqrt{p_3^2 + p_4^2}}, \frac{\nu p_4}{\sqrt{p_3^2 + p_4^2}} \right) \quad (4.52)$$

Для первичного движения здесь нужно использовать равенства $p = q = S_x(x)$.

Обозначим через ζ (соответственно η) угол между указанными двумя векторами скоростей игрока P (игрока E). Используя выражение косинуса через скалярное произведение и соотношения (4.45), имеем

$$\begin{aligned}\cos \zeta &= \frac{p_1 q_1 + p_2 q_2}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2} \sqrt{q_1^2 + q_2^2}} = (1 - \nu) \frac{p_1 q_1 + p_2 q_2}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}} \\ \cos \eta &= (1 - \nu) \frac{p_3 q_3 + p_4 q_4}{\sqrt{p_3^2 + p_4^2}}\end{aligned}\quad (4.53)$$

Из (4.52) и (4.53) следует, что скалярное произведение $\langle F_p(p), q \rangle$ можно представить в виде

$$\langle F_p(p), q \rangle = \frac{1}{1 - \nu} (-\cos \zeta + \nu \cos \eta) \quad (4.54)$$

Напомним также, что функция $F(p) - 1$ — однородная первой степени, то есть $\langle F_p(p), p \rangle = F(p) - 1$. Записывая теперь условие касания в форме

$$\langle F_p(p), p - q \rangle = F(p) - 1 - \langle F_p(p), q \rangle = 0$$

и используя уравнение Айзекса $F(p) = 0$, а также соотношение (4.54), можно получить равенство

$$\cos \zeta - \nu \cos \eta = 1 - \nu, \quad x \in \Gamma_2 \quad (4.55)$$

Таким образом, условие касания означает, что скачки векторов оптимальных скоростей игроков удовлетворяют соотношению (4.55)

4.5.3. Примеры

Рассмотрим препятствия двух специальных видов: круг единичного радиуса с центром в начале координат и отрезок оси ординат с концами в точках $(0, -1)$, $(0, 1)$.

Первичное решение для случая круга имеет вид

$$\begin{aligned}S^\pm(x) &= \frac{1}{1 - \nu} \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 1 - \arccos \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \pm \arctg \frac{x_2}{x_1} + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{x_3^2 + x_4^2} - 1 - \arccos \frac{1}{\sqrt{x_3^2 + x_4^2}} \mp \arctg \frac{x_4}{x_3} + \pi \right)\end{aligned}\quad (4.56)$$

Формула (4.56) записана для области $x_1 < 0$, $x_3 > 0$. В остальной части пространства требуется некоторая модификация (4.56). Свойство симметрии в задаче с кругом позволяет рассматривать только область $x_1 < 0$, $x_3 > 0$. Можно также ввести трехмерное фазовое пространство с так называемыми относительными координатами R, r, φ , где R, r — удаленность игроков от центра окружности, а φ — угол между их радиус-векторами. Поверхность (4.46) равных геодезических дуг соответствует такому положению игроков, при котором они находятся на одной прямой, проходящей через начало координат. Эту поверхность можно задать равенством

$$x_2 x_3 - x_1 x_4 = 0 \quad (4.57)$$

В случае отрезка находим следующие аналоги соотношений (4.56), (4.57):

$$S^\pm(x) = \frac{1}{1-\nu} \left(\sqrt{x_1^2 + (x_2 \pm 1)^2} + \sqrt{x_3^2 + (x_4 \pm 1)^2} \right) \quad (4.58)$$

$$S^+(x) = S^-(x)$$

Край B_1 для обоих препятствий определяется равенствами, полученными из (4.45), (4.48) и (4.50):

$$S^+(x) = S^-(x), \quad m(x_1, x_2) - \nu m(x_3, x_4) = 1 - \nu \quad (4.59)$$

Здесь функция $m(\xi, \eta)$ для случаев круга и отрезка соответственно имеет вид

$$m(\xi, \eta) = \sqrt{1 - \frac{1}{\xi^2 + \eta^2}}$$

$$m(\xi, \eta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{\xi^2 + \eta^2 - 1}{\sqrt{\xi^2 + (\eta + 1)^2} \sqrt{\xi^2 + (\eta - 1)^2}}} \quad (4.60)$$

В упомянутых относительных координатах множество B_1 является кривой, которая в трехмерном пространстве R, r, φ задается с помощью соотношений

$$\sqrt{1 - \frac{1}{R^2}} - \nu \sqrt{1 - \frac{1}{r^2}} = 1 - \nu, \quad r \geq 0, \quad \varphi = \pi$$

В таком виде множество B_1 было найдено в дипломной работе автора в 1969 г. Полное решение игры с круговым препятствием, сформулированной Р. Айзексом в [33], было получено в [71], где использовалась эквивалентная игра с фиксированным временем. Различные типы препятствий на основе сингулярных характеристик были исследованы в [80]. Указанная выше кривая имеет асимптоту $r = \sqrt{\nu}R$, которая соответствует равенству угловых скоростей вращения игроков около центра круга во время движения по касательным линиям к препятствию. Таким образом, это условие может быть использовано для приближенно оптимального переключения на регулярное движение.

Система (4.37) интегрировалась в обратном времени с использованием соотношений (4.56)–(4.60) при $\nu = 1/2$ для нескольких заданных начальных точек на B_1 . На рис. 4.12, 4.13 показаны типичные начальные части оптимальных траекторий игроков в игровом пространстве. Игроки начинают свое движение из точек P_0^\pm и E_0^\pm и, двигаясь с максимальной скоростью, одновременно достигают точек P и E (множество B_1), где игрок P выбирает одно из двух возможных направлений преследования по геодезическим линиям. Верхние индексы указывают, на какой из поверхностей Γ_2^+ , Γ_2^- или Γ^* в \mathbb{R}^4 (поверхность Γ^* делит вторичную область на две части) лежит оптимальная траектория. Точки P и E на рис. 4.12, 4.13 соответствуют одной точке множества B_1 , определенного в (4.59).

Начальные части траекторий, приходящих в ту же самую точку множества B_1 , заполняют криволинейные треугольники $P_0^- PP_0^+$, $E_0^- EE_0^+$. Эти части представляют собой два семейства прямых, касательных к кривым PP_0^- , PP_0^+ и EE_0^- ,

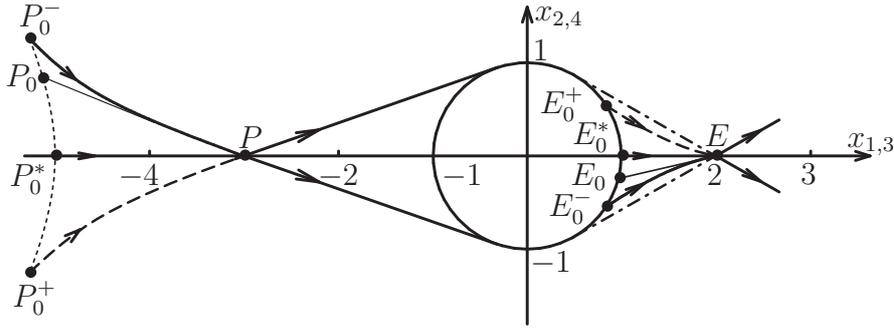


Рис. 4.12

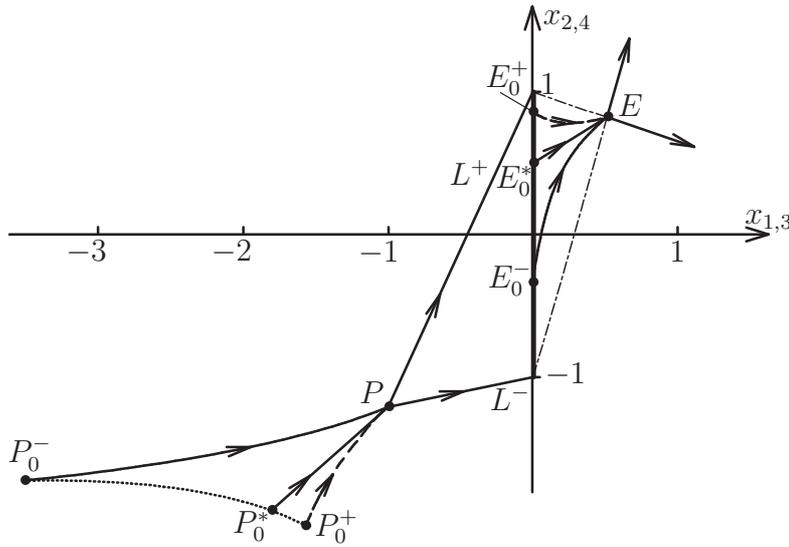


Рис. 4.13

EE_0^+ . Между сегментами этих двух семейств есть взаимно-однозначное соответствие: каждой начальной позиции игрока P на кривой $P_0^- P_0^* P_0^+$ соответствует позиция игрока E на части $E_0^- E_0^* E_0^+$ границы препятствия, и наоборот. Пара соответствующих точек P_0, E_0 , а также стартовые из них касательные отрезки показаны на рис. 4.12. Игроки движутся вдоль этих касательных отрезков вплоть до точек касания, а затем, в соответствии с решением игрока P , либо совершают криволинейное сингулярное движение, либо переключаются на обгибание препятствия вдоль геодезических линий.

Из вычислений следует, что криволинейные сингулярные траектории, достигающие некоторой точки множества B_1 , незначительно отличаются от прямолинейных отрезков. Таким образом, для приближенного описания оптимальных траекто-

рий в X можно использовать прямые линии, исключая при этом только движения вдоль границы препятствия. Например, семейство касательных линий криволинейного треугольника $P_0^- P P_0^+$ может быть заменено множеством отрезков, соединяющих точку P с точками дуги $P_0^- P_0^* P_0^+$.

Исследования показывают, что картина оптимального преследования при произвольном выпуклом препятствии качественно аналогична случаю с круговым препятствием. При этом для препятствия произвольной формы в общем случае исчезает симметрия движений вдоль поверхностей Γ_2^+ , Γ_2^- , которая присуща круговому препятствию. В последнем случае начальная часть движения вдоль Γ^* соответствует движению вдоль продолжения диаметра, как при отсутствии препятствия вообще. В случае же препятствия произвольной формы оптимальные траектории игроков (отрезки прямых линий) лежат, вообще говоря, на разных прямых, см. рис. 4.13.

Упражнения

4.1. Вычислив экстремумы, получить первое равенство в (4.8).

4.2. С помощью доказательства леммы 4.4 вывести формулу

$$\max_v \min_u \min_{\pm} \dot{S}^{\pm} = \frac{\nu|b^+ + b^-|_z/2 - 1}{1 - \nu}$$

и показать, что это выражение не превосходит значения -1 . Рассмотреть сначала более простой случай (4.47).

4.3. Найти два локальных минимума длины геодезической линии (4.17), (4.43) и первичных решений (4.56), (4.58).

4.4. Вывести формулы (4.19). Показать, что при $x \in \Gamma_0$ справедливо равенство $\dot{L}^+ - \dot{L}^- = R$.

4.5. Показать, что скобки Якоби в (4.36) в евклидовом случае ($G = I$) имеют вид

$$\{\{FF_1\}F\} = \langle S_{xx}F_p, F_p \rangle, \quad \{\{F_1F\}F_1\} = -\langle F_{pp}q, q \rangle$$

и вывести соотношения (4.37).

4.6. Используя гамильтониан (4.49) и первичные решения (4.56), (4.58), записать систему сингулярных характеристик (4.37) для игр с препятствием в виде круга и прямолинейного отрезка.

ГЛАВА 5

Игры простого преследования и сближения на двумерном конусе

5.1. Формулировка игры в различных системах координат

5.1.1. Динамика в декартовых и относительных переменных

В этой главе для построения полных (глобальных) решений используются локальные необходимые условия из предыдущей главы. Рассматриваются две дифференциальные игры преследования и сближения, в которых игроки — управляемые по скорости точки в трехмерном евклидовом пространстве — совершают простые движения на поверхности двумерного конуса. Другими словами, в каждый момент времени игроки могут выбирать свои скорости так, чтобы они касались поверхности конуса и были ограничены по модулю. Если преследователь имеет преимущество по скорости, то рассматривается игра преследования с временем захвата в качестве платы, в противном случае (убегающий имеет преимущество по скорости) рассматривается игра сближения, платой в которой является минимальное расстояние между игроками в течение бесконечного интервала движения.

С использованием автомодельных переменных размерность задачи понижается до размерности два, что позволяет построить полные решения рассматриваемых игр. В одной части фазового пространства (называемой первичной областью) оптимальный результат, аналогично игре в евклидовом пространстве, выражается при помощи геодезических линий минимальной длины, соединяющих игроков. На основе методов главы 4 в первичной области строятся оптимальные фазовые портреты, включающие в себя рассеивающую поверхность. В игре преследования граница первичной области является особой поверхностью эквивокального типа, а в игре сближения — универсальной. В остальной части фазового пространства (называемой вторичной областью) преследователь может строго улучшить первичный результат. В игре преследования выделен особый тип конусов. В оптимальном фазовом портрете на этих конусах существует подобласть вторичной области, состоящая из начальных позиций, для которых цена игры не зависит от положения убегающего и захват происходит в вершине конуса. Отдельно рассмотрен случай идентичных игроков. Исследована также задача, когда скорость убегающего стремится к бесконечности. В игре сближения описаны конусы, для которых все фазовое пространство совпадает с первичной областью.

Разработан алгоритм синтеза оптимальных управлений для произвольных начальных позиций игроков. На основе этого алгоритма написана компьютерная программа, позволяющая выполнять моделирование игр, осуществлять построение оп-

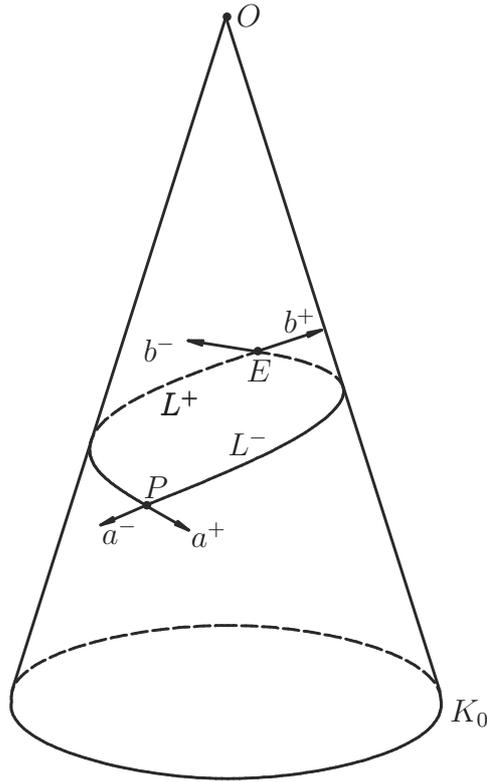


Рис. 5.1

тимальных траекторий игроков на конусе, находить границы первичной и вторичной областей, а также строить линии уровня функции цены игры.

Пусть точки (игроки) P (преследователь) и E (убегающий) движутся по поверхности двумерного конуса $K_0 \subset \mathbb{R}^3$, то есть в каждый момент времени игроки могут выбирать направление своих скоростей так, чтобы они лежали в плоскости, касательной к конусу в этой точке, см. рис 5.1. Скорость точки P в безразмерных переменных ограничена единицей, а скорость E не превышает ν , где $0 < \nu < \infty$. Через K обозначим открытое множество $K_0 \setminus O$, то есть конус K_0 с удаленной вершиной O . Если преследователь имеет преимущество по скорости ($0 < \nu < 1$), то рассматривается игра преследования, где платой является время захвата. В противном случае ($\nu \geq 1$) рассматривается игра сближения с платой, равной минимальному расстоянию между игроками в течение бесконечного интервала движения. Таким образом, функция платы в этих игровых задачах, соответственно, имеет вид

$$J = T, \quad L(P(T), E(T)) = 0, \quad 0 < \nu < 1 \quad (5.1)$$

$$J = \min_{0 \leq t < \infty} L(P(t), E(t)), \quad \nu \geq 1 \quad (5.2)$$

Здесь T — время до захвата, L — длина минимальной геодезической линии, которая соединяет точки P и E и лежит на конусе. С помощью позиционных стратегий преследователь минимизирует функцию платы, а убегающий ее максимизирует.

Для каждой позиции $Q = (P, E)$ игроков на конусе с удаленной вершиной существуют две геодезические линии с длинами L^+ и L^- , такие что

$$L = \min[L^+(Q), L^-(Q)], \quad Q = (P, E) \in K^2 = K \times K \quad (5.3)$$

где L^+ , L^- — локальные минимумы функционала длины.

Обозначим через $V(Q)$ значение функции цены для игры (5.1) или (5.2) в позиции $Q \in K_0^2$. Значение $V(Q)$ представляет собой минимальную (максимальную) величину функции платы (5.1) или (5.2), которая в классе позиционных стратегий гарантирована игроку P (игроку E). Отметим, что существование непрерывных функций $V(Q)$ цены в рассматриваемых играх вытекает из общих результатов, см., например, [30, 77]. Решение игр (5.1) и (5.2) включает в себя построение функции цены и соответствующих позиционных стратегий.

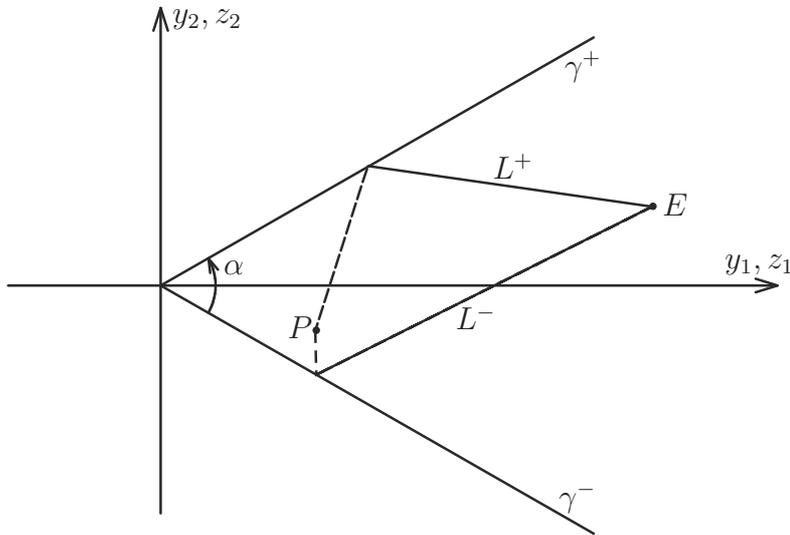


Рис. 5.2

При описании динамики игроков и функции цены можно использовать три типа переменных — евклидовы, относительные и автомодельные. Сгибая конус вдоль произвольной пары противоположных образующих γ^+ , γ^- в двусторонний плоский угол, можно ввести на нем локальную евклидову систему координат, направив при этом ось абсцисс вдоль биссектрисы этого угла, рис. 5.2. Такая деформация конуса сохраняет длины геодезических линий инвариантными. Геодезические линии в этом случае превращаются в двузвенные ломаные, образующие равные углы с лучами γ^+ , γ^- . Можно показать, что длины L^+ , L^- этих ломаных могут быть найдены по

формуле

$$L^{\pm}(y, z) = \sqrt{|y|^2 + |z|^2 - 2(y_1 z_1 - y_2 z_2) \cos \alpha \mp 2(y_2 z_1 + y_1 z_2) \sin \alpha} \quad (5.4)$$

где $y = (y_1, y_2)$, $z = (z_1, z_2)$ — локальные координаты точек P и E соответственно, а 2α — угол плоской развертки конуса. Таким образом, игра на конусе эквивалентна игре на двустороннем плоском угле K_0 . Достигнув образующую γ^+ или γ^- , игроки далее могут продолжить движение либо по “верхней”, либо по “нижней” стороне угла K_0 . В связи с этим следует ввести еще один параметр, уточняющий сторону угла, на которой в данный момент находятся игроки. Если такое уточнение где-либо ниже потребуется, то будут приведены соответствующие пояснения.

Игроки могут находиться и в вершине O конуса K_0 . Допустимые скорости в точке O направлены вдоль образующих конуса, не превышают по модулю единицы и величины ν соответственно. Более детальный анализ, связанный с точкой O , не обязателен, поскольку, как будет показано ниже, точка O может быть либо начальной, либо конечной точкой оптимальных траекторий игроков. Таким образом, многообразие K (конус без вершины O) также можно рассматривать в качестве игрового пространства.

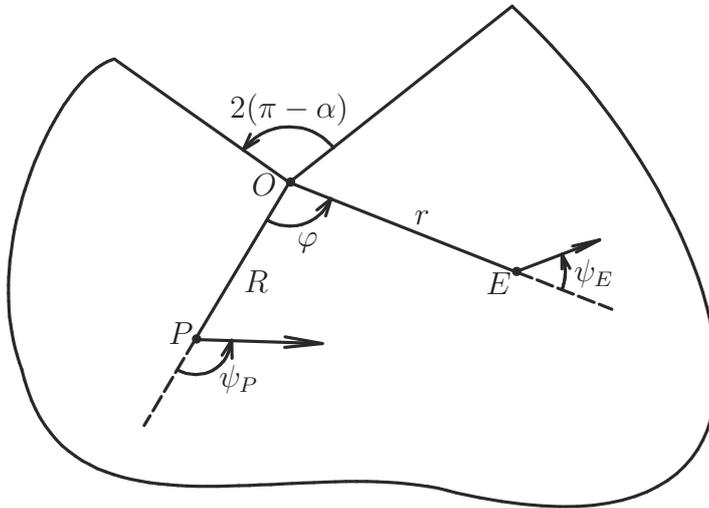


Рис. 5.3

Введем так называемые относительные координаты r, R, φ (см. рис. 5.3, иллюстрирующую плоскую развертку конуса). Так как позиционные стратегии являются функциями от r, R, φ , а условия окончания игры и функция платы могут быть записаны с использованием этих же переменных, то и рассматриваемые игры можно сформулировать с помощью переменных r, R, φ . Функции (5.4) в относительных координатах можно выразить формулой

$$L^{\pm}(r, R, \varphi) = \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos(\varphi - \alpha \pm \alpha)} \quad (5.5)$$

Уравнения динамики в евклидовых координатах имеют хорошо известный вид (см. также (4.39))

$$P: \quad \dot{y} = u, \quad |u| \leq 1; \quad E: \quad \dot{z} = v, \quad |v| \leq \nu \quad (5.6)$$

где $y = (y_1, y_2)$, $z = (z_1, z_2)$ — локальные координаты точек P , E (см. рис. 5.2), а $|u| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$ — евклидова длина вектора u .

Уравнения (5.6) в относительных переменных принимают форму

$$\dot{R} = u_1, \quad \dot{r} = v_1, \quad \dot{\varphi} = \frac{v_2}{r} - \frac{u_2}{R}, \quad |u| \leq 1, \quad |v| \leq \nu \quad (5.7)$$

Переменные r, R, φ ($0 \leq r, R < \infty$, $|\varphi| \leq \alpha$) можно выразить с помощью локальных координат y, z :

$$R = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}, \quad r = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}, \quad \varphi = \frac{\alpha}{2} - \operatorname{arctg} \frac{y_2}{y_1} \pm \left(\frac{\alpha}{2} - \operatorname{arctg} \frac{z_2}{z_1} \right)$$

Здесь знак плюс соответствует расположению игроков на разных сторонах сложенного конуса.

5.1.2. Автомодельные переменные, комплексные координаты

Введем автомодельные переменные ρ, φ, τ , где ρ — нормированное безразмерное расстояние, угол φ такой же, как и в относительных переменных, а автомодельное время τ задается при помощи некоторой монотонной функции $t = t(\tau)$. Положим

$$\rho = \frac{r}{R}, \quad \frac{dt}{d\tau} = R, \quad t(0) = 0 \quad (5.8)$$

Итак, r и R — расстояния от вершины конуса до игроков E и P соответственно, φ — угол между отрезками OP и OE на плоской развертке конуса, t — исходное время, представляющее собой независимую переменную дифференцирования в (5.6). Заметим, что, вообще говоря, автомодельное время τ связано с исходным временем неинтегрируемым дифференциальным соотношением, то есть не голономной связью. Потребуем, чтобы начальный момент $t = 0$ соответствовал начальному моменту $\tau = 0$.

Используя (5.7) и (5.8), уравнения движения в автомодельных переменных могут быть записаны в виде

$$\rho' = v_1 - \rho u_1, \quad \varphi' = \frac{v_2}{\rho} - u_2, \quad |u| \leq 1, \quad |v| \leq \nu \quad (5.9)$$

где знаком штрих обозначено дифференцирование по τ . Применяя нормирование по величине R , запишем геодезическое расстояние (5.5) через автомодельные переменные, сохранив при этом соответствующие обозначения:

$$L^\pm(\rho, \varphi) = \frac{L^\pm(r, R, \varphi)}{R} = \sqrt{1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\varphi - \alpha \pm \alpha)} \quad (5.10)$$

Функции платы (5.1), (5.2) могут быть преобразованы с использованием переменных ρ, φ, τ и соотношения (5.10) следующим образом:

$$J = T = \int_0^T dt = \int_0^\theta R(\tau) d\tau = R_0 \int_0^\theta \exp\left(\int_0^\tau u_1(\sigma) d\sigma\right) d\tau = R_0 J_0, \quad \nu < 1 \quad (5.11)$$

$$J = R_0 \min_{0 \leq \tau < \infty} \sqrt{1 + \rho^2 - 2\rho \cos \varphi} \exp \left(\int_0^\tau u_1(\sigma) d\sigma \right) = R_0 J_0 \quad (5.12)$$

$$\nu \geq 1, \quad R_0 = R(0)$$

Выражение для $R(\tau)$ получается интегрированием записанного через τ первого уравнения из (5.7):

$$\frac{dR}{d\tau} = Ru_1, \quad R(0) = R_0$$

Поскольку положительный множитель R_0 может быть опущен, в качестве платы рассмотрим величину J_0 . Таким образом, в автомодельных переменных функции платы (5.1) и (5.2) имеют вид

$$J_0 = \int_0^\theta \exp \left(\int_0^\tau u_1(\sigma) d\sigma \right) d\tau, \quad 0 < \nu < 1 \quad (5.13)$$

$$J_0 = \min_{0 \leq \tau < \infty} \sqrt{1 + \rho^2 - 2\rho \cos \varphi} \exp \left(\int_0^\tau u_1(\sigma) d\sigma \right), \quad \nu \geq 1 \quad (5.14)$$

Отметим, что функции (5.13) и (5.14) не обладают свойством аддитивности. Метод динамического программирования в данном случае дает уравнение Беллмана – Айзекса с левой частью, содержащей не только градиент функции цены (функции Беллмана), но и саму эту функцию.

Таким образом, исходные четырехмерные формулировки задач (5.1), (5.2) сводятся к двумерным. Всевозможные позиции игроков описываются следующим множеством автомодельных переменных:

$$\rho \geq 0, \quad |\varphi| \leq \alpha$$

Указанные неравенства задают параметризацию конуса K_0 . При этом точки со значениями $\varphi = +\alpha$ и $\varphi = -\alpha$ следует рассматривать как одну и ту же точку. Получаем, что используя автомодельные переменные ρ, φ, τ , движение двух точек (5.6) на конусе K_0 можно описать с помощью движения одной точки на этом конусе, но с более сложной динамикой (5.9). Такой прием хорошо известен, если вместо конуса K_0 рассматривается все евклидово пространство, см. [33].

Заметим, что обратное преобразование переменных из автомодельных в относительные (или евклидовы) не является однозначным.

Сама возможность введения автомодельных переменных означает, что рассмотрение задачи для произвольной позиции r, R, φ можно свести к некоторой стандартной позиции, например, $r = \rho, R = 1, \varphi$ (здесь ρ, φ являются автомодельными координатами). При таком преобразовании длины траекторий игроков, а также фазовые скорости умножаются на коэффициент $1/R$ (нормируются по величине R).

Отметим еще одну полезную интерпретацию автомодельных переменных. Введем на плоской развертке конуса комплексные координаты игроков

$$z_P = R \exp(i\varphi_P), \quad z_E = r \exp(i\varphi_E), \quad z_P, z_E \in C \quad (5.15)$$

где R, r — модули, а φ_P, φ_E — аргументы комплексных чисел z_P, z_E , которые задают позиции игроков на плоскости. Тогда отношение

$$w = \frac{z_E}{z_P} = \rho \exp i(\varphi_E - \varphi_P), \quad \varphi = \varphi_E - \varphi_P$$

представляет собой комплексное число w , модулем и аргументом которого являются автомодельные переменные ρ и φ соответственно.

Области и поверхности (кривые) в пространстве ρ, φ для простоты будем обозначать так же, как и их прообразы в (y, z) - или (r, R, φ) -пространствах.

5.1.3. Первичные решения

Решения задач (5.1), (5.2) с простыми движениями в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n записываются несложно. Известно, что цена игры и оптимальные стратегии обратной связи для этих игр имеют вид (см. (4.9))

$$S(Q) = L(Q)/(1 - \nu), \quad \nu < 1 \quad (5.16)$$

$$S(Q) = L(Q), \quad \nu \geq 1 \quad (5.17)$$

$$u^1(Q) = -a(Q), \quad v^1(Q) = \nu b(Q), \quad Q = (P, E) \in K^2 \quad (5.18)$$

Здесь a, b — единичные и направленные во вне касательные векторы к геодезической линии в точках P и E , см. рис. 5.1. Для игры (5.1) функция $S(Q)$ представляет собой время до захвата в процессе преследования-убегания по минимальной геодезической линии, соединяющей игроков. Для игры (5.2) равенство $S(Q) = L(Q)$ означает, что минимальное расстояние между игроками достигается в начальный момент времени.

В отличие от евклидова пространства, где для любой пары точек существует единственная соединяющая их геодезическая линия (прямая), для позиций игроков, находящихся на противоположных образующих конуса, существуют две минимальные геодезические линии одинаковой длины. В последнем случае возможны два различных направления движения из точки P в точку E , см. рис. 5.1, 5.2. Таким образом, функция L в (5.16), (5.17) имеет вид (5.3).

Из простых геометрических соображений ясно, что в некоторой части фазового пространства решение задач преследования и сближения должно иметь вид (5.16)–(5.18), такой же, как и в случае евклидова пространства.

Локальные координаты точки $Q \in K^2$ обозначим через $x = (y, z)$, а фазовое пространство через $X = K^2$. Для обозначения точек, принадлежащих множеству K^2 , будем использовать символы Q и x . Часть фазового пространства $X_1 \subset X$, в которой оптимальный результат определяется соотношениями (5.16)–(5.18), называется первичной областью, то есть $V(x) = S(x)$ при $x \in X_1$. Другая часть фазового пространства $X_2 = X \setminus X_1$, где преследователю удается строго улучшить первичный результат $S(x)$, называется вторичной областью. Во вторичной области, по определению, для цены игры выполняется неравенство $V(x) < S(x)$, $x \in X_2$. Как показано в главе 4, первичный результат $S(x)$ с функцией L в (5.16), (5.17), имеющей вид (5.3), гарантируется преследователю для произвольной начальной позиции при условии применения стратегии $u^1(x)$, $x \in X$. В первичной области соответствующие траектории игроков на двустороннем плоском угле представляют собой либо отрезки прямой, либо ломаные линии.

Исследование первичной области в автомодельных переменных ρ, φ показывает, что оптимальными траекториями являются окружности. Действительно, ис-

пользуя комплексные координаты (5.15), первичное движение игроков можно представить в виде

$$z_E = z_E^0 + t\eta_E^0, \quad z_P = z_P^0 + t\eta_P^0$$

где $z_E^0, z_P^0, \eta_E^0, \eta_P^0$ — комплексные начальные координаты и скорости игроков соответственно, а t — время. В соответствии с (5.15) отношение

$$w = \frac{z_E^0 + t\eta_E^0}{z_P^0 + t\eta_P^0} = \frac{r}{R} \exp i(\varphi_E - \varphi_P) = \rho e^{i\varphi} \quad (5.19)$$

задает в автомодельных переменных траекторию $w = w(t) = \rho(t)e^{i\varphi(t)}$. Дробно-линейное отображение (5.19) преобразует прямую линию — действительную ось t — в окружность на комплексной w -плоскости. Первичные траектории проходят через точки $\rho = \nu, \varphi = 0$ и $\rho = 1, \varphi = 0$, а их центры находятся на прямой линии, перпендикулярной лучу $\varphi = 0$ и проходящей через точку $\rho = (1 + \nu)/2, \varphi = 0$.

5.2. Анализ первичной области

5.2.1. Необходимые условия оптимальности

Предположим, что в поставленных игровых задачах существует непрерывная цена игры $V(x)$, которая для всех векторов $w = (u, v)$ имеет производные по направлению $\partial V/\partial w$. Тогда, как показано в главе 4, во всем пространстве игры (5.1) и во вторичной области игры (5.2) справедливы следующие необходимые условия оптимальности (см. (4.11)):

$$\min_u \max_v \partial V/\partial w \geq -k \geq \max_v \min_u \partial V/\partial w, \quad |u| \leq 1, \quad |v| \leq \nu \quad (5.20)$$

Здесь и ниже игре преследования соответствует $k = 1$, а игре сближения $k = 0$. В главе 4 показано, что в первичной области X_1 игры (5.2) справедливо только левое неравенство (см. (4.12)):

$$\min_u \max_v \partial S/\partial w \geq 0, \quad x \in X_1 \quad (5.21)$$

В точках гладкости функции $V(x)$ производная по направлению $w = (u, v)$ может быть представлена в виде суммы $\langle V_y, u \rangle + \langle V_z, v \rangle$, и соотношения (5.20) приводят к следующему уравнению Айзекса в евклидовых переменных:

$$\begin{aligned} F(p) &= \min_u \max_v (\langle V_y, u \rangle + \langle V_z, v \rangle) + k = \\ &= -\sqrt{p_1^2 + p_2^2} + \nu\sqrt{p_3^2 + p_4^2} + k = 0 \quad (p = V_x \in \mathbb{R}^4) \end{aligned} \quad (5.22)$$

В относительных координатах это уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} \min_u \max_v \left(V_R u_1 + V_r v_1 + V_\varphi \left(\frac{v_2}{r} - \frac{u_2}{R} \right) \right) + k = \\ = -\sqrt{V_R^2 + V_\varphi^2/R^2} + \nu\sqrt{V_r^2 + V_\varphi^2/r^2} + k = 0 \end{aligned} \quad (5.23)$$

Как уже упоминалось в разделе 4.3, первичное решение игры (5.1) удовлетворяет уравнению Айзекса в силу справедливости уравнений эйконала (4.41): $L_{y_1}^2 + L_{y_2}^2 = 1$, $L_{z_1}^2 + L_{z_2}^2 = 1$, которые выполняются для функции геодезической длины. Функция $S(x) = \bar{L}(x)$, являющаяся первичным решением игры (5.2), вместо (5.22) удовлетворяет уравнению $F(p) + 1 - \nu = 0$.

Обозначим через $W = W(\rho, \varphi)$ функцию цены игр (5.9), (5.13), (5.14). Из соотношений (5.11), (5.12) находим связь между значениями функции цены в относительных и автомодельных переменных: $V(r, R, \varphi) = RW(\rho, \varphi)$. Дифференцируя последнее равенство, имеем

$$V_r = W_\rho, \quad V_R = W - \rho W_\rho, \quad V_\varphi = RW_\varphi \quad (5.24)$$

Подставляя (5.24) в (5.23), получаем

$$\Phi(\rho, \varphi, W, W_\rho, W_\varphi) \equiv -\sqrt{W_\varphi^2 + (W - \rho W_\rho)^2} + \nu\sqrt{W_\rho^2 + W_\varphi^2/\rho^2} + k = 0 \quad (5.25)$$

В отличие от уравнений (5.22) и (5.23), в уравнении (5.25) содержится неизвестная функция — цена игры W . Это связано с тем, что игра (5.9), (5.13), (5.14) принадлежит классу игр с неаддитивной функцией платы, который может быть описан следующим образом:

$$\dot{x} = f(x, u, v), \quad u \in U, \quad v \in V \quad (5.26)$$

$$J = \int_0^T f^0(x, u, v) \exp\left(\int_0^t g^0(x, u, v) d\sigma\right) dt \quad (5.27)$$

Здесь f^0, g^0 — скалярные функции. Можно показать, что в этом случае условия (5.20) и соответствующее уравнение Айзекса имеют вид

$$\min_u \max_v (\partial V / \partial f + g^0 V + f^0) \geq 0 \geq \max_v \min_u (\partial V / \partial f + g^0 V + f^0) \quad (5.28)$$

$$\begin{aligned} \min_u \max_v (\langle V_x(x), f(x, u, v) \rangle + g^0(x, u, v)V(x) + f^0(x, u, v)) = \\ = \max_v \min_u (\langle V_x(x), f(x, u, v) \rangle + g^0(x, u, v)V(x) + f^0(x, u, v)) = 0 \end{aligned} \quad (5.29)$$

Оптимальные регулярные траектории в рассматриваемых играх описываются уравнениями характеристик УЧП первого порядка (5.22) в евклидовых переменных:

$$\dot{x} = F_p, \quad \dot{p} = -F_x = 0, \quad (\dot{V} = \langle p, V_x \rangle) \quad (5.30)$$

В автомодельных переменных они имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\rho} = \Phi_\xi, \quad \dot{\varphi} = \Phi_\eta, \quad \dot{W} = \xi\Phi_\xi + \eta\Phi_\eta \\ \dot{\xi} = -\Phi_\rho - \xi\Phi_W, \quad \dot{\eta} = -\Phi_\varphi - \eta\Phi_W \end{aligned} \quad (5.31)$$

где $\xi = W_\rho, \eta = W_\varphi$, а гамильтониан $\Phi(\rho, \varphi, W, \xi, \eta)$ задан в (5.25).

Дальнейшие построения основаны на приведенных ранее необходимых условиях, которые, как оказывается, выделяют единственное решение. Достаточные условия основаны на теоремах единственности соответствующих вязкостных решений.

5.2.2. Построение множества B , параметрический анализ

Итак, первый шаг описанного в подразделе 4.4.3 алгоритма построения решения игровой задачи завершен и функции L^+ , L^- найдены. Согласно второму шагу алгоритма нужно найти общий край поверхностей Γ_2 и Γ_1 , лежащий на границе между первичной и вторичной областями. Этот край есть “след” области X_2 на поверхности $\Gamma_0 \subset \mathbb{R}^4$, задаваемой в виде

$$\Gamma_0 = \{x = (y, z) \in \mathbb{R}^4 : L^+(x) = L^-(x)\} \quad (5.32)$$

В окрестности поверхности Γ_1 первичное решение имеет вид

$$S(x) = \min[S^+(x), S^-(x)]$$

где через S^+ , S^- обозначены функции (5.16), (5.17), в которых L нужно заменить на L^+ и L^- . Часть поверхности Γ_0 , лежащая в первичной области и обозначаемая через Γ_1 , согласно (4.15) задается соотношениями

$$\begin{aligned} \Gamma_1 : \quad S^+(x) &= S^-(x), \quad F(S_x^0(x)) \geq 0 \\ S^0(x) &= \frac{1}{2}(S^+(x) + S^-(x)) \end{aligned} \quad (5.33)$$

В точках, лежащих на Γ_1 , левое условие (5.20) для игры (5.1) выполняется как равенство. Это означает, что игрок P имеет чисто позиционную (без дискриминации игрока E) оптимальную стратегию на Γ_1 . Правое условие (5.20) выполнено во всех точках поверхности Γ_1 в виде строгого неравенства (игрок E не обладает чисто позиционной оптимальной стратегией).

Край (ребро) B_1 поверхности Γ_1 удовлетворяет двум равенствам, задающим множество

$$B : \quad L^+(x) = L^-(x), \quad F(S_x^0(x)) = 0 \quad (5.34)$$

Последнее равенство с геометрической точки зрения можно представить в следующем виде:

$$|a^+ + a^-| - \nu|b^+ + b^-| = 2k(1 - \nu) \quad (a = L_y, b = L_z) \quad (5.35)$$

Напомним, что в общем случае имеет место вложение $B_1 \subset B$. Если множество B пусто, то есть все точки Γ_0 лежат в X_1 , то первичные решения (5.16)–(5.18) являются решениями игр во всем пространстве. В игре преследования множество B всегда не пусто. Более того, как и в игре плоского преследования с препятствием, существует взаимно-однозначное отображение B_1 в игровое пространство K .

Дальнейшие исследования для удобства будем проводить в автомоделных переменных. Из соотношений (5.34) можно увидеть, что размерность множества B в четырехмерном x -пространстве равна двум. Размерность проекции множества B на пространство автомоделных переменных равна нулю. Первое условие в (5.34) определяет положения игроков на противоположных образующих, а второе задает отношение их расстояний до вершины. Другими словами, множество B является точкой с полярными координатами $\rho = \rho_B$, $\varphi = \alpha$.

Уравнение для ρ_B может быть получено следующим образом. Для любой фиксированной позиции $Q = (P, E) \in \Gamma_0$ можно выбрать такие образующие γ^+ и γ^- , по

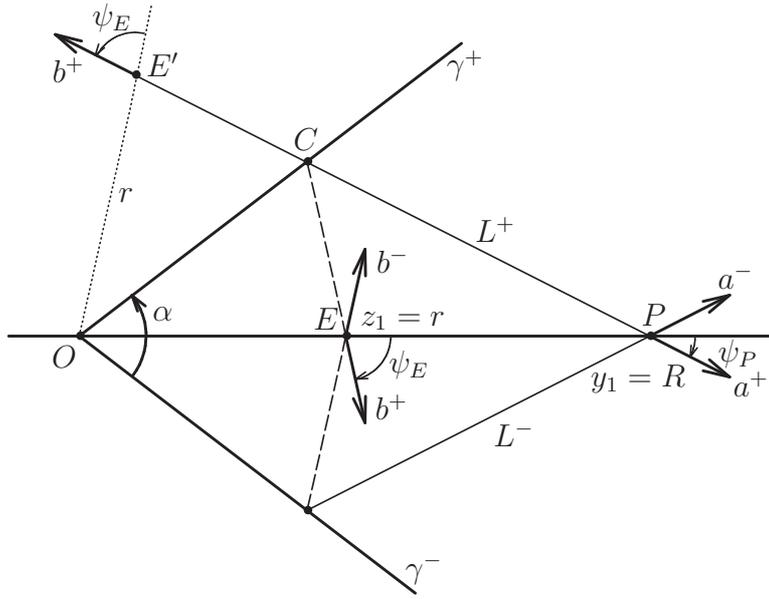


Рис. 5.4

которым складывается конус, что локальные координаты игроков будут иметь вид $P(y_1, 0)$, $E(z_1, 0)$. То есть оба игрока находятся на оси абсцисс, но на разных сторонах плоского угла (рис. 5.4). Введем углы ψ_P , ψ_E как показано на рис. 5.4. Можно увидеть, что углы $\psi_P + \pi$ и ψ_E представляют собой управляющие углы игроков P и E при первичном движении. Используя эти углы, запишем равенства для длин сумм единичных векторов

$$|a^+ + a^-| = 2|\cos \psi_P|, \quad |b^+ + b^-| = 2|\cos \psi_E|$$

которые приводят уравнение (5.35) к виду (см. также (4.55))

$$|\cos \psi_P| - \nu |\cos \psi_E| = k(1 - \nu)$$

Здесь нужно использовать абсолютные значения, поскольку косинусы могут быть отрицательными. Это равенство, рассматриваемое на B_1 , является частным случаем соотношения (4.55), которое справедливо для всех точек поверхности Γ_2 , в том числе и на ее границе B_1 .

Теперь, используя теорему косинусов и вспомогательные конструкции, изображенные на рис. 5.4, где отрезки EC и CE' равны, получаем равенства

$$\begin{aligned} \cos \psi_P &= \frac{\rho - \cos \alpha}{h}, & \cos \psi_E &= \frac{1 - \rho \cos \alpha}{h} \\ h &= \sqrt{1 + \rho^2 - 2\rho \cos \alpha}, & \rho &= r/R = z_1/y_1 \end{aligned}$$

Величина h есть нормированное расстояние между точками E' и P . Эти выражения

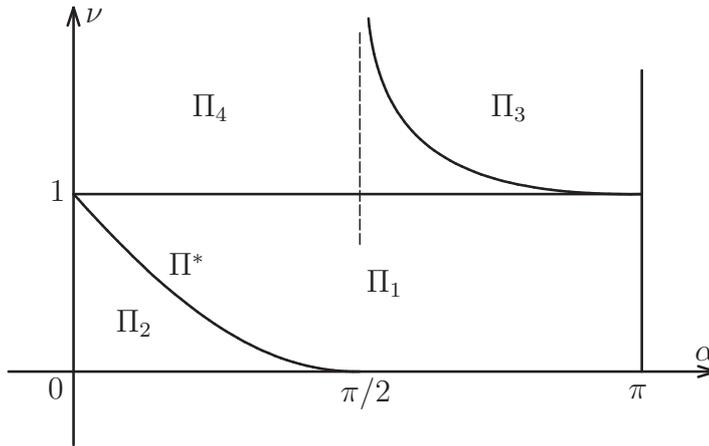


Рис. 5.5

преобразуют уравнение (5.35) к окончательному виду

$$|1 - \rho \cos \alpha| - \nu |\rho - \cos \alpha| = k(1 - \nu) \sqrt{1 + \rho^2 - 2\rho \cos \alpha} \quad (5.36)$$

Можно решить уравнение (5.36) относительно ρ_B и найти следующие корни, зависящие от параметров α, ν (рис. 5.5):

$$\rho_B = \frac{\nu(1 \pm \cos \alpha) \mp (1 - \nu) \sqrt{2\nu(1 \mp \cos \alpha)}}{\cos \alpha \pm (2\nu - 1)}, \quad 0 < \nu < 1 \quad (k = 1) \quad (5.37)$$

$$\rho_B = \frac{1 + \nu \cos \alpha}{\nu + \cos \alpha}, \quad \nu \geq 1, \quad (\alpha, \nu) \in \Pi_4 \quad (k = 0) \quad (5.38)$$

В формуле (5.37) верхний (нижний) знак соответствует области Π_1 (Π_2), лежащей выше (ниже) критической кривой (см. рис. 5.5)

$$\Pi^* = \{(\alpha, \nu) : \nu = 1 - \sin \alpha, 0 \leq \alpha \leq \pi/2\} \quad (5.39)$$

Для критической кривой Π^* оба решения равны $\rho_B = \cos \alpha$. При $\nu = 1$ имеет место равенство $\rho_B = 1$.

Формула (5.38) действует только в подобласти Π_4 полуполосы

$$\{(\alpha, \nu) : \nu \geq 1, 0 \geq \alpha \geq \pi\} = \Pi_3 + \Pi_4$$

на плоскости α, ν . В области

$$\Pi_3 = \{\pi/2 < \alpha < \pi, \nu > -1/\cos \alpha\} \quad (5.40)$$

значений параметров α, ν множество B пусто, а уравнение (5.36) не имеет решения с положительными ρ . Это означает, что для таких конусов первичное решение представляет собой полное решение игры (5.2).

Сделаем несколько замечаний о том, как были получены формулы (5.37), (5.38). Можно показать, что равенство (5.35) выполняется только тогда, когда справедливо неравенство

$$|a^+ + a^-| \geq |b^+ + b^-|$$

Используя геометрические построения, аналогичные рис. 5.4, из этого неравенства получаем условие $\rho \leq 1$ для решения (5.36). Данное условие, в частности, означает, что первый модуль в (5.36) может быть заменен на $1 - \rho \cos \alpha \geq 0$.

Рассмотрим случай $\nu < 1$ при $k = 1$. Уравнение (5.36) здесь распадается на два квадратных уравнения, соответствующих положительному и отрицательному значению $\rho - \cos \alpha$ во втором модуле в (5.36). Если этот модуль обращается в нуль, $\rho = \cos \alpha$, то из (5.36) следует соотношение $\nu = 1 - \sin \alpha$, $0 \leq \alpha \leq \pi/2$. Таким образом, возникает критическая кривая (5.39). Ограничение $\alpha \leq \pi/2$ появляется вследствие того, что величина $\rho = \cos \alpha$ неотрицательна.

Квадратное уравнение для случая $\rho - \cos \alpha < 0$ (и области Π_2) имеет только один положительный корень, задаваемый в (5.37) нижним знаком. Для области Π_1 квадратное уравнение соответствует неравенству $\rho - \cos \alpha > 0$ и имеет только один корень, непрерывно переходящий в корень для параметров из Π_2 . Этот корень представлен в (5.37) верхним знаком. В общем случае для части Π_1 выше кривой

$$\nu = (1 - \cos \alpha)/2$$

существуют два различных положительных корня. Меньший из них задает множество B_1 и представлен в (5.37). Больший рассматриваться не будет, поскольку он превышает единицу. В точках на указанной кривой выражение для ρ_B в (5.37) имеет устранимую особенность (знаменатель обращается в нуль) и $\rho_B = (1 + \nu)/2$.

В случае $\nu \geq 1$ (игра сближения, $k = 0$) устанавливаем, что в той части области Π_4 , где $\nu > 1/\cos \alpha$, $0 < \alpha < \pi/2$, существуют два положительных корня уравнения (5.36), из которых больший задается равенством (5.38), а меньший не рассматривается, поскольку он не соответствует требованиям теоремы 4.1. Таким образом, в некоторых случаях множество B имеет две связанные компоненты и только одна из них является множеством B_1 — краем Γ_2 . В дальнейшем множество B_1 будет обозначаться через B .

Существование однозначного решения (5.37) уравнения (5.36) для игры (5.1) при $0 < \nu < 1$ означает, что для каждой точки $E \in K$, находящейся на расстоянии $r > 0$ от вершины конуса, существует единственная точка $P \in K$, расположенная на противоположной образующей на расстоянии $R = r/\rho_B$ от вершины конуса и такая, что пара (P, E) принадлежит множеству $B \subset K \times K$. Это соответствие определяет взаимно-однозначное отображение K в B . Отсюда следует, что в игре (5.1), как и в игре плоского преследования с препятствием, множество B диффеоморфно конусу K .

Множество $B_0 = B_0^+ = B_0^-$, введенное в (4.18) равенствами

$$B_0 : L^+(x) = L^-(x), \quad \langle F_p(q^\pm), q^+ - q^- \rangle = 0, \quad q^\pm = S_x^\pm \quad (5.41)$$

определяет такие позиции на поверхности Γ_0 , в которых регулярные траектории касаются Γ_0 , а также друг друга. Как было показано в разделе 4.3, в игре преследования множество B_0 находится во вторичной области X_2 , а в игре сближения — в первичной области X_1 . В игре преследования поверхность Γ_1 является

рассеивающей. В игре сближения только часть Γ_1 представляет собой рассеивающую поверхность, а ее часть между множествами B_1 и B_0 является универсальной поверхностью. Термин “универсальная” означает, что регулярные траектории достигают сингулярной поверхности с обеих сторон.

5.2.3. Построение экивокальной поверхности

Третий шаг алгоритма из подраздела 4.4.3 предусматривает построение экивокальных поверхностей. Достаточные условия существования этих поверхностей описаны в теореме 4.1. В соответствии с данной теоремой нужно проинтегрировать систему (4.37) с терминальными условиями на B_1 и гамильтонианом (5.22):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F_p, & \dot{p} &= \frac{\langle S_{xx}F_p, F_p \rangle}{\langle F_{pp}q, q \rangle}(p - q), & q &= S_x \\ p(x) &= S_x^0(x) = \frac{1}{2}(q^+(x) + q^-(x)), & x &\in B_1 \end{aligned} \quad (5.42)$$

Как показано в главе 4, поверхность Γ_2 состоит из двух ветвей Γ_2^+ и Γ_2^- , которые касаются друг друга и поверхности Γ_1 в точках B_1 . Поверхность Γ_2 делит фазовое пространство на первичную и вторичную области X_1, X_2 соответственно. Поверхность Γ_2 состоит из сингулярных траекторий, которые в игре преследования образуют экивокальную поверхность, а в игре сближения — универсальную. В обеих задачах сингулярные поверхности являются огибающими регулярных траекторий во вторичной области. Огибающая для первой задачи называется также огибающей переключения.

Для построения сингулярной поверхности Γ_2 надо проинтегрировать систему (5.42) из всех точек множества B_1 . Автомодельность задачи позволяет получить каждую траекторию (5.42) путем пересчета любой одной отдельно взятой. Действительно, уравнения (5.42) и функция $S_x^0(x)$ инвариантны относительно преобразований координат и времени

$$x = \lambda z', \quad t = \lambda t', \quad \lambda > 0 \quad (5.43)$$

Принимая во внимание симметрию конуса K , можно так выбрать локальные координаты y, z , что любая точка множества B_1 может быть представлена в виде

$$x^0 = \lambda x_B, \quad x_B = (1, 0, \rho_B, 0), \quad \lambda > 0 \quad (5.44)$$

где величина ρ_B задается в (5.37), (5.38). Точка x_B соответствует положению игроков с координатами $P(y_1, 0), E(z_1, 0)$ по разные стороны сложенного конуса, см. рис. 5.4. Если взять $y_1 = 1$, тогда $z_1 = \rho_B$. Таким образом, достаточно проинтегрировать систему (5.42) только для стандартной траектории, стартуя при этом в обратном времени от точки (5.44) (например, при $\lambda = 1$). Другими словами, нужно решить задачу Коши

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -F_p, & \dot{p} &= -\frac{\langle S_{xx}F_p, F_p \rangle}{\langle F_{pp}q, q \rangle}(p - q) \\ x(0) &= x_B, & p(0) &= S_x^0(x_B) \end{aligned} \quad (5.45)$$

Регулярные движения в обеих областях, первичной и вторичной, определяются уравнениями характеристик (5.30), (5.31). Уравнение $\dot{p} = 0$ в (5.30) означает, что регулярные траектории являются прямыми линиями в декартовых координатах, то есть геодезическими линиями. В первичной области это прямая линия, соединяющая игроков, во вторичной области каждый из игроков движется по своей геодезической прямой линии, отличной от линии, соединяющей игроков. Дробно-линейное преобразование $w = z_E/z_P$ в переменных (5.15) показывает, что в комплексных координатах все регулярные траектории являются окружностями.

5.3. Исследование вторичной области

5.3.1. Игра преследования

Аналитическое и численное исследование игр преследования и сближения удобнее осуществлять в евклидовых координатах, поскольку это приводит к более простым формулам. Что касается графического представления результатов, то для них удобнее использовать автономные переменные, так как результирующие изображения двумерны.

Пусть $\nu < 1$. Наиболее важным свойством в игре преследования является качественное изменение поведения сингулярных траекторий при переходе параметров (α, ν) из области Π_1 в область Π_2 . Типичные экивокальные траектории, то есть решения (5.45), для областей Π_1, Π_2 отличаются вследствие разного знака третьей компоненты вектора F_p в (5.42). В общем случае четные компоненты вектора $F_p(S_x^0(x_B))$ равны нулю, первая компонента всегда положительна, а третья компонента меняет знак на критической кривой. Используя (5.4) и (5.37), можно найти следующие предельные значения для вектора F_p при параметрах (α, ν) , стремящихся к Π^* с Π_1 - и Π_2 -сторон:

$$\Pi_1: F_p = (1, 0, -\nu, 0); \quad \Pi_2: F_p = (1, 0, \nu, 0) \quad (5.46)$$

Это означает, что в обратном времени на достаточно малом интервале игрок E в области параметров Π_1 (Π_2) движется к вершине (от вершины). Игрок P в свою очередь всегда движется от вершины. Полученные численно начальные части траекторий игроков в евклидовых координатах для областей Π_1, Π_2 показаны в прямом времени на рис. 5.6.

На рис. 5.7, 5.8 представлен фазовый портрет оптимальных траекторий в прямом времени в автономных переменных для областей параметров Π_1 и Π_2 соответственно. В автономных переменных типичная экивокальная траектория для обеих областей ведет себя одинаково: она покидает (в обратном времени) точку B по касательной к лучу OB и достигает за бесконечное время точку D с координатами $\rho = \nu, \varphi = 0$. Кривая BD на рис. 5.7, 5.8 является огибающей вторичных регулярных траекторий. Численное интегрирование в обратном времени осуществляется от точки B до точки D . Для параметров $(\alpha, \nu) \in \Pi_1$ вторичная область X_2 является криволинейным треугольником OBD , в котором отрезок OB касается в точке B обеих ветвей Γ_2^+ и Γ_2^- экивокальной кривой (только одна из них изображена на рис. 5.7, другая находится на второй симметричной копии рисунка).

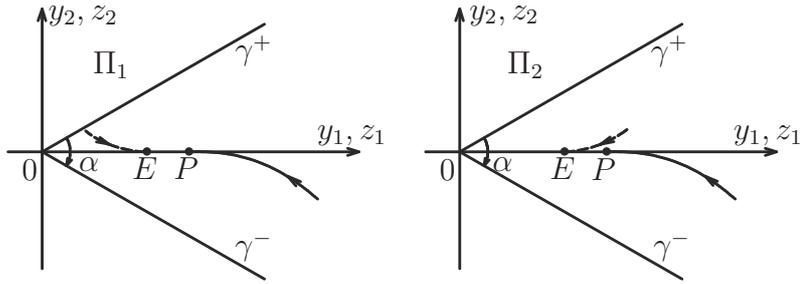


Рис. 5.6

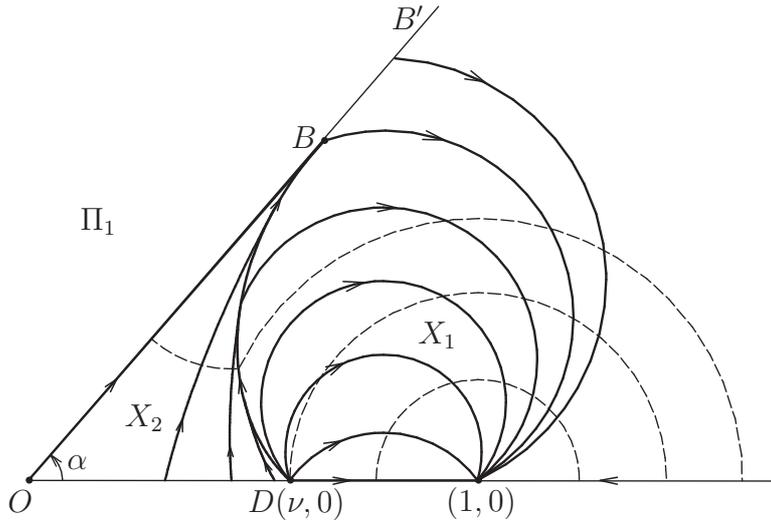


Рис. 5.7

Вторичные траектории с разных копий рисунка пересекают друг друга в точках открытого промежутка OD в одно и то же время, то есть отрезок OD при $(\alpha, \nu) \in \Pi_1$ является рассеивающим. В x -пространстве соответствующую гиперповерхность обозначим через Γ_3 . Точки отрезка OD отвечают таким позициям игроков P и E , когда они находятся на одной и той же образующей конуса. В отличие от поверхности Γ_1 (луч BB' на рис. 5.7) цена игры в окрестности OD имеет вид $W = \max[W^+, W^-]$, или, в исходных переменных, $V = \max[V^+, V^-]$. На поверхности Γ_3 должны быть проверены по некоторым переменным необходимые условия оптимальности, или вязкостные условия вида (2.7). Поскольку рассматривается терминальная задача с особенностью типа максимума, то для каждой точки $x \in \Gamma_3$

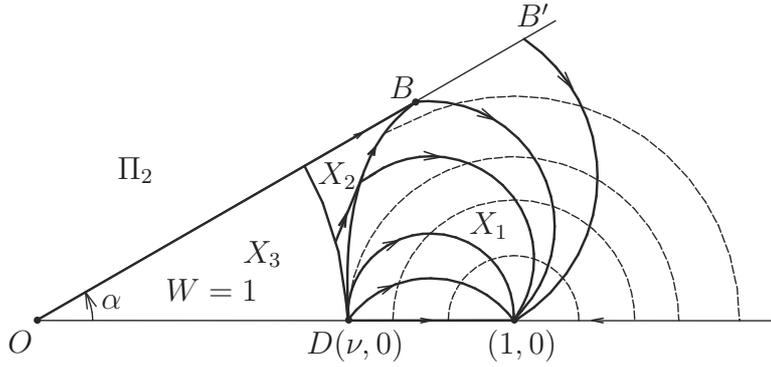


Рис. 5.8

должно быть выполнено неравенство

$$f(\lambda) = F(\lambda p^+ + (1 - \lambda)p^-) \leq 0, \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \quad (5.47)$$

$$(p^+ = V_x^+, \quad p^- = V_x^-)$$

Используя соображения симметрии, можно показать, что для точек поверхности Γ_3 градиенты p^+ , p^- удовлетворяют условиям

$$p_1^+ = p_1^-, \quad p_2^+ = -p_2^-, \quad p_3^+ = p_3^-, \quad p_4^+ = -p_4^- \quad (x \in \Gamma_3) \quad (5.48)$$

Так как вектор p не меняется на регулярных траекториях (см. (5.30)), то условие (5.47) достаточно проверить для точек лишь одной эквивокальной поверхности, например, Γ_2^+ . Из свойств симметрии функции $f(\lambda)$ следует, что достаточно установить неравенство (5.47) только при $\lambda = 1/2$. Таким образом, из (5.47), (5.48) можно получить условие

$$-|p_1| + \nu|p_3| + 1 < 0, \quad x \in \Gamma_3 \quad (5.49)$$

Это условие было проверено численно вместе с вычислениями на Γ_2 и оказалось выполненным.

При $(\alpha, \nu) \in \Pi_2$ картина меняется (рис. 5.8). Оптимальный фазовый портрет включает в себя новую подобласть X_3 вторичной области, $X_3 \subset X_2$. В новой подобласти оптимальный результат определяется только положением игрока P и равен времени его движения до вершины O , где происходит захват в случае оптимального поведения игрока E .

Такой вид оптимального поведения становится совершенно понятным, если рассмотреть вырожденное игровое пространство при $\alpha = 0$, когда конус K вырождается в луч (полуось), начинающийся в точке O (параметры $(0, \nu)$ на границе Π_2). Действительно, в случае начального расположения игрока E между точками O и P , $E \in OP$, игрок E не имеет другого выбора, кроме как убежать к вершине O . Если начальное отношение $\rho = r/R$ меньше ν , то игрок E достигнет точки O раньше, чем P , и будет ожидать там прибытия последнего. Кроме этого, игрок E может двигаться в направлении вершины так, чтобы достичь ее не позднее игрока P и

не быть пойманным до этого момента. Если в начальный момент точки E и O находятся на луче по разные стороны от P , то оптимальное поведение игроков такое же, как и на плоскости.

Для более общего вида конуса K из Π_2 существование области X_3 обусловлено тем фактом, что вторичные регулярные траектории, начинающиеся в обратном времени в точках ветвей Γ_2^+ , Γ_2^- , не пересекают друг друга и продолжаются сколь угодно долго. Множество всех вторичных регулярных траекторий стремится к некоторой поверхности, обозначаемой снова через Γ_3 . Эта поверхность является границей области X_3 .

Такое предельное поведение может быть изучено более точно следующим способом. Пусть $\bar{x}(\bar{t})$, $\bar{p}(\bar{t})$, $0 \leq \bar{t} < \infty$, — решение стандартной задачи (5.45) при $\lambda = 1$ (стандартное решение). Решение $x_\lambda(t)$, $p_\lambda(t)$ задачи (5.42) при произвольном $\lambda > 0$, в соответствии с (5.43), связано со стандартным решением равенствами

$$x_\lambda(t) = \lambda \bar{x}(\bar{t}), \quad p_\lambda(t) = \bar{p}(\bar{t}), \quad t = \lambda \bar{t}, \quad \lambda > 0 \quad (5.50)$$

Рассмотрим множество P^* значений сопряженного вектора в точках траектории, соответствующей стандартному решению:

$$P^* = \{p \in \mathbb{R}^4 : p = \bar{p}(\bar{t}), \quad 0 \leq \bar{t} < \infty\} \quad (5.51)$$

Можно доказать, что поверхность Γ_3 состоит из всех таких траекторий (в обратном времени), которые являются решениями семейства задач Коши

$$\dot{x} = -F_p(p^*) = \text{const}, \quad x(0) = 0, \quad p^* = \text{const}, \quad p^* \in P^* \quad (5.52)$$

Зафиксируем произвольное значение $p^* \in P^*$ и соответствующий момент времени t_* : $\bar{p}(t_*) = p^*$. Значение p^* на решении (x_λ, p_λ) достигается в момент времени $t = \lambda t_*$, $p_\lambda(\lambda t_*) = p^*$. На вторичной регулярной траектории, покидающей сингулярное решение (x_λ, p_λ) в момент $t = \lambda t_*$, условие $p = p^* = \text{const}$ выполняется при произвольном $\lambda > 0$. При $\lambda \rightarrow 0$ промежуток $[0, \lambda t_*]$ сингулярного движения, приводящий к значению p^* , сжимается до нуля. Начальная точка соответствующей вторичной траектории также стремится к O :

$$x_\lambda(\lambda t_*) \rightarrow x_\lambda(0) = 0, \quad \lambda \rightarrow 0$$

Таким образом, полная траектория, состоящая из постепенно исчезающей сингулярной и регулярной частей, стремится к решению упомянутого выше семейства задач Коши с соответствующим значением p^* .

В автомодельных переменных поверхность Γ_3 представляет собой дугу окружности $\rho = \nu$, $|\varphi| \leq \alpha$. Регулярные траектории, стартующие в обратном времени в точках дуги BD , приближаются к точкам этой поверхности за бесконечное время.

В области X_3 оптимальный результат зависит только от позиции преследователя:

$$V = V_3(x_1, x_2) = R, \quad V_{x_3} = V_{x_4} = 0$$

На поверхности Γ_3 функция $V(x)$ оказывается негладкой, и потому поверхность Γ_3 является сингулярной. Несмотря на это, оба условия (5.20) выполнены в форме

равенств. Последнее означает, что игроки P и E обладают в точках Γ_3 чистыми позиционными стратегиями. Действительно, цену игры в окрестности Γ_3 можно представить в виде

$$V = \min[V_2, V_3], \quad V_3 = R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

Для производной цены игры по направлению w в точках Γ_3 имеем

$$\begin{aligned} \partial V / \partial w &= \min[\partial V_2 / \partial w, \partial V_3 / \partial w], \quad \partial V_j / \partial w = \langle a_j, u \rangle + \langle b_j, v \rangle \\ j &= 2, 3, \quad |a_3| = 1, \quad b_3 = 0 \end{aligned}$$

Условия для векторов a_3, b_3 следуют из формулы $V_3 = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}$. Поскольку справедливо равенство $b_3 = 0$, то возможна перестановка экстремумов при проверке условий (5.20). При этом оба условия выполняются в форме равенств.

На рис. 5.7, 5.8 пунктирными линиями представлены линии уровня цены игры. В первичной области эти линии являются окружностями

$$\sqrt{1 + \rho^2 - 2\rho \cos \varphi} = (1 - \nu)c$$

где c — величина уровня. Во вторичной области приведенные линии построены численно.

5.3.2. Критический конус при $\nu = 1 - \sin \alpha$

Численный анализ показывает, что когда параметры (α, ν) стремятся к критической кривой Π^* (заданной в (5.39)), то экивокальная кривая стремится к дуге окружности, представляющей собой линию уровня $W = 1$ и касающуюся сторон угла полной развертки конуса. Можно доказать, что в критическом случае эта дуга (не являющаяся более траекторией) представляет собой сингулярную кривую, ограничивающую первичную область. Область с другой стороны этой дуги (криволинейный треугольник ODD' на рис. 5.9) также называется вторичной. Здесь цена игры $W(\rho, \varphi)$ оказывается постоянной и равняется единице.

Для обоснования приведенных результатов (например, в относительных переменных) достаточно доказать следующее. Если $r \leq R \cos \alpha$, то для всех положений r, R, φ , при которых E находится в криволинейном треугольнике ODD' (то есть вне круга с центром в точке P и радиусом $R \sin \alpha$), каждый из игроков в подходящем классе стратегий может гарантировать время до захвата не более (для P) или не менее (для E), чем $T = R$. Поскольку между параметрами справедливо критическое соотношение $\nu = 1 - \sin \alpha$, то в случае когда E находится на дуге DD' , первичное время до захвата равно времени движения игрока P с максимальной скоростью до вершины конуса O вдоль отрезка PO :

$$\frac{R \sin \alpha}{1 - \nu} = R$$

Это позволяет предложить игроку P следующую стратегию. Если игрок E находится в текущем треугольнике DOD' вне дуги DD' , то P должен двигаться вдоль отрезка PO . Если же $E \in DD'$, то игрок P переключается на первичное движение.

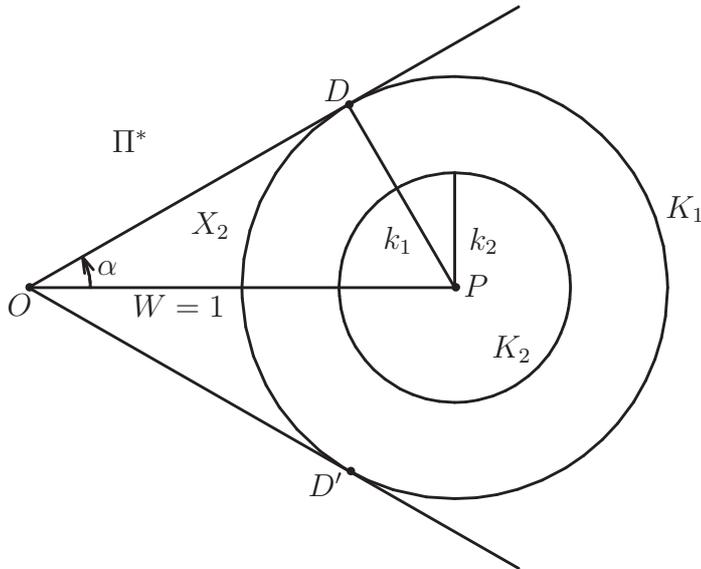


Рис. 5.9

Можно доказать, что переключение на первичную стратегию происходит не более одного раза. Так как при $t = T = R$ треугольник DOD' стягивается в точку O , то время до захвата не может превышать величины $T = R$.

Покажем, что игроку E можно предложить кусочно-программную стратегию, гарантирующую при начальном положении R_0, r_0, φ_0 время избежания захвата $T \geq R_0$. Для этого вместе с касательной окружностью $K_1(t)$ радиуса $k_1(t) = R(t) \sin \alpha$, где $R(t)$ — текущая длина отрезка OP , рассмотрим на плоской развертке конуса окружность $K_2(t)$ с центром в точке P и радиусом $k_2(t) = (1 - \nu)(R_0 - t)$, рис. 5.9. При $t = 0$ эти окружности совпадают, поскольку $\sin \alpha = 1 - \nu$. Если $0 \leq t \leq R_0$, то окружность $K_2(t)$ всегда находится внутри окружности $K_1(t)$ или совпадает с ней. Точки окружности $K_2(t)$ выделяют такие положения игрока E , при которых первичное время вместе с прошедшим временем $t > 0$ обеспечивает общее время захвата $T = R_0$.

Построение кусочно-программной стратегии для игрока E основано на следующих соображениях. Игрок E , находясь в начальный момент времени в криволинейном треугольнике ODD' без точки D (заметим, что точки D и D' идентичны), движется со скоростью ν вдоль начального отрезка PE (выполняет первичное программное движение) до первого момента t_* попадания на окружность $K_2(t_*)$ или вплоть до достижения вершины конуса. В последнем случае в таком положении он будет ожидать возможного захвата, который состоится не раньше, чем в момент времени $T = R_0$. При попадании на окружность $K_2(t)$ в момент t_* игроком E должно быть выбрано новое программное управление, осуществляющее первичное движение вдоль отрезка PE , соответствующего моменту времени t_* , до следующего пересечения с окружностью $K_2(t)$. В отличие от ситуации на евклидовой плоскости,

игрок E , движущийся по конусу, после покидания круга $K_2(t)$, может попасть на его границу снова. Тем не менее, используя описанное поведение, игрок E избегает попадания во внутренность круга $K_2(t)$ и гарантирует ненулевое расстояние от P , по крайней мере, на интервале времени $0 \leq t \leq R_0$. Чтобы фиксировать следующий момент $t_* = t_*(P, E)$, игрок E должен непрерывно отслеживать положение P . Можно показать, что длины отрезков программного движения вдоль геодезических на плоской развертке конуса отличны от нуля.

Перед началом движения из точки D игроку E требуется информация об управлении игрока P , иначе результат может быть гарантирован только с произвольно малой точностью ε .

Заметим, что стартуя из точек, в которых $r_0/R_0 \leq \nu$, игрок E обладает программной гарантирующей стратегией: перемещение со скоростью ν до вершины O и ожидание там момента захвата. Такое поведение приводит к успеху в области X_3 при $(\alpha, \nu) \in \Pi_2$.

Если параметры (α, ν) располагаются вне критической кривой Π^* , то можно показать, что упомянутые выше стратегии либо не реализуемы, либо гарантируют для игроков не оптимальные по времени захвата результаты.

5.3.3. Игра сближения

Предположим, что $\nu > 1$ (случай $\nu = 1$, соответствующий идентичным игрокам, изучается в следующем подразделе). Здесь, как и в игре преследования, область параметров (α, ν) состоит из двух подобластей. В области Π_3 , определяемой в (5.40), множество B и, следовательно, множество X_2 являются пустыми. Поэтому цена игры равна начальному расстоянию.

Условие (5.21) означает, что игрок P в точках области X_1 не имеет позиционной стратегии, локально минимизирующей начальное расстояние. Более того, первичное управление $v(x) = \nu b(x)$ в (5.18) позволяет игроку E локально максимизировать начальное расстояние в подобласти $X_1 \setminus \Gamma_0$. Для точек поверхности Γ_0 игрок E должен иметь в общем случае информацию об управлении игрока P , иначе ему нужно использовать ε -оптимальные стратегии. Отметим также, что для решения игры сближения в области X_1 требуется построить только цену игры — начальное расстояние — управление игрока E , гарантирующее оптимальный результат. Управление игрока P в данном случае оказывается несущественным.

Формулу (5.38) можно получить, используя простые геометрические построения. Рассматривая движение игроков вдоль противоположных образующих γ^+ и γ^- (игрок P движется к вершине, $R(t) = R_0 - t$, а игрок E движется от нее, $r(t) = r_0 + \nu t$) и минимизируя расстояние

$$L^+(x) = L^-(x) = \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos \alpha}, \quad x = x(t) \quad (5.53)$$

по времени, можно получить, что в точке минимума $t = t^*$ имеет место равенство

$$\frac{r(t^*)}{R(t^*)} = \rho_B$$

В декартовых переменных начальные части стандартных траекторий аналогичны траекториям в игре преследования для области Π_1 , см. рис. 5.6. Оптимальный фа-

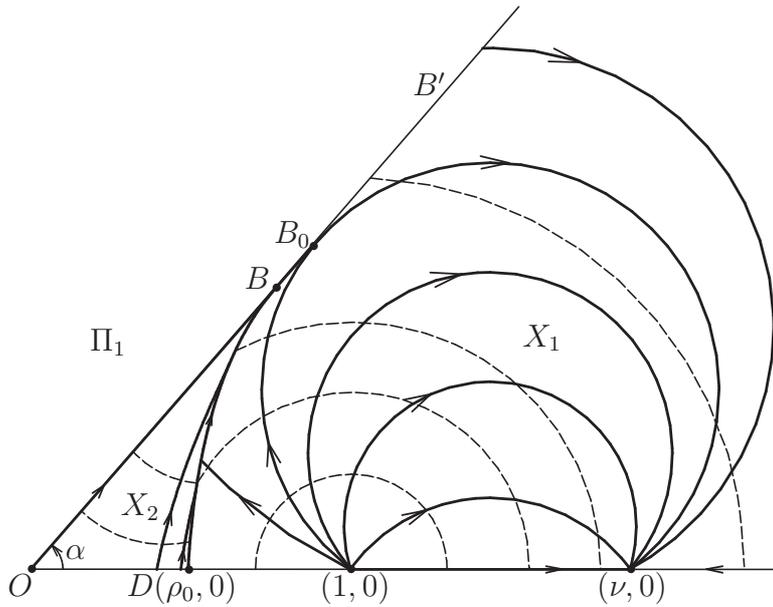


Рис. 5.10

зовый портрет для подобласти

$$(\alpha, \nu) \in \Pi_4, \quad \Pi_4 = \Pi \setminus (\Pi_1 + \Pi^* + \Pi_2 + \Pi_3)$$

$$\Pi = \{(\alpha, \nu) : 0 \leq \alpha \leq \pi, 0 < \nu < \infty\}$$

приведен на рис. 5.10. Пунктирными линиями показаны линии уровня цены игры. В первичной области эти линии представляют собой окружности

$$1 + \rho^2 - 2\rho \cos \varphi = \text{const}$$

с центрами в точке $\rho = 1, \varphi = 0$. Во вторичной области линии уровня построены численно.

Кривая BD на рис. 5.10 (огibaющая вторичных регулярных траекторий) представляет собой сингулярную универсальную поверхность. Здесь сингулярная траектория доходит до точки

$$D : \quad \rho = \rho_0, \quad \varphi = 0 \tag{5.54}$$

за конечное время. При движении вдоль кривой BD расстояние между игроками остается постоянным, см. подраздел 4.4.1. Если в какой-либо точке кривой BD игрок E переключается на первичное движение, то расстояние между игроками начинает увеличиваться. Несмотря на это, конечный результат для игрока E ухудшится.

Луч BB' есть образ поверхности Γ_1 , а его часть B_0B' соответствует рассеивающей части поверхности Γ_1 . Отрезок BB_0 соответствует универсальной поверхности. Регулярные первичные траектории приближаются к этому отрезку с обеих сторон

и остаются на нем вплоть до точки B_0 . Условие касания (5.41) означает, что первичные траектории касаются луча $\varphi = \alpha$ в точке $\rho = \sqrt{\nu}$, то есть множество B_0 в автомодельных переменных является точкой $(\sqrt{\nu}, \alpha)$. Первичные траектории стартуют из окрестности точки $\rho = 1, \varphi = 0$ или из рассеивающей части луча $\varphi = \alpha, \rho \geq \sqrt{\nu}$ и достигают либо поверхности Γ_2 , либо (в течение бесконечного времени) точки $\rho = \nu, \varphi = 0$.

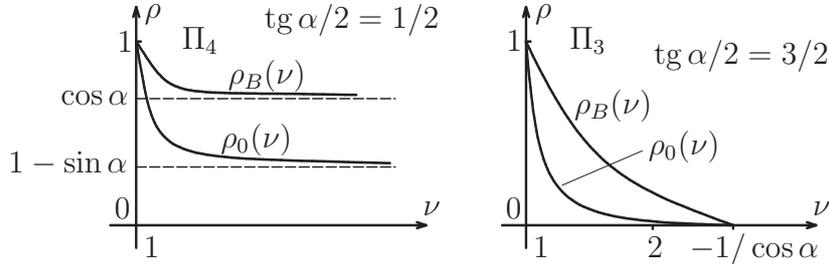


Рис. 5.11

Размеры вторичной области определяются значениями ρ_B и ρ_0 , введенными в (5.38) и (5.54). Первое из этих значений вычисляется аналитически, а для второго требуются численные расчеты. На рис. 5.11 приведены графики функций $\rho_B(\nu)$ и $\rho_0(\nu)$ при фиксированном α для областей Π_3, Π_4 . Для случая Π_4 эти кривые не ограничены. Из формулы (5.38) получаем

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \rho_B(\nu) = \rho_B^* = \cos \alpha$$

Для функции ρ_0 можно доказать, что

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \rho_0(\nu) = \rho_0^* = 1 - \sin \alpha \quad (5.55)$$

При достаточно больших значениях ν движению фазовой точки из B в D (рис. 5.10), соответствует малое смещение точки P . Предельное движение игроков по сингулярной траектории при $\nu \rightarrow \infty$ следующее. Игрок P неподвижен, а игрок E двигается так, чтобы расстояние между ним и игроком P оставалось постоянным. На плоской развертке конуса, представленной на рис. 5.12, траекторией игрока E в этом случае будет дуга окружности. Длина отрезка OE' равна ρ_B^* , а отрезка OP — единице, то есть позиция $(P, E') \in K^2$ принадлежит множеству B . Поскольку $\rho_B^* = \cos \alpha$, то длина отрезка PE' равна $\sin \alpha$. Этот отрезок перпендикулярен OE' , а дуга EE' касается отрезка OE' в точке E' . Точка E является начальным положением убегающего игрока. Длина отрезка OE равна предельному значению (5.55).

Заметим, что с рассматриваемым случаем при $\nu \rightarrow \infty$ может быть связана следующая задача оптимального управления для игрока E с неподвижным игроком P . Цель игрока E — достичь некоторой фиксированной точки на конусе, которая достаточно удалена от вершины по сравнению с расстоянием OP . Игрок E может двигаться по произвольной непрерывной траектории с произвольным законом управления, пытаясь максимизировать минимальное (по ходу движения) расстояние до

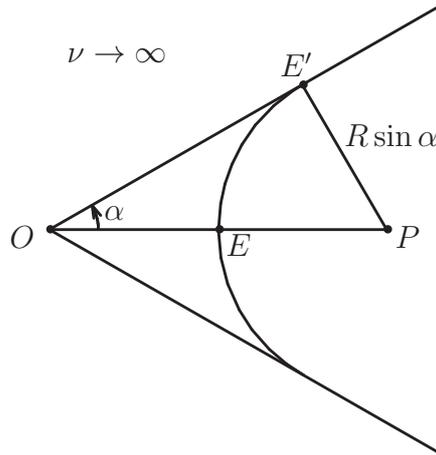


Рис. 5.12

точки P . Решение этой задачи может быть получено с помощью простых геометрических соображений. Если в начальный момент времени игрок E находится вне криволинейного треугольника OEE' (рис. 5.12), то оптимальный результат равен начальному расстоянию PE . Оптимальный результат для начального положения игрока E в треугольнике OEE' не зависит от положения E и равен $R \sin \alpha$, где R — удаление игрока P от вершины. В этом случае траектория точки E должна проходить через точку E' , не проникая внутрь касательной окружности.

5.3.4. Случай $\nu = 1$

Этот случай представляет особый интерес, так как является промежуточным между играми преследования и сближения и, соответственно, сочетает в себе свойства обеих игр. При $\nu = 1$ множества B и B_0 совпадают, $\rho_B = 1$, а поверхность Γ_1 является полностью рассеивающей. Первичные траектории представляют собой окружности, которые касаются луча $\varphi = 0$ в точке $\rho = 1$. Их центры расположены на прямой линии, перпендикулярной к лучу $\varphi = 0$. В первичной области, в отличие от игры сближения (для которой $\nu > 1$), игрок E не может увеличить начальное расстояние, но может удерживать его постоянным.

Общие свойства решения в случае $\nu = 1$ сформулированы в лемме 4.7. Существует первичная траектория, касающаяся луча $\varphi = \alpha$ в точке B . Сохраним для такой траектории обозначение Γ_2 . Расчеты показывают, что сингулярная кривая BD стремится к Γ_2 при $\nu \rightarrow 1 + 0$. Поскольку в уравнениях (5.42) при начальных данных, соответствующих точке B , знаменатель обращается в нуль ($\langle F_{pp}q, q \rangle = 0$), то алгоритм построения сингулярной поверхности в случае $\nu = 1$ не работает. Первичная траектория Γ_2 является границей первичной области. Вторичная область заполняется интегральной воронкой траекторий, все элементы которой касаются Γ_2 в точке B .

В рассматриваемой задаче градиент p функции цены игры разрывен и не мо-

жет быть непрерывно продолжен из вторичной области до множества B в четырехмерном x -пространстве. Однопараметрическое семейство предельных значений градиента функции $V(y_1, y_2, z_1, z_2)$ в точке $x_B = (1, 0, 1, 0)$, аналогичное (4.38), может быть представлено в виде

$$p(\theta) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}(a, \theta, a, \theta), \quad |\theta| \leq 1 \quad (a = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha) \quad (5.56)$$

Вектор (5.56) в центре и на концах θ -интервала принимает значения

$$p(0) = p_B = (q^+ + q^-)/2, \quad p(1) = q^+, \quad p(-1) = q^- \quad (5.57)$$

Семейство (5.56) удовлетворяет уравнению Айзекса

$$F(p(\theta)) = 0, \quad |\theta| \leq 1$$

Однопараметрическое семейство регулярных траекторий

$$x(\tau, \theta) = x_B - F_p(p(\theta))\tau, \quad \tau \geq 0$$

стартует в обратном времени из точки x_B . Из (5.56), (5.57) следует, что траектория $x(\tau, \pm 1)$ совпадает с первичной касательной траекторией (кривой Γ_2) в плоскости (ρ, φ) , а зависимость $x(\tau, 0)$ в переменных ρ, φ соответствует движению вдоль отрезка OB . Промежуточные траектории $x(\tau, \theta)$ при $0 < \theta < 1$ образуют интегральную воронку траекторий, заполняющих треугольник OBD .

Это можно также показать с использованием комплексной интерпретации автомодельных переменных, комплексных координат (5.15) и дробно-линейного преобразования (5.19). Из (5.19) следует, что в полярных координатах ρ, φ все регулярные траектории представляют собой окружности. В рассматриваемом случае $\nu = 1$ все вторичные регулярные траектории проходят через точку B и касаются луча OB именно в точке B . Такие траектории задаются семейством соответствующих дробно-линейных преобразований $w = z_E/z_P$. Вначале нужно построить комплексные траектории $z_P(t)$ и $z_E(t)$ игроков P и E . Рассмотрим плоскую развертку конуса (рис. 5.3), на которой положения игроков соответствуют множеству B при $R = r = 1$. Если равномерное движение игрока P происходит при управляющем угле $\psi_P = \psi$, то из соотношения (5.56) для игрока E получаем управляющий угол $\psi_E = \pi - \psi$. Это приводит к следующим комплексным траекториям игроков и соответствующему дробно-линейному преобразованию:

$$\begin{aligned} z_P(t) &= 1 + te^{i\psi}, & z_E(t) &= e^{i\alpha} + te^{i(\pi - \psi + \alpha)} = e^{i\alpha}(1 - te^{-i\psi}) \\ w &= \frac{z_E}{z_P} = e^{i\alpha} \frac{1 - te^{-i\psi}}{1 + te^{i\psi}} \end{aligned} \quad (5.58)$$

Здесь угол ψ играет роль параметра семейства траекторий. Радиусы окружностей выражаются через ψ и параметр θ :

$$R = \operatorname{ctg} \psi = \frac{a}{\theta}, \quad a = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2}, \quad |\theta| \leq 1 \quad (5.59)$$

Отсюда получаем соответствующие ограничения на ψ . При $\theta = \pm 1$ имеем граничные первичные траектории (окружность Γ_2), а значение $\theta = 0$ соответствует прямолинейной траектории OB . На рис. 5.13 представлен оптимальный фазовый портрет при $\nu = 1$ и некотором α .

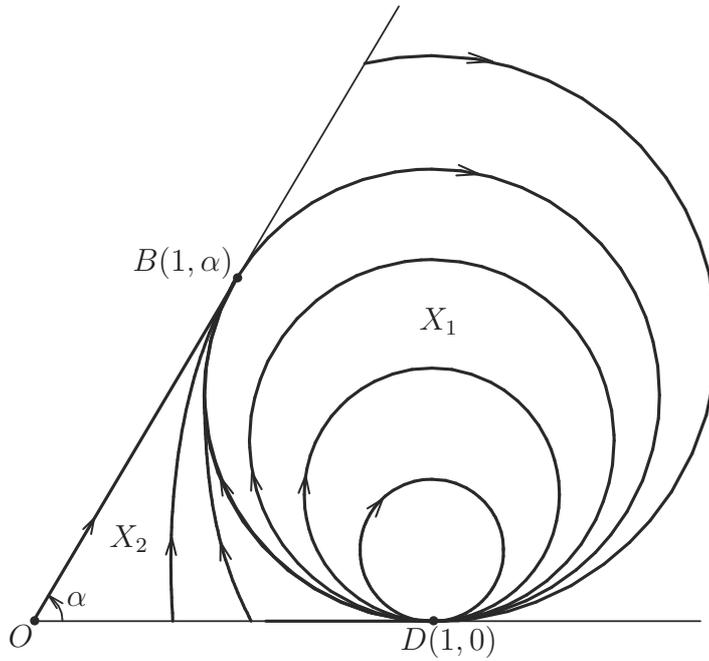


Рис. 5.13

5.3.5. Об алгоритме синтеза и компьютерном моделировании

На основе вышеизложенных соображений был разработан алгоритм построения оптимального позиционного управления для обоих игроков. Алгоритм использован в компьютерном моделировании.

Рассмотрим для игры преследования некоторое произвольное начальное положение игроков P и E , рис. 5.14. Будем обозначать такое положение (позицию) через $Q = (P, E)$, а его проекцию на плоскость автомодельных переменных через A .

Шаг 1. Численно проверяем, какой области принадлежит позиция $Q = (P, E)$: первичной X_1 или вторичной X_2 . Другими словами, находится ли соответствующая точка A за пределами или внутри криволинейного треугольника OBD на рис. 5.7, 5.8. Для этих целей следует численно построить стандартную траекторию.

Шаг 2. Если позиция Q находится в первичной области X_1 , то для поиска оптимальных управлений нужно построить геодезическую линию, соединяющую игроков. Если положение находится в области $X_3 \subset X_2$ (которая существует при $\nu < 1 - \sin \alpha$), то скорости обоих игроков, соответствующие оптимальным стратегиям, направлены к вершине, где и будет захват.

Шаг 3. С заданной точностью в автомодельных переменных численно находим оптимальную траекторию ACB , включающую в себя вторичную регулярную часть AC и сингулярную дугу CB . Несмотря на то что вычисления предпо-

линии уровня функции цены игры; 5) осуществить моделирование движения системы с произвольными начальными положениями игроков. Для сравнения оптимальных и неоптимальных результатов в программе можно задавать игрокам как оптимальные, так и неоптимальные стратегии (например, первичные стратегии во вторичной области). Для игры сближения программа позволяет получить оптимальное преследование до момента достижения минимального расстояния.

Упражнения

5.1. Для первичного решения получить два локальных минимума геодезической, имеющей длину (5.4), (5.5). Показать, что на геодезической линии угол падения равен углу отражения.

5.2. Используя (5.6), (5.8), вывести уравнения динамики (5.7) и (5.9).

5.3. Доказать формулу (5.23), полученную в результате вычисления экстремумов.

5.4. Решить уравнение (5.36) относительно ρ и найти все положительные решения, в том числе (5.37), (5.38).

5.5. Пусть $\zeta = \Delta\psi_P$ и $\eta = \Delta\psi_E$ — скачки между угловыми управлениями первичных и вторичных движений игроков P и E . Используя условие касания $\langle F_p(p), p - q \rangle = 0$, получить аналог соотношения (4.55):

$$\cos \zeta - \nu \cos \eta = 1 - \nu$$

5.6. Вычислить векторы F_p в (5.46).

5.7. Используя представление

$$V = \min[V_2, V_3], \quad V_3 = R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

проверить вязкостные условия для поверхности Γ_3 в случае $(\alpha, \nu) \in \Pi_2$.

5.8. Получить формулу для значения ρ_B , минимизирующего функцию (5.53) по времени.

5.9. Используя условие касания (5.41), показать, что множество B_0 в автономных переменных представляет собой точку $(\sqrt{\nu}, \alpha)$.

ГЛАВА 6

Гладкие решения УЧП с негладким гамильтонианом

6.1. Сингулярные траектории в оптимальном управлении. Анализ на основе программного и синтезирующего подходов

6.1.1. Введение

Сингулярные характеристики, введенные в главе 2 и использованные для решения конкретных задач в главах 2–5, имеют отношение к негладким обобщенным (вязкостным) решениям нелинейных УЧП первого порядка с гладкими или негладкими гамильтонианами. В этой главе исследуем другую природу сингулярных характеристик, связанную с гладкими (классическими) решениями уравнений в частных производных. В таких задачах особенности, описываемые сингулярными характеристиками, порождены негладкими гамильтонианами, то есть функциями, определяющими левую часть уравнений в частных производных. Рассматривается простейший тип негладких гамильтонианов, который имеет один из следующих видов:

$$F = \min[F_0, F_1], \quad F = \max[F_0, F_1]$$

Как сказано выше, рассматриваемые решения будут классическими и, по крайней мере, один раз непрерывно дифференцируемыми в окрестности исследуемой сингулярности. Изучаемые в главе сингулярности известны, в основном, как особые (сингулярные) траектории в оптимальном управлении. Они также характерны и для задач дифференциальных игр.

Классический подход к анализу сингулярных траекторий в оптимальном управлении базируется на принципе максимума Понтрягина и использует программные, зависящие от времени управления. Полученные на основе такого подхода необходимые условия оптимальности для этих траекторий представляют собой условие Келли (для сингулярности первого порядка) и условие Коппа – Мойера (для сингулярности второго или более высокого порядка).

Как правило, в практических задачах оптимального управления и дифференциальных игр требуется найти описание управляющих функций в виде обратной связи (обратной связи в форме синтеза), а также оптимальный фазовый портрет, включающий в себя, в общем случае, и сингулярные поверхности. В этой главе соответствующий подход к анализу и построению сингулярных многообразий, использующий такую обратную связь, основан на методе сингулярных характеристик.

Подход на основе программных управлений позволяет исследовать только одну конкретную траекторию и, вообще говоря, не дает ответа на вопрос, образует ли

множество всех соседних траекторий гиперповерхность, поверхность коразмерности два и так далее. Преимуществом такого подхода является относительная простота аналитического и вычислительного анализа. Подход, основанный на методе обратной связи, не являясь единственно возможным, также может оказаться полезным.

В настоящей главе для задач оптимального управления изучаются сингулярные траектории двух типов оптимальных фазовых портретов. Первый соответствует универсальной гиперповерхности, а второй — поверхности коразмерности два, имеющей отношение к так называемому скользящему режиму.

В случае универсальной поверхности основная идея получения новых необходимых условий состоит в изучении порядка гладкости функции Беллмана. Доказано, что функция Беллмана, по крайней мере, дважды дифференцируема, а первые разрывные производные появляются при нечетном порядке дифференцирования. Инвариантная форма необходимых условий, состоящих из нескольких равенств и неравенств, найдена с использованием скобок Пуассона (Якоби). Эти соотношения обеспечивают выполнение условий Келли или Коппа – Мойера, а также задают геометрические ограничения для сингулярных управляющих переменных. Таким образом, условия Келли и Коппа – Мойера, по всей видимости, являются лишь определенным свойством гладкого решения УЧП первого порядка с негладким гамильтонианом. Другими словами, они имеют некоторый обобщенный смысл и не обязательно связаны с конкретной задачей оптимального управления. Часть необходимых условий, имеющих форму равенств, вместе с уравнением Беллмана позволяют полностью описать многообразие W из главы 1 и, таким образом, задать уравнения для сингулярных характеристик.

Некоторые новые результаты в этой главе получены путем соответствующего выбора совокупности переменных, имеющих форму скобок Пуассона (Якоби) с участием одной или нескольких гладких ветвей гамильтониана (скобки различных уровней введены в главе 1). В случае первого порядка сингулярности (когда применимо условие Келли) для линейной задачи управления с помощью классического программного подхода найдены новое представление для сингулярного управления и обобщенные инвариантные условия оптимальности.

Для случая скользящего режима (когда применимо условие Коппа – Мойера) получен ряд дополнительных условий в виде равенств и неравенств, которые, в частности, формируют многообразие W и задают сингулярные характеристики. Такое же количество условий соответствует универсальной поверхности с особенностью второго порядка (условие Келли не применимо, а условие Коппа – Мойера применимо). Показано, что для двух различных типов синтеза (универсальной поверхности и скользящего режима) имеют место различные наборы неравенств. Вычисление необходимых условий в точке с помощью скобок Пуассона (Якоби) позволяет сделать качественный вывод о поведении регулярных и сингулярных траекторий в окрестности этой точки и выделить один из двух упомянутых выше типов синтеза.

Таким образом, условия Келли и Коппа – Мойера исследуются в трех аспектах: 1) инвариантное представление только с помощью скобок Пуассона (Якоби), которые не меняются при фазовых преобразованиях; 2) связь с типом синтеза вблизи заданной сингулярной дуги; 3) общие математические свойства этих условий, при этом не только задачам управления.

Другие подходы к описанию синтеза сингулярных движений см., например, в [11, 78, 82].

6.1.2. Сингулярная дуга в задаче оптимального управления, программный подход

Рассмотрим задачу оптимального управления с нефиксированным временем в одной из традиционных постановок (см. подраздел 3.2.2):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u), \quad u \in U \subset R^s, \quad t \in [0, T] \\ x(0) &= x^0, \quad x(T) \in M \subset R^n \\ J &= T + \Phi(x(T)) \rightarrow \min_{u(t)} \end{aligned} \quad (6.1)$$

Множество $f(x, U)$ предполагается выпуклым. Введем неминимизированный и минимизированный гамильтонианы H и F :

$$\begin{aligned} H(x, p, u) &= \langle p, f(x, u) \rangle + 1, \quad p \in R^n \\ F(x, p) &= \min_u H(x, p, u) = H(x, p, u^*) \\ u^* &\in U^*[x, p] \subset U \end{aligned} \quad (6.2)$$

Здесь U^* — множество минимизирующих управлений. Известно, что оптимальная тройка $x(t), p(t), u(t)$ удовлетворяет гамильтоновой системе уравнений и включению

$$\begin{aligned} \dot{x} &= H_p, \quad \dot{p} = -H_x \\ u(t) &\in U^*[x(t), p(t)], \quad t \in [0, T] \end{aligned} \quad (6.3)$$

с соблюдением некоторых граничных условий и условий трансверсальности. Формулировка принципа максимума Понтрягина предполагает использование другого сопряженного вектора $\psi = -p$.

Если на некотором промежутке $[t_1, t_2] \subset [0, T]$ множество $U^*[x(t), p(t)]$ содержит более одной точки, то дуга $x(t)$ и управление $u(t)$, или тройка $x(t), p(t), u(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, называются сингулярными. Поскольку $f(x, U)$ выпукло, то множество $f(x(t), U^*[x(t), p(t)])$ при любом $t \in [t_1, t_2]$ содержит, по крайней мере, отрезок в R^n .

6.1.3. Линейная задача

Пусть управление u скалярно, а функция f в (6.1) линейна по u :

$$\dot{x} = g(x) + ur(x), \quad u_0 \leq u \leq u_1, \quad U = [u_0, u_1] \quad (6.4)$$

Условимся, что $u_1 > u_0$. Для рассматриваемого случая справедливы следующие выражения для неминимизированного гамильтониана

$$\begin{aligned} H(x, p, u) &= G(x, p) + uR(x, p) \\ G(x, p) &= \langle p, g(x) \rangle + 1, \quad R(x, p) = \langle p, r(x) \rangle \end{aligned} \quad (6.5)$$

и минимизированного гамильтониана

$$F(x, p) = \min[F_0(x, p), F_1(x, p)] \quad (6.6)$$

Здесь функции F_0 , F_1 и G , R могут быть однозначно и линейно выражены друг через друга:

$$\begin{aligned} F_0 &= G + u_0 R, & F_1 &= G + u_1 R \\ G &= \frac{u_1 F_0 - u_0 F_1}{u_1 - u_0}, & R &= \frac{F_1 - F_0}{u_1 - u_0} \end{aligned} \quad (6.7)$$

Для особой дуги системы (6.4) на отрезке времени $[t_1, t_2]$ справедливы равенства

$$R(x(t), p(t)) = 0, \quad U^*[x(t), p(t)] = U$$

Таким образом, величина $R(x(t), p(t))$ как функция времени при $t \in [t_1, t_2]$ равна нулю вместе со всеми своими производными. Тогда в терминах скобок Пуассона для первых двух производных имеем

$$\begin{aligned} \dot{R} &= \{RH\} = \{RG\} + u\{RR\} = \{RG\} = 0 \\ \ddot{R} &= \{\{RG\}H\} = \{\{RG\}G\} + u\{\{RG\}R\} = 0 \end{aligned} \quad (6.8)$$

Из второго равенства в (6.8) можно получить выражение для сингулярного управления u_σ при условии, что $\{\{RG\}R\} \neq 0$:

$$u_\sigma = -\frac{\{\{RG\}G\}}{\{\{RG\}R\}} \quad (6.9)$$

Управление (6.9) может быть неоптимальным. Существует хорошо известное необходимое условие для u_σ , полученное на основе второй вариации $\delta^2 J$ функционала J в (6.1). Эта вариация соответствует так называемой вариации Келли δu_k управления u (см., например, [31]). Необходимое условие минимума $\delta^2 J[u; \delta u_k] \geq 0$ приводит к следующему условию Келли:

$$\frac{\partial}{\partial u} \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u} = \{\{RG\}R\} \leq 0 \quad (6.10)$$

Равенство здесь получено из (6.5) и (6.8), а само условие Келли является неравенством. Отметим, что это неравенство изменится на противоположное, если применить сопряженный вектор $\psi = -p$ из принципа максимума.

Другое очевидное необходимое условие для существования сингулярной дуги состоит в том, что сингулярное управление (6.9) должно удовлетворять ограничениям в (6.4). Обычно это условие предполагается выполненным и специально не анализируется. Такой анализ, однако, приводит к некоторым интересным результатам. Комбинируя ограничения в (6.4), выражение (6.9) и условие Келли (6.10), получаем набор необходимых условий оптимальности для u_σ в виде одного равенства и трех неравенств:

$$\{RG\} = 0, \quad \{\{RG\}R\} \leq 0, \quad u_0 \leq -\frac{\{\{RG\}G\}}{\{\{RG\}R\}} \leq u_1 \quad (6.11)$$

Здесь все соотношения выражаются с помощью скобок Пуассона первого и второго уровней, образованных функциями G, R . Переход к другому набору скобок, использующих функции F_0, F_1 , значительно упростит и сделает симметричными формулы (6.11).

6.1.4. Два набора переменных

Используя функции (6.7), введем два набора переменных, называемых греческими и латинскими переменными уровня k , которые являются скобками Пуассона (Якоби) уровня k (определенными в подразделе 1.3.3), образованными функциями G, R (греческие переменные) и F_0, F_1 (латинские переменные). Для наших целей достаточно рассмотреть скобки уровней $k = 2, 3, 4$. Чтобы упростить выкладки, в некоторых случаях далее скобки будут опущены. Например, $\{\{RG\}R\} = RGR$, или для латинских переменных будут указаны только соответствующие индексы, например, $\{\{\{F_0F_1\}F_0\}F_0\} = F_0F_1F_0F_0 = (0100)$. Итак, греческие и латинские переменные введем следующим образом:

$$k = 2 \quad (N = 2) :$$

$$\Lambda_0 = RGR, \quad \Lambda_1 = RGG$$

$$A_0 = F_1F_0F_1 = (101), \quad A_1 = F_0F_1F_0 = (010)$$

$$k = 3 \quad (N = 3) :$$

$$\begin{aligned} \alpha &= RGRR, & \beta &= RGRG = RGGR, & \gamma &= RGGG \\ a &= (1011), & b &= (1010) = (1001), & c &= (1000) \end{aligned} \quad (6.12)$$

$$k = 4 \quad (N = 6) :$$

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \{\alpha G\}, & \alpha_1 &= \{\alpha R\}, & \beta_0, \beta_1, \gamma_0, \gamma_1 \\ a_0 &= \{aF_1\} = (10111), & a_1 &= -\{aF_0\} = (01110), & b_0, b_1, c_0, c_1 \end{aligned}$$

Здесь N — число различных переменных, соответствующих уровню k . Переменные $\beta_i, \gamma_i, b_i, c_i$ при $k = 4$ определяются аналогично α_i, a_i .

Два выражения для β и b вытекают из тождества Якоби в случае скобок Пуассона:

$$\{\{RG\}H\} + \{\{GH\}R\} + \{\{HR\}G\} = 0 \quad (6.13)$$

Чтобы это показать, например, для греческих переменных, нужно в (6.13) вместо H подставить $\{RG\}$. Заметим, что для скобок Якоби имеет место более общее (по сравнению с (6.13)) соотношение, и выражение с левой стороны равно нулю только тогда, когда равны нулю скобки Якоби первого уровня, см. приложение.

Функции G, R и F_0, F_1 являются переменными нулевого уровня (этому уровню соответствует $N = 2$), а скобки $\{RG\}$ и $\{F_0F_1\}$ образуют переменные первого уровня (этому уровню соответствует $N = 1$). Греческие и латинские переменные каждого уровня могут быть линейно выражены друг через друга с помощью формул (6.7), представляющих собой такую связь для нулевого уровня. Для первого уровня имеем

$$(u_1 - u_0)\{RG\} = -\{H_0H_1\} \quad (6.14)$$

Для следующих двух переменных второго уровня можно получить, например,

$$RGR = \frac{A_0 + A_1}{(u_1 - u_0)^2}, \quad RGG = -\frac{u_0A_0 + u_1A_1}{(u_1 - u_0)^2} \quad (6.15)$$

6.1.5. Необходимые условия в инвариантной форме

Применяя (6.9) и (6.15), для особого управления находим симметричное представление

$$u_\sigma = \frac{u_0 A_0 + u_1 A_1}{A_0 + A_1} \quad (A_0 + A_1 \neq 0) \quad (6.16)$$

Далее из (6.16) можно получить, что ограничения $u_0 \leq u_\sigma \leq u_1$ при условии $A_0 + A_1 > 0$ дают $A_0 \geq 0$ и $A_1 \geq 0$. Те же ограничения, но удовлетворяющие условию $A_0 + A_1 < 0$, приводят к неравенствам $A_0 \leq 0$ и $A_1 \leq 0$. Отсюда следует, что величины A_0, A_1 имеют тот же знак, что и их сумма $A_0 + A_1 \neq 0$.

Таким образом, на плоскости переменных A_0, A_1 точка (A_0, A_1) может быть расположена только в первом или третьем квадранте, включая оси координат, но исключая начало координат. Учитывая условие Келли (6.10) и первое равенство в (6.15), первый квадрант можно не рассматривать, поскольку справедливо неравенство $A_0 + A_1 \leq 0$. Так как величины $A_0, A_1, A_0 + A_1$ имеют один и тот же знак, то получаем $A_0 \leq 0, A_1 \leq 0$. Объединяя эти неравенства с равенством (6.14), условия (6.11) можно записать в следующем эквивалентном виде:

$$\{F_0 F_1\} = 0, \quad \{\{F_1 F_0\} F_1\} \leq 0, \quad \{\{F_0 F_1\} F_0\} \leq 0 \quad (6.17)$$

Заметим, что здесь число неравенств по сравнению с (6.11) на одно меньше.

Сингулярные движения подчиняются уравнениям (6.3), записанным в терминах гамильтониана (6.5) и с управлением $u = u_\sigma$. Подстановка (6.16) в (6.3) приводит к уравнениям сингулярного движения в терминах регулярных гамильтонианов F_0, F_1 :

$$\dot{x} = \frac{A_0 F_{0p} + A_1 F_{1p}}{A_0 + A_1}, \quad \dot{p} = -\frac{A_0 F_{0x} + A_1 F_{1x}}{A_0 + A_1} \quad (6.18)$$

Отметим следующие свойства необходимых условий (6.17), (6.18). Во-первых, они не используют сингулярное управление u_σ и записаны в терминах регулярных управлений u_0 и u_1 , входящих в гамильтонианы (6.7). Во-вторых, два неравенства (6.17) гарантируют справедливость трех неравенств: условия Келли (6.10) и двух ограничений на управление в виде $u_0 \leq u_\sigma \leq u_1$. Таким образом, условия (6.17) могут быть эффективны для вычислительных алгоритмов.

Условия (6.11) опираются на линейную структуру правой части уравнений динамики, которая может измениться при преобразованиях координат. Соотношения (6.17) используют минимизированные регулярные гамильтонианы и выражаются только с помощью скобок Пуассона (Якоби). Эти скобки инвариантны относительно канонических (контактных) преобразований (например, точечных преобразований в x -пространстве). Таким образом, условия (6.17) имеют один и тот же вид во всех системах координат, то есть они инвариантны.

В случае выхода на ограничение (например, при $u_\sigma \rightarrow u_0$) из (6.16) получаем, что $A_1 \rightarrow -0$ в (6.17). Это означает, что при условии $A_0 + A_1 \neq 0$ концу особой дуги соответствует равенство $A_1 = 0$ или $A_0 = 0$. Отметим также следующее толкование особого управления u_σ , заданного с помощью (6.16): значение u_σ является центром масс системы из двух точечных масс $-A_0, -A_1$ с координатами u_0, u_1 .

Далее поставим перед собой цель доказать условия (6.17), (6.18) для общего нелинейного случая при определенных предположениях относительно оптимального фазового портрета. Это, в частности, приведет к новому доказательству условия Келли или условия Коппа – Мойера.

6.1.6. Сингулярная универсальная поверхность в общей задаче

Рассмотрим фазовый портрет в задаче оптимального управления, имеющей, например, вид (6.1). Для других возможных постановок, включая неавтономный случай, применимы аналогичные рассуждения.

Основные предположения для локального анализа, показанные на рис. 6.1, следующие.

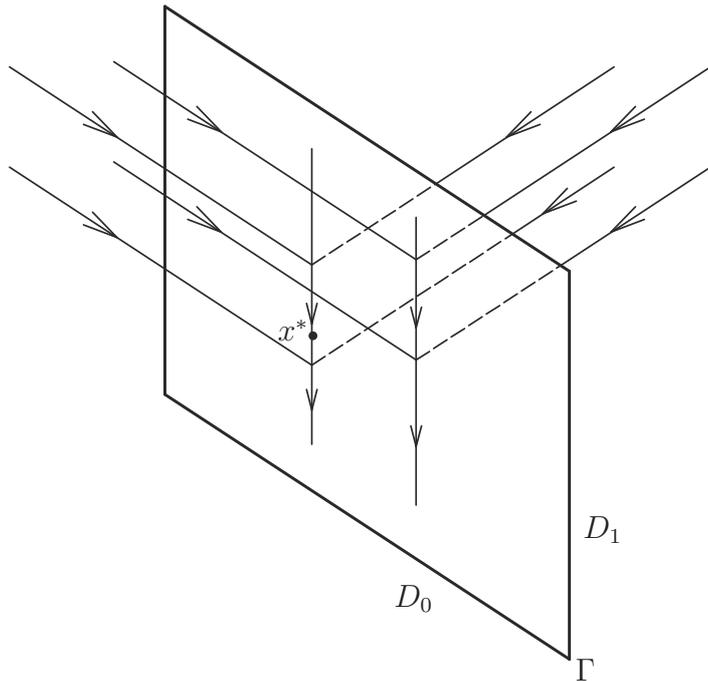


Рис. 6.1

В открытой окрестности D точки $x^* \in \mathbb{R}^n$ сингулярные траектории образуют $(n-1)$ -мерную поверхность Γ , $x^* \in \Gamma$, которую, без потери общности, можно считать плоскостью $x_1 = 0$, где x_1 — первая компонента фазового вектора $x = (x_1, \dots, x_n)$. Регулярные (несингулярные) траектории подходят к Γ под ненулевыми углами из областей

$$D_0 = \{x \in D : x_1 < 0\}, \quad D_1 = \{x \in D : x_1 > 0\} \quad (D = D_0 + \Gamma + D_1)$$

Функция Беллмана $S(x)$ в рассматриваемой задаче определена и непрерывна в D ,

а также дважды непрерывно дифференцируема в D_i , $S_i(x) \in C^2(D_i)$. Здесь S_i является сужением S на D_i : $S_i(x) = S(x)$, $x \in D_i$. При весьма общих предположениях функция $S(x)$, как известно, имеет в D непрерывный градиент $p = S_x(x)$.

В окрестности $N \subset \mathbb{R}^{2n}$ точки $(x^*, p^*) \in \mathbb{R}^{2n}$, $p^* = S_x(x^*)$, гамильтониан $F(x, p)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} F(x, p) &= \min_u \langle p, f(x, u) \rangle + 1, \quad u \in U \\ F &= \min[F_0, F_1], \quad F_i(x, p) \in C^2(N) \end{aligned} \quad (6.19)$$

и минимум в (6.19) при $x \in D_i$, $p = S_x(x)$ достигается на единственном векторе $u_i(x) = \varphi_i(x, p)$, $i=0, 1$. Представление (6.19) справедливо, например, когда функции $\varphi_i(x, p)$ имеют гладкое продолжение с лагранжева многообразия

$$\Sigma = \{(x, p(x)) : x \in D_i\} \subset \mathbb{R}^{2n}$$

на область N . Множество $f(x, U)$ выпукло. Гамильтониан F_i соответствует области D_i , где выполняется уравнение Беллмана

$$\begin{aligned} F_i(x, S_{ix}(x)) &= 0, \quad x \in D_i, \quad i = 0, 1 \\ F_i(x, p) &= \langle p, f(x, \varphi_i(x, p)) \rangle + 1 \end{aligned} \quad (6.20)$$

Условие некасания Γ регулярными траекториями позволяет продолжить функции $S_i(x)$ как решения уравнений (6.20) из области D_i на всю окрестность D , $S_i \in C^2(D)$. Таким образом, в D определены два гладких векторных поля

$$f^i(x) \equiv F_{ip}(x, S_{ix}(x)), \quad i = 0, 1$$

имеющих смысл оптимальных фазовых скоростей для $x \in D_i$. Здесь $f^i = (f_1^i, \dots, f_n^i)$, $p = (p_1, \dots, p_n)$. Из условия некасания следует

$$F_{0p_1} = f_1^0(x) > 0, \quad F_{1p_1} = f_1^1(x) < 0, \quad x \in \Gamma \quad (6.21)$$

Определим третье гладкое поле в D следующим образом:

$$\begin{aligned} f^*(x) &= (1 - \nu(x))f^0(x) + \nu(x)f^1(x), \quad x \in D \\ \nu &= f_1^0 / (f_1^0 - f_1^1), \quad 0 < \nu < 1 \end{aligned}$$

По построению поле $f^*(x)$ является касательным к Γ , а по предположению относительно оптимального фазового портрета это поле задает оптимальные фазовые скорости на сингулярной поверхности.

Для линейной по управлению системы (6.4) имеем

$$f^i(x) = g(x) + u_i r(x), \quad i = 0, 1, \quad f^*(x) = g(x) + u_\sigma r(x)$$

Хотя система (6.1) в общем случае нелинейна, эта нелинейность несущественна в области D , содержащей сингулярную поверхность Γ . Из предположения о выпуклости множества $f(x, U)$ и свойства гладкости функции Беллмана ($S(x) \in C^1(D)$) получаем, что отрезок

$$L = \{y \in \mathbb{R}^n : y = f(x, u_\alpha) = (1 - \alpha)f^0(x) + \alpha f^1(x), \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \quad x \in \Gamma\}$$

принадлежит границе множества $f(x, U)$, то есть $L \subset \partial f(x, U)$. Минимум в (6.19) для $p = S_x(x)$, $x \in \Gamma$ достигается на $u = u_\alpha$ при всех $\alpha \in [0, 1]$. Это означает, что линейная управляемая система

$$\dot{x} = (1 - \alpha)f^0(x) + \alpha f^1(x) = f^0(x) + \alpha(f^1(x) - f^0(x)), \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (6.22)$$

со скалярным управлением α имеет тот же набор оптимальных траекторий в D , что и система (6.1). Множество неоптимальных траекторий системы (6.1) в общем случае шире, чем у эквивалентной линейной системы (6.22).

Таким образом, сингулярная поверхность Γ рассматривается при специальных предположениях о поведении оптимальных траекторий в задаче (6.1). Требования к системе (6.1) формулируются в терминах функций F_i , $S_i \in C^2$.

Определения используемых здесь сингулярных траекторий и многообразий приведены в главах 2, 3. Напомним, что сингулярное множество (поверхность, траектория, многообразие) состоит из сингулярных точек. Все точки, не являющиеся регулярными, называются сингулярными. Регулярная точка — это такая внутренняя точка x^0 области определения $X \subset \mathbb{R}^n$ функции Беллмана $S(x)$, что в ее окрестности функция S дважды непрерывно дифференцируема и удовлетворяет основному уравнению $F(x, p) = 0$ с дважды непрерывно дифференцируемой $F(x, p)$ в окрестности N точки (x^0, p^0) , $p^0 = S_x(x^0)$.

Подчеркнем, что рассматриваемая в этой главе сингулярность обусловлена не отсутствием дифференцируемости функции S , а негладкостью гамильтониана $F = \min[F_0, F_1]$.

6.2. Уравнения в частных производных первого порядка с негладким гамильтонианом

6.2.1. Необходимые условия для сингулярной гиперплоскости

В этом разделе рассматривается УЧП первого порядка в более общем виде:

$$\begin{aligned} F(x, S(x), S_x(x)) &= 0, \quad x \in D \\ F(x, S, p) &= \min[F_0(x, S, p), F_1(x, S, p)], \quad F_i \in C^2 \end{aligned} \quad (6.23)$$

Здесь предполагается, что гамильтониан непрерывный, но негладкий, а его аргументы включают в себя еще одну переменную S — неизвестную функцию $S(x)$. Уравнение (6.23) рассматривается в общем математическом смысле и не обязательно связано с задачей оптимального управления. Из (6.19), (6.20) видно, что функция Беллмана из предыдущего раздела удовлетворяет уравнению (6.23), в котором $F = F(x, p)$.

В оптимальном управлении и дифференциальных играх простейшие негладкие гамильтонианы в общем случае описываются следующим образом:

$$F(x, p) = F_0(x, p), \quad Q(x, p) \geq 0; \quad F(x, p) = F_1(x, p), \quad Q(x, p) \leq 0$$

Здесь $Q(x, p) = 0$ определяет поверхность переключения в (x, p) -пространстве. Эти гамильтонианы локально могут быть представлены с помощью (6.23), либо определены равенством $F = \max[F_0, F_1]$. Даже если такое представление неединственно, любое гладкое продолжение F_i позволяет получить результаты этого раздела.

Предполагаем, что в окрестности D точки $x^* \in \mathbb{R}^n$ уравнение (6.23) имеет гладкое решение $S(x) \in C^1(D)$, $S_i(x) \in C^2(D_i)$, а функции S_i удовлетворяют уравнениям

$$F(x, S_i(x), S_{ix}(x)) = \min[F_0, F_1] = F_i = 0, \quad x \in D_i \quad (6.24)$$

Здесь D_i , S_i , p , Γ имеют тот же смысл, что и в рассмотренной выше задаче оптимального управления. Далее считаем, что выполнены неравенства (см. (6.21))

$$F_{0p_1}(x, S, p) > 0, \quad F_{1p_1}(x, S, p) < 0, \quad x \in \Gamma \quad (6.25)$$

Эти неравенства, в частности, гарантируют существование гладких продолжений функций $S_i(x) \in C^2(D)$ как решений уравнения $F_i = 0$ в D . Поверхность (гиперплоскость) Γ , которая разделяет подобласти D_i , соответствующие гамильтонианам F_i (см. (6.24)), согласно определению главы 2 называется сингулярной поверхностью решения $S(x)$. Напомним, что решение является классическим и сингулярность обусловлена негладкостью F . Как следует из (6.25), регулярные характеристики подходят к Γ с обеих сторон.

Теорема 6.1. Пусть функции F_i, S_i достаточно гладкие, а целочисленный параметр m , характеризующий степень гладкости функции $S(x) \in C^m(D)$, не меньше единицы, то есть справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \frac{\partial^k \Delta(x)}{\partial x_1^k} &= 0, \quad k = 0, 1, \dots, m, \quad m \geq 1 \\ \frac{\partial^{m+1} \Delta(x)}{\partial x_1^{m+1}} &\neq 0, \quad x \in \Gamma, \quad \Delta(x) = S_1(x) - S_0(x) \end{aligned}$$

Тогда m чётно и

$$\frac{\partial^{m+1} \Delta(x)}{\partial x_1^{m+1}} > 0$$

Кроме того, разность $\Delta(x)$ является неубывающей функцией относительно первой компоненты x_1 в окрестности нуля, а функцию S можно представить в виде

$$S(x) = \max[S_0(x), S_1(x)]$$

Следствие. Любое гладкое решение (6.23), удовлетворяющее (6.24) и (6.25), по крайней мере, дважды непрерывно дифференцируемо ($S(x) \in C^2(D)$), а первая разрывная производная функции S в Γ имеет нечётный порядок, не меньший, чем три.

Доказательство теоремы. Введем скалярные функции $h(x), h_i(x)$, $x \in D$:

$$\begin{aligned} h(x) &= h_i(x), \quad x \in D_i + \Gamma \\ h_i(x) &= F_{1-i}(x, S_i(x), S_{ix}(x)), \quad x \in D, \quad i = 0, 1 \end{aligned}$$

Функции $h_i(x)$ обладают следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^k h_i}{\partial x_1^k} &= 0, \quad k = 0, 1, \dots, m-1 \\ \frac{\partial^m h_{1-i}}{\partial x_1^m} &= (-1)^i F_{ip_1} \frac{\partial^{m+1} \Delta}{\partial x_1^{m+1}}, \quad x \in \Gamma, \quad i = 0, 1 \end{aligned} \quad (6.26)$$

Действительно, дифференцируя по x_1 функцию $h_1(x)$ и тождество $F_0 = 0$ из (6.24), можно получить соотношения

$$\begin{aligned}\frac{\partial h_1}{\partial x_1} &= F_{0x_1} + F_{0S} \frac{\partial S_1}{\partial x_1} + \left\langle F_{0p}, \frac{\partial p^1}{\partial x_1} \right\rangle, \quad S = S_1 \\ 0 &= F_{0x_1} + F_{0S} \frac{\partial S_0}{\partial x_1} + \left\langle F_{0p}, \frac{\partial p^0}{\partial x_1} \right\rangle, \quad S = S_0 \\ p^i &= \partial S_i / \partial x, \quad i = 0, 1\end{aligned}$$

Условия теоремы означают, что функции $S_0(x)$ и $S_1(x)$ имеют на Γ равные частные производные, которые включают в себя дифференцирование по x_1 не более чем m раз. Вычитая теперь второе равенство из первого, имеем

$$\frac{\partial h_1}{\partial x_1} = F_{0p_1} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} (S_1 - S_0) + R_1, \quad R_1 = 0 \quad \text{для } x \in \Gamma$$

Аналогично можно получить

$$\frac{\partial h_0}{\partial x_1} = F_{1p_1} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} (S_0 - S_1) + R_0, \quad R_0 = 0 \quad \text{для } x \in \Gamma$$

Таким образом, соотношения (6.26) доказаны для случая $m = 1$. При $m > 1$ нужно продолжить дифференцирование по x_1 выражения $\partial h_i / \partial x_1$. Вследствие указанных выше свойств функций $S_0(x)$ и $S_1(x)$ все члены со старшими производными, за исключением слагаемого, определяемого последним выражением в (6.26), будут обращаться на Γ в нуль.

Из (6.24) следует, что функция $h(x)$ при $x_1 = 0$ имеет локальный минимум, то есть

$$h(x) \geq 0, \quad x \in D; \quad h(x) = 0, \quad x \in \Gamma$$

Учитывая (6.25), (6.26), необходимое и достаточное условие для такого минимума будет следующим: порядок m производных (6.26) четный, и они имеют положительный знак. Другими словами, справедливы соотношения $\partial^{m+1} \Delta(x) / \partial x_1^{m+1} > 0$ и $m = 2d$. Теорема доказана.

Отметим, что необходимые условия теоремы 6.1 верны только в том случае, если поверхность Γ является гиперплоскостью $x_1 = 0$.

6.2.2. Вспомогательная теорема

Следующее утверждение позволяет сформулировать необходимые условия теоремы 6.1 в инвариантной форме.

Теорема 6.2. Пусть две функции $V_i(x) \in C^r(D)$, $r \geq 2$, имеют равные частные производные порядка $k = 0, 1, \dots, r-1$ на плоскости $\Gamma = \{x \in D : x_1 = 0\}$ и удовлетворяют уравнениям

$$F_i(x, V_i(x), V_{ix}(x)) = 0, \quad x \in D, \quad i = 0, 1$$

где $F_i(x, V, p) \in C^{r-1}$.

Тогда в точках плоскости Γ имеет место равенство

$$\{\dots\{\{F_0 F_1\}F_{j_3}\}\dots F_{j_r}\} + (F_{0p_1})^s (F_{1p_1})^{r-s} \frac{\partial^r (V_0 - V_1)}{\partial x_1^r} = 0 \quad (6.27)$$

Здесь индексы j_3, \dots, j_r принимают значения 0 или 1, число s равно количеству нулевых компонент целочисленного вектора $(0, 1, j_3, \dots, j_r)$, $F_{ip_1} \equiv \partial F_i / \partial p_1$, а через $\{\cdot\}$ обозначена скобка Якоби

$$\{FG\} = \langle F_x + pF_V, G_p \rangle - \langle G_x + pG_V, F_p \rangle$$

Доказательство. Вводя отдельные обозначения для нелинейных УЧП и их решений, рассмотрим скалярные дифференциальные уравнения в области D относительно функций $u(x)$ и $v(x)$:

$$F(x, u, u_x) = 0, \quad G(x, v, v_x) = 0, \quad x \in D$$

Дифференцируя эти тождества по x_i , $i = 1, \dots, n$, имеем

$$F_{x_i} + \sum_j F_{p_j} \frac{\partial p_j}{\partial x_i} + F_u p_i = 0, \quad p = u_x$$

$$G_{x_i} + \sum_j G_{q_j} \frac{\partial q_j}{\partial x_i} + G_v q_i = 0, \quad q = v_x$$

Для каждого i умножим первое равенство на G_{q_i} , второе на F_{p_i} , вычтем второе из первого и сложим все n разностей. В результате, используя симметрию

$$\partial p_j / \partial x_i = \partial p_i / \partial x_j$$

получаем

$$\sum_i [(F_{x_i} + F_u p_i) G_{q_i} - (G_{x_i} + q_i G_v) F_{p_i}] + \sum_{i,j} G_{q_i} F_{p_j} \left(\frac{\partial p_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_i}{\partial x_j} \right) = 0$$

или, что то же самое,

$$\Phi + G_{q_1} F_{p_1} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \right) + \sum_{i,j} G_{q_i} F_{p_j} \left(\frac{\partial p_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_i}{\partial x_j} \right) = 0, \quad i \cdot j > 1 \quad (6.28)$$

Величина $\Phi = \Phi(x, u, v, p, q)$ для $u = v$, $p = q$ равна скобке Якоби $\{FG\}$.

Заметим, что (6.27) следует из (6.28) для $r = 2$, $u = V_0$, $v = V_1$, $F = F_0$, $G = F_1$ при условии, что на Γ выполнены равенства $u = v$, $\partial u / \partial x_1 = \partial v / \partial x_1$. Действительно, дифференцируя указанные равенства по касательным направлениям (то есть по x_i , $i > 1$), получаем, что u и v имеют равными все частные производные, включающие в себя дифференцирование по x_1 не более одного раза. Аналогичным образом из равенств $\partial^k u / \partial x_1^k = \partial^k v / \partial x_1^k$, $k = 0, \dots, r$, на Γ , следует, что u и v имеют равные частные производные, включающие в себя дифференцирование по x_1 не более чем r раз.

Повторим теперь процедуру вывода (6.28), используя второе уравнение (6.28) в качестве первого тождества и одно из равенств $F = 0$, $G = 0$ в качестве второго тождества. Возьмем, например, $G = 0$. Представим второе равенство в (6.28) в виде $\Phi(x, p, q, u, v) + R(x) = 0$. Имеем

$$\begin{aligned} G_{q_i} | \quad & \Phi_{x_i} + \sum_j \Phi_{p_j} \frac{\partial p_i}{\partial x_j} + \Phi_u p_i + \sum_j \Phi_{q_j} \frac{\partial q_i}{\partial x_j} + \Phi_v q_i + \frac{\partial R}{\partial x_i} = 0 \\ \Phi_{p_i} + \Phi_{q_i} | \quad & G_{x_i} + \sum_j G_{q_j} \frac{\partial q_i}{\partial x_j} + G_v q_i = 0 \end{aligned}$$

Здесь слева записаны соответствующие множители, которые используем далее. Получаем

$$\begin{aligned} \Psi(x, u, v, p, q) + \sum_{i,j} G_{q_i} \Phi_{p_j} \left(\frac{\partial p_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_i}{\partial x_j} \right) + \sum_i G_{q_i} \frac{\partial R}{\partial x_i} = 0 \\ \Psi = \sum_i \left[(\Phi_{x_i} + \Phi_u p_i + \Phi_v q_i) G_{q_i} - (G_{x_i} + q_i G_v) (\Phi_{p_i} + \Phi_{q_i}) \right] \end{aligned} \quad (6.29)$$

Для $u = v$, $p = q$ имеет место равенство

$$\Psi = \{ \{ FG \} G \}$$

Его можно проверить с помощью следующих вычислений. Как отмечалось выше, функция Φ , определенная в (6.28), при $u = v$ и $p = q$ становится равной скобке Якоби, которую, как функцию от (x, u, p) , будем обозначать через $Q(x, u, p)$:

$$Q(x, u, p) \equiv \Phi(x, u, u, p, p) = \{ FG \}$$

Для производных от Q получаем равенства

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial p} = \frac{\partial \Phi}{\partial p} + \frac{\partial \Phi}{\partial q} \Big|_{q=p}, \quad \frac{\partial Q}{\partial u} = \frac{\partial \Phi}{\partial u} + \frac{\partial \Phi}{\partial v} \Big|_{v=u}$$

которые и используем для проверки приведенной выше формулы.

Из (6.29) получаем (6.27) для $r = 3$, $s = 1$ при условии, что на Γ выполнены равенства $\partial^k(u - v)/\partial x_1^k = 0$, $k = 0, 1, 2$. Повторяя описанную процедуру $(r - 1)$ раз, и взяв результат предыдущего шага как первое тождество, а одно из равенств $F = 0$, $G = 0$ в качестве второго тождества, приходим к соотношению (6.27). Теорема доказана.

6.2.3. Необходимые условия в инвариантной форме

Теперь основной результат этой главы следует из теорем 6.1 и 6.2.

Теорема 6.3. Пусть $F_i \in C^{2d}$ для некоторого целого $d \geq 1$, а уравнение (6.23) имеет гладкое решение $S(x) \in C^{2d}$, удовлетворяющее (6.24), (6.25).

Тогда в точках сингулярной поверхности Γ справедливы следующие необходимые условия:

$$\{F_0 F_1\} = 0, \quad \{\{F_0 F_1\} F_0\} \leq 0, \quad \{\{F_1 F_0\} F_1\} \leq 0 \quad \text{для } d = 1 \quad (6.30)$$

$$\begin{aligned} \{F_0 F_1\} = 0, \quad \{ \dots \{ \{F_0 F_1\} F_{j_3} \} \dots F_{j_k} \} = 0, \quad k = 3, \dots, 2d \\ (-1)^s \{ \dots \{ \{F_0 F_1\} F_{j_3} \} \dots F_{j_r} \} \leq 0, \quad r = 2d + 1 \quad \text{для } d \geq 2 \end{aligned} \quad (6.31)$$

Отметим, что в (6.31) количество соотношений является равным числу векторов (i_1, i_2, \dots, i_k) , с $i_1 = 0$, $i_2 = 1$ и другими компонентами равными 0 или 1, $k = 3, \dots, r$; при этом s — общее число равных нулю компонент.

При $d = 1$ соотношения (6.30) совпадают с (6.17). При $d = 2$ все переменные уровней два и три из (6.12) равны нулю, а переменные уровня четыре удовлетворяют следующим шести неравенствам и четырем равенствам, которые могут быть проверены с помощью доказательств теорем 6.1, 6.2:

$$\begin{aligned} a_0 &= (10111) < 0, & b_0 &= (10101) > 0, & c_0 &= (10001) < 0 \\ a_1 &= (01110) < 0, & b_1 &= (01100) > 0, & c_1 &= (01000) < 0 \\ \frac{a_0}{a_1} &= \frac{b_0}{b_1} = \frac{c_0}{c_1}, & a_1 + b_0 &= 0, & b_1 + c_0 &= 0 \end{aligned} \quad (6.32)$$

Необходимые условия (6.30), (6.31) также применимы и для произвольной гладкой сингулярной поверхности Γ , поскольку она локально может быть преобразована в плоскость $x_1 = 0$. Соответствующее точечное преобразование в (x, u, p) -пространстве называется контактным (каноническим) и обладает свойством сохранения скобки Якоби (Пуассона), см. приложение.

Если в уравнении (6.23) вместо минимума имеет место максимум, то есть

$$F = \max[F_0, F_1] = 0$$

то можно показать, что в этом случае, в отличие от утверждения теоремы 6.1, решение имеет вид $S = \min[S_0, S_1]$ (экстремум противоположный экстремуму в гамильтониане), а неравенства в формулировке теорем 6.1, 6.3 изменяют знаки.

Приведенные выше рассуждения относятся к задаче Коши с заданными терминальными значениями. Для задачи Коши с заданными начальными значениями нужно подразумевать движение по регулярным траекториям в противоположном направлении, то есть в неравенствах (6.25) надо изменить знаки на противоположные. Аналогичные рассуждения показывают, что в выражениях для гамильтониана и для решения должен быть использован один и тот же тип экстремума. В случае

$$F = \min[F_0, F_1] = 0, \quad S = \min[S_0, S_1]$$

неравенства в теоремах 6.1, 6.3 остаются теми же, а в случае

$$F = \max[F_0, F_1] = 0, \quad S = \max[S_0, S_1]$$

они меняют знак на противоположный.

6.2.4. Сингулярные характеристики для универсальной поверхности

В терминальной задаче Коши обычно применяется попятная (в обратном времени) процедура построения решения. Для нахождения оптимального фазового портрета задачи (6.1) в области D сингулярная поверхность Γ должна быть построена заранее, поскольку, согласно (6.25), регулярные характеристики расходятся, образуя незаполненную зону. Как только Γ построена, решение в областях D_i может быть получено с использованием двух семейств регулярных характеристик

уравнений в частных производных первого порядка (6.24) с граничными условиями на Γ :

$$\dot{x} = F_{ip}, \quad \dot{S} = \langle p, F_{ip} \rangle, \quad \dot{p} = -F_{ix} - pF_{iS}, \quad x \in D_i \quad (6.33)$$

Чтобы построить Γ , воспользуемся сингулярными характеристиками. Так как Γ имеет коразмерность равную единице, то требуется найти три необходимых условий типа равенства. Как видно из (6.24) и (6.30), следующие три равенства, которые задают многообразие W_3 из главы 1, выполнены на Γ :

$$W_3 : \quad F_0(x, S, p) = 0, \quad F_1(x, S, p) = 0, \quad F_{-1}(x, S, p) \equiv \{F_0 F_1\} = 0 \quad (6.34)$$

Используя сингулярный гамильтониан H^σ (см. подразделы 1.2.3, 1.2.5), имеем

$$\begin{aligned} \mu H^\sigma &= \{F_{-1} F_0\} F_1 + \{F_0 F_1\} F_{-1} + \{F_1 F_{-1}\} F_0 \\ \mu &= \{\{F_0 F_1\} F_0\} + \{\{F_1 F_0\} F_1\} \end{aligned}$$

и уравнения сингулярных характеристик (1.56) можно записать в виде сужения уравнений (6.33) при $F_i = H^\sigma$ на многообразии $W_3 \subset \mathbb{R}^{2n+1}$, заданное в (6.34):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= H_p^\sigma = \frac{1}{\mu} (A_0 F_{0p} + A_1 F_{1p}), \quad \dot{S} = \langle p, H_p^\sigma \rangle \\ \dot{p} &= -H_x^\sigma - p H_S^\sigma = -\frac{1}{\mu} (A_0 (F_{0x} + p F_{0S}) + A_1 (F_{1x} + p F_{1S})) \end{aligned} \quad (6.35)$$

Здесь предполагается, что $A_1 = \{\{F_0 F_1\} F_0\} \neq 0$ (откуда следует также $A_0 \neq 0$). Это означает справедливость теоремы 6.3 при $d = 1$ (последнее соответствует общему случаю). Если $F_i = F_i(x, p)$, то уравнение для S здесь и в (6.33) отделяется и уравнение (6.35) принимает вид (6.18).

В особом случае (6.31), когда $d > 1$, в соотношениях (6.34) и в сингулярном гамильтониане H^σ следует использовать в качестве F_{-1} одну из скобок Якоби в (6.31) с $k = 2d$. Другие такие скобки также должны обращаться в нуль на построенной поверхности Γ в силу необходимых условий для более высокого порядка сингулярности.

Уравнения (6.35) теперь можно использовать для попятного интегрирования при начальных данных $x = x^0$, $p = p(x^0)$, $x^0 \in B \subset \Gamma$, которые должны быть заранее заданы на некотором подмногообразии B , $\dim B = n - 2$. Множество x -частей решений для всех $x^0 \in B$ образует поверхность Γ .

6.2.5. Приложения к задаче управления

Результаты этого раздела, касающиеся УЧП первого порядка с негладким гамильтонианом (6.23) и отраженные в основном в (6.30), (6.31) и (6.35), могут быть применены с учетом (6.19), (6.20) к задачам оптимального управления предыдущего раздела. Приведем здесь несколько возможных приложений этих результатов.

В уравнения сингулярных характеристик вида (6.35), выписанных для общей задачи (6.1), сингулярное управление не входит. Они записаны с помощью двух гамильтонианов, которые в случае линейного управления задачи (6.4) содержат только регулярные управления u_0, u_1 . При необходимости, сингулярное управление u_σ может быть найдено из равенства $f(x, u_\sigma) = H_p^\sigma$.

Теоремы 6.1–6.3 устанавливают связь между порядком гладкости решения $S(x)$ на сингулярной поверхности Γ и некоторыми скобками Якоби (Пуассона). Эти результаты могут быть интерпретированы как необходимые условия оптимальности для сингулярной поверхности Γ в подразделе 6.1.6. Аналогичные результаты справедливы и для других типов функции платы и зависимой от времени правой части f в (6.1), если в качестве времени рассмотреть одну из компонент вектора x .

Для сопоставления неравенств (6.30), (6.31) с условием Келли нельзя использовать систему (6.1), которая включает в себя в общем случае векторные управления. Для этого может быть использована эквивалентная линейная система (6.22), которая, как было показано выше, представляет собой некоторый вид сужения управляемой системы (6.1) с тем же набором оптимальных траекторий.

Гамильтониан в принципе минимума для системы (6.22) имеет вид

$$H(x, p, \alpha) = (1 - \alpha)F_0(x, p) + \alpha F_1(x, p)$$

Условие Келли можно записать в форме

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial \alpha} = \{\{F_0 F_1\} F_0\} + \{\{F_1 F_0\} F_1\} = A_1 + A_0 \leq 0$$

что является одним из следствий соотношений (6.30). Еще два дополнительных следствия из (6.30), аналогично построениям подраздела 6.1.5, задаются ограничениями на скалярное управление α . Условия (6.30) для общей задачи (6.1) совпадают с соотношениями (6.17) для линейной (по управлению) задачи.

Методика, позволяющая вывести неравенства (6.30) и (6.31), показывает, что, как и условия (6.17) для линейных задач, эти неравенства гарантируют выполнение условий типа Келли для задачи (6.1) так же, как и выполнение геометрического ограничения $u_\sigma \in U$.

В отличие от условия Келли, которое использует скалярное управление, условия (6.30), (6.31) могут быть применены и в случае векторных управлений. Будучи записанными с помощью инвариантных величин — скобок Якоби (Пуассона), данные условия не зависят от выбора системы координат.

Условия (6.30), (6.31) на самом деле являются необходимыми условиями для сопряжения регулярных и сингулярных траекторий. Действительно, эти условия верны для каждой точки поверхности Γ , и каждая точка Γ является точкой двух сопряжений: регулярные пути с D_0 - и D_1 -сторон сопрягаются с сингулярной траекторией, начинающейся в этой точке.

Другое условие сопряжения регулярных и сингулярных траекторий, имеющее место в точках выхода управляющего воздействия на ограничение, обсуждалось в подразделе 6.1.5. Это свойство удобно использовать для линейных задач. На рис. 6.2 изображен оптимальный фазовый портрет в окрестности многообразия B , где выполняются условия

$$B : \{F_0 F_1\} = 0, \{\{F_1 F_0\} F_1\} = 0, \{\{F_0 F_1\} F_0\} < 0 \quad (u_\sigma = u_1) \quad (6.36)$$

Как видно из (6.16), если $A_0 = 0$, то сингулярное управление u_σ равно правому экстремальному значению u_1 . Полная сингулярная поверхность, изображенная на рис. 6.2, имеет структуру $\Gamma_s + B + \Gamma$ и состоит из поверхности переключения Γ_s ,

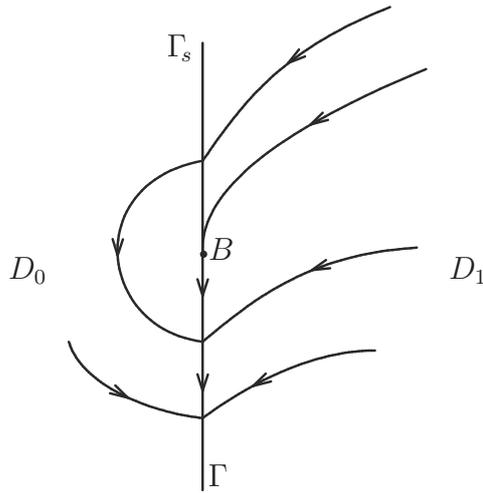


Рис. 6.2

универсальной поверхности Γ , а также их общей границы B , $\dim B = n - 2$. Такая структура в общем случае характерна в окрестности граничного значения управления. Соотношения (6.36) по сути являются необходимыми условиями сопряжения регулярной траектории, приходящей на B с D_1 -стороны (см. рис. 6.2), и сингулярной траектории, стартующей из соответствующей точки на B с тем же значением управляющего параметра $u_\sigma = u_1$ (то есть на B скачок управления отсутствует). Необходимые условия сопряжения подробно исследованы с помощью программного подхода, см. [31].

В пространстве векторов $(x, S, p) \in \mathbb{R}^{2n+1}$ неравенства в (6.30), (6.31) означают, что регулярные характеристики, приближающиеся к гиперповерхности Σ ($\{F_0 F_1\} = 0$) с обеих сторон, должны пройти через поверхность Σ без касания в случае (6.30) и с касанием порядка $2(d-1)$ в случае (6.31). Для задачи оптимального управления, когда рассматривается пространство векторов $(x, p) \in \mathbb{R}^{2n}$, порядок касания соответствует так называемому порядку сингулярности особой траектории. Сингулярные характеристики лежат на Σ .

Условие касания регулярными характеристиками гиперповерхности Σ при обращении в ноль одной из величин A_i соответствует граничному управлению и точке сопряжения сингулярной и регулярной дуг.

Традиционный подход к анализу сингулярной траектории основан на исследовании только одной этой траектории. Рассматриваемый в данной главе полный набор оптимальных траекторий (фазовый портрет) опирается на важное предположение о том, что сингулярные траектории образуют гиперповерхность. Вместо вариаций, для анализа используется функция Беллмана. Инвариантные и симметричные необходимые условия оптимальности для сингулярных поверхностей найдены с помощью скобок Пуассона, не зависящих от системы координат и числа

управляющих переменных. Эти условия состоят из условия Келли, а также ограничений на управляющие переменные.

Условие Келли может быть использовано не только для задачи оптимального управления. По сути, оно является лишь одним из свойств гладкого (классического) решения УЧП первого порядка с негладким гамильтонианом. Это решение выявляет эффект возрастания порядка гладкости вплоть до второго. Более высокий четный порядок гладкости (случай $d > 1$ в теореме 6.3) в ситуации общего положения не имеет места. Получена новая простая формула для сингулярного управления в линейной по скалярному управлению задаче. Условия оптимальности и уравнения сингулярных движений не используют самого сингулярного управления. Они записаны с помощью регулярных гамильтонианов, соответствующих обеим сторонам гиперповерхности. Если сингулярные траектории образуют не гиперповерхность, а, например, многообразие размерности $n - 2$, как это имеет место для управления в скользящем режиме, то в этом случае должны быть проведены дополнительные исследования. Условия оптимальности настоящей главы могут быть также полезны и для численных алгоритмов.

6.2.6. Пример

Рассмотрим двумерный пример, демонстрирующий существование таких задач управления, для которых утверждения теорем 6.1 и 6.3 выполняются при любом четном $m = 2d = 2, 4, \dots$. Постановка задачи в координатах $x = x_1$, $y = x_2$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -uy, & \dot{y} &= \frac{ux^{m-1}}{(m-1)!} - 1 \\ |u| &\leq 1, & y &\geq C, & y(T) &= C \\ J &= T + \Phi(x(T)) \rightarrow \min_u, & \Phi(x) &= \frac{kx^m}{m!} \end{aligned} \quad (6.37)$$

Здесь C, k — положительные постоянные, удовлетворяющие неравенству $kC > 1$.

Используя принцип минимума (или максимума), можно установить, что универсальной поверхностью в рассматриваемой задаче является луч $y \geq C$, $x = 0$. Точнее, функции

$$\begin{aligned} x(\tau) &\equiv 0, & y(\tau) &= C + \tau, & u(\tau) &\equiv 0 \\ p_1(\tau) &\equiv 0, & p_2(\tau) &\equiv 1, & \tau &= T - t \geq 0 \end{aligned} \quad (6.38)$$

удовлетворяют необходимым условиям (6.3). На рис. 6.3 приведен оптимальный фазовый портрет.

Для того чтобы показать, что порядок сингулярности равен m , нужно вычислить скобки Якоби (6.30), (6.31), представляющие собой латинские переменные уровней $1, \dots, m$. Например, расчеты переменных уровня 4 для $m = 4$ приводят к результату

$$a_0 = a_1 = -b_0 = -b_1 = c_0 = c_1 = -2y^2 > 0 \quad (6.39)$$

Таким образом, условия (6.32) выполнены.

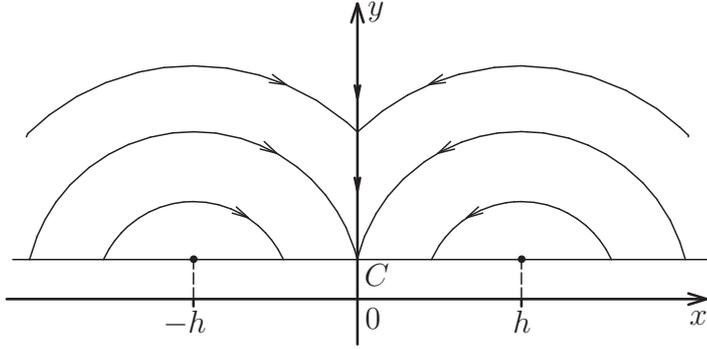


Рис. 6.3

С помощью прямого вычисления можно исследовать порядок гладкости функции Беллмана $V(x, y)$ (являющийся также порядком сингулярности). Действительно, уравнение Беллмана, его ветви и оптимальное управление для задачи (6.37) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 F(x, y, p_1, p_2) &= \min_u \left(-uyV_x + \left(\frac{ux^{m-1}}{(m-1)!} - 1 \right) V_y \right) + 1 = \\
 &= - \left| yV_x - \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} V_y \right| - V_y + 1 = \min[F^+, F^-] = 0 \\
 F^+ &= -yV_x + \left(\frac{x^{m-1}}{(m-1)!} - 1 \right) V_y + 1, \quad F^- = yV_x - \left(\frac{x^{m-1}}{(m-1)!} + 1 \right) V_y + 1 \\
 u^* &= \text{sign} \left(yV_x - \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} V_y \right)
 \end{aligned} \tag{6.40}$$

Дифференцируя по x граничное условие

$$V(x, C) = \frac{kx^m}{m!}$$

можно найти первую компоненту сопряженного вектора на терминальной поверхности: $V_x = kx^{m-1}/(m-1)!$. Подставляя это выражение в уравнение Беллмана и полагая $y = C$, получим уравнение относительно второй компоненты V_y сопряженного вектора:

$$- \left| Ck \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} - \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} V_y \right| - V_y + 1 = 0$$

Это уравнение имеет единственное решение

$$V_y = \left(1 - kC \frac{|x|^{m-1}}{(m-1)!} \right) / \left(1 - \frac{|x|^{m-1}}{(m-1)!} \right)$$

только тогда, когда выполнено неравенство

$$\frac{|x|^{m-1}}{(m-1)!} < 1$$

определяющее так называемую допустимую область $(-h, h)$ на терминальной поверхности $y = C$. Здесь $x = h$ — положительный корень уравнения $x^{m-1}/(m-1)! = 1$. Оптимальные траектории заканчиваются только на этом промежутке (см. рис. 6.3).

Подставляя $y = C$ и выражения для V_x, V_y в формулу оптимального управления в (6.40), получаем, что в окрестности терминальной поверхности оптимальное управление имеет вид

$$u^* = \text{sign } x$$

Эта формула применима и при глобальном рассмотрении. Скачок управления происходит на сингулярной универсальной поверхности $x = 0, y \geq C$. Таким образом, гамильтонианы F^+, F^- соответствуют управлениям $u = 1$ и $u = -1$.

С целью упрощения, дальнейшие расчеты производных функции Беллмана $V(x, y)$ будут осуществляться для случая $m = 4$. Введем две ветви функции Беллмана $V^\pm(x, y)$, такие что $V(x, y) = V^+(x, y)$ при $x \geq 0$ и $V(x, y) = V^-(x, y)$ при $x \leq 0$. Эти ветви удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} F^+ &= -yV_x^+ + \left(\frac{x^3}{6} - 1\right)V_y^+ + 1 = 0 \\ F^- &= yV_x^- - \left(\frac{x^3}{6} + 1\right)V_y^- + 1 = 0 \end{aligned} \quad (6.41)$$

Поскольку задача обладает свойством симметрии относительно оси y , то выполнено равенство $V(x, y) = V(-x, y)$. Дифференцируя его по x , а затем подставляя $x = 0$, получаем $V_x(0, y) = V_x^+(0, y) = V_x^-(0, y) = 0$. Подстановка этих равенств в (6.41) приводит к соотношению $V_y^+ = V_y^- = 1$ при $x = 0$. Дифференцируя тождества $V_x^+(0, y) = V_x^-(0, y) = 0$ по y , имеем $V_{xy}^+ = V_{xy}^- = 0$. Продифференцируем далее уравнения (6.41) по x :

$$\begin{aligned} F_x^+ &= -yV_{xx}^+ + \left(\frac{x^3}{6} - 1\right)V_{yx}^+ + \frac{x^2}{2}V_y^+ = 0 \\ F_x^- &= yV_{xx}^- - \left(\frac{x^3}{6} + 1\right)V_{yx}^- - \frac{x^2}{2}V_y^- = 0 \end{aligned}$$

Так как все производные, содержащие y , обращаются в нуль, то справедливо равенство $V_{xx}^+ = V_{xx}^- = 0$. Продолжая процедуру дифференцирования, получаем, что все компоненты производных V^+, V^- порядка три и четыре равны друг другу и обращаются в нуль, за исключением компоненты

$$D_x^4 V^+ = D_x^4 V^- = \frac{1}{y} \quad \left(D_x = \frac{\partial}{\partial x}\right)$$

Для пятого порядка имеем

$$D_x^5 V^+ = \frac{1}{y^3}, \quad D_x^5 V^- = -\frac{1}{y^3}$$

Таким образом, первая разрывная производная функции Беллмана $V(x, y)$ на сингулярной поверхности $x = 0$ имеет пятый порядок, что согласуется со следствием из теоремы 6.1.

6.3. Второй порядок сингулярности

6.3.1. Два оптимальных фазовых портрета. Условие Коппа – Мойера

Исследования предыдущих разделов показывают, что необходимые условия для сингулярной траектории могут быть значительно более эффективными, если эта траектория рассматривается вместе с некоторой определенной картиной синтеза и определенным фазовым портретом. В этом разделе исследуются два характерных локальных оптимальных фазовых портрета в окрестности D точки $x^* \in \mathbb{R}^n \setminus D_T$ в предположении, что гладкая гиперповерхность Γ делит область D на две полукрестности, то есть $D = D_0 + \Gamma + D_1$.

Синтез S1. Пусть Γ состоит из сингулярных траекторий, а регулярные траектории подходят к Γ из полукрестностей D_0, D_1 под ненулевым углом и стыкуются с сингулярными траекториями. Такая картина соответствует универсальной поверхности. Фазовый портрет изображен на рис. 6.1.

Синтез S2. Пусть гладкая поверхность Γ_2 размерности $n - 2$ делит Γ на две полуповерхности, то есть $\Gamma = \Gamma^+ + \Gamma_2 + \Gamma^-$. Положим также, что Γ_2 состоит из сингулярных траекторий, а Γ^+ и Γ^- являются поверхностями переключения. Регулярные траектории после бесконечного числа переключений стыкуются с сингулярными траекториями на Γ_2 . Такая картина соответствует так называемому скользящему режиму или случаю Фуллера. Фазовый портрет для этого случая изображен на рис. 6.4.

Предположения S1 и S2, вообще говоря, являются более сильными, чем соответствующие предположения в программном подходе, поскольку они описывают свойства не только одной отдельно взятой сингулярной траектории, но также и ее соседних траекторий. Случай S1 исследовался в предыдущих разделах с использованием следующих двух подходов: преобразование от греческих переменных

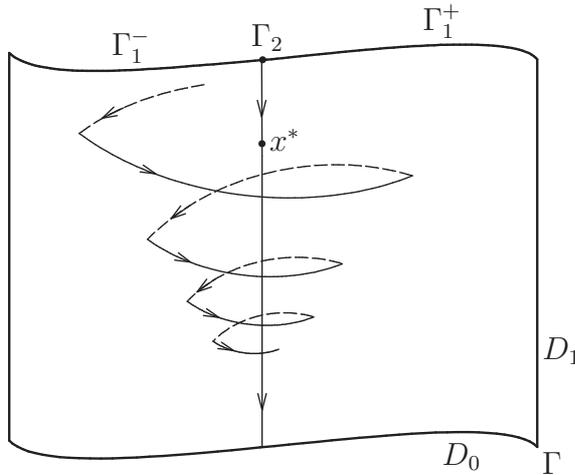


Рис. 6.4

к латинским и анализ гладких решений уравнений в частных производных первого порядка с негладкими гамильтонианами.

Функция Беллмана для случая S2 является также и гладким решением уравнения вида (6.23):

$$F = \min[F_0, F_1] = 0$$

Но здесь не вся поверхность Γ состоит из сингулярных траекторий. Только подмножество $B \subset \Gamma$, $\dim B = n - 2$, содержит сингулярные траектории. Другая часть Γ , а именно, поверхности Γ^+ , Γ^- представляют собой поверхности переключения, где регулярные характеристики уравнения $F_0 = 0$ переключаются на регулярные характеристики уравнения $F_1 = 0$ и наоборот. Для случая S2 подход, основанный на анализе функции Беллмана, еще не разработан. Далее основное внимание будем уделять анализу с использованием греческих и латинских переменных.

Рассмотрим случай, когда переменная второго уровня RGR в (6.11) тождественно равна нулю. В общем случае переменные третьего уровня также равны нулю, а переменные четвертого уровня могут быть отличны от нуля.

Лемма 6.1. Пусть на сингулярной дуге переменные второго и третьего уровней обращаются в нуль, то есть имеет место сингулярность второго порядка. Тогда в терминах греческих и латинских переменных четвертого уровня справедливы следующие соотношения:

$$u_\sigma = -\frac{\alpha_0}{\alpha_1} = -\frac{\beta_0}{\beta_1} = -\frac{\gamma_0}{\gamma_1} \quad (6.42)$$

$$Q \equiv \frac{\partial}{\partial u} \frac{d^4}{dt^4} \frac{\partial H}{\partial u} = \gamma_1 + 2u\beta_1 + u^2\alpha_1 \quad (\text{для } u = u_\sigma) \quad (6.43)$$

$$u_\sigma = \frac{u_1 a_1 + u_0 a_0}{a_1 + a_0} = \frac{u_1 b_1 + u_0 b_0}{b_1 + b_0} = \frac{u_1 c_1 + u_0 c_0}{c_1 + c_0} \quad (6.44)$$

$$\frac{a_0}{a_1} = \frac{b_0}{b_1} = \frac{c_0}{c_1}, \quad a_0 a_1 \geq 0, \quad b_0 b_1 \geq 0, \quad c_0 c_1 \geq 0$$

Здесь формулы, описывающие сингулярное управление u_σ , найдены из условия тождественного обращения в нуль переменных третьего уровня: $\dot{\alpha} = 0$, $\dot{\beta} = 0$ и так далее. Неравенства в (6.44) получены аналогично неравенству $A_0 A_1 \geq 0$ для параметров в (6.16).

Рассмотрим сингулярную дугу, которая является одним из элементов общей картины синтеза S1. Для $d = 2$ в (6.31), как следует из теоремы 6.3, условия леммы выполняются. Используя формулы линейного преобразования между греческими и латинскими переменными (6.12), можно показать, что условия (6.32) означают равенство нулю величины (6.43). Отсюда получаем, что условие Коша – Мойера $Q \geq 0$ оказывается в данном случае неэффективным, но, в то же время, эффективны условия (6.32). Для примера (6.37) получим $u_\sigma = 0$, $\gamma_1 = 0$, $Q = 0$, хотя условия (6.39) являются эффективными.

6.3.2. Инвариантная форма условий второго порядка

В некоторых задачах с сингулярной дугой вторая вариация, обусловленная вариацией Келли δu_k , оказывается неэффективной, но она эффективна для более сложной вариации Коппа – Мойера δu_m , см. [31]:

$$\delta^2 J[\delta u_k] = 0, \quad \delta^2 J[\delta u_m] > 0 \quad (6.45)$$

Для того чтобы вычислить управление u_σ в таких задачах, требуется дальнейшее дифференцирование R в (6.8). Доказано (см. [35, 31]), что управляющий параметр первый раз возникает в четвертой производной $d^4 R/dt^4$, которая представляет собой линейную функцию по u с неотрицательным коэффициентом:

$$\frac{d^4 R}{dt^4} = \gamma_0 + u\gamma_1, \quad \frac{\partial}{\partial u} \frac{d^4 R}{dt^4} = \gamma_1 \geq 0 \quad (6.46)$$

Неравенство здесь есть условие Коппа – Мойера. Из (6.42), (6.43) и (6.46) следует, что все греческие переменные уровней два и три обращаются в нуль, а переменная четвертого уровня неотрицательна, то есть выполнены условия

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \beta_0 = \beta_1 = 0, \quad \gamma_1 \geq 0 \quad (6.47)$$

Отсюда можно вывести условия подобные равенству $a_1 + a_0 = (u_1 - u_0)^2 \gamma_1$, которые в сочетании с (6.44) приводят для латинских переменных четвертого уровня к соотношениям

$$a_0 = b_0 = c_0 \geq 0, \quad a_1 = b_1 = c_1 \geq 0 \quad (6.48)$$

При этом все переменные второго и третьего уровней равны нулю. Кроме того, условия (6.48), а также условия для переменных более низкого уровня могут быть записаны в виде

$$\{F_0 F_1\} = 0, \quad F_1 F_0 F_k F_s F_1 \geq 0, \quad F_0 F_1 F_k F_s F_0 \geq 0 \quad (6.49)$$

$$A_0 = A_1 = 0, \quad a = b = c = 0$$

для любых k, s равных нулю или единице. Два неравенства и шесть равенств в (6.48), (6.49) представляют собой инвариантную форму обобщенных условий Коппа – Мойера.

Для сингулярной дуги, являющейся элементом синтеза S2, как доказано в [82], выполнены условия (6.45)–(6.47). Таким образом, соотношения (6.49) оказываются необходимыми условиями для скользящего режима в инвариантной форме.

Синтез S2 впервые был получен в задаче Фуллера:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = u, \quad |u| \leq 1, \quad t \in [0, T] \quad (6.50)$$

$$J = \int_0^T x^2 dt \rightarrow \min_u, \quad T - \text{фиксировано}$$

Здесь сингулярная дуга (поверхность Γ_2) представляет собой прямую $x = 0$, $y = 0$ в трехмерном фазовом пространстве x, y, t . Для этой задачи можно также вычислить переменные (6.49). Все они оказываются равными 4, за исключением переменной $\gamma_1 = 2$.

В заключение сделаем несколько замечаний. Необходимые условия оптимальности для сингулярной дуги касаются не только задач управления. Как следует из соотношения (6.31) теоремы 6.3, условие Келли (6.10) или эквивалентные условия (6.17), являются одними из свойств гладкого (классического) решения УЧП первого порядка с негладким гамильтонианом.

Соотношения (6.17) представляют собой инвариантные необходимые условия сингулярности первого порядка, а соотношения (6.48), (6.49) — сингулярности второго порядка. Для соотношений (6.17) получено доказательство, основанное на синтезе, а для последних двух соотношений такое доказательство пока не найдено.

Введенные в (6.12) латинские параметры могут быть полезными для выявления различий между синтезом S1 и синтезом S2 на основе соотношений (6.32) и (6.48), (6.49).

6.3.3. Сингулярные характеристики для синтеза S2

Коразмерность многообразия B для синтеза S2 равна двум. Таким образом, в соответствии с главой 1 необходимо пять условий типа равенств для определения многообразия W_5 , введенного в (1.37). Уравнение Беллмана

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 0, \quad x \in B$$

и необходимые условия (6.49) обеспечивают восемь равенств, которые возникают вследствие равенства нулю латинских переменных уровней 0, 1, 2, 3. Однако из этих равенств нужно выбрать только пять. Рассмотрим равенства нулю двух латинских переменных нулевого уровня и трех латинских переменных третьего уровня как равенства, определяющие W_5 с помощью функций F_{-1}, F_2, F_{-2} :

$$\begin{aligned} W_5 : \quad F_0 = 0, \quad F_1 = 0, \quad F_{-1} = F_0 F_1 F_0 F_1 = 0 \\ F_2 = F_0 F_1 F_0 F_0 = 0, \quad F_{-2} = F_0 F_1 F_1 F_1 = 0 \end{aligned} \quad (6.51)$$

Объяснение причин такого выбора опустим и покажем только, что в результате можно получить подходящие уравнения характеристик.

Сингулярный гамильтониан (1.67) имеет вид

$$\mu H^\sigma = \sum_{i=-2}^2 \lambda_i F_i \quad (6.52)$$

Множители λ_i , как установлено в подразделе 1.2.5, выражаются через скобки Якоби от функций F_i следующим образом:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= c_{-2-1}c_{12} - c_{-21}c_{-12} + c_{-22}c_{-11} \quad (c_{ij} = \{F_i F_j\}) \\ \lambda_1 &= -(c_{-2-1}c_{02} - c_{-20}c_{-12} + c_{-22}c_{-10}) \\ \lambda_2 &= c_{-2-1}c_{01} - c_{-20}c_{-11} + c_{-21}c_{-10} \\ \lambda_{-1} &= c_{-21}c_{02} - c_{-20}c_{12} + c_{-22}c_{10} \\ \lambda_{-2} &= -(c_{2-1}c_{01} - c_{20}c_{-11} + c_{21}c_{-10}) \end{aligned} \quad (6.53)$$

Покажем, что три из этих множителей обращаются на многообразии B в нуль: $\lambda_2 = \lambda_{-1} = \lambda_{-2} = 0$. Действительно, равенства (6.48) приводят к следующим соотношениям, выраженным с помощью величин c_{ij} :

$$c_{1-2} = c_{12} = c_{1-1} \geq 0, \quad c_{-20} = c_{-10} = c_{20} \geq 0 \quad (c_{ij} = -c_{ji}) \quad (6.54)$$

Отсюда получаем, что в формулах (6.53) для $\lambda_2, \lambda_{-1}, \lambda_{-2}$ два из трех членов обращаются в нуль. Оставшийся член обращается в нуль вследствие равенства $\{F_0 F_1\} = 0$. Соотношения (6.54) дают также упрощения в записи выражений λ_0, λ_1 :

$$\lambda_0 = c_{12}(c_{-2-1} + c_{-12} - c_{-22}), \quad \lambda_1 = c_{02}(c_{-2-1} + c_{-12} - c_{-22}) \quad (6.55)$$

Положим $\mu = \lambda_0 + \lambda_1$. Уравнения сингулярных характеристик представляют собой уравнения регулярных характеристик при гамильтониане H^σ , рассматриваемом на W_5 . Учитывая равенства

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_0 + \lambda_1} = \frac{c_{12}}{c_{12} + c_{20}}, \quad \frac{\lambda_1}{\lambda_0 + \lambda_1} = \frac{c_{20}}{c_{12} + c_{20}}, \quad c_{12} = a_0, \quad c_{20} = a_1$$

получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{1}{a_0 + a_1}(a_0 F_{0p} + a_1 F_{1p}) \\ \dot{S} &= \frac{1}{a_0 + a_1}(a_0 \langle p, F_{0p} \rangle + a_1 \langle p, F_{1p} \rangle) \\ \dot{p} &= -\frac{1}{a_0 + a_1}(a_0(F_{0x} + pF_{0S}) + a_1(F_{1x} + pF_{1S})) \end{aligned} \quad (6.56)$$

Эти уравнения совпадают с системой (6.35), если в последней коэффициенты A_i заменить на a_i . Таким образом, сингулярный гамильтониан (6.52) является линейной комбинацией только двух функций F_0 и F_1 , как и в случае универсальной поверхности. При этом в рассматриваемом случае выражения для множителей λ_0 и λ_1 являются более сложными.

Формулы для множителей λ_0 и λ_1 , представленные в (6.55), позволяют предположить, что именно знак выражения $c_{-2-1} + c_{-12} - c_{-22}$ определяет, “наматываются” ли регулярные траектории на многообразии B или “сматываются” с него (рис. 6.4). Этот вопрос остается открытым.

Упражнения

6.1. С помощью (6.27) и (6.31) вывести соотношения (6.32).

6.2. Проверить, что функции (6.38) удовлетворяют необходимым условиям (6.3) при $U^* = [-1, 1]$. Проверить условия трансверсальности, используя выражения для $p_1 = V_x$, $p_2 = V_y$, которые получены далее в разделе 6 при $x = 0$, $y = C$.

6.3. Используя (6.12), получить линейное преобразование из греческих переменных в латинские. С помощью полученного преобразования вывести условия (6.42)–(6.44).

6.4. Показать, что из условий (6.32) для Q , заданного в (6.43), следует равенство $Q = 0$.

6.5. Вывести условия (6.48) из (6.47) и получить линейное преобразование из греческих переменных в латинские.

6.6. Вычислить значения переменных (6.49) для задачи (6.50).

6.7. Вычислить значения параметров λ_0 и λ_1 в (6.53) для случая, когда одно из следующих трех равенств тождественно выполнено для всех переменных:

$$1) F_0 F_1 F_0 \equiv 0; \quad 2) F_1 F_0 F_1 \equiv 0; \quad 3) F_0 F_1 F_0 \equiv F_1 F_0 F_1$$

Определить, какое из этих равенств имеет место в рассматриваемой задаче.

ГЛАВА 7

Ударные волны в решениях УЧП первого порядка

7.1. Сингулярные характеристики в задачах на плоскости

7.1.1. Двумерная задача

Рассмотрим на полуплоскости $y \geq 0$ плоскости x, y двумерную краевую задачу

$$\begin{aligned} F(x, y, u, p, q) = 0, \quad y \geq 0 \quad (p = \partial u / \partial x, \quad q = \partial u / \partial y) \\ u(x, 0) = w(x), \quad x \in M \subset \mathbb{R}^1 \end{aligned} \quad (7.1)$$

Функция $u(x, y)$ — вязкостное решение начальной задачи Коши (7.1). Граничное значение задается на подмножестве M (допустимая область границы) оси x , где условие

$$F_q(x, 0, w(x), w_x(x), \psi(x)) \geq 0, \quad x \in M \quad (7.2)$$

выполнено для некоторой заданной функции $\psi(x) = q(x, 0)$ (начальное значение q), удовлетворяющей уравнению

$$F(x, 0, w(x), w_x(x), \psi(x)) = 0, \quad x \in M$$

Во многих задачах функция $w(x)$ задается на всей оси x и значение $\psi(x)$ может быть найдено для всех $x \in \mathbb{R}^1$ из последнего уравнения. Тогда неравенство (7.2) служит определением множества M . Неравенство (7.2) гарантирует, что регулярные характеристики выходят из M в полуплоскость $y \geq 0$.

Система регулярных характеристик УЧП (7.1) имеет вид

$$\dot{x} = F_p, \quad \dot{y} = F_q, \quad \dot{u} = pF_p + qF_q, \quad \dot{p} = -F_x - pF_u, \quad \dot{q} = -F_y - qF_u \quad (7.3)$$

Для определенности, при вычислении скобок Якоби (Пуассона) переменные x и y будут рассматриваться в качестве первой и второй компонент, $x_1 = x$, $x_2 = y$, и, соответственно, $p_1 = p$, $p_2 = q$.

Простейшая особенность вязкостного решения УЧП (7.1), представленная в главе 2, — прямая Γ на (x, y) -плоскости. В дальнейшем мы рассмотрим задачу, для которой F достаточно гладкая и Γ является либо фокальной, либо эквивокальной поверхностью (линией). В силу малой размерности вектора $(x_1, x_2) = (x, y)$ система ОДУ сингулярных характеристик для таких линий может быть получена прямыми вычислениями без обращения к теории глав 1, 2, хотя эта теория также применима.

Мы приведем в этом разделе независимый вывод системы сингулярных характеристик. Проверка того, что эта система совпадает с результатами глав 1, 2, остается в качестве упражнения.

Итак, линия Γ делит рассматриваемую окрестность D на две подобласти, $D = D_0 + \Gamma + D_1$. Решение в области D_0 будем обозначать через $v(x, y)$, и компоненты градиента решения будут записываться греческими буквами:

$$v(x, y) = u(x, y), \quad \alpha = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \beta = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (x, y) \in D_0 \quad (7.4)$$

Обозначения u, p, q относятся к области D_1 . Гамильтониан F и его производные, в зависимости от стороны Γ , могут иметь аргументы (x, y, u, p, q) (латинская сторона) или (x, y, u, α, β) (греческая сторона). Символ F с чертой сверху будет означать греческую сторону, например:

$$\begin{aligned} \bar{F} &= F(x, y, u, \alpha, \beta), & \bar{F}_\alpha &= \bar{F}_p = F_p(x, y, u, \alpha, \beta) \\ \bar{F}_\beta &= \bar{F}_q = F_q(x, y, u, \alpha, \beta) \end{aligned} \quad (7.5)$$

7.1.2. Уравнения для фокальной линии

Как показано в главе 2, регулярные характеристики покидают Γ по касательной с обеих сторон. Запишем уравнения для регулярных характеристик с греческой стороны в виде

$$\begin{aligned} x' &= \bar{F}_\alpha, & y' &= \bar{F}_\beta, & u' &= \alpha \bar{F}_\alpha + \beta \bar{F}_\beta \\ \alpha' &= -\bar{F}_x - \alpha \bar{F}_u, & \beta' &= -\bar{F}_y - \beta \bar{F}_u \end{aligned} \quad (7.6)$$

Для латинской стороны имеем (7.3). Здесь штрих означает дифференцирование по независимой переменной, скажем, τ , $x' = dx/d\tau$, которая, как правило, отличается от независимой переменной t в (7.3). Для производной dy/dx , определяющей наклон фокальной линии Γ в точке $(x, y) \in \Gamma$, можно получить следующие выражения, используя (7.3) и (7.6):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{F_q}{F_p} = \frac{y'}{x'} = \frac{\bar{F}_\beta}{\bar{F}_\alpha}$$

Они означают, что условие коллинеарности раздела 2.4.3 выполнено. Обозначив отношение F_p/\bar{F}_α через c , имеем

$$F_p = c\bar{F}_\alpha, \quad F_q = c\bar{F}_\beta, \quad \frac{d\tau}{dt} = c, \quad c = c(x, y, u, p, q, \alpha, \beta) \quad (7.7)$$

Таким образом, скалярный параметр c рассматривается как функция переменных $x, y, u, p, q, \alpha, \beta$ при $(x, y) \in \Gamma$. Соотношения (7.7), в частности, дают

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F_p = cx' = c\bar{F}_\alpha, & \dot{y} &= F_q = cy' = c\bar{F}_\beta \\ \dot{u} &= pF_p + qF_q = cu' = c(\alpha\bar{F}_\alpha + \beta\bar{F}_\beta) \end{aligned} \quad (7.8)$$

Условие касания с обеих сторон Γ можно записать в виде (см. (2.31))

$$F_p(p - \alpha) + F_q(q - \beta) = 0, \quad \bar{F}_\alpha(p - \alpha) + \bar{F}_\beta(q - \beta) = 0 \quad (7.9)$$

Дифференцируя уравнение латинской стороны (7.1) по t и используя (7.3), приходим к системе

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}F(x, y, u, p, q) = 0, \quad \dot{x}F_x + \dot{y}F_y + \dot{u}F_u + \dot{p}F_p + \dot{q}F_q = 0 \\ \tilde{p}F_p + \tilde{q}F_q = 0 \quad (\tilde{p} = \dot{p} + F_x + pF_u, \quad \tilde{q} = \dot{q} + F_y + qF_u) \end{aligned} \quad (7.10)$$

Аналогично, дифференцируя уравнение греческой стороны $F(x, y, u, \alpha, \beta)$ по τ , можно получить

$$\tilde{\alpha}\bar{F}_\alpha + \tilde{\beta}\bar{F}_\beta = 0 \quad (\tilde{\alpha} = \alpha' + \bar{F}_x + \alpha\bar{F}_u, \quad \tilde{\beta} = \beta' + \bar{F}_y + \beta\bar{F}_u) \quad (7.11)$$

Дифференцирование первого уравнения (7.9) (латинская сторона) по t после перегруппировки членов приводит к следующему равенству:

$$\begin{aligned} \tilde{p}[F_p + F_{pp}(p - \alpha) + F_{pq}(q - \beta)] + \tilde{q}[F_q + F_{qq}(q - \beta) + F_{pq}(p - \alpha)] - \\ - \dot{\alpha}F_p - \dot{\beta}F_q = (F_x + pF_u)[F_p + F_{pp}(p - \alpha) + F_{pq}(q - \beta)] + \\ + (F_y + qF_u)[F_q + F_{qq}(q - \beta) + F_{pq}(p - \alpha)] - \\ - (p - \alpha)(F_{px}F_p + F_{py}F_q + F_{pu}\dot{u}) - (q - \beta)(F_{qx}F_p + F_{qy}F_q + F_{qu}\dot{u}) \end{aligned} \quad (7.12)$$

Используя (7.7), (7.11) и равенства $\dot{\alpha} = c\alpha'$, $\dot{\beta} = c\beta'$, члены с $\dot{\alpha}, \dot{\beta}$ в (7.12) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}F_p - \dot{\beta}F_q = c^2[\tilde{\alpha}\bar{F}_\alpha + \tilde{\beta}\bar{F}_\beta - \bar{F}_\alpha(\bar{F}_x + \alpha\bar{F}_u) - \bar{F}_\beta(\bar{F}_y + \beta\bar{F}_u)] = \\ = -c^2[\bar{F}_\alpha(\bar{F}_x + \alpha\bar{F}_u) + \bar{F}_\beta(\bar{F}_y + \beta\bar{F}_u)] \end{aligned} \quad (7.13)$$

Задействовав последнее уравнение в (7.10) и первое уравнение в (7.9), получаем

$$\tilde{q} = -\frac{F_p}{F_q}\tilde{p} = \frac{q - \beta}{p - \alpha}\tilde{p}, \quad \tilde{p} = \frac{p - \alpha}{q - \beta}\tilde{q} \quad (7.14)$$

Подставляя далее эти выражения в (7.12) и используя (7.10), (7.13), находим следующие выражения для \tilde{p} и \tilde{q} :

$$\begin{aligned} \tilde{p} = -\frac{A}{B}(p - \alpha), \quad \tilde{q} = -\frac{A}{B}(q - \beta) \quad (F_1(x, y, u) = u - v(x, y)) \\ B = B(x, y, u, p, q, \alpha, \beta) = \{\{F_1F\}F_1\} = \\ = -[F_{pp}(p - \alpha)^2 + 2F_{pq}(p - \alpha)(q - \beta) + F_{qq}(q - \beta)^2] \\ A = A(x, y, u, p, q, \alpha, \beta) = \{\{FF_1\}F\}^* = \\ = (F_x + pF_u)[F_p + F_{pp}(p - \alpha) + F_{pq}(q - \beta)] + \\ + (F_y + qF_u)[F_q + F_{qq}(q - \beta) + F_{pq}(p - \alpha)] - \\ - (p - \alpha)(F_{px}F_p + F_{py}F_q + F_{pu}\dot{u}) - (q - \beta)(F_{qx}F_p + F_{qy}F_q + F_{qu}\dot{u}) - \\ - c^2[\bar{F}_\alpha(\bar{F}_x + \alpha\bar{F}_u) + \bar{F}_\beta(\bar{F}_y + \beta\bar{F}_u)] \end{aligned} \quad (7.15)$$

Здесь производная \dot{u} должна быть заменена на $pF_p + qF_q$; $\{\{FF_1\}F\}^*$ означает скобку Якоби $\{\{FF_1\}F\}$, в выражении для которой квадратичная форма

$$v_{xx}F_p^2 + 2v_{xy}F_pF_q + v_{yy}F_q^2$$

заменяется последним выражением в (7.13), как это определено в (2.48).

Аналогично, начиная с равенства в (7.9) для греческой стороны, можно получить

$$\tilde{\alpha} = -\frac{\bar{A}}{B}(\alpha - p), \quad \tilde{\beta} = -\frac{\bar{A}}{B}(\beta - q) \quad (7.16)$$

где операция с чертой сверху означает перестановку греческих и латинских аргументов:

$$\bar{A}(x, y, u, p, q, \alpha, \beta) = A(x, y, u, \alpha, \beta, p, q)$$

Эта операция, в частности, включает в себя обозначения, использованные ранее:

$$\bar{F} = \bar{F}(x, y, u, p, q) = F(x, y, u, \alpha, \beta)$$

Из выражения для c , полученного в силу первых двух равенств в (7.7), имеем

$$\bar{c} = \frac{1}{c} \quad (7.17)$$

Соотношения (7.3), (7.6), (7.8), (7.15), (7.16) приводят к следующим семи уравнениям сингулярных характеристик в терминах независимой переменной t :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F_p = c\bar{F}_\alpha, & \dot{y} &= F_q = c\bar{F}_\beta, & \dot{u} &= pF_p + qF_q = c(\alpha\bar{F}_\alpha + \beta\bar{F}_\beta) \\ \dot{p} &= -F_x - pF_u - \frac{A}{B}(p - \alpha), & \dot{q} &= -F_y - qF_u - \frac{A}{B}(q - \beta) \\ \dot{\alpha} &= -c(\bar{F}_x + \alpha\bar{F}_u + \frac{\bar{A}}{B}(\alpha - p)), & \dot{\beta} &= -c(\bar{F}_y + \beta\bar{F}_u + \frac{\bar{A}}{B}(\beta - q)) \end{aligned} \quad (7.18)$$

Это частный случай системы (2.49). Отметим, что система (2.49) получена в предположении коллинеарности $F_p = cG_q$, которое всегда выполняется для двумерной задачи (7.1) (см. (7.7)).

7.1.3. Уравнения для экивокальной линии

Для экивокальной сингулярной поверхности (см. главу 2) условие касания выполняется только для одной стороны Γ , которая в рассматриваемой задаче предполагается латинской стороной, соответствующей первому равенству в (7.1). Функции (7.4) считаются известными заранее, найденными до построения Γ . Чтобы получить уравнения для сингулярной экивокальной кривой Γ , нужно изменить уравнения для p , q в (7.3).

Вывод сингулярных уравнений для p и q повторяет соотношения (7.10), (7.12), но преобразование левой части выражения (7.13) является новым и основано на заданных функциях (7.4):

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}F_p - \dot{\beta}F_q &= F_p \frac{d}{dt} \frac{\partial v}{\partial x} + F_q \frac{d}{dt} \frac{\partial v}{\partial y} = \\ &= F_p \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} F_p + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} F_q \right) + F_q \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} F_p + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} F_q \right) = \\ &= v_{xx} F_p^2 + 2v_{xy} F_p F_q + v_{yy} F_q^2 \end{aligned} \quad (7.19)$$

Последнее выражение представляет собой квадратичную форму, упомянутую выше. Таким образом, получаем для переменных \tilde{p} , \tilde{q} (см. (7.10)) из (7.12) и (7.14) соотношения

$$\tilde{p} = -\frac{\{\{FF_1\}F\}}{\{\{F_1F\}F_1\}}(p - \alpha), \quad \tilde{q} = -\frac{\{\{FF_1\}F\}}{\{\{F_1F\}F_1\}}(q - \beta)$$

с обычными скобками Якоби. Эти уравнения вместе с (7.3) приводят к следующей системе сингулярных эквивокальных характеристик пятого порядка:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F_p, & \dot{y} &= F_q, & \dot{u} &= pF_p + qF_q \\ \dot{p} &= -F_x - pF_u - \frac{\{\{FF_1\}F\}}{\{\{F_1F\}F_1\}}\left(p - \frac{\partial v}{\partial x}\right) \\ \dot{q} &= -F_y - qF_u - \frac{\{\{FF_1\}F\}}{\{\{F_1F\}F_1\}}\left(q - \frac{\partial v}{\partial y}\right) \end{aligned} \quad (7.20)$$

Выражение для $\{\{F_1F\}F_1\}$ дается в (7.15). Чтобы получить скобку $\{\{FF_1\}F\}$, нужно подставить обратно квадратичную форму из (7.19) вместо члена с множителем c^2 в формулу для $\{\{FF_1\}F\}^*$ в (7.15). Система (7.20) является аналогом (2.18) для двумерного случая.

Для вывода уравнений (7.18), (7.20) в двумерном случае не надо использовать теорию характеристических полей на многообразии W , разработанную в главе 1. Вывод (7.18), (7.20) опирается только на условие касания (7.9), полученное в главе 2 как свойство вязкостного решения.

7.1.4. Сингулярные характеристики двумерного уравнения Гамильтона – Якоби

Рассмотрим задачу (7.1) для уравнения Гамильтона – Якоби

$$\frac{\partial u}{\partial t} + H\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0, \quad t > 0, u(x, 0) = w(x), \quad x \in \mathbb{R}^1 \quad (7.21)$$

где x и t скаляры. Уравнение Гамильтона – Якоби обладает двумя особенностями: присутствует аддитивная компонента градиента неизвестной функции, обычно — частная производная по времени (см. (1.6)); гамильтониан H не зависит от неизвестной функции u . Некоторые авторы называют уравнением Гамильтона – Якоби общее нелинейное уравнение (7.1) с единственным требованием, что функция F не зависит от u . Таким образом, (7.21) есть частный вид соотношения (7.1), где

$$F(x, t, u, p, q) = q + H(x, t, u, p) = 0, \quad p = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (7.22)$$

Переменные x и t будут рассматриваться в качестве первой и второй переменных, то есть $x_1 = x$, $x_2 = y = t$, и, соответственно, $p_1 = p$, $p_2 = q$. Функция F слева в (7.22) будет также называться гамильтонианом или расширенным гамильтонианом. Условие (7.2) выполнено при всех $x \in \mathbb{R}^1$, поскольку $F_q = 1$. Таким образом, допустимая область границы есть вся ось x , $M = \mathbb{R}^1$. Начальное значение для q (функция $\psi(x)$ в (7.2)) может быть однозначно определено в виде $\psi(x) = -H(x, 0, w(x), w_x(x))$.

Уравнения регулярных характеристик для задачи (7.21), (7.22) имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F_p = H_p, & \dot{t} &= F_q = 1, & \dot{u} &= pF_p + qF_q = pH_p + q \\ \dot{p} &= -F_x - pF_u = -H_x - pH_u, & \dot{q} &= -F_t - qF_u = -H_t - qH_u \end{aligned} \quad (7.23)$$

В общем случае дифференцирование проводится по некоторой независимой переменной, например, τ : $\dot{x} = dx/d\tau$. Второе уравнение в (7.23) показывает, что можно использовать в качестве независимой переменную t , поскольку $\tau = t + \text{const}$. Итак, дифференцирование в (7.23) будет предполагаться по t , что позволяет опустить в (7.23) второе и последнее уравнения, исключая q с помощью равенства

$$q = -H(x, t, u, p) \quad (7.24)$$

вытекающего из самого уравнения в частных производных (7.21). Это понижает пятый порядок системы (7.23) до третьего порядка:

$$\dot{x} = H_p, \quad \dot{u} = pH_p - H, \quad \dot{p} = -H_x - pH_u \quad (H = H(x, t, u, p)) \quad (7.25)$$

После интегрирования системы (7.25) можно подставить функции $x(t)$, $u(t)$, $p(t)$ в (7.24) и найти $q(t)$.

Порядок систем сингулярных характеристик (7.18) и (7.20) также уменьшается, они значительно упрощаются за счет представления (7.24) и равенств $F_q = 1$, $\bar{F}_\beta = 1$. Соотношения (7.7) показывают, что параметр c тождественно равен единице и компоненты F_p, F_α равны между собой:

$$F_p = F_\alpha = H_p = \bar{H}_\alpha, \quad F_q = \bar{F}_\beta = 1, \quad c = 1 \quad (7.26)$$

Таким образом, векторы (F_p, F_q) и $(\bar{F}_\alpha, \bar{F}_\beta)$ совпадают на сингулярной фокальной линии Γ .

Система (7.18) сводится к следующей системе четвертого порядка:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= H_p = \bar{H}_\alpha, & \dot{u} &= pH_p - H = \alpha\bar{H}_\alpha - \bar{H} \\ \dot{p} &= K(x, t, u, p, \alpha), & \dot{\alpha} &= \bar{K} = K(x, t, u, \alpha, p) \\ K(x, t, u, p, \alpha) &= \frac{[H_t - HH_u + (H_x + pH_u)H_p]^*}{(p - \alpha)H_{pp}} - \\ &\quad - \frac{H_{pt} - HH_{pu} + (H_{px} + pH_{pu})H_p}{H_{pp}} \end{aligned} \quad (7.27)$$

Здесь квадратная скобка со звездочкой сверху означает скачок функции $f(p, q)$, соответствующий скачку градиента $u(x, t)$ на сингулярной линии:

$$[f]^* = f(p, q) - f(\alpha, \beta) \quad (7.28)$$

Чтобы найти переменные q и β , нужно добавить в систему дифференциальных уравнений (7.27) два конечных соотношения

$$F = q + H(x, t, u, p) = 0, \quad \bar{F} = \beta + H(x, t, u, \alpha) = 0 \quad (7.29)$$

Формула для функции K в (7.27) получается из (7.18) за счет упрощения выражений A и B в (7.15) с использованием, в частности, равенств

$$F_q = 1, \quad F_{qq} = F_{pq} = F_{qx} = F_{qt} = F_{qu} = 0$$

вытекающих из (7.29).

Уравнение для \dot{p} в (7.27) (и, соответственно, для $\dot{\alpha}$) можно преобразовать к следующей симметричной форме:

$$\begin{aligned} \dot{p} &= H_x + pH_u + \frac{1}{H_{pp}} \left(\frac{[f]^*}{p - \alpha} - \frac{\partial f}{\partial p} \right) \\ f(x, t, u, p) &= H_t - HH_u + (H_x + pH_u)H_p \end{aligned} \quad (7.30)$$

где, в отличие от (7.23), член $H_x + pH_u$ входит с положительным знаком. Вычисляя полную производную по времени от величины H_p (которая равна \bar{H}_α , см. (7.26)) и используя (7.30), можно получить следующее интересное и простое представление:

$$\frac{d}{dt} H_p = \frac{d}{dt} \bar{H}_\alpha = \frac{[H_t - HH_u + (H_x + pH_u)H_p]^*}{p - \alpha} \quad (7.31)$$

Таким образом, производные по времени от H_p, \bar{H}_α равны некоторым конечным разностям.

Уравнения (7.20) для сингулярной экивокальной кривой в случае уравнения Гамильтона – Якоби упрощаются до следующей системы третьего порядка:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= H_p, \quad \dot{u} = pH_p - H \\ \dot{p} &= \frac{H_t - HH_u + (H_x + pH_u)H_p + L_2}{(p - v_x)H_{pp}} - \frac{H_{pt} - HH_{pu} + (H_{px} + pH_{pu})H_p}{H_{pp}} \\ L_2 &= v_{xx}H_p^2 + 2v_{xt}H_p + v_{tt} \end{aligned} \quad (7.32)$$

Дальнейшее упрощение систем (7.27), (7.32) произойдет, если гамильтониан H не зависит от u и уравнение для \dot{u} отделяется. Система (7.27) становится системой третьего порядка:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= H_p = \bar{H}_\alpha, \quad \dot{p} = K(x, t, p, \alpha), \quad \dot{\alpha} = \bar{K} = K(x, t, \alpha, p) \\ K(x, t, p, \alpha) &= \frac{[H_t + H_x H_p]^*}{(p - \alpha)H_{pp}} - \frac{H_{pt} + H_{px} H_p}{H_{pp}} \end{aligned} \quad (7.33)$$

а система (7.32) — системой второго порядка:

$$\dot{x} = H_p, \quad \dot{p} = \frac{H_t + H_x H_p + L_2}{(p - v_x)H_{pp}} - \frac{H_{pt} + H_{px} H_p}{H_{pp}} \quad (7.34)$$

со значением L_2 , определенным в (7.32).

Отметим еще одно уравнение, справедливое как для экивокальной, так и для фокальной линий. Выпишем условие касания (7.9) в случае уравнения Гамильтона – Якоби:

$$H_p(p - \alpha) + (q - \beta) = 0$$

Разрешая это уравнение относительно H_p , подставляя затем результат в первое уравнение (7.27), (7.32)–(7.34) и используя (7.29), можно получить так называемое условие Ренкина – Гюонио:

$$\dot{x} = H_p = -\frac{q - \beta}{p - \alpha} = \frac{H - \bar{H}}{p - \alpha} = \frac{[H]^*}{p - \alpha} = \frac{[H]^*}{[p]^*} \quad (7.35)$$

Такое условие справедливо не только для эквикальной и фокальной линий, но и для любой сингулярной кривой (например, рассеивающей), где решение (7.21) непрерывно и имеет скачок градиента. Дифференцируя равенство

$$u(x, t) - v(x, t) = 0$$

по t вдоль сингулярной линии, имеем

$$\dot{x}p + q - \dot{x}\alpha - \beta = 0$$

что приводит к условию (7.35).

7.2. Ударные волны, порожденные граничными условиями

7.2.1. Начальные условия

Ударные волны, рассматриваемые в этом разделе, возникают вследствие негладкости краевой функции $w(x)$ в какой-нибудь одной точке, которую, по определению, будем полагать расположенной в начале координат $x = 0$. Таким образом, предполагается, что функция $w(x)$ имеет скачок производной при $x = 0$, соответствующий представлению

$$w(x) = \min[w^+(x), w^-(x)], \quad w^\pm(x) \in C^2 \quad (7.36)$$

что приводит к следующему неравенству для левой и правой производных от $w(x)$:

$$p^+ = w_x(-0) = w_x^-(0) > w_x^+(0) = w_x(+0) = p^- \quad (7.37)$$

Другой возможный характер негладкости, когда

$$w = \max[w^+, w^-], \quad p^+ = w_x(+0) = w_x^+(0) > w_x^-(0) = w_x(-0) = p^-$$

рассматривается аналогично.

Предположим, что для каждого значения $p \in [p^-, p^+]$ существует такое единственное $q = g(p)$, что выполнено равенство (7.1), то есть

$$\begin{aligned} F(0, 0, w_0, p, g(p)) &= 0, & p^- \leq p \leq p^+ \\ q &= g(p), & q^- = g(p^-), \quad q^+ = g(p^+) \end{aligned} \quad (7.38)$$

Здесь $w_0 = w(0)$ — значение $w(x)$ при $x = 0$. Расширим (распространим) требование (7.2) на все значения p и $q = g(p)$:

$$F_q(0, 0, w_0, p, g(p)) > 0, \quad p^- \leq p \leq p^+ \quad (7.39)$$

Заметим, что существование единственного однозначного, непрерывного решения $g(p)$ уравнения (7.38) является глобальным предположением и не может быть получено для всего отрезка $[p^-, p^+]$ на основе только (7.39) и теоремы о неявной функции. Гладкость $g(p)$ вытекает из (7.38), (7.39) и из гладкости $F(x, y, u, p, q)$.

Во многих формулах этого раздела, включая соотношения для функции F и ее производных, первые три аргумента фиксированы и равны $(0, 0, w_0)$, как в (7.38), (7.39). Для краткости, эти аргументы, как правило, не будут записываться, то есть

$$F(p, q) \equiv F(0, 0, w_0, p, q), \quad (p, q) \in \mathbb{R}^2$$

Дифференцируя тождество (7.38) по p , получаем соотношения для $g'(p)$:

$$F_p + F_q g'(p) = 0, \quad g'(p) = -\frac{F_p}{F_q} \quad (7.40)$$

Интегрируя последнее равенство и используя соотношения (7.38), приходим к следующему представлению функции $g(p)$:

$$g(p) = q^- - \int_{p^-}^p \frac{F_p(s, g(s))}{F_q(s, g(s))} ds, \quad p^- \leq p \leq p^+ \quad (7.41)$$

Таким образом, если непрерывное решение (7.38) существует, то оно удовлетворяет интегральному уравнению (7.41). Утверждения этого раздела, связанные с количеством и типом ударных волн, формулируются в терминах функции $g(p)$, описанной в (7.38)–(7.41). График функции – кривая на (p, q) -плоскости – будет обозначаться буквой C :

$$C = \{(p, q) \in \mathbb{R}^2 : q = g(p), p^- \leq p \leq p^+\}$$

Для случая уравнения Гамильтона – Якоби эта функция имеет довольно простое представление, получаемое из (7.38):

$$F = q + H(0, 0, w_0, p) = 0, \quad q = g(p) = -H(0, 0, w_0, p) = -H(p) \quad (7.42)$$

Конечно, формула (7.41) также дает $g(p) = -H(p)$. Очевидно, что условие (7.39) выполнено.

7.2.2. Овыпукление функции $g(p)$

Как видно из дальнейшего, ударные волны в общем случае описываются рассеивающей, экивокальной или фокальной сингулярными поверхностями (линиями).

Рассмотрим фокальную сингулярную линию Γ , начинающуюся в начале координат. Обозначим градиент решения по разные стороны Γ посредством (p, q) и (α, β) , как в (7.9). Предполагается, что числа p и α должны принадлежать отрезку $[p^-, p^+]$. Для определенности считаем

$$p^- \leq \alpha < p \leq p^+ \quad (7.43)$$

Условия касания (7.9), благодаря непрерывности аргументов, выполняются в начале координат в начальной точке Γ , а именно:

$$\begin{aligned} F_p(p, q)(p - \alpha) + F_q(p, q)(q - \beta) &= 0, & q &= g(p) \\ F_p(\alpha, \beta)(p - \alpha) + F_q(\alpha, \beta)(q - \beta) &= 0, & \beta &= g(\alpha) \end{aligned} \quad (7.44)$$

Оба равенства дают одно и то же отношение F_p/F_q :

$$\frac{F_p(p, q)}{F_q(p, q)} = \frac{F_p(\alpha, \beta)}{F_q(\alpha, \beta)} = -\frac{q - \beta}{p - \alpha} \quad (7.45)$$

Используя выражение (7.40) для производной $g'(p)$ и подставляя $q = g(p)$, $\beta = g(\alpha)$, можно свести (7.45) к следующему виду:

$$g'(p) = g'(\alpha) = \frac{g(p) - g(\alpha)}{p - \alpha} \quad (7.46)$$

Таким образом, производная функции $g(p)$ в двух точках p и α равна соответствующей конечной разности.

Аналогично рассматривая экивокальную линию, приходим к выводу, что конечная разность равна производной $g(p)$ только для одной точки, например, $g'(p)$, которая соответствует той стороне Γ , где регулярные характеристики касаются Γ (так называемой сингулярной стороне Γ).

Геометрически соотношение (7.46) означает, что кривая C (график функции $g(p)$) имеет одну и ту же касательную в точках p и α . Такие пары точек можно найти, прикладывая прямую линию к кривой C снизу (сплошная линия) или сверху (пунктирная линия), см. рис 7.1. Чтобы выявить, какой путь является более целесообразным для рассматриваемой задачи, следует провести отдельный анализ.

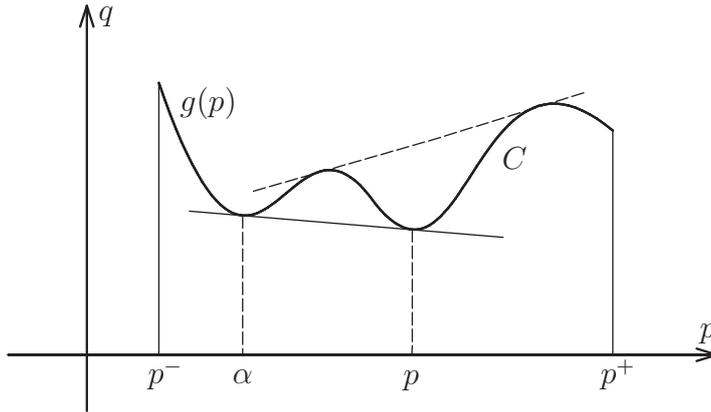


Рис. 7.1

Рассмотрим фрагмент C_1 кривой C , соответствующий отрезку $[p_0, p_1]$:

$$\begin{aligned} C_1 : \quad q &= g(p), & p_0 \leq p \leq p_1, & \quad p^- \leq p_0 < p_1 \leq p^+ \\ q_0 &= g(p_0), & q_1 &= g(p_1) \end{aligned} \quad (7.47)$$

Отрезок S_1 прямой, соединяющий точки (p_0, q_0) , (p_1, q_1) на (p, q) -плоскости, определяется линейным равенством

$$S_1 : \quad q = L(p) \equiv q_0 + \frac{q_1 - q_0}{p_1 - p_0}(p - p_0), \quad p_0 \leq p \leq p_1 \quad (7.48)$$

Лемма 7.1. Пусть отрезок S_1 лежит ниже кривой C_1 , то есть выполнено неравенство

$$g(p) \geq L(p), \quad p_0 \leq p \leq p_1 \quad (7.49)$$

Тогда гамильтониан F неположителен для точек S_1 :

$$F(p, L(p)) \leq 0, \quad p_0 \leq p \leq p_1 \quad (7.50)$$

Доказательство. Предположим, что неравенство (7.50) нарушено, то есть существует точка p' , для которой гамильтониан положителен:

$$F(p', L(p')) = \varepsilon > 0, \quad p' \in [p_0, p_1]$$

Пусть $p = p^* \in [p_0, p_1]$ — наибольший корень слева от p' уравнения

$$F(p, L(p)) = 0, \quad p = p^* < p'$$

(такой корень существует, так как $F(p_0, q_0) = 0$ и $F(p, L(p))$ является непрерывной функцией p). Выбирая p' достаточно близко к p^* , рассмотрим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} F(p', L(p')) &= F(p', L(p') - g(p') + g(p')) = F_q \delta + o(\delta) = \varepsilon > 0 \\ \delta &= \delta(p') = L(p') - g(p') < 0 \end{aligned}$$

Отметим, что величина $\delta(p')$ неположительна в силу (7.49) и не может равняться нулю, ибо в этом случае имеем $F(p', L(p')) = F(p', g(p')) = 0$ в соответствии с определением $g(p)$ в (7.38). Таким образом, член $F_q \delta$ в этом разложении является отрицательным в силу (7.39). Так как это главный член в рассматриваемом разложении, то левая часть соотношения также отрицательна при p' достаточно близком к p^* . Это противоречит предположению $\varepsilon > 0$. Лемма доказана.

Отметим, что если заменить предположение леммы 7.1 на противоположное к (7.49), то утверждение (7.50) также будет противоположным.

Другим возможным представлением отрезка S_1 , определенного в (7.48), является следующая параметризация:

$$p = \lambda p_1 + (1 - \lambda)p_0, \quad q = \lambda q_1 + (1 - \lambda)q_0, \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \quad (7.51)$$

Используя такое представление в (7.50), получаем

$$f(\lambda) = F(\lambda p_1 + (1 - \lambda)p_0, \lambda q_1 + (1 - \lambda)q_0) \leq 0, \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \quad (7.52)$$

что аналогично необходимому условию (2.7) вязкостного решения.

Лемма 7.1 и условие (7.52) указывают, что для ударной волны вида минимума (то есть решение в малом имеет вид $u = \min[u_0, u_1]$) параметры p и α в (7.43)–(7.46) должны быть найдены с помощью нижней касательной линии к кривой C

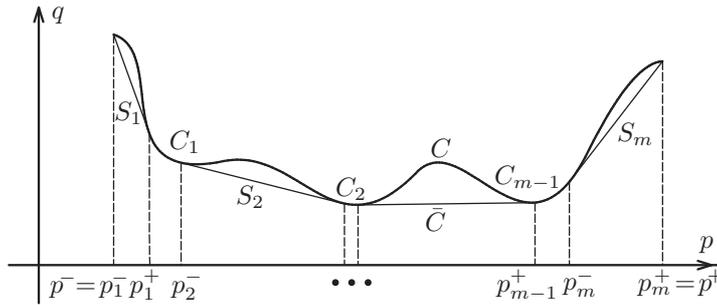


Рис. 7.2

(сплошная прямая на рис. 7.1). Неравенство (7.52) соответствует необходимому условию (2.7).

Рассмотрим выпуклую оболочку надграфика функции $g(p)$, то есть множество на (p, q) -плоскости, определяемое соотношениями

$$q \geq g(p), \quad p^- \leq p \leq p^+ \quad (7.53)$$

Граница выпуклой оболочки состоит из двух вертикальных лучей

$$q \geq q^-, \quad p = p^-; \quad q \geq q^+, \quad p = p^+$$

и кривой \bar{C} , соединяющей точки (p^-, q^-) и (p^+, q^+) (рис. 7.2). Кривая \bar{C} складывается из отрезков прямых линий, обозначенных S_i , и выпуклых фрагментов кривой C , обозначенных C_i . Мы предполагаем, что функция $g(p)$ относительно регулярна, то есть что существует конечное число линий S_i, C_i . Таким образом, овыпукляющая кривая \bar{C} в общем случае представляется соотношением

$$\bar{C} = C_0 + S_1 + C_1 + \dots + S_m + C_m, \quad m \geq 0 \quad (7.54)$$

Здесь $m \geq 0$ — число отрезков овыпукления. Количество выпуклых фрагментов C_i кривой C равно $m + 1$, фрагменты C_0 и/или C_m могут отсутствовать.

Отрезок, касающийся кривой C на обоих ее концах, будем называть касательным отрезком. Отрезок, касающийся C только с одного конца, будет называться полукасательным. Наконец, может быть только один отрезок, называемый некасательным, который соединяет концы кривой C , лежит ниже C и не касается C на концах. Все внутренние отрезки S_2, S_3, \dots, S_{m-1} — касательные. Крайние отрезки S_1, S_m могут быть любого типа: касательные, полукасательные или некасательные (для $m = 1$).

Все отрезки предполагаются замкнутыми множествами, то есть их концы включены в S_i ; в то же время концы кривых C_i не принадлежат C_i для $i = 1, \dots, m - 1$. Дуги C_0, C_m являются полузамкнутыми, то есть левый (правый) конец C_0 (C_m) включен в дугу. Таким образом, каждый отрезок имеет, по крайней мере, две точки (концы отрезка) общие с кривой C . Отрезок будем называть простым, если он имеет только две общие точки с C . Непростые отрезки имеют с C более двух общих

точек, например, отдельные (изолированные) внутренние точки касания S_i и C или целые подотрезки. В ситуации общего положения все отрезки являются простыми.

Каждый отрезок S_i является графиком линейной функции, то есть

$$\begin{aligned} S_i : \quad q = L_i(p), \quad p_i^- \leq p \leq p_i^+ \quad (p_1^- = p^-, p_m^+ = p^+) \\ q_i^- = g(p_i^-) = L_i(p_i^-), \quad q_i^+ = g(p_i^+) = L_i(p_i^+), \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (7.55)$$

где точки (p_i^-, q_i^-) и (p_i^+, q_i^+) — левый и правый концы отрезка S_i , будучи подставленными в (7.48) вместо (p_0, Q_0) и (p_1, q_1) , определяют функцию $L_i(p)$. Точки p_i^\pm делят отрезок $[p^-, p^+]$ на $2m + 1$ подынтервалов:

$$p^- \leq p_1^- < p_1^+ < p_2^- < p_2^+ < \dots < p_m^- < p_m^+ \leq p^+ \quad (7.56)$$

Дуги C_i описываются тем же самым равенством, рассматриваемым на соответствующих подынтервалах:

$$\begin{aligned} q = g(p), \quad C_i : \quad p_i^+ < p < p_{i+1}^-, \quad i = 1, \dots, m-1 \\ C_0 : \quad p^- \leq p < p_1^-; \quad C_m : \quad p_m^+ < p \leq p^+ \end{aligned} \quad (7.57)$$

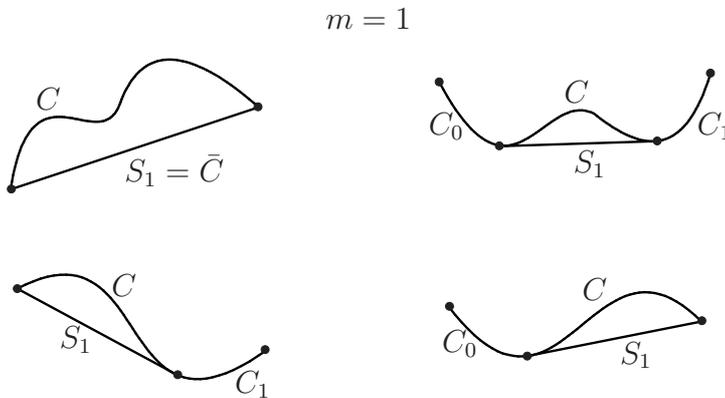


Рис. 7.3

Минимальное значение m в сумме (7.54) есть $m = 0$, когда кривая C выпукла и не касается ее хорды (в противном случае должны быть овыпукляющие отрезки и $m > 0$). При этом хорда не является овыпукляющим отрезком, и это — ситуация общего положения, остающаяся такой же при достаточно малых возмущениях кривой C . Четыре возможные ситуации для $m = 1$ приведены на рис. 7.3. При $m \geq 2$ в ситуации общего положения сумма (7.54) начинается и заканчивается либо дугами C_0, C_m , либо полукасательными отрезками S_1, S_m . Ситуация, когда сумма (7.54) начинается, например, с пустой дуги C_0 и касательного отрезка S_1 , также возможна, но она не является ситуацией общего положения.

7.2.3. Исследование второй производной

Как уже упоминалось выше, некоторые ударные волны могут быть описаны эквивокальной или фокальной линиями. Регулярные характеристики касаются этих линий с одной (эквивокальная ситуация) или с двух (фокальная ситуация) сторон. Таким образом, для одной такой волны, выходящей из начала координат, имеются две или три кривые с одним и тем же наклоном. Для их построения важно выяснить взаимное расположение сингулярных и регулярных характеристик. Такой анализ возможен на основе теоремы 1.6 и был использован в главе 4. В случае двумерной задачи удается проделать прямой анализ взаимного расположения характеристик.

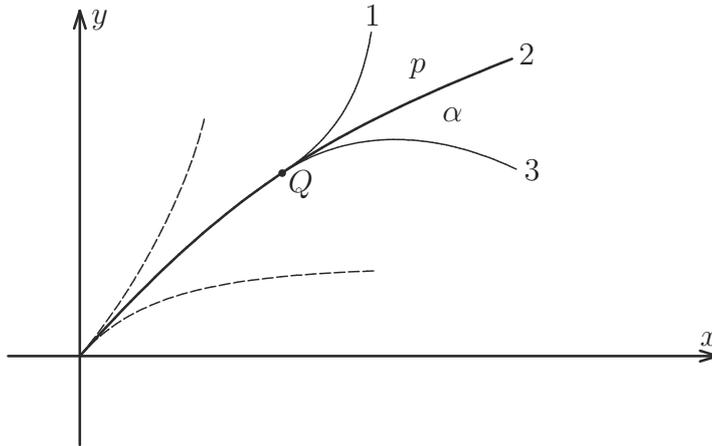


Рис. 7.4

Рассмотрим одну фокальную линию с двумя регулярными характеристиками, касающимися ее с обеих сторон в некоторой точке Q , см. линии 1, 2, 3 на рис 7.4 (линия 2 — фокальная). Точка Q — произвольная точка линии 2 и, в частности, может лежать в начале координат (регулярные характеристики — пунктирные линии на рис. 7.4). Мы снова различаем латинскую и греческую стороны линии 2, обозначив первые компоненты градиентов соответственно через p и α , предполагая, что $p > \alpha$. Все эти кривые имеют одинаковый наклон в точке Q . Для анализа взаимного расположения траекторий нужно исследовать соответствующие вторые производные.

Каждая линия может рассматриваться как график функции, заданной либо в виде $x = x(y)$, либо в параметрической форме: $x = x(t)$, $y = y(t)$. Первые и вторые производные для этих двух представлений связаны следующим образом:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\dot{x}}{\dot{y}}, \quad \frac{d^2x}{dy^2} = \frac{1}{\dot{y}} \frac{d}{dt} \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\dot{y}^3} [\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y}] \quad \left(\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \dot{y} = \frac{dy}{dt} \right) \quad (7.58)$$

Аналогичные соотношения справедливы, если в качестве независимой переменной в (7.6) используется параметр τ . Линии 1, 2, 3 определяются уравнениями (7.3),

(7.18), (7.6) соответственно. Для линий 1, 2 в силу (7.3), (7.18) получаем

$$\begin{aligned}\dot{x} &= F_p, & \ddot{x} &= F_{px}\dot{x} + F_{py}\dot{y} + F_{pu}\dot{u} + F_{pp}\dot{p} + F_{pq}\dot{q} = \\ & & &= F_{px}F_p + F_{py}F_q + F_{pu}(pF_p + qF_q) + F_{pp}\dot{p} + F_{pq}\dot{q} \\ \dot{y} &= F_q, & \ddot{y} &= F_{qx}F_p + F_{qy}F_q + F_{qu}(pF_p + qF_q) + F_{qp}\dot{p} + F_{qq}\dot{q}\end{aligned}\quad (7.59)$$

Выражения производных \dot{p} и \dot{q} здесь должны быть взяты из (7.3) для линии 1 и из (7.18) для линии 2. Эти выражения, соответственно для \dot{p} и \dot{q} , отличаются последним членом:

$$-\frac{A}{B}(p - \alpha), \quad -\frac{A}{B}(q - \beta)$$

Вычислим далее разность значений $r = \ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y}$, связанных с кривыми 2 и 1 (что будет отмечено нижним индексом):

$$\begin{aligned}r_2 - r_1 &= [\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y}]_2 - [\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y}]_1 = [\ddot{x}F_q - \dot{x}\ddot{y}F_p]_2 - [\ddot{x}F_q - \dot{y}F_p]_1 = \\ &= -\frac{A}{B}[F_{pp}F_p(p - \alpha) + F_{pq}F_q(q - \beta) - F_{pq}F_p(p - \alpha) - F_{qq}F_p(q - \beta)] = \\ &= \frac{A}{B}\frac{F_p}{q - \beta}[F_{pp}(p - \alpha)^2 + 2F_{pq}(p - \alpha)(q - \beta) + F_{qq}(q - \beta)^2] = \\ &= -\frac{AF_p}{q - \beta} = \frac{AF_q}{p - \alpha}\end{aligned}\quad (7.60)$$

В этих преобразованиях применено выражение для B , представленное в (7.15), а также равенства

$$F_q = -F_p\frac{p - \alpha}{q - \beta}, \quad F_p = -F_q\frac{q - \beta}{p - \alpha}$$

которые могут быть получены из первого условия касания в (7.9). Используя соотношения (7.58) и (7.60), можно найти следующую формулу для разности вторых производных, связанных с кривыми 2 и 1:

$$\delta_{21} = \frac{d^2x_2}{dy^2} - \frac{d^2x_1}{dy^2} = \frac{1}{\dot{y}^3}[r_2 - r_1] = \frac{A}{(p - \alpha)F_q^2} \quad (\dot{y} = F_q) \quad (7.61)$$

Таким образом, знак δ_{21} определяется знаками разности $p - \alpha$ и скобки Якоби A (см. (7.15)). Аналогично можно найти

$$\delta_{23} = \frac{d^2x_2}{dy^2} - \frac{d^2x_3}{dy^2} = \frac{\bar{A}}{(\alpha - p)\bar{F}_q^2} \quad (7.62)$$

где \bar{A} , \bar{F}_q имеют тот же смысл, как в (7.18). Таким образом, для расположения кривых 1, 2, 3, показанного на рис. 7.4, в общем случае необходимы неравенства (обусловленные тем, что $p > \alpha$):

$$\delta_{21} > 0, \quad A > 0, \quad \delta_{23} < 0, \quad \bar{A} > 0 \quad (p > \alpha) \quad (7.63)$$

В случае, когда, например, величина A имеет противоположный знак, $A < 0$, но все же $\delta_{21} > 0$, кривая 1 расположена также справа от линии 2 (рис. 7.4).

В случае эквивокальной линии имеем только одно соотношение, например, формулу (7.61) (если характеристики латинской стороны касаются линии 2), где $A = \{\{FF_1\}F\}$, как и в системе (7.20).

7.3. Основные результаты для количества волн

7.3.1. Упрощенные выражения скобок Якоби

Формулировки этого раздела используют знаки двух двойных скобок Якоби $\{\{FF_1\}F\}$, $\{\{F_1F\}F_1\}$ — числитель и знаменатель в правой части уравнений для \dot{p} , \dot{q} в (7.18), (7.20). Точнее, эти скобки должны быть рассчитаны на концах отрезков S_i , на которых они касаются кривой C . Согласно построению, лемме 7.1 и формуле (2.12), знаменатель на концах выпуклых отрезков положителен, так как он равен $-f''(0)$ или $-f''(1)$, а функция $f(\lambda)$ (см. (2.7)) имеет локальный максимум при $\lambda = 0$ и/или $\lambda = 1$ (на одном или обоих концах отрезка).

На концах касательного отрезка будет использоваться выражение $A = \{\{FF_1\}F\}^*$, определенное в (7.15). При этом записываем только два основных аргумента, то есть

$$A = A(p, \alpha) = A(0, 0, w_0, p, g(p), \alpha, g(\alpha)) \quad (7.64)$$

Для полукасательного отрезка будет применена скобка Якоби $\{\{FF_1\}F\}$ с одной из следующих функций F_1 :

$$F_1 = F_1^+(x, y, u) = u - v^+(x, y), \quad F_1 = F_1^-(x, y, u) = u - v^-(x, y) \quad (7.65)$$

Здесь $v^\pm(x, y)$ — гладкое решение соответствующей краевой задачи (так называемое первичное решение)

$$\begin{aligned} F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) &= 0, \quad y > 0 \quad (u(x, y) = v^\pm(x, y)) \\ u(x, 0) &= w^+(x) \quad (u(x, 0) = w^-(x)) \end{aligned} \quad (7.66)$$

где $w^\pm(x)$ — гладкие ветви в представлении (7.36). Гладкие решения $v^\pm(x, y)$ существуют (локально) в силу (7.2), (7.39).

Скобка Якоби $\{\{FF_1\}F\}$ имеет вид A в (7.15), но последний член должен быть заменен квадратичной формой (см., например, (7.19))

$$u_{xx}F_p^2 + 2u_{xy}F_pF_q + u_{yy}F_q^2 \quad (u(x, y) = v^\pm(x, y)) \quad (7.67)$$

Чтобы различать касательный и полукасательный варианты, обозначим в полукасательном случае выражение $\{\{FF_1\}F\}$ через A^e (индекс e напоминает об эквивалентной линии).

Из граничного условия (7.66) имеем $u_{xx}(x, 0) = w_{xx}(x)$ (как для $u = v^+$, $w = w^+$, так и для $u = v^-$, $w = w^-$). Это может создать впечатление, что для УЧП первого порядка (7.1) можно иметь какое-либо условие в терминах второй производной от граничной функции $w(x)$, так как величина A^e зависит от $w_{xx}(x)$ через квадратичную форму (7.67). Расчеты показывают, что это не так. Ниже будем опускать индексы \pm , потому что данные исследования охватывают оба случая задачи (7.66). Вычислим квадратичную форму (7.67) для $y = 0$ при $u_{xx}(x, 0) = w_{xx}(x)$. Продифференцируем уравнение (7.66) по x и y , и учитывая результат для $y = 0$,

находим $u_{xy}(x, 0)$, $u_{yy}(x, 0)$ (помня, что $u_{xx}(x, 0) = w_{xx}(x)$):

$$\begin{aligned} F_x + u_x F_u + u_{xx} F_p + u_{xy} F_q &= 0 \\ u_{xy} &= -\frac{1}{F_q}(F_x + p F_u + w_{xx} F_p) = X - \frac{F_p}{F_q} w_{xx} \\ F_y + u_y F_u + u_{xy} F_p + u_{yy} F_q &= 0 \\ u_{yy} &= -\frac{1}{F_q}(F_y + q F_u + u_{xy} F_p) = Y + \left(\frac{F_p}{F_q}\right)^2 w_{xx} \end{aligned} \quad (7.68)$$

Здесь величина u_{xy} используется в формуле для u_{yy} ; X, Y — некоторые функции только от (x, p, q) (поскольку мы рассматриваем $y = 0$). Подстановка величин u_{xy} , u_{yy} из (7.68) в квадратичную форму (7.67) вместе с равенством $u_{xx} = w_{xx}$ показывает, что все три слагаемых, которые содержат w_{xx} , уничтожаются. Тогда получаем

$$\begin{aligned} u_{xx} F_p^2 + 2u_{xy} F_p F_q + u_{yy} F_q^2 &= \\ = w_{xx} F_p^2 + 2X F_p F_q - 2w_{xx} F_p^2 + Y F_q^2 + w_{xx} F_p^2 &= \\ = 2X F_p F_q + Y F_q^2 = -[F_p(F_x + p F_u) + F_q(F_y + q F_u)] \end{aligned} \quad (7.69)$$

Это выражение, будучи подставленным в (7.15) вместо последнего члена в A , окончательно дает следующую формулу для A^e при $x = y = 0$, $u = w_0$:

$$\begin{aligned} A^e &= A^e(p, \alpha) = \\ &= (F_x + p F_u)[F_{pp}(p - \alpha) + F_{pq}(q - \beta)] + (F_y + q F_u)[F_{qq}(q - \beta) + F_{pq}(p - \alpha)] - \\ &\quad - (p - \alpha)(F_{px} F_p + F_{py} F_q + F_{pu} \dot{u}) - (q - \beta)(F_{qx} F_p + F_{qy} F_q + F_{qu} \dot{u}) \\ &\quad (\dot{u} = p F_p + q F_q, \quad q = g(p), \quad \beta = g(\alpha)) \end{aligned} \quad (7.70)$$

Таким образом, обе величины A и A^e при $x = y = 0$, $u = w_0$ зависят от двух существенных переменных p, α , то есть $A = A(p, \alpha)$, $A^e = A^e(p, \alpha)$; в то время как (7.15), (7.69) показывают, что эти переменные равны нулю, когда аргументы равны:

$$A(p, p) = 0, \quad A^e(p, p) = 0$$

Оба аргумента функции $A(p, \alpha)$ соответствуют касающемуся краю касательного отрезка выпукления, в то время как только первый аргумент $A^e(p, \alpha)$ соответствует касающемуся краю полукасательного отрезка выпукления.

7.3.2. Случай простых отрезков

В этом подразделе все отрезки выпукления считаются простыми, особый случай с непростым отрезком рассматривается далее.

Теорема 7.1. Пусть число $m \geq 0$ отрезков выпукления конечно и все отрезки простые. Предположим, что значение A положительно на обоих концах всех касательных отрезков:

$$A(p_i^-, p_i^+) > 0, \quad A(p_i^+, p_i^-) > 0, \quad i = 2, \dots, m-1 \quad (7.71)$$

(здесь следует добавить значения $i = 1$ и/или $i = m$, если S_1 и/или S_m — касательные отрезки). Пусть также значение A^e положительно на касающемся конце одного или, возможно, двух полукасательных отрезков S_1, S_m :

$$A^e(p_1^+, p_1^-) > 0 \quad (p_1^- = p^-); \quad A^e(p_m^-, p_m^+) > 0 \quad (p_m^+ = p^+) \quad (7.72)$$

Тогда справедливы следующие утверждения.

- а) Решение задачи (7.1) с граничными условиями (7.36) имеет ровно m ударных волн.
- б) Волна, соответствующая некасательному отрезку (при $m = 1$ возможен только один отрезок), описывается линией рассеивающего типа.
- в) Волны, соответствующие полукасательным отрезкам (одному или двум), имеют эквивокальный тип.
- г) Каждый касательный отрезок создает ударную волну фокального типа.

Доказательство. Доказательство основано на эффективном построении решения в малом и состоит из трех частей.

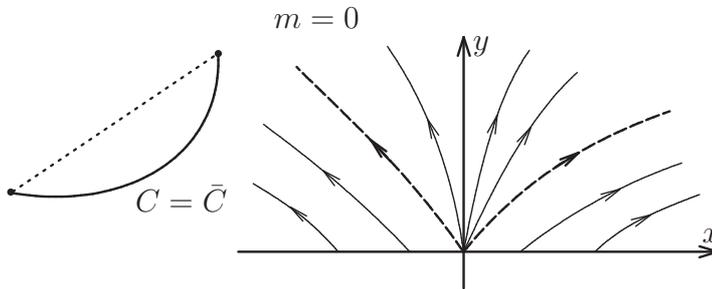


Рис. 7.5

Часть 1. Рассмотрим случай $m = 0$. Кривая C выпуклая (см. рис. 7.5) и $g''(p) < 0$. Отсюда следует неравенство $g'(p^-) < g'(p^+)$, которое благодаря (7.37) и (7.40), дает

$$\left. \frac{dx}{dy} \right|_{x=+0} = \left. \frac{F_p}{F_q} \right|_{x=+0} > \left. \frac{F_p}{F_q} \right|_{x=-0} = \left. \frac{dx}{dy} \right|_{x=-0} \quad (y = 0) \quad (7.73)$$

Это означает, что первичные характеристики, соответствующие в (7.66) значениям $w^+, v^+, x \geq 0$ и $w^-, v^-, x \leq 0$, оставляют пустой сектор с вершиной в начале координат (рис. 7.5). Покажем, что интегральная воронка из характеристик заполняет этот сектор, определяя тем самым функцию $u(x, y)$ и гладко соединяя ветви $v^+(x, y), v^-(x, y)$.

Интегрирование системы (7.3) с учетом начальных условий

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad u(0) = w_0 = w(0), \quad p(0) = s, \quad q(0) = g(s) \\ p^- \leq s \leq p^+$$

дает

$$x = X(s, t), \quad y = Y(s, t), \quad u = U(s, t), \quad p = P(s, t), \quad q = Q(s, t)$$

Искомое решение в виде функции $u(x, y)$ строится следующим образом. Система

$$X(s, t) = x, \quad Y(s, t) = y \quad (7.74)$$

разрешается относительно s, t , и величины $s = S(x, y)$, $t = T(x, y)$ подставляются в $U(s, t)$:

$$u(x, y) = U(S(x, y), T(x, y))$$

Такая процедура работает, если система (7.74) удовлетворяет условиям теоремы о неявной функции. Якобиан системы (7.74) может быть выражен следующим образом:

$$\Delta_1(s, t) = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial s} & \frac{\partial X}{\partial t} \\ \frac{\partial Y}{\partial s} & \frac{\partial Y}{\partial t} \end{vmatrix} = \frac{\partial X}{\partial s} F_q - \frac{\partial Y}{\partial s} F_p$$

Линейные разложения Тейлора функции $X(s, t)$ и ее частной производной записываются в виде

$$X(s, t) = t F_p(s, g(s)) + o(t), \quad \frac{\partial X(s, t)}{\partial s} = t \frac{\partial}{\partial s} F_p(s, g(s)) + o(t)$$

Используя такое же представление для $Y(s, t)$ и формулу (7.41), получаем

$$\Delta_1(s, t) = t F_q^2(s, g(s)) g''(s) + o(t)$$

Видно, что система (7.74) имеет особенность, ее якобиан обращается в нуль на границе $t = 0$ рассматриваемой области $|t| \leq \varepsilon$, $p^- \leq p \leq p^+$. Особенность может быть устранена при переходе к полярным координатам r, ϕ :

$$\begin{aligned} x = r \sin \phi, \quad y = r \cos \phi, \quad r \geq 0, \quad -\frac{\pi}{2} < \phi^- \leq \phi \leq \phi^+ < \frac{\pi}{2} \\ r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \phi = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}, \quad y \geq 0 \end{aligned}$$

Теперь замена переменных

$$\begin{aligned} r = R(s, t) &= \sqrt{X^2(s, t) + Y^2(s, t)} \\ \phi = \Phi(s, t) &= \operatorname{arctg} \frac{X(s, t)}{Y(s, t)} \end{aligned}$$

является регулярной и имеет ненулевой якобиан при $t = 0$ и любом $s \in (p^-, p^+)$. Якобиан Δ_2 можно вычислить аналогично рассмотренному выше якобиану Δ_1 :

$$\Delta_2(s, t) = \begin{vmatrix} \frac{\partial R}{\partial s} & \frac{\partial R}{\partial t} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial s} & \frac{\partial \Phi}{\partial t} \end{vmatrix} = \frac{1}{Y} \frac{\partial X}{\partial s} F_q - \frac{\partial Y}{\partial s} F_p = F_q(s, g(s)) g''(s) \neq 0$$

Таким образом, существуют достаточно гладкие зависимости

$$s = \bar{S}(r, \phi), \quad t = \bar{T}(r, \phi)$$

которые порождают функции

$$S(x, y) = \bar{S}\left(\sqrt{x^2 + y^2}, \operatorname{arctg} \frac{x}{y}\right), \quad T(x, y) = \bar{T}\left(\sqrt{x^2 + y^2}, \operatorname{arctg} \frac{x}{y}\right)$$

Последние используются в определении вписанной выше функции $u(x, y)$. При $x, y \neq 0$ эта функция настолько же гладкая, как и гамильтониан F .

Гладкое согласование $u(x, y)$ и $v^\pm(x, y)$ имеет место, поскольку градиенты этих функций на границе пустого сектора определяются теми же функциями $P(s, t)$, $Q(s, t)$ для $s = p^+$, $s = p^-$.

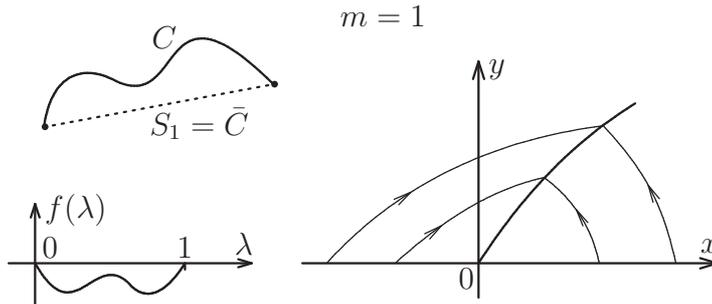


Рис. 7.6

Часть 2. Предположим, что $m = 1$ и отрезок S_1 некасательный. Тогда $S_1 = \bar{C}$ (см. рис. 7.3, 7.6). На рис. 7.6 также показана соответствующая функция $f(\lambda)$, которую получим, если положить в (7.51), (7.52) значения

$$p_1 = p^+, \quad q_1 = q^+ = g(p^+), \quad p_0 = p^-, \quad q_0 = q^- = g(p^-)$$

Используя представление (7.48) и соответствующее изображение на рис. 7.3, 7.6, запишем

$$g'(p^-) > \frac{q^+ - q^-}{p^+ - p^-} > g'(p^+) \tag{7.75}$$

откуда следует, что выполнено противоположное неравенство в (7.73). Это означает, что первичные характеристики из областей $x \geq 0$ и $x \leq 0$, начинающиеся с $y = 0$, пересекаются друг с другом и образуют рассеивающую линию. Неравенство (7.75) в терминах функции $f(\lambda)$ можно записать в виде неравенств (см. (7.48)–(7.52))

$$f'(0) < 0, \quad f'(1) > 1$$

которые отвечают необходимым условиям (2.10) главы 2. Неравенство $f(\lambda) < 0$, $0 < \lambda < 1$, будет выполнено для всех точек рассеивающей линии, достаточно близких к началу координат. Эта часть линии удовлетворяет достаточным условиям для вязкостного решения из раздела 2.1.

Часть 3. Осталось обсудить случай $m \geq 1$, когда все отрезки либо полукасательные, либо касательные. В этом случае для каждой дуги C_i и каждого отрезка S_i есть соответствующие секторы, в которых решение строится независимо, так что решения в соседних секторах сопрягаются гладко.

Для дуги C_i проведем те же построения, что и в части 1 доказательства, используя соответствующий интервал в (7.57). Сектор, соответствующий касательному отрезку, ограничен двумя касающимися регулярными характеристиками (обе касаются фокальной линии, см. рис 7.4). Сектор полукасательного отрезка ограничен сингулярной эквивокальной линией и одной касающейся ее регулярной характеристикой.

Взаимное расположение регулярных и сингулярных характеристик задается знаками A и A^e , определенными в (7.71), (7.72), а также соотношениями (7.61) и (7.62). Регулярные характеристики, ограничивающие секторы, описываются системой (7.3) с начальными условиями

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad u(0) = w_0, \quad p(0) = p_i^\pm, \quad q(0) = g(p_i^\pm), \quad i = 1, \dots, m$$

Значения p_1^- и/или p_m^+ должны быть удалены из этих условий, если отрезок S_1 и/или S_m является полукасательным. Монотонность параметров (7.56) и неравенств (7.71), (7.72) обеспечивает соответствующую упорядоченность таких крайних регулярных характеристик, показанных на рис. 7.7 пунктирными линиями. Отметим, что параметры p_i^\pm , соответствующие пунктирным характеристикам на рис. 7.7, увеличиваются в направлении против часовой стрелки.

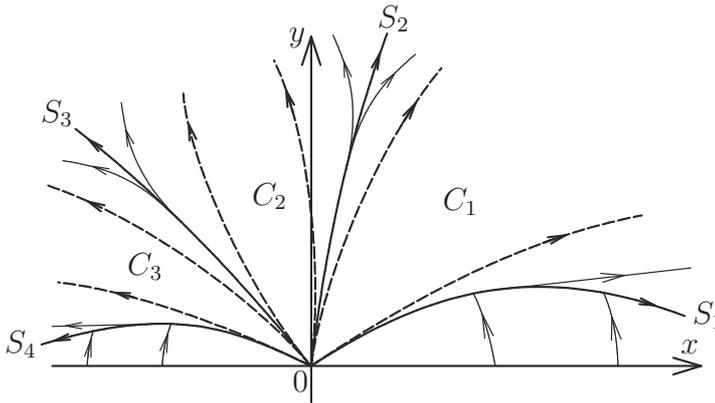


Рис. 7.7

Решение в секторе, соответствующее касательному отрезку, строится следующим образом. Во-первых, сингулярная система (7.18) интегрируется с начальными условиями

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad u(0) = w_0 \\ p(0) = p_i^+, \quad q(0) = g(p_i^+), \quad \alpha(0) = p_i^-, \quad \beta(0) = g(p_i^-)$$

Затем, используя эту сингулярную линию в качестве границы, решаются две пере-

гулярные задачи Коши, что соответствует теореме 1.6. В этой теореме учитывается направление вектора нормали $p - q$ или $p_1 - p_0$ (в векторных обозначениях главы 2) к сингулярной поверхности. В рассматриваемом случае такой вектор выглядит следующим образом:

$$(p_i^+ - p_i^-, q_i^+ - q_i^-) \in \mathbb{R}^2 \quad (q_i^\pm = g(p_i^\pm))$$

Поскольку $p_i^+ - p_i^- > 0$, этот вектор направлен от полукрестности D^+ сингулярной линии (соответствующей p_i^+) к D^- (соответствующей p_i^-). В частности, это означает, что в окрестности сингулярной линии решение имеет сингулярность вида минимума, $u = \min[u^+, u^-]$, ту же, что и начальное условие.

Построение экивокальных линий вместе с их секторами, соответствующими отрезкам S_1 и S_m , проводится одинаково, но решение строится только для одной стороны сингулярной кривой. Для экивокального случая следует проверить, что крайние регулярные характеристики с полуоси $x \geq 0$ или $x \leq 0$ достигают сингулярной линии трансверсально. Это следует из того, что отрезок S_1 (отрезок S_m) не касается кривой C при $p = p_1^- = p^-$ (при $p = p_m^+ = p^+$). Доказательство закончено.

Результаты теоремы показывают, что негладкость в начальном условии вида минимума (7.36) (или максимума) порождает ударные волны того же типа.

7.3.3. Вторичные волны

Рис. 7.7 иллюстрирует теорему 7.1 для одного из возможных общих случаев, который соответствует картине овыпукления на рис. 7.2. Секторы C_1, C_2, C_3 на рис. 7.7 имеют ненулевые углы с множеством регулярных характеристик аналогично характеристикам, изображенным на рис. 7.5. Секторы вокруг сингулярных линий, отмеченные символом соответствующего отрезка S_i , имеют нулевые углы.

Пунктирные линии на рис. 7.7 — регулярные характеристики, по которым происходит согласование соседних секторов. На этих линиях, по построению, первые производные решения в двух соседних секторах равны. Вторые производные, как правило, имеют скачок на этих линиях. Для аналогичного случая это показано прямыми вычислениями в подразделе 2.5.3. Линии разрыва вторых производных вязкостного решения УЧП (7.1) будем называть *вторичными волнами*. В соответствии с определением главы 2, вторичные волны — также сингулярные линии. В многомерном случае вторичные волны — гиперповерхности.

Каждая фокальная ударная волна сопровождается двумя вторичными волнами, а каждая экивокальная волна имеет одну вторичную волну. Каждый сектор, соответствующий дуге C_i , ограничен двумя вторичными волнами. Таким образом, общее число вторичных волн равно удвоенному количеству секторов вида воронки, то есть $2(m - k + 1)$, $k = 0, 1, 2$, где k — число полукасательных отрезков (экивокальных линий). Для рис. 7.7 имеем $m = 4$, $k = 2$, $2(m - k + 1) = 6$. Для рис. 7.5 получаем $m = k = 0$ (только один сектор), число вторичных волн равно 2. Ударные волны (скачки градиента) могут начинаться или заканчиваться во внутренней точке области Ω (которая в рассматриваемом случае имеет вид $y > 0$). Вообще, такая точка лежит на вторичной волне. Это имеет место в случае задачи из раздела 2.5, где фокальная линия заканчивается при $x = b/a$ (рис. 2.17) и продолжается горизонтальным лучом, который представляет собой вторичную волну. Явление

ударной волны, начинающейся из внутренней точки, можно наблюдать в примере, рассматриваемом ниже.

7.3.4. Решение в случае непростого отрезка

Здесь мы формулируем задачу, в которой число волн больше числа выпуклых отрезков. Подобное явление можно встретить в задачах, рассмотренных в главах 2 и 4.

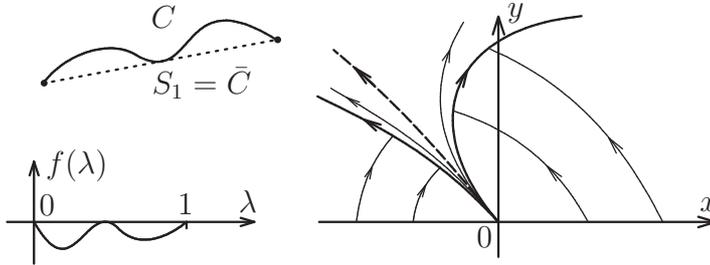


Рис. 7.8

Пусть сумма (7.54) состоит только из одного отрезка S_1 , который не касается кривой C на концах, но имеет одну внутреннюю точку касания. Таким образом, отрезок S_1 не является простым отрезком (рис. 7.8). В этом случае существует такое значение p^* , что

$$\begin{aligned} g'(p^*) &= \frac{g(p^+) - g(p^-)}{p^+ - p^-}, & f'(\lambda^*) &= f(\lambda^*) = 0 \\ p^- < p^* < p^+, & 0 < \lambda^* < 1, & p^* &= \lambda^* p^+ + (1 - \lambda^*) p^- \end{aligned} \quad (7.76)$$

Можно показать, что при некотором дополнительном предположении точка p^* порождает либо две экивокальные линии, касающиеся друг друга, либо одну рассеивающую линию p^* , определяемую равенством

$$\Gamma: v^+(x, y) = v^-(x, y)$$

Здесь $v^\pm(x, y)$ — (первичные) решения задачи (7.66).

Лемма 7.2. Пусть кривая \bar{C} состоит только из одного выпуклого отрезка S_1 , касающегося кривой C в некоторой точке p^* , то есть имеют место соотношения (7.76). Тогда

а) если неравенства, аналогичные (7.72), выполнены:

$$A^e(p^*, p^-) > 0, \quad A^e(p^*, p^+) > 0 \quad (7.77)$$

то существуют две ударные волны экивокального типа, касающиеся друг друга;

б) если функция $f(\lambda)$, соответствующая точкам Γ , неположительна:

$$f(\lambda) = f(\lambda; x, y) \leq 0, \quad 0 \leq \lambda \leq 1, \quad (x, y) \in \Gamma \quad (7.78)$$

то существует одна рассеивающая ударная волна.

Доказательство утверждения а) аналогично доказательству теоремы 7.1. Два сектора, соответствующие двум экивокальным линиям, имеют одну общую часть границы (см. пунктирную линию на рис. 7.8), регулярные характеристики касаются обеих экивокальных кривых и лежат между ними. Пунктирная линия является вторичной волной. Можно построить такой пример, используя задачу из раздела 2.5 и рассматривая прямую $x = x_1$ в качестве границы области Ω (рис. 2.16).

Утверждение б) использует достаточные условия рассеивающей поверхности из главы 2. Для доказательства нужно построить кривую $\Gamma: v^+(x, y) = v^-(x, y)$, а затем проверить условия (7.78). Конечно, если условия (7.78) выполнены, то по крайней мере одно из неравенств (7.77) должно быть нарушено. В общем случае нарушение условий (7.71), (7.72) приводит к возникновению ударных волн рассеивающего типа.

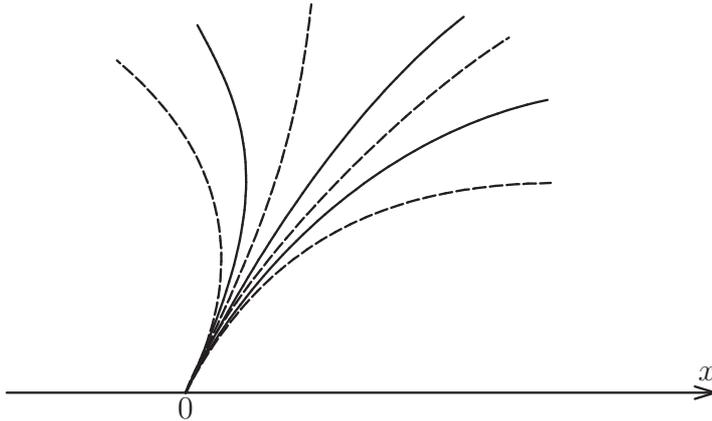


Рис. 7.9

Хотя непростой отрезок из леммы 7.2 порождает две экивокальные линии, эти линии имеют одинаковый наклон, то есть общую касательную в начале координат. Непростые отрезки могут увеличить число волн, но число их возможных наклонов в начале координат остается равным количеству отрезков. Непростые отрезки с несколькими точками касания могут привести к пучку фокальных линий и вторичных волн с одинаковым наклоном (см. рис. 7.9, который соответствует касательному отрезку с двумя внутренними точками касания). Построение таких вырожденных ударных волн требует анализа особенности ситуации необщего положения. Можно найти одну из ситуаций необщего положения также в задаче из раздела 2.5 в конце обсуждения фокальной линии. Там график функции $g(p)$ совпадает с хордой $g(p) \equiv L(p)$, $p^- \leq p \leq p^+$, то есть существует бесконечное число внутренних точек касания для единственного отрезка выпукления.

7.3.5. Теорема С.Н. Кружкова

Теорема 7.1, приведенная выше, фактически является обобщением результата С.Н. Кружкова для частного случая уравнения Гамильтона – Якоби

$$u_t + H(u_x) = 0 \quad (7.79)$$

где гамильтониан H зависит только от u_x . Это уравнение имеет автомодельные решения вида $u = u(x/t)$. Вдоль регулярных характеристик, как следует из (7.3), параметры u_t, u_x постоянны, и характеристики, как регулярные, так и сингулярные, — прямые линии (см. рис. 7.10). В формулировке С.Н. Кружкова нет требования на простоту овыпукляющих отрезков. Число волн всегда равно числу отрезков овыпукления. Вторичные волны не существуют: они совпадают с первоначальными волнами. Фокальные и эквивокальные линии не имеют касания с регулярными характеристиками. Фокальные линии геометрически индифферентны (см. рис. 3.1); эквивокальные линии принимают форму вырожденной сингулярной поверхности (см. подраздел 2.4.4 и рис. 2.13).

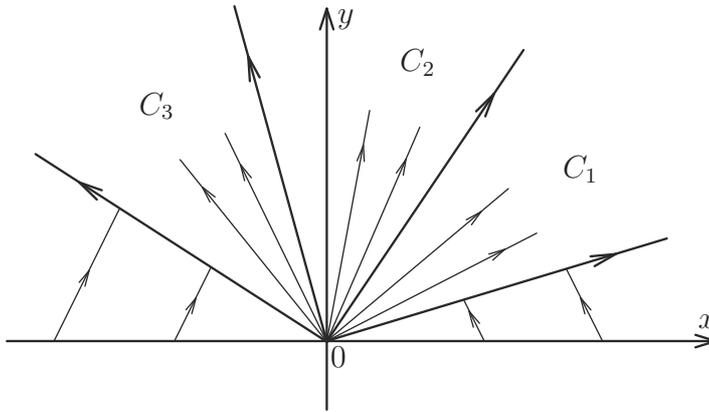


Рис. 7.10

Результат С.Н. Кружкова имеет глобальный характер, но он связан с особым видом (7.79) уравнений в частных производных (7.1). Теорема 7.1 носит локальный характер, но верна и для общих нелинейных уравнений в частных производных (7.1), для которых нужно различать типы сингулярностей: фокальные, эквивокальные и т.д.

7.3.6. Пример

Рассмотрим следующую задачи Коши:

$$\begin{aligned} F &= F(y, p, q) = q + \sqrt{a^2 + p^2} - y\sqrt{b^2 + p^2} = 0, \quad y > 0 \\ u(x, 0) &= w(x) = \max[w^+(x), w^-(x)] = |x| = \max[x, -x] \\ (p &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad w^+ = x, \quad w^- = -x) \end{aligned} \quad (7.80)$$

Здесь гамильтониан имеет вид (2.53), но переменные x, y переставлены для сохранения обозначений этой главы. Граничная функция $w(x)$ имеет угловую точку при $x = 0$. Вместо сингулярности типа минимума, как в (2.53), (7.36) ($w(x)$ вогнута), рассмотрим сингулярность типа максимума ($w(x)$ выпукла). Последнее влечет соответствующие изменения в приведенных выше конструкциях (и задает другую картину сингулярностей по сравнению с задачей (2.53)). В частности, вместо овыпукления надграфика $g(p)$ нужно овыпуклять множество (см. (7.56))

$$\begin{aligned} q &\leq g(p), \quad p^- \leq p \leq p^+ \\ p^+ &= w_x^+(0) = w_x(+0) = 1, \quad p^- = w_x^-(0) = w_x(-0) = -1 \end{aligned}$$

При этом значения p^+ и p^- задаются, соответственно, как значения p^- и p^+ в (7.37). Поскольку уравнение в (7.80) является уравнением Гамильтона – Якоби, то функция $g(p)$, определенная равенством (7.38), имеет вид (7.42), то есть

$$q = g(p) \equiv -\sqrt{a^2 + p^2}, \quad |p| \leq 1$$

При $a > 0$ эта функция гладкая, вогнутая и число отрезков овыпукления (в измененной версии) равно нулю. Таким образом, поведение регулярных характеристик в окрестности начала координат может быть проиллюстрировано рис. 7.5.

Интегрируя уравнения регулярных характеристик (или используя (2.57)), получаем первичные решения

$$u^\pm(x, y) = \pm x + \frac{1}{2}y^2\sqrt{b^2 + 1} - y\sqrt{a^2 + 1} \quad (7.81)$$

а также функции $x = X(s, t)$, $u = U(s, t)$ (см. часть 1 доказательства теоремы 7.1):

$$\begin{aligned} x = X(s, t) &= s \left(\frac{y}{\sqrt{a^2 + s^2}} - \frac{y^2}{2\sqrt{b^2 + s^2}} \right), \quad |s| \leq 1 \quad (y = t) \\ u = U(s, t) &= \frac{y^2 b^2}{2\sqrt{b^2 + s^2}} - \frac{y a^2}{\sqrt{a^2 + s^2}} \end{aligned} \quad (7.82)$$

Заметим, что для уравнения Гамильтона – Якоби переменную y можно рассматривать как независимую переменную t ; величина s – предельное значение производной p . Значение $s = \pm 1$ дает крайние кривые интегральной воронки (вторичные волны). Это завершает локальный анализ.

Глобальное рассмотрение дает следующее. Анализ показывает, что при $a > b$ луч

$$x = 0, \quad y \geq 2\frac{b}{a}$$

будет рассеивающей линией. Начальная точка рассеивающей линии может быть найдена как второй корень уравнения $X(0, y) = 0$, а первым является $y = 0$. Следующий фрагмент рассеивающей линии при

$$2\frac{b}{a} \leq y \leq 2\sqrt{\frac{b^2+1}{a^2+1}}$$

задается пересечением двух множеств кривых $x = X(s, y)$, отвечающих положительным и отрицательным значениям s в (7.82). Другая часть рассеивающей линии определяется равенством $u^+(x, y) = u^-(x, y)$ для первичных решений (7.81). Таким образом, при $a \geq b$ существует только одна сингулярная кривая — рассеивающая линия.

Для $a < b$ на каждой вторичной волне начинается одна рассеивающая линия. Начальную точку рассеивающей линии можно найти, приравняв одну из первичных ветвей (7.81) и функцию $U(s, y)$ в (7.82). Полагая $s = 1$ (для ветви $u^+(x, y)$) и подставляя $X(s, y)$ в (7.81), разрешаем уравнение $u^+(X(s, y), y) = U(s, y)$ относительно y . Получаем

$$\begin{aligned} y &= 2\frac{h(s)}{d(s)}, & h(s) &= \sqrt{a^2+1} - \frac{a^2+s}{\sqrt{a^2+s^2}} \\ d(s) &= \sqrt{b^2+1} - \frac{b^2+s}{\sqrt{b^2+s^2}} \end{aligned} \quad (7.83)$$

Это выражение имеет неопределенность при $s \rightarrow 1$, которая может быть раскрыта двойным применением правила Лопиталья. В результате находим

$$y^* = \lim_{s \rightarrow 1} 2\frac{h(s)}{d(s)} = 2\frac{h''(1)}{d''(1)} = 2\frac{a^2}{b^2} \left(\frac{b^2+1}{a^2+1}\right)^{3/2} \quad (7.84)$$

Таким образом, две рассеивающие линии начинаются в точках

$$x = \pm x^* = X(\pm 1, y^*) = \pm \frac{y^*}{\sqrt{a^2+1}} \mp \frac{y^{*2}}{2\sqrt{b^2+1}}, \quad y = y^*$$

В случае $a < b$ сингулярные линии также имеют рассеивающий тип. Построение полной картины сингулярностей остается в качестве упражнения.

7.3.7. Некоторые обобщения на многомерный случай

Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{aligned} F(x_1, \dots, x_n, u, p_1, \dots, p_n) &= 0, & x_n &> 0 \quad (n > 2) \\ u(\bar{x}, 0) &= w(\bar{x}) = \min[w^+(\bar{x}), w^-(\bar{x})], & \bar{x} &= (x_1, \dots, x_{n-1}) \end{aligned} \quad (7.85)$$

где $w^\pm(\bar{x})$ — гладкие функции $n-1$ переменных. Предполагаем, что равенство $w^+(\bar{x}) = w^-(\bar{x})$ задает гладкую $(n-2)$ -мерную поверхность Γ_2 . Без ограничения общности можно предположить, что Γ_2 является координатной плоскостью, определяемой формулами $x_n = 0, x_{n-1} = 0$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \Gamma_2 &= \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0, x_{n-1} = 0\} = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^{n-1} : x_{n-1} = 0\} \\ w(\tilde{x}, 0) &= w^+(\tilde{x}, 0) = w^-(\tilde{x}, 0), & \tilde{x} &= (x_1, \dots, x_{n-2}) \in \mathbb{R}^{n-2} \end{aligned}$$

Здесь используются два типа укороченного вектора x : $\bar{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$ и $\tilde{x} \in \mathbb{R}^{n-2}$. Как и в (7.37), введем предельные значения p_{n-1} , которые в рассматриваемом случае являются функциями от \tilde{x} :

$$p_{n-1}^+ = \frac{\partial w(\tilde{x}, -0)}{\partial x_{n-1}} = \frac{\partial w^-(\tilde{x}, 0)}{\partial x_{n-1}} > \frac{\partial w^+(\tilde{x}, 0)}{\partial x_{n-1}} = \frac{\partial w(\tilde{x}, +0)}{\partial x_{n-1}} = p_{n-1}^- \quad (7.86)$$

$$p_{n-1}^+ = p_{n-1}^+(\tilde{x}), \quad p_{n-1}^- = p_{n-1}^-(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in \mathbb{R}^{n-2}$$

Предположим, что существует единственное глобальное решение $p_n = g(\tilde{x}, p_{n-1})$, удовлетворяющее уравнению (7.85) при $x \in \Gamma_2$:

$$F(\tilde{x}, 0, 0, w(\tilde{x}, 0), p_1(\tilde{x}), \dots, p_{n-2}(\tilde{x}), p_{n-1}, g(\tilde{x}, p_{n-1})) = 0$$

$$p_{n-1}^-(\tilde{x}) \leq p_{n-1} \leq p_{n-1}^+(\tilde{x}) \quad (7.87)$$

$$p_i(\tilde{x}) = \frac{\partial w(\tilde{x}, -0)}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n-2, \quad \tilde{x} \in \mathbb{R}^{n-2}$$

Дифференцируя тождество (7.87) по p_{n-1} , можно найти следующее представление, аналогичное (7.41):

$$g(\tilde{x}, p_{n-1}) = p_n^-(\tilde{x}) - \int_{p_{n-1}^-}^{p_{n-1}^+} \frac{F_{p_{n-1}}}{F_{p_n}} ds, \quad p_{n-1}^-(\tilde{x}) \leq p_{n-1} \leq p_{n-1}^+(\tilde{x})$$

$$p_n^\pm(\tilde{x}) = g(\tilde{x}, p_{n-1}^\pm(\tilde{x}))$$

Рассмотрим сингулярную фокальную гиперповерхность Γ , начинающуюся на Γ_2 , то есть исследуем случай, когда Γ_2 является краем Γ . Пусть p и q — градиенты (негладкого) решения по разные стороны от Γ . Из условия на границе следует, что при $x \in \Gamma_2$ первые $n-2$ компонент векторов p и q даются выражениями (7.87), то есть равны друг другу. Это означает, что вектор $p - q$ нормален к Γ и имеет на Γ только две ненулевые компоненты $p_{n-1} - q_{n-1}$ и $p_n - q_n$. Таким образом, условие касания поверхности Γ_2 также записывается в терминах двух последних компонент:

$$\langle F_p, p - q \rangle = F_{p_{n-1}}(p_{n-1} - q_{n-1}) + F_{p_n}(p_n - q_n) = 0$$

Это дает возможность применить результаты подраздела 1.2.2. В частности, количество и характер возможных ударных волн могут быть описаны через выпукление кривой $p_n = g(\tilde{x}, p_{n-1})$ на (p_n, p_{n-1}) -плоскости, при этом \tilde{x} — вектор-параметр.

Можно сформулировать и доказать аналог теоремы 7.1. Есть два важных различия, одно из которых связано с формулировкой, другое — с доказательством. Во-первых, следует предположить, что выпукление описывает ситуацию общего положения, так что при достаточно малом возмущении параметра \tilde{x} не меняется характер кривой \bar{C} . Во-вторых, для доказательства нужны будут способы построения эквивокальной и фокальной поверхностей. Для эквивокальной поверхности можно использовать уравнения сингулярных характеристик, полученные в главе 2. Фокальные поверхности в многомерном случае не обязательно являются поверхностями одного из двух видов (рассмотренных в главе 2), для которых мы имеем замкнутую систему сингулярных характеристик. Для поверхностей первого вида Γ —

гиперплоскость, а для поверхностей второго вида на Γ выполняется условие коллинеарности. В неколлинеарном случае можно разработать численный алгоритм построения Γ , хотя дифференциально-алгебраическая система также возможна.

7.4. Другие приложения метода сингулярных характеристик

7.4.1. Сингулярные характеристики в законах сохранения

Метод сингулярных характеристик (МСХ), разработанный в главах 1 и 2, используется в книге в основном для построения непрерывного (негладкого) решения УЧП первого (или второго, как в следующей главе) порядка. В некоторых частных случаях МСХ может быть применен также для анализа разрывных решений.

Рассмотрим уравнение скалярного закона сохранения

$$v_t + \frac{\partial}{\partial x} f(x, t, v) = 0 \quad (7.88)$$

где $v(x, t)$ — неизвестная функция, x — скалярная переменная. Вместе с (7.88) запишем уравнение

$$u_t + f(x, t, u_x) = 0 \quad (7.89)$$

относительно функции $u(x, t)$. Решение уравнения (7.89) понимается в вязкостном смысле и предполагается непрерывной функцией. Дифференцируем левую часть (7.89) по x :

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(x, t, u_x) = \frac{\partial}{\partial t} u_x + \frac{\partial}{\partial x} f(x, t, u_x) = 0$$

Замена u_x на v дает сразу уравнение (7.88). Производная $v = \partial u / \partial x$ от непрерывной функции $u(x, t)$ имеет скачок в точках излома $u(x, t)$. Таким образом, построение разрывного решения уравнения (7.88) может быть сведено к построению непрерывного негладкого решения уравнения (7.89). Подобная процедура редукции требует определенного математического обоснования на основе понятия обобщенного разрывного решения (7.88). Мы опускаем здесь такой анализ и считаем, что задача вида (7.88) допускает описанную выше редукцию.

Можно использовать МСХ для построения эквивокальных, фокальных, рассеивающих и некоторых других типов сингулярностей для уравнения (7.89). Те же самые сингулярные линии будут представлять ударные волны в исходной задаче. Это предполагает классификацию типов сингулярностей разрывных решений (7.88). Напомним, что для существования эквивокальных или фокальных сингулярностей функция $f(x, t, p)$ в (7.89) не должна быть ни выпуклой, ни вогнутой по p .

Аналогично, рассматривая многомерное уравнение Гамильтона – Якоби

$$u_t + f\left(x_1, \dots, x_n, t, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0 \quad (7.90)$$

и дифференцируя его по каждой компоненте x_k , можно получить систему законов

сохранения специального типа:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, \dots, x_n, t, v_1, \dots, v_n) &= 0 \\ \frac{\partial v_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1, \dots, x_n, t, v_1, \dots, v_n) &= 0 \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{\partial v_n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_n} f(x_1, \dots, x_n, t, v_1, \dots, v_n) &= 0 \end{aligned}$$

относительно неизвестных функций

$$v_i(x_1, \dots, x_n, t) = \frac{\partial u(x_1, \dots, x_n, t)}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n$$

Здесь опять разрывное решение системы можно построить с помощью МСХ для уравнения (7.90).

Как можно видеть, вышеописанная редукция требует, чтобы функция f в (7.89) и (7.90) не зависела от u , то есть уравнение Гамильтона – Якоби не содержало самой неизвестной функции, а только ее частные производные. Наличие переменных x_1, \dots, x_n, t в аргументах функции f не является препятствием для применения МСХ.

7.4.2. Об одном классе систем уравнений в частных производных первого порядка

Система характеристик на многообразии W_{2m+1} , выведенная в главе 1, может быть полезной для построения решения систем УЧП первого порядка специального типа. Приведем описание такого класса для $m = 1$; случай $m > 1$ исследуется аналогично. Рассмотрим многообразие W_3 , определенное в \mathbb{R}^{2n+1} равенствами

$$\begin{aligned} W_3 : \quad F_{-1}(x, u, p) = 0, \quad F_0(x, u, p) = 0, \quad F_1(x, u, p) = 0 \\ (x, u, p) \in \mathbb{R}^{2n+1} \end{aligned} \quad (7.91)$$

Задача 1.4 (задача Коши для проекций, см. раздел 1.2) может быть рассмотрена в терминах многообразия (7.91). Решение такой задачи есть пара (u, Γ) , где Γ — $(n-1)$ -мерная поверхность, $u = u(x)$ — функция, определенная на Γ . Полезно отметить, что решение (u, Γ) представляется при помощи двух скалярных функций $n-1$ переменных. Действительно, поверхность $n-1$ переменных может быть локально задана равенством

$$\Gamma : \quad x_n = w(\bar{x}), \quad \bar{x} = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \quad (7.92)$$

Введем также функцию $v(\bar{x})$ — сужение $u(x)$ на Γ :

$$v(\bar{x}) = u(\bar{x}, x_n) = u(\bar{x}, w(\bar{x})) \quad (7.93)$$

Функции $(v(\bar{x}), w(\bar{x}))$ полностью описывают решение (u, Γ) .

Найдем условия, которым эти функции должны удовлетворять согласно (7.91). Продифференцируем тождество (7.93) по x_1, \dots, x_{n-1} :

$$\frac{\partial v}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial x_n} \frac{\partial w}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, x_{n-1}$$

Добавим к полученным $n - 1$ уравнениям последнее равенство из (7.91). Система

$$\begin{aligned} q_i = p_i + p_n r_i, \quad i = 1, \dots, x_{n-1} \quad \left(q_i = \frac{\partial v}{\partial x_i}, r_i = \frac{\partial w}{\partial x_i} \right) \\ F_1(\bar{x}, w, v, p_1, \dots, p_n) = 0 \end{aligned} \quad (7.94)$$

рассматривается как система относительно n неизвестных p_1, \dots, p_n . Можно показать, что якобиан этой системы равен скалярному произведению

$$\Delta = \langle F_{1p}, r^* \rangle, \quad r^* = (-r_1, \dots, -r_{n-1}, 1) \in \mathbb{R}^n$$

Будем считать его отличным от нуля. Так как вектор r^* — нормаль к Γ , то условие $\Delta \neq 0$ означает, что вектор F_{1p} не лежит в касательном пространстве $T_x \Gamma$. Базис пространства $T_x \Gamma$ для $x \in \Gamma_2$ состоит из векторов

$$\begin{aligned} y_1(x), \dots, y_{n-2}(x), H_p^\sigma, \quad x \in \Gamma_2 \\ H_p^\sigma = \{F_0 F_1\} F_{-1p} + \{F_1 F_{-1}\} F_{0p} + \{F_{-1} F_0\} F_{1p} \end{aligned}$$

где $\Gamma_2 = \pi \Sigma_2$ — часть начальных условий для задачи 1.4 и $y_j(x)$, $j = 1, \dots, n-2$, есть базис касательного пространства $T_x \Gamma_2$. Таким образом, условие $\Delta \neq 0$ эквивалентно линейной независимости вектора F_{1p} и перечисленных выше базисных векторов; или условию линейной независимости в \mathbb{R}^n векторов

$$y_1(x), \dots, y_{n-2}(x), \{F_0 F_1\} F_{-1p} + \{F_1 F_{-1}\} F_{0p}, F_{1p}, \quad x \in \Gamma_2$$

где член $\lambda_1 F_{1p}$ удаляется из выражения для градиента H_p^σ сингулярного гамильтониана H^σ .

Пусть

$$p = P(\bar{x}, w, v, r, q), \quad r = (r_1, \dots, r_{n-1}), \quad q = (q_1, \dots, q_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$$

представляет собой единственное (при соответствующих условиях) решение системы (7.94). Подставляя функцию P в первые два равенства в (7.91), получаем

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{-1}(\bar{x}, w, v, r, q) = 0, \quad \tilde{F}_0(\bar{x}, w, v, r, q) = 0 \\ \tilde{F}_k(\bar{x}, w, v, r, q) = F_k(\bar{x}, w, v, P(\bar{x}, w, v, r, q)), \quad k = -1, 0 \end{aligned} \quad (7.95)$$

Таким образом, функции $(v(\bar{x}), w(\bar{x}))$ решают систему двух нелинейных уравнений в частных производных первого порядка (7.95). Начальные условия для системы (7.95) могут быть сформулированы на основе начальных условий в задаче 1.4 раздела 1.2. Как показано в главе 1, решение (u, Γ) задачи 1.4 сводится к интегрированию системы сингулярных характеристик для многообразия W_3 , описанного

в (7.91). Это означает, что система (7.95) может быть также решена интегрированием той же системы ОДУ.

Конечно, не всякую систему двух уравнений в частных производных первого порядка можно трактовать таким образом. Описанная выше редукция к характеристической системе ОДУ имеет место только для определенного класса систем (7.95).

Класс систем, для которых редукция к системе ОДУ возможна, описывается следующим образом: для заданных функций $\tilde{F}_{-1}(\bar{x}, w, v, r, q)$, $\tilde{F}_0(\bar{x}, w, v, r, q)$ должны существовать такие три функции $F_{-1}(x, u, p)$, $F_0(x, u, p)$, $F_1(x, u, p)$, что процедура (7.92)–(7.94) приводит к тем же самым функциям $\tilde{F}_{-1}, \tilde{F}_0$.

В некоторых случаях соответствующие функции F_i можно найти практически. Рассмотрим, например, систему двух уравнений в частных производных первого порядка специального вида (заданную априори)

$$\begin{aligned} G(\bar{x}, w, v, h) &= 0, & R(\bar{x}, w, v, h) &= 0 \\ h &= A(\bar{x}, w, v)q + B(\bar{x}, w, v)r \in \mathbb{R}^{n-1} \end{aligned} \quad (7.96)$$

где функции G, R зависят от векторов q, r через их линейные комбинации (A, B — скаляры). Введем функции F_i следующим образом:

$$\begin{aligned} F_{-1}(x, u, p) &= G(\bar{x}, x_n, u, A(\bar{x}, x_n, u)\bar{p}) \\ F_0(x, u, p) &= R(\bar{x}, x_n, u, A(\bar{x}, x_n, u)\bar{p}) \\ F_1(x, u, p) &= A(\bar{x}, x_n, u)p_n + B(\bar{x}, x_n, u), \quad \bar{p} = (p_1, \dots, p_{n-1}) \end{aligned} \quad (7.97)$$

Здесь функции F_{-1}, F_0 зависят только от $n - 1$ компонент (p_1, \dots, p_{n-1}) вектора $p = (p_1, \dots, p_n)$; функция F_1 зависит только от последней компоненты p_n . Якобиан системы (7.94) равен $\Delta = A(\bar{x}, x_n, u)$. Можно показать, что система (7.95), соответствующая функциям (7.97), имеет вид (7.96). Таким образом, система вида (7.96) может быть решена с помощью МСХ.

В случае многообразий W_{2m+1} с $m > 1$ изложенные построения обобщаются следующим образом. Имеем $m + 1$ неизвестных функций $n - m$ переменных (скажем, x_1, \dots, x_{n-m}), которые описывают $(n - m)$ -мерную поверхность Γ_m , и функцию $u(x)$, заданную на этой поверхности. Некоторые m функций из F_i , $|i| \leq m$, должны быть включены в систему, аналогичную (7.94). Оставшиеся $m + 1$ функций порождают систему $m + 1$ уравнений первого порядка в частных производных относительно $m + 1$ функций, аналог системы (7.95).

Упражнения

7.1. Вывести системы уравнений (7.27) и (7.32), используя их общий вид (7.18) и (7.20).

7.2. Получить уравнения (7.30) и (7.31). Доказать следующее разложение для (7.30):

$$\dot{p} = H_x + pH_u - \frac{p - \alpha}{2H_{pp}} \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} + o(p - \alpha)$$

7.3. Вывести системы уравнений (7.33) и (7.34), сравнить с уравнениями сингулярных линий в разделе 2.5.

7.4. Нарисовать четыре ситуации общего положения при овыпуклении для $m = 2$ (см. рис. 7.3 для $m = 1$).

7.5. Проверить формулу (7.60).

7.6. Вывести соотношения (7.83) и (7.84).

7.7. В случае $a < b$ найти все сингулярные линии и завершить решение задачи (7.80).

7.8. Вывести выражение для якобиана системы (7.94).

7.9. Получить начальные условия для системы (7.95), используя постановку задачи 1.4.

7.10. Вывести систему (7.96), начав с (7.97).

ГЛАВА 8

Сингулярные поверхности негладких решений вариационных задач с функционалом, задаваемым многомерным интегралом

8.1. Задача вариационного исчисления с многомерным интегралом

8.1.1. Негладкое решение УЧП второго порядка

В этой главе будет рассмотрен еще один (третий) класс задач, в которых сингулярные характеристики формируют сингулярные поверхности, но на этот раз для УЧП второго порядка. Такие характеристики можно понимать либо как аналог соответствующих сингулярных характеристик для УЧП первого порядка, либо как введенные в главе 1 обобщенные характеристики, относящиеся непосредственно к УЧП второго порядка, а именно к уравнению Эйлера для вариационной задачи. В последнем случае многообразие W и соответствующий сингулярный гамильтониан определяются при помощи обобщенных условий Вейерштрасса – Эрдмана, а также условия непрерывности решения.

Рассмотрим вариационную задачу с неизвестной скалярной функцией $u(x)$, $x \in \sigma \subset \mathbb{R}^n$, и заданными граничными условиями:

$$J = \int_G F(x, u(x), p(x)) dx \rightarrow \text{extr} \quad (p = \partial u / \partial x) \quad (8.1)$$
$$B[u(x)] \Big|_{x \in \partial G} = 0$$

Функционал (8.1) вычисляется на множестве

$$U = \{u^*(x), G_*\} \quad (8.2)$$

состоящем из пар $(u^*(x), G_*)$, где непрерывная функция $u^*(x)$ определена на своем собственном множестве G_* и является на этом множестве дважды кусочно-дифференцируемой, что обозначим через $u^*(x) \in PC^2(G_*)$.

Таким образом, вариационная задача (8.1) в общем случае не является задачей с фиксированными граничными условиями. Оператор B в (8.1) определяет некоторые граничные условия, которые могут быть различными на разных частях границы. Эти условия будут уточнены ниже. Лагранжиан F полагается достаточно

гладким и имеющим, по крайней мере, производные до третьего порядка включительно.

Известно, что дважды непрерывно дифференцируемое решение задачи (8.1) удовлетворяет следующему УЧП второго порядка (уравнению Эйлера)

$$F_u - \operatorname{div} F_p = 0, \quad x \in G \quad \left(\operatorname{div} F_p = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} F_{p_i} \right) \quad (8.3)$$

В общем случае негладкая функция из класса (8.2) также может быть решением вариационной задачи (8.1). Для таких функций уравнение Эйлера (8.3) выполняется только в точках гладкости решения. Без некоторых дополнительных условий на поверхностях негладкости решение, вообще говоря, не будет единственным. С целью расширения рассматриваемого множества решений уравнения (8.3) до кусочно-гладких функций (8.2), определим обобщенное решение (8.3) как функцию из класса $PC^2(G)$, удовлетворяющую условию

$$\delta J[u(x); \delta u(x)] = 0 \quad \text{для любого допустимого } \delta u(x) \quad (8.4)$$

где δJ — первая вариация функционала (8.1), соответствующая вариации $\delta u(x)$ (которая будет определена ниже) относительно функции $u(x)$. Таким образом, обобщенное решение должно удовлетворять уравнению (8.3) в точках гладкости и некоторым условиям, вытекающим из (8.4), в точках негладкости. Вопрос о единственности такого решения рассматриваться не будет, однако полагается, что существование самого решения обеспечивается эффективными методами его построения. Итак, используя вариационный принцип для УЧП второго порядка вида (8.3), можно ввести обобщенное решение. Для УЧП других типов, чтобы ввести обобщенное решение, должно быть предварительно получено его соответствующее математическое или физическое обоснование.

8.1.2. Формула первой вариации

Множество U в (8.2), представляющее собой область определения функционала (8.1), не является линейным пространством вследствие того, что G не фиксировано и может меняться. Таким образом, для вывода формулы первой вариации требуется специальный подход, см. [71]. Так же, как и в случае вариационной задачи с одномерным интегралом в подразделе 3.1.1, будем рассматривать однопараметрическое семейство допустимых функций $(u(x, \varepsilon), G_\varepsilon)$ — кривую на многообразии U . Предположим, что существует гладкое обратимое преобразование n -мерных пространств \mathbb{R}_x^n и \mathbb{R}_y^n , такое что

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_x^n \rightarrow \mathbb{R}_y^n: \quad y &= \Phi(x, \varepsilon), \quad \Phi(x, 0) = x \\ \mathbb{R}_y^n \rightarrow \mathbb{R}_x^n: \quad x &= \Psi(y, \varepsilon), \quad \Psi(y, 0) = y \\ \Phi(\Psi(y, \varepsilon), \varepsilon) &= y, \quad \Psi(\Phi(x, \varepsilon), \varepsilon) = x, \quad |\varepsilon| \leq \varepsilon_0 \end{aligned} \quad (8.5)$$

Здесь $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_n)$, $\Psi = (\Psi_1, \dots, \Psi_n)$ — гладкие вектор-функции.

Рассмотрим вектор-функцию $\phi(x) = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ и область $G_\varepsilon \subset \mathbb{R}_y^n$:

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \frac{\partial \Phi(x, 0)}{\partial \varepsilon} = -\frac{\partial \Psi(x, 0)}{\partial \varepsilon} \\ G_\varepsilon &= \{y \in \mathbb{R}_y^n : y = \Phi(x, \varepsilon), x \in G_0\}\end{aligned}\quad (8.6)$$

Первое верхнее равенство является определением функции $\phi(x)$, а второе можно получить, дифференцируя по ε тождество $\Phi(\Psi(y, \varepsilon), \varepsilon) = y$ и используя следствие из соотношений (8.5), имеющее вид $\Phi_x(x, 0) = I$, где I — единичная матрица.

Зафиксируем два элемента $(u(x), G)$, $(h(x), G)$ множества U , таких что $u(x)$, $h(x)$ — некоторые гладкие функции, а $G = G_0$. Определим однопараметрическое семейство функций следующим образом:

$$(w(y, \varepsilon), G_\varepsilon) : w(y, \varepsilon) = u(\Psi(y, \varepsilon)) + \varepsilon h(\Psi(y, \varepsilon)), \quad y \in G_\varepsilon \quad (8.7)$$

где множество G_ε задано в (8.6). При $\varepsilon = 0$ имеем $G_\varepsilon = G_0 = G$ и $w(x, 0) = u(x)$ (так как $y = x$). Функцию $w(x, 0)$ будем также обозначать через $u_0(x)$, так что соответствующий элемент множества U есть $(u_0(x), G_0)$. В пространстве функций семейство (8.7) представляет собой кривую, проходящую через точку $(u_0(x), G_0)$. При различных функциях h получаем бесконечное множество кривых. Отметим, что можно построить кривую из семейства (8.7), связывающую две заданные точки $(u_0(x), G_0)$ и $(v(x), G_v)$. Для этого требуется, во-первых, построить такое преобразование (8.5), что $G_{\varepsilon_1} = G_v$ при некотором $\varepsilon_1 > 0$, а во-вторых, определить $h(x)$ следующим образом:

$$h(x) = \frac{1}{\varepsilon_1} (v(\Phi(x, \varepsilon_1)) - u(x))$$

Тогда семейство (8.7) при $\varepsilon = \varepsilon_1$ задает пару $(v(x), G_v)$.

Для пары $(u_0(x), G_0)$ первая вариация функционала (8.1), соответствующая вариации $\delta u(x)$, определяется в виде

$$\begin{aligned}\delta J[u(x); \delta u(x)] &= \left. \frac{dJ(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \\ J(\varepsilon) &= \int_{G_\varepsilon} F\left(y, w(y, \varepsilon), \frac{\partial w(y, \varepsilon)}{\partial y}\right) dy\end{aligned}\quad (8.8)$$

Дифференцирование этого многомерного интеграла относительно параметра ε , от которого зависит область интегрирования G_ε , представляет собой не такую простую задачу, как в скалярном случае из подраздела 3.1.1.

Более удобным подходом здесь будет замена переменных с целью перехода к некоторой стандартной области интегрирования, например, к G_0 . Переход в многомерном интеграле (8.8) от переменных y к переменным x дает

$$J(\varepsilon) = \int_{G_0} F\left(\Phi(x, \varepsilon), w(\Phi(x, \varepsilon), \varepsilon), \frac{\partial w(\Phi(x, \varepsilon), \varepsilon)}{\partial y}\right) \left| \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right| dx \quad (8.9)$$

где $|\partial \Phi / \partial x|$ — якобиан преобразования (8.5), представляющий собой определитель матрицы $\partial \Phi / \partial x$. Поскольку область G_0 не зависит от ε , то для вычисления первой

вариации (8.8) следует продифференцировать только подынтегральное выражение в (8.9). Для производной получаем выражение

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} \left(F \left| \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right| \right) \Big|_{\varepsilon=0} &= F \operatorname{div} \phi + \frac{d}{d\varepsilon} F \Big|_{\varepsilon=0} \\ \frac{d}{d\varepsilon} F \Big|_{\varepsilon=0} &= F_x \phi(x) + F_u \left(\left\langle \frac{\partial w(x, 0)}{\partial y}, \phi(x) \right\rangle + \frac{\partial w(x, 0)}{\partial \varepsilon} \right) + \\ &+ \left\langle \frac{\partial^2 w(x, 0)}{\partial y^2} \phi(x), F_p \right\rangle + \left\langle F_p, \frac{\partial^2 w(x, 0)}{\partial y \partial \varepsilon} \right\rangle \end{aligned} \quad (8.10)$$

Здесь использованы первые два равенства из следующих свойств преобразования (8.5) при $\varepsilon = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(x, 0)}{\partial x} &= I, & \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left| \frac{\partial \Phi(x, 0)}{\partial x} \right| &= \operatorname{div} \phi(x) \quad (\varepsilon = 0) \\ \frac{\partial \Psi(x, 0)}{\partial y} &= I, & \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \Psi(x, 0)}{\partial y} &= -\frac{\partial \phi(x)}{\partial x} \end{aligned} \quad (8.11)$$

где I — единичная матрица. Можно также показать, что при $\varepsilon = 0$ имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(F\phi) &= F \operatorname{div} \phi + F_x \phi + F_u \left\langle \frac{\partial w(x, 0)}{\partial y}, \phi \right\rangle + \left\langle \frac{\partial^2 w(x, 0)}{\partial y^2} \phi, F_p \right\rangle \\ \operatorname{div} \left(\frac{\partial w(x, 0)}{\partial \varepsilon} F_p \right) &= \left\langle \frac{\partial^2 w(x, 0)}{\partial y \partial \varepsilon}, F_p \right\rangle + \frac{\partial w(x, 0)}{\partial \varepsilon} \operatorname{div} F \end{aligned} \quad (8.12)$$

Отсюда для первого равенства в (8.10) получаем более простую форму:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} \left(F \left| \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right| \right) \Big|_{\varepsilon=0} &= (F_u - \operatorname{div} F_p) \frac{\partial w(x, 0)}{\partial \varepsilon} + \operatorname{div} \left(\frac{\partial w(x, 0)}{\partial \varepsilon} F_p + F\phi \right) \\ &\left(F = F \left(x, w(x, 0), \frac{\partial w(x, 0)}{\partial y} \right) \right) \end{aligned} \quad (8.13)$$

Таким образом, приходим к следующему соотношению для первой вариации (8.8):

$$\delta J = \int_{G_0} \left[(F_u - \operatorname{div} F_p) \frac{\partial w(x, 0)}{\partial \varepsilon} + \operatorname{div} \left(\frac{\partial w(x, 0)}{\partial \varepsilon} F_p + F\phi(x) \right) \right] dx \quad (8.14)$$

Эта форма первой вариации, выраженная через производную $\partial w(x, 0)/\partial \varepsilon$, не позволяет определить функции и параметры, которые могут быть выбраны произвольно и влияют на вариацию δu функции $u(x)$. Для каждой задачи семейство $w(y, \varepsilon)$ должно быть уточнено. Например, для задачи с фиксированной границей можно взять $w(x, \varepsilon) = u(x) + \varepsilon h(x)$ и получить $\partial w/\partial \varepsilon = h(x)$, где $h(x)$ — произвольная гладкая функция, обращающаяся в нуль на множестве ∂G . В случае задачи с подвижной границей нужно ввести семейство вида (8.7). Используя (8.5) и (8.11), для семейства (8.7) получаем

$$\frac{\partial w(x, 0)}{\partial \varepsilon} = \bar{h}(x) \equiv h(x) - \left\langle \frac{\partial u(x)}{\partial x}, \phi \right\rangle \quad (8.15)$$

Здесь функция $h(x)$, вообще говоря, не обращается в нуль на ∂G и должна быть согласована с граничными условиями в (8.1). Таким образом, первая вариация (8.14) является линейным функционалом от двух функций: скалярной функции $h(x)$ и n -мерной векторной функции $\phi(x)$. Вариация, выраженная с помощью этих функций, имеет вид (см. (3.3))

$$\delta u(x) = (h(x), \phi(x)) = (h(x), \phi_1(x), \dots, \phi_n(x)) \quad (8.16)$$

Формула (8.14) применима, в частности, и для скалярной задачи, то есть из нее следует соотношение (3.9) для скалярного x .

Как сказано выше, значения функции $h(x)$ на границе ∂G должны согласовываться с граничными условиями в (8.1). Чтобы пояснить это, рассмотрим, например, задачу с подвижной границей и заданным на ней значением функции $u(x)$: $u(x) = v(x)$, $x \in \partial G$, где $v(x)$ — некоторая фиксированная функция. Используя обозначения семейства (8.7), имеем

$$u(y, \varepsilon) = u(\Psi(y, \varepsilon)) + \varepsilon h(\Psi(y, \varepsilon)) = v(y), \quad y \in \partial G_\varepsilon$$

или, после перехода к переменной x ,

$$u(x) + \varepsilon h(x) = v(\Phi(x, \varepsilon)), \quad x \in \partial G_0$$

Дифференцируя последнее равенство относительно ε , получаем

$$h(x) = \frac{\partial v(x)}{\partial x} \phi(x), \quad x \in \partial G_0$$

Соответствующее значение функции $\bar{h}(x)$, заданной в (8.15), на границе определяется выражением

$$\frac{\partial w(x, 0)}{\partial \varepsilon} = \bar{h}(x) = \left\langle \frac{\partial v(x)}{\partial x} - \frac{\partial u(x)}{\partial x}, \phi \right\rangle, \quad x \in \partial G_0 \quad (8.17)$$

Соотношение (8.17) содержит только одну произвольную вектор-функцию $\phi(x)$.

8.1.3. Необходимые условия для сингулярной поверхности

Пусть пара $(u(x), G)$ является решением задачи (8.1). Рассмотрим сначала случай, когда функция $u(x)$ дважды дифференцируема, то есть $u(x) \in C^2(G)$. Используя формулу Гаусса, преобразуем первую вариацию (8.14) следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta J &= \int_G [(F_u - \operatorname{div} F_p) \bar{h}(x) + \operatorname{div}(\bar{h}(x) F_p + F \phi(x))] dx = \\ &= \int_G (F_u - \operatorname{div} F_p) \bar{h}(x) dx + \int_{\partial G} \langle \bar{h}(x) F_p + F \phi(x), n(x) \rangle d\sigma \end{aligned} \quad (8.18)$$

Здесь $n(x)$ — внешняя нормаль к границе в точке $x \in \partial G$, другими словами, нормаль к элементу поверхности $d\sigma$. Из (8.18) следует, что для первой вариации функционала важным является значение функции $\phi(x)$ только на границе ∂G , хотя сама функция $\phi(x)$ входит и в выражение для $\bar{h}(x)$ в (8.15).

Рассмотрим вариации, соответствующие фиксированной границе и фиксированному значению функции $u(x)$ на ней, то есть функция $\phi(x)$ в (8.16) тождественно равна нулю, а $h(x)$ обращается в нуль на ∂G . Для таких вариаций второй интеграл в (8.18) исчезает, а первый, согласно (8.4), должен быть равным нулю при $\bar{h}(x) = h(x)$, см. (8.15). Таким образом, используя основную лемму вариационного исчисления, получаем уравнение Эйлера (8.3). Анализ второго интеграла в (8.18) при других допустимых вариациях приводит к соответствующим условиям трансверсальности.

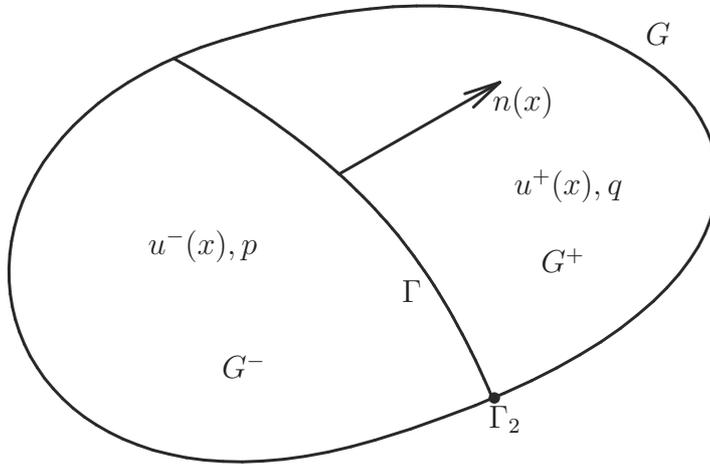


Рис. 8.1

Пусть решение $(u(x), G)$ задачи (8.1) таково, что функция $u(x)$ имеет скачок градиента на некоторой поверхности $\Gamma \subset G$. Предположим, что Γ является гладкой поверхностью, разделяющей область G на две открытые подобласти, которые обозначим G^- и G^+ , то есть $G = G^- + \Gamma + G^+$ (рис. 8.1). Сужения решения $u(x)$ на подобласти G^- и G^+ определяют функции, которые обозначим $u^-(x)$ и $u^+(x)$, а их градиенты через

$$p = \frac{\partial u^-(x)}{\partial x}, \quad x \in G^-; \quad q = \frac{\partial u^+(x)}{\partial x}, \quad x \in G^+ \quad (8.19)$$

Предполагаем, что эти функции дважды непрерывно дифференцируемы, то есть $u^-(x) \in C^2(G^-)$, $u^+(x) \in C^2(G^+)$, а векторы $p(x)$, $q(x)$ имеют непрерывное продолжение из подобластей G^- , G^+ на поверхность Γ . Как следует из результатов главы 2, с учетом этих предположений функции $u^-(x)$, $u^+(x)$ имеют локально гладкие продолжения на всю область G . Чтобы избежать введения новых локальных обозначений, положим далее, что сама область G является достаточно малой.

Для вывода необходимых условий оптимальности на поверхности Γ , предста-

вим функционал (8.1) в виде суммы двух функционалов:

$$\begin{aligned} J &= \int_G F\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx = \\ &= \int_{G^-} F\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx + \int_{G^+} F\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx = J^- + J^+ \end{aligned} \quad (8.20)$$

Используя соответствующие вариации для гладких ветвей $u(x)$, можно показать, что уравнение Эйлера (8.3) выполняется в каждой подобласти G^- , G^+ . Рассмотрим вариацию

$$\delta J = \delta J^- + \delta J^+ \quad (8.21)$$

функционала (8.20), соответствующую вариации решения $(u(x), G)$ с фиксированными границей ∂G и граничными условиями на ней, но с нефиксированной поверхностью Γ . Применяя обозначения, используемые для функционалов J^- , J^+ , получаем вариации

$$\delta u^-(x) = (h^-(x), \phi(x)), \quad \delta u^+(x) = (h^+(x), \phi(x)) \quad (8.22)$$

В этих вариациях функции h^\pm и ϕ равны нулю на границе ∂G , но не на поверхности Γ . Используя для каждого функционала J^- , J^+ формулу (8.18), где первый интеграл обращается в нуль вследствие уравнения Эйлера, можно написать равенство (8.21) с учетом вариаций (8.22):

$$\begin{aligned} \delta J &= \delta J^- + \delta J^+ = \\ &= \int_{\Gamma} \langle \bar{h}^-(x) F_p(x, u, p) + F(x, u, p) \phi(x), n(x) \rangle d\sigma - \\ &\quad - \int_{\Gamma} \langle \bar{h}^+(x) F_q(x, u, q) + F(x, u, q) \phi(x), n(x) \rangle d\sigma \\ &(\bar{h}^- = h^- - \langle p, \phi \rangle, \quad \bar{h}^+ = h^+ - \langle q, \phi \rangle) \end{aligned} \quad (8.23)$$

Здесь $n = n(x)$ — нормаль к Γ в точке $x \in \Gamma$. Эта нормаль является внешней по отношению к подобласти G^- , и, следовательно, нормаль $-n(x)$ будет внешней к подобласти G^+ (см. рис. 8.1).

Поскольку $u(x)$ непрерывна на Γ , $u^-(x) = u^+(x)$, то первые два аргумента функции F и соответствующие частные производные по ним равны на сторонах G^- и G^+ поверхности Γ . Третьим аргументом может быть либо p , либо q . В соответствии с этим для производной по этому аргументу используется векторное обозначение $F_p = (\partial F/\partial p_1, \dots, \partial F/\partial p_n)$ или $F_q = (\partial F/\partial q_1, \dots, \partial F/\partial q_n)$. Непрерывность решения подразумевает также выполнение ограничения для вариаций (8.22):

$$h^-(x) = h^+(x) = h(x), \quad x \in \Gamma \quad (8.24)$$

Согласно необходимому условию оптимальности выбора поверхности Γ , вариация (8.23) должна обращаться в нуль при любых функциях $h(x)$ и $\phi(x)$, определенных на Γ . Объединяя два интеграла (8.23) в один, имеем

$$\begin{aligned} \delta J &= \int_{\Gamma} \left[h^- \langle F_p, n \rangle - h^+ \langle F_q, n \rangle + \right. \\ &\quad \left. + \langle (F(x, u, p) - F(x, u, q))n - \langle F_p, n \rangle p + \langle F_q, n \rangle q, \phi \rangle \right] d\sigma \end{aligned} \quad (8.25)$$

Применяя условие (8.24) и основную лемму вариационного исчисления, получаем, что в (8.25) скалярный множитель при $h(x)$ и векторный при $\phi(x)$ должны равняться нулю на Γ :

$$\begin{aligned} \langle F_p - F_q, n \rangle &= 0 \\ (F(x, u, p) - F(x, u, q))n - \langle F_p, n \rangle p + \langle F_q, n \rangle q &= 0 \end{aligned} \quad (8.26)$$

Заметим, что вектор $p - q$, как нормаль к Γ (вследствие непрерывности $u(x)$), коллинеарен вектору n , то есть, для некоторого скалярного λ верно соотношение

$$n = \lambda(p - q), \quad x \in \Gamma \quad (8.27)$$

Отсюда получаем равенство

$$\langle F_q, n \rangle (p - q) = \langle F_q, p - q \rangle n$$

которое вместе с первым равенством в (8.26) позволяет записать второе условие (8.26) следующим образом:

$$[F(x, u, p) - F(x, u, q) - \langle F_q, p - q \rangle]n = 0$$

Здесь скалярный множитель при n должен быть равен нулю, поскольку n — ненулевой вектор нормали. Объединяя это условие с первым равенством в (8.26), а также учитывая соотношение (8.27), получаем следующие два скалярных равенства, выполненных на Γ :

$$\begin{aligned} F(x, u, p) - F(x, u, q) - \langle F_q, p - q \rangle &= 0 \\ \langle F_p - F_q, p - q \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (8.28)$$

Эти равенства являются обобщением так называемых угловых условий Вейерштрасса – Эрмандра, возникающих в вариационных задачах со скалярным интегралом [74]. Отметим, что второе условие в (8.28) можно переписать в виде

$$\langle F_p, p - q \rangle = \langle F_q, p - q \rangle$$

Следовательно, последний член в первом условии имеет две эквивалентные формы.

Формула (8.25) позволяет также вывести необходимое условие оптимальности поверхности Γ и для других задач. Пусть решение $u(x)$ имеет скачок на поверхности Γ : $u^-(x) \neq u^+(x)$ при $x \in \Gamma$. Тогда вариации $h^-(x)$ и $h^+(x)$ не равны на Γ , и, следовательно, условие (8.24) не выполняется. Таким образом, в (8.25) имеем три произвольные функции: $h^-(x)$, $h^+(x)$ и $\phi(x)$. Аналогично предыдущему случаю можно получить три необходимых условия для оптимальности поверхности Γ :

$$F(x, u^-, p) - F(x, u^+, q) = 0, \quad \langle F_p, n(x) \rangle = 0, \quad \langle F_q, n(x) \rangle = 0, \quad x \in \Gamma \quad (8.29)$$

Вследствие разрывности решения $u(x)$ вектор нормали $n(x)$ здесь не может быть выражен через p и q , как в (8.27).

Рассмотрим далее задачу, в которой решение дважды непрерывно дифференцируемо, но часть границы ∂G , которую также обозначим через Γ , не является

фиксированной. В этом случае можно взять $\delta J = \delta J^-$, полагая в (8.23), что подмножество G^+ пусто и Γ является частью ∂G . Учитывая произвольный выбор вариаций $h(x)$ и $\phi(x)$, а также необходимое условие (8.4), из (8.23) получаем следующие два равенства, справедливые на Γ :

$$F(x, u, p) = 0, \quad \langle F_p, n(x) \rangle = 0 \quad (8.30)$$

Если значение функции $u(x)$ не произвольно и равно заданной функции $v(x)$ на Γ , то, используя (8.17), можно получить необходимое условие на Γ , которое вместе с требованием на граничные значения $u(x)$ имеет вид

$$F(x, u, p) + \langle F_p, \frac{\partial v}{\partial x} - p \rangle = 0, \quad u(x) - v(x) = 0 \quad (8.31)$$

8.2. Построение сингулярной поверхности

8.2.1. Уравнения сингулярных характеристик

В этом разделе для построения поверхности Γ , на которой решение задачи (8.1) является негладким, будет применен метод сингулярных характеристик, описанный в главе 1. Две $(n-1)$ -мерные интегральные поверхности 1-формы $\alpha = du - p dx$, соответствующие поверхности Γ , имеют вид

$$\begin{aligned} \Sigma^- &= \{(x, u, p) \in \mathbb{R}^{2n+1} : u = u^-(x), p = \frac{\partial u^-(x)}{\partial x}, x \in \Gamma\} \\ \Sigma^+ &= \{(x, u, p) \in \mathbb{R}^{2n+1} : u = u^+(x), p = \frac{\partial u^+(x)}{\partial x}, x \in \Gamma\} \end{aligned} \quad (8.32)$$

Из результатов главы 1 следует, что искомая поверхность Σ может быть построена, если в пространстве векторов $(x, u, p) \in \mathbb{R}^{2n+1}$ определить многообразие коразмерности 3. Таким образом, на Σ требуется задать три равенства вида $F_i(x, u, p) = 0$. Два из них являются условиями Вейерштрасса – Эрдмана (8.28), роль третьего равенства играет условие непрерывности (как и при рассмотрении экивокальной сингулярной поверхности в главе 2).

Нам будет удобно изменить обозначение ветви $u^+(x)$ и ее градиента на $u(x)$ и p соответственно, а ветви $u^-(x)$ и ее градиента — на $v(x)$ и q . Для использования методов главы 1 предположим, что одна из ветвей решения известна, а другую требуется найти. Соотношения (8.28) абсолютно симметричны относительно обеих ветвей u, p и v, q . При построении поверхности Γ для определенности будем считать, что функции $v(x)$ и $q(x)$, $x \in G^-$, заданы, а функции $u(x)$, $p(x)$ неизвестны. Запишем три вышеупомянутых условия, определяющих многообразие W_3 , задав для этого функции $H(x, u, p)$, $R(x, u, p)$, $F_1(x, u)$:

$$\begin{aligned} H(x, u, p) &= F(x, u, p) - F(x, v(x), q(x)) - \langle F_q(x, v(x), q(x)), p - q(x) \rangle = 0 \\ R(x, u, p) &= \langle F_p(x, u, p) - F_q(x, v(x), q(x)), p - q(x) \rangle = 0 \\ F_1(x, u) &= u - v(x) = 0 \end{aligned} \quad (8.33)$$

Функцию $H(x, u, p)$ назовем гамильтонианом. Вообще говоря, на данном этапе можно ввести и сингулярный гамильтониан на основе трех заданных в (8.33)

функций и соответствующей системы сингулярных характеристик. Одно важное и интересное свойство этих функций заключается в том, что $R(x, u, p)$ записывается через скобки Якоби от двух других функций:

$$R(x, u, p) = \{F_1 H\} \quad (8.34)$$

Действительно, вычислив производную от функции H в (8.33) и скобку Якоби в (8.34), имеем

$$H_p = F_p - F_q, \quad \{F_1 H\} = \langle H_p(x, u, p), p - q \rangle$$

Отсюда следует равенство (8.34). Это позволяет отметить некоторые свойства инвариантности условий Вейерштрасса – Эрдмана.

Сравнив (8.33), (8.34) с (2.16), получаем, что условия (8.33) совпадают с условиями на экивокальной поверхности-огibaющей (в случае гладкого гамильтониана). Таким образом, при замене обозначений в (2.18) сразу выписывается система сингулярных характеристик на многообразии (8.33):

$$\dot{x} = H_p, \quad \dot{u} = \langle p, H_p \rangle, \quad \dot{p} = -H_x - p H_u - \frac{\{\{H F_1\} H\}}{\{\{F_1 H\} F_1\}} (p - q(x)) \quad (8.35)$$

В общем случае сингулярная поверхность может начинаться на некотором многообразии $\Gamma_2 \subset \partial G$, $\dim \Gamma_2 = n - 2$ (рис. 8.1) и затем продолжаться на G согласно (8.35). Для построения Γ следует задать начальные условия на Γ_2 .

8.2.2. Начальные условия

Как правило, подмногообразие Γ_2 , откуда стартует Γ , соответствует некоторая нерегулярность в граничных условиях (8.1), например, негладкость граничного значения. На Γ_2 могут также начинаться и несколько ударных волн. В этом случае в (8.35) нужно задать несколько начальных условий.

Построение начальных условий будет рассмотрено для случая, когда многообразии Γ_2 принадлежит некоторой гладкой части ∂G , которую локально можно положить гиперплоскостью. Без потери общности, можно рассмотреть двумерный случай, $n = 2$, в котором многообразии Γ_2 является точкой. Для общего случая применимы аналогичные выкладки. В качестве области G возьмем полуплоскость $x_2 > 0$ и положим, что в точке Γ_2 , совпадающей с началом координат, начинаются m ударных волн (рис. 8.2).

Будем считать выполненными следующие основные допущения. Все волны не касаются друг друга и оси x_1 (границы ∂G). Для каждого сектора (с номерами $1, \dots, m + 1$, см. рис. 8.2) существуют пределы $\partial u(x_1, x_2)/\partial x_1$ и $\partial u(x_1, x_2)/\partial x_2$ при $(x_1, x_2) \rightarrow (0, 0)$. Сектор назовем регулярным, если такие пределы не зависят от направления и решение $u(x)$ является сужением на этот сектор некоторой дифференцируемой в точке $x = 0$ функции. Сектор полагаем нерегулярным, если эти пределы зависят от направления, в частности, если пределы вдоль разных сторон сектора не равны.

Дальнейшие построения в основном соответствуют случаю, когда все сектора являются регулярными. Обозначим сужение функции $u(x)$ на i -ый сектор через

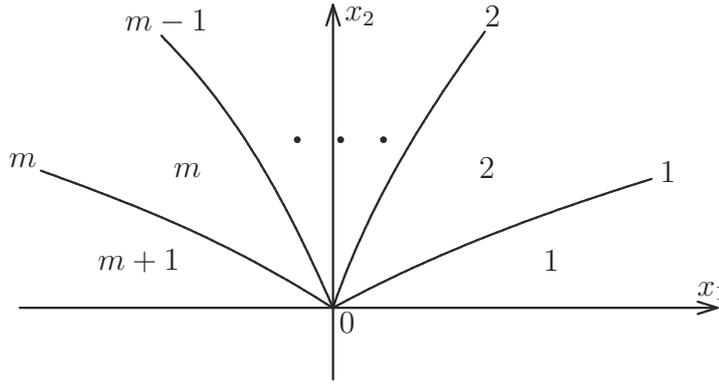


Рис. 8.2

$u_i(x)$ и заменим его линейной частью разложения в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} u_i(x_1, x_2) &= a_i x_1 + b_i x_2 + c, \quad i = 1, \dots, m+1 \\ a_i &= \frac{\partial u_i(0, 0)}{\partial x_1}, \quad b_i = \frac{\partial u_i(0, 0)}{\partial x_2}, \quad c = u_i(0, 0) \end{aligned} \quad (8.36)$$

Поскольку константа c не зависит от i вследствие непрерывности $u(x)$, то каждое такое разложение определяется двумя параметрами a_i и b_i . Нерегулярному сектору поставим в соответствие четыре параметра

$$a_i^+, \quad a_i^-, \quad b_i^+, \quad b_i^-$$

где (a_i^+, b_i^+) (соответственно (a_i^-, b_i^-)) — предел градиента вдоль правой (левой) стороны сектора.

Каждая ударная волна является кривой, которая описывается некоторым уравнением вида $x_2 = g_i(x_1)$, $g_i(0) = 0$. Раскладывая это уравнение в ряд Тейлора и рассматривая линейную часть, получаем равенства

$$x_2 = k_i x_1, \quad k_i = \frac{\partial g_i(0)}{\partial x_1}, \quad i = 1, \dots, m \quad (8.37)$$

Из непрерывности решения на ударной волне имеем

$$u_i(x_1, g_i(x_1)) = u_{i+1}(x_1, g_i(x_1)), \quad i = 1, \dots, m$$

Отсюда, с учетом (8.36), (8.37), следуют равенства

$$a_{i+1} - a_i + k_i(b_{i+1} - b_i) = 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (8.38)$$

В дополнение к (8.38), для каждой ударной волны должны выполняться обобщенные условия Вейерштрасса – Эрдмана. Таким образом, получаем следующие равенства

$$\begin{aligned} \bar{H}(a_i, b_i, a_{i+1}, b_{i+1}, c) &= 0 \\ \bar{R}(a_i, b_i, a_{i+1}, b_{i+1}, c) &= 0, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (8.39)$$

где функции \bar{H}, \bar{R} определяются из соотношений (8.33):

$$\begin{aligned}\bar{H}(a_i, b_i, a_{i+1}, b_{i+1}, c) &= F(0, 0, c, a_i, b_i) - F(0, 0, c, a_{i+1}, b_{i+1}) - \\ &\quad - F_{q_1}(0, 0, c, a_{i+1}, b_{i+1})(a_i - a_{i+1}) - F_{q_2}(0, 0, c, a_{i+1}, b_{i+1})(b_i - b_{i+1}) \\ \bar{R}(a_i, b_i, a_{i+1}, b_{i+1}, c) &= (F_{p_1}(0, 0, c, a_i, b_i) - F_{q_1}(0, 0, c, a_{i+1}, b_{i+1}))(a_i - a_{i+1}) + \\ &\quad + (F_{p_2}(0, 0, c, a_i, b_i) - F_{q_2}(0, 0, c, a_{i+1}, b_{i+1}))(b_i - b_{i+1})\end{aligned}\quad (8.40)$$

Таким образом, в точке $x_1 = 0, x_2 = 0$ относительно неизвестных параметров

$$c, \quad k_1, \dots, k_m, \quad a_1, \dots, a_{m+1}, \quad b_1, \dots, b_{m+1} \quad (8.41)$$

имеем $3m$ уравнений (8.38), (8.39). Поскольку некоторые из параметров (8.41) определяются с помощью граничных условий исходной задачи в (8.1), то окончательный баланс между количеством неизвестных и числом уравнений зависит от дополнительных конкретных условий. Рассмотрим три случая.

Случай 1. На границе ∂G заданы значение функции $u(x)$ и значение ее производной $\partial u / \partial n$ вдоль нормали. Это означает, что при $x_2 = 0$ справедливы равенства

$$u(x_1, 0) = w(x_1), \quad \frac{\partial u(x_1, 0)}{\partial x_2} = \psi(x_1) \quad (8.42)$$

где функции $w(x_1), \psi(x_1)$ могут быть негладкими при $x_1 = 0$. Из условия (8.42) вытекает, что в (8.41) заданы пять параметров $c, a_1, b_1, a_{m+1}, b_{m+1}$:

$$\begin{aligned}c = w(0), \quad a_1 &= \frac{\partial w(+0)}{\partial x_1}, \quad b_1 = \psi(+0) \\ a_{m+1} &= \frac{\partial w(-0)}{\partial x_1}, \quad b_{m+1} = \psi(-0)\end{aligned}\quad (8.43)$$

Следовательно, число неизвестных параметров в (8.41) становится равным

$$3(m+1) - 5 = 3m - 2 \quad (8.44)$$

Они удовлетворяют $3m$ уравнениям (8.38), (8.39). Эта система избыточна при любом $m \geq 1$. Отсюда следует, что если все секторы регулярны, то в общем случае решение не существует.

Выделим два способа, с помощью которых можно получить равное количество неизвестных и уравнений. В первом, полагая произвольными два из четырех параметров $a_1, b_1, a_{m+1}, b_{m+1}$ в (8.43), имеем общее число неизвестных параметров равное $3m$. Это позволяет получить некоторые особые граничные условия, которые совместимы с данным количеством ударных волн m . Конечно, такой подход не является общим. Другой способ заключается в том, что один из секторов предполагается нерегулярным. В результате имеем два дополнительных неизвестных параметра, то есть четыре $a_k^+, a_k^-, b_k^+, b_k^-$ вместо двух a_k, b_k для сектора k (который нерегулярен). Эти новые параметры должны появиться в соответствующих уравнениях системы (8.39).

В частном случае, когда лагранжиан $F(x, u, p)$ квадратичен относительно p , два условия Вейерштрасса – Эрдмана (8.33), как будет показано ниже, оказываются зависимыми: $R \equiv 2H$. В результате число уравнений уменьшается до $2m$.

Приравнивая это число к общему количеству неизвестных (правая часть в (8.44)), имеем

$$2m = 3m - 2 \quad (8.45)$$

Отсюда получаем $m = 2$. Следовательно, при квадратичном лагранжиане в общем случае необходимые условия обеспечивают существование решения точно с двумя ударными волнами и тремя регулярными секторами.

Случай 2. На границе ∂G задана только функция $u(x)$. Параметры c , a_1 , a_{m+1} полагаются известными, и, таким образом, общее число неизвестных равно количеству уравнений $3m$. Формально здесь может быть любое количество ударных волн и требуются дополнительные исследования. В некоторых задачах число ударных волн m может быть определено с помощью анализа решения системы (8.39). Кроме этого, может существовать бесконечно много волн с бесконечно малыми скачками градиента, решение в этом частном случае остается гладким.

Случай 3. На границе ∂G задана только производная функции $u(x)$ вдоль нормали. Тогда параметры b_1 , b_{m+1} известны и общее число неизвестных равно $3m + 1$. Система (8.38), (8.39) является недоопределенной. Если начальные условия гладкие, то есть $a_1 = a_{m+1}$, но $b_1 \neq b_{m+1}$, то число неизвестных и уравнений равно и ситуация аналогична предыдущему случаю.

8.3. Квадратичный лагранжиан

8.3.1. Вырожденные необходимые условия

Во многих задачах математической физики лагранжиан является квадратичным по p , то есть

$$F(x, u, p) = \frac{1}{2} \langle A(x, u)p, p \rangle \quad (8.46)$$

где A — квадратная симметрическая матрица, $A = A^T$, с элементами a_{ij} , в общем случае зависящими от x, u . Вычислив гамильтониан (8.33) при квадратичном лагранжиане (8.46), получаем

$$H(x, u, p) \equiv \frac{1}{2} \langle A(x, u)(p - q(x)), p - q(x) \rangle \equiv F(x, u, p - q(x)) \quad (8.47)$$

Действительно, используя свойства симметрической матрицы A

$$\langle Ap, q \rangle = \langle p, A^T q \rangle = \langle p, Aq \rangle = \langle Aq, p \rangle$$

правую часть (8.47) можно привести к виду

$$\frac{1}{2} \langle A(p - q), p - q \rangle = \frac{1}{2} (\langle Ap, p \rangle + \langle Aq, q \rangle - 2 \langle Ap, q \rangle) = F(x, u, p) + F(x, u, q) - \langle Ap, q \rangle$$

Поскольку

$$F_q = \frac{\partial}{\partial q} \frac{1}{2} \langle Aq, q \rangle = Aq, \quad \langle F_q(x, u, q), q \rangle = 2F(x, u, q)$$

то гамильтониан (8.33) приводится к такому же виду:

$$\begin{aligned} H(x, u, p) &= F(x, u, p) - F(x, u, q) - \langle F_q(x, u, q), p \rangle + \langle F_q(x, u, q), q \rangle = \\ &= F(x, u, p) + F(x, u, q) - \langle Aq, p \rangle \end{aligned}$$

Из (8.33), (8.46) находим

$$H_p = F_p(x, u, p) - F_q(x, u, q) = A(x, u)p - A(x, u)q = A(x, u)(p - q)$$

Отсюда для функции $R(x, u, p)$ в (8.33), выраженной через скобки Якоби (8.34), имеем равенство

$$\begin{aligned} R(x, u, p) &\equiv \{F_1 H\} \equiv \langle H_p(x, u, p), p - q(x) \rangle \equiv \\ &\equiv \langle F_p(x, u, p) - F_q(x, v(x), q(x)), p - q(x) \rangle \equiv 2H(x, u, p) \end{aligned} \quad (8.48)$$

С учетом этого равенства для двух двойных скобок Якоби в системе (8.35) получаем

$$\{\{F_1 H\}F_1\} \equiv -4H, \quad \{\{HF_1\}H\} \equiv 0 \quad (8.49)$$

8.3.2. Сингулярные характеристики

Из соотношения (8.48) следует, что в случае квадратичного лагранжиана многообразии W_3 имеет коразмерность 2, поскольку в (8.33) две из трех функций совпадают (с точностью до множителя 2). Для такого многообразия достаточные условия (1.79) главы 1, обеспечивающие существование характеристического поля, не выполняются. Например, вектор $\lambda = (\lambda_{-1}, \lambda_0, \lambda_1)$ в выражении сингулярного гамильтониана является нулевым на W_3 :

$$\begin{aligned} \mu H^\sigma &= \lambda_{-1}F_{-1} + \lambda_0F_0 + \lambda_1F_1 \\ F_0 &= H, \quad F_1 = u - v(x), \quad F_{-1} = \{F_1F_0\} = 2H \\ \lambda_{-1} &= \{F_0F_1\} = -2H = 0, \quad \lambda_0 = \{F_1F_{-1}\} = 4H = 0 \\ \lambda_1 &= \{F_{-1}F_0\} = 2\{HH\} = 0 \end{aligned} \quad (8.50)$$

Таким образом, случай квадратичного лагранжиана соответствует вырожденной задаче 1.4 главы 1. Действительно, в данном случае имеем многообразие W_2 коразмерности 2, заданное двумя равенствами с функциями H, F_1 :

$$W_2 : \quad H = 0, \quad F_1 = 0 \quad (\{F_1H\} = 2H) \quad (8.51)$$

Отсюда можно предположить, что существует бесконечно много интегральных поверхностей $\Sigma = \Sigma^+$, $\dim \Sigma = n + 1$ (см. (8.32)), проходящих через заданную поверхность

$$\Sigma_2 \subset \Sigma \subset W_2, \quad \dim \Sigma_2 = n - 2 \quad (8.52)$$

и имеющих бесконечное множество проекций $\Gamma = \pi\Sigma$.

Действительно, вместо R можно взять произвольную функцию F_{-1} , удовлетворяющую единственному условию $\{F_1F_{-1}\} \neq 0$, и исследовать сингулярные характеристики на многообразии

$$W_3 : \quad H = 0, \quad F_1 = 0, \quad F_{-1} = 0 \quad (\{F_1F_{-1}\} \neq 0) \quad (8.53)$$

Более точно, можно рассмотреть задачу 1.4 для многообразия (8.53) в предположении, что условия теоремы 1.3 выполнены. Тогда для заданной поверхности Σ_2 каждая функция F_{-1} порождает единственное решение Σ и $\Gamma = \pi\Sigma$. Очевидно, что существует бесконечное множество таких функций F_{-1} . Тем не менее, вследствие выполнения для функций, задающих W_2 в (8.51), специального свойства $\{F_1 H\} = 2H$, можно получить следующие результаты.

Несмотря на то что для различных функций F_{-1} соответствующая система сингулярных характеристик порождает различные интегральные поверхности $\Sigma = \Sigma^+$ в (8.32), проекция $\Gamma = \pi\Sigma$ остается одной и той же (при тех же начальных условиях). В частности, та же самая проекция Γ порождается и системой регулярных характеристик, соответствующей гамильтониану $H(x, u, p) = F(x, u, p - q(x))$:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= H_p = F_p, & \dot{u} &= \langle p, F_p \rangle \\ \dot{p} &= -H_x - p H_u = -F_x + \frac{\partial q}{\partial x} F_p - p F_u \end{aligned} \quad (8.54)$$

Эта система при помощи вектора скачка $\xi = p - q$ и функции $F(x, u, \xi)$ может быть переписана в виде

$$\dot{x} = F_\xi, \quad \dot{\xi} = -F_x - (\xi + q)F_u, \quad \dot{u} = \langle q, F_\xi \rangle \quad (8.55)$$

если использовать соотношения

$$\dot{q} = \frac{\partial q}{\partial x} F_p, \quad \langle \xi, F_\xi(x, u, \xi) \rangle = 2F(x, u, \xi) = 0, \quad p = \xi + q \quad (8.56)$$

Здесь $\partial q / \partial x = v_{xx}$ — симметрическая матрица вторых производных функции $v(x)$.

Результаты формулируемой ниже теоремы позволяют упростить систему (8.55) и привести ее к виду

$$\dot{x} = F_\xi, \quad \dot{\xi} = -F_x - q F_u, \quad \dot{u} = \langle q, F_\xi \rangle \quad (\xi = p - q) \quad (8.57)$$

Эта форма удобнее для дальнейшего построения Γ .

Заметим, что в (8.55), (8.57) функция $F(x, u, \xi)$ не играет роль гамильтониана, поскольку соответствующая система характеристик имеет вид

$$\dot{x} = F_\xi, \quad \dot{\xi} = -F_x - \xi F_u, \quad \dot{u} = \langle \xi, F_\xi \rangle$$

и в общем случае отличается от вида систем (8.55) и (8.57).

Также следует отметить, что система характеристик (8.54) или (8.55) с гамильтонианом H гарантирует существование интегральной поверхности Σ , удовлетворяющей условиям (8.52). Это связано с тем, что согласно равенству $\{F_1 H\} = 2H$ в (8.51) функция $F_1(x, u)$ является первым интегралом системы (8.54). Единственность, в свою очередь, как утверждает следующая теорема, имеет место только для проекции $\Gamma = \pi\Sigma$, но не для самой поверхности Σ .

Теорема 8.1. Пусть задано начальное многообразие Σ_2 , $\dim \Sigma_2 = n - 2$, и вектор H_p трансверсален к $\Gamma_2 = \pi\Sigma_2$ для некоторой точки $(x^*, u^*, p^*) \in \Sigma_2$.

Тогда любая интегральная поверхность Σ , такая что

$$\Sigma_2 \subset \Sigma \subset W_3 \subset W_2$$

где многообразие W_3 отвечает некоторой заданной функции F_{-1} , $\{F_1 F_{-1}\} \neq 0$, имеет одну и ту же проекцию $\Gamma = \pi\Sigma$, $\dim \Gamma = n - 1$, совпадающую с поверхностью, порождаемой системой (8.57) с заданными начальными условиями на Σ_2 .

Доказательство. Зафиксируем некоторую функцию F_{-1} , $\{F_1 F_{-1}\} \neq 0$. Тогда поверхность Σ является единственным решением задачи 1.4 при заданном W_3 . Запишем систему сингулярных характеристик, используя сингулярный гамильтониан (8.50) и $\mu = \{F_1 F_{-1}\}$:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= H_p = F_\xi = A\xi \\ \dot{u} &= \langle p, H_p \rangle = \langle p, F_\xi \rangle = \langle \xi + q, F_\xi \rangle = \langle \xi, F_\xi \rangle + \langle q, F_\xi \rangle = \langle q, F_\xi \rangle \\ \dot{p} &= -F_x + \frac{\partial q}{\partial x} F_p - pF_u - \frac{\{F_{-1}H\}}{\{F_1 F_{-1}\}} \xi \end{aligned} \quad (8.58)$$

С учетом равенств (8.56) эту систему можно привести к виду

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F_\xi, \quad \dot{u} = \langle q, F_\xi \rangle \\ \dot{\xi} &= -F_x - qF_u - V\xi \quad \left(V(x, u, p) = F_u + \frac{\{F_{-1}H\}}{\{F_1 F_{-1}\}} \right) \end{aligned} \quad (8.59)$$

Умножим правую часть системы (8.59) на ненулевую скалярную величину α (что эквивалентно замене независимой переменной $dt = \alpha dt'$) и введем вектор η равенством $\xi = \beta\eta$, где β — скаляр и $\beta(t) > 0$. Используя теперь равенства (в частности, свойство однородности второго порядка лагранжиана)

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \dot{\beta}\eta + \dot{\eta}\beta, \quad F_\xi = A\xi = \beta A\eta \\ F_x(x, u, \xi) &= \beta^2 F_x(x, u, \eta), \quad F_u(x, u, \xi) = \beta^2 F_u(x, u, \eta) \end{aligned}$$

приведем систему (8.59) к виду

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha\beta A(x, u)\eta = \alpha\beta F_\eta(x, u, \eta), \quad \dot{u} = \alpha\beta \langle q, F_\eta(x, u, \eta) \rangle \\ \dot{\eta} &= -\alpha\beta(F_x(x, u, \eta) + qF_u(x, u, \eta)) - \frac{1}{\beta}(\dot{\beta} + \alpha\beta V(x, u, p))\eta \end{aligned} \quad (8.60)$$

Наложим следующие требования на выбор величин α и β как функций времени:

$$\alpha\beta = 1, \quad \dot{\beta} = V(x(t), u(t), p(t)), \quad \beta(0) = 1$$

Здесь $x(t)$, $u(t)$, $p(t)$ — решение системы (8.58) с начальными условиями

$$x(0) = x^0, \quad u(0) = u^0, \quad p(0) = p^0, \quad (x^0, u^0, p^0) \in \Sigma_2$$

Тогда функции $x(t)$, $u(t)$, $\eta(t)$ являются частным решением упрощенной системы (8.57) (где вместо ξ берем η) с начальными условиями

$$x(0) = x^0, \quad u(0) = u^0, \quad \eta(0) = p^0 - q(x^0)$$

Рассмотрим соответственно решения $x(t)$, $u(t)$, $\eta(t)$ и $x(t')$, $u(t')$, $p(t')$ систем (8.57), (8.58) с начальными условиями, приведенными выше. Функции $x(t)$ и $x(t')$

задают в пространстве \mathbb{R}_x^n одну и ту же кривую, описываемую с помощью различных параметров t и t' , которые являются независимыми переменными систем (8.57) и (8.58). Отсюда следует, что данные системы порождают одну и ту же поверхность Γ . Таким образом, теорема доказана.

Сделаем одно замечание относительно единственности. Дифференциалы dH , dF_1 функций в (8.51) должны быть линейно независимы (иначе, вообще говоря, имеем тривиальное решение $u(x) = v(x)$). Тогда из леммы 1.1 вытекает, что размерность любой интегральной поверхности Σ , содержащейся в W_2 , не может быть больше $n - 1$. Чтобы получить единственность Σ , как в главе 1, требуется единственность (с точностью до ненулевого скалярного множителя) характеристического поля (8.54), что не имеет места в рассматриваемом случае, поскольку различные функции F_{-1} порождают различные поля вида (8.58).

8.3.3. Возмущенная задача

Рассмотрим задачу (8.1) с возмущенным квадратичным лагранжианом

$$F(x, u, p) = Q(x, u, p) + \varepsilon P(x, u, p), \quad Q(x, u, p) = \langle A(x, u)p, p \rangle \quad (8.61)$$

где $P(x, u, p)$ — заданная гладкая функция. Тогда гамильтониан в первом равенстве (8.33) примет следующий возмущенный вид:

$$\begin{aligned} H(x, u, p) &= F(x, u, p) - F(x, u, q) - \langle F_q, p - q \rangle = Q(x, u, p - q) + \varepsilon G(x, u, p) \\ G(x, u, p) &= P(x, u, p) - P(x, u, q) - \langle P_q(x, u, q), p - q \rangle \end{aligned} \quad (8.62)$$

Для функции R во втором равенстве (8.33) имеем

$$\begin{aligned} R(x, u, p) &= \langle F_p - F_q, p - q \rangle = 2Q(x, u, p - q) + \varepsilon \{F_1 G\} \\ F_1(x, u) &= u - v(x) \end{aligned} \quad (8.63)$$

Многообразие W_3 здесь задается соотношениями

$$H = Q + \varepsilon G = 0, \quad R = 2Q + \varepsilon \{F_1 G\} = 0, \quad F_1 = 0 \quad (8.64)$$

Выразив ε из первых двух равенств, получаем эквивалентное представление для W_3 :

$$Q + \varepsilon G = 0, \quad 2G - \{F_1 G\} = 0, \quad F_1 = 0 \quad (8.65)$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ многообразие (8.64) вырождается и теряет одну коразмерность, поскольку первые два уравнения становятся одинаковыми. Вообще говоря, при этом многообразие (8.65) сохранит коразмерность 3, если функция $2G - \{F_1 G\}$ не равна тождественно нулю (то есть G не является квадратичной функцией по $p - q$ или, что эквивалентно, P не квадратична по p).

Система характеристических уравнений для многообразия (8.65) в этом случае является регулярно возмущенной и стремится (с учетом равенства $\{F_1 Q\} = 2Q$) при $\varepsilon \rightarrow 0$ к виду

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Q_p, \quad \dot{u} = \langle p, Q_p \rangle \\ \dot{p} &= -Q_x + \frac{\partial q}{\partial x} Q_p - p Q_u - \frac{\{F_{-1} Q\}}{\{F_1 F_{-1}\}} (p - q) \\ (F_{-1} &= 2G - \{F_1 G\}) \end{aligned} \quad (8.66)$$

Пусть интегральная поверхность Σ_ε , заданная с помощью многообразия (8.65) и некоторой начальной поверхности Σ_2 , является единственной (с учетом выполнения соответствующих условий). Предел Σ_ε при $\varepsilon \rightarrow 0$ определяется системой (8.66) и поверхностью Σ_2 . Очевидно, что этот предел зависит от выбора функции G (функции P), а предел проекций $\Gamma_\varepsilon = \pi\Sigma_\varepsilon$ одинаков для всех G . Отметим также, что используя преобразование из доказательства теоремы 8.1, система (8.66) может быть упрощена и приведена к виду (8.57).

Неединственность Σ и единственность ее проекции $\Gamma = \pi\Sigma$ означают, что сингулярная поверхность в квадратичной задаче может быть построена единственным образом; в то же время скачок $\xi = p - q$ градиента определяется только с точностью до ненулевого скалярного множителя, то есть найти направление вектора $p - q$ можно, а его длину нет. Анализ системы (8.66) показывает, что различные возмущения P (или G) приводят к различным предельным величинам длины вектора $p - q$ на Γ . Как будет показано в примере ниже, такая неединственность не является существенной и приводит к одному и тому же результату.

8.3.4. Начальные условия

В подразделе 8.2.2 показано, что в задаче с квадратичным лагранжианом реализуется случай двух ударных волн. Рассмотрим снова двумерный случай с граничными условиями вида (8.42), заданными в области G , которая определяется неравенством $x_2 > 0$. Функции H и R в (8.33) становятся зависимыми и задают только одно условие

$$R(x, u, p) = 2H(x, u, p) = \langle A(x, u)(p - q), p - q \rangle = 0 \quad (8.67)$$

Таким образом, система (8.39) сводится к одному уравнению, справедливому для каждой из двух ударных волн:

$$(a_i - a_{i+1}, b_i - b_{i+1}) \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_i - a_{i+1} \\ b_i - b_{i+1} \end{pmatrix} = 0, \quad i = 1, 2 \quad (8.68)$$

Используя свойство однородности этого уравнения, его можно свести к квадратичному относительно k . Два значения k , заданные с помощью (8.38), будут корнями уравнения

$$\alpha_{11}k^2 - 2\alpha_{12}k + \alpha_{22} = 0 \quad \left(k = -\frac{a_i - a_{i+1}}{b_i - b_{i+1}} \right) \quad (8.69)$$

$$k_1 = \frac{\alpha_{12} - \sqrt{\alpha_{12}^2 - \alpha_{11}\alpha_{22}}}{\alpha_{11}}, \quad k_2 = \frac{\alpha_{12} + \sqrt{\alpha_{12}^2 - \alpha_{11}\alpha_{22}}}{\alpha_{11}}$$

Коэффициенты α_{ij} матрицы A берутся здесь в точке $x_1 = x_2 = 0$, $u = c$, то есть $\alpha_{ij} = \alpha_{ij}(0, 0, c)$. Поскольку матрица A симметрическая, то $\alpha_{12} = \alpha_{21}$. Дополнительно предположим, что детерминант матрицы A и коэффициент α_{11} отрицательны:

$$\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2 < 0, \quad \alpha_{11} < 0 \quad (8.70)$$

Тогда уравнение (8.69) имеет два действительных корня $k_1 > k_2$.

Далее можно рассмотреть уравнения

$$k_1 = -\frac{a_2 - a_1}{b_2 - b_1}, \quad k_2 = -\frac{a_3 - a_2}{b_3 - b_2} \quad (8.71)$$

относительно неизвестных a_2, b_2 . Параметры c, a_1, b_1, a_3, b_3 известны и даны в (8.43) при $m = 2$. Таким образом, неизвестные a_2, b_2 удовлетворяют равенствам

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{k_1 a_3 - k_2 a_1}{k_1 - k_2} + \frac{k_1 k_2}{k_1 - k_2} (b_3 - b_1) \\ b_2 &= \frac{a_1 - a_3}{k_1 - k_2} + \frac{k_1 b_1 + k_2 b_3}{k_1 - k_2} \end{aligned} \quad (8.72)$$

8.4. Пример

8.4.1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу (8.1) в двумерном случае с заданным квадратичным лагранжианом специального вида

$$F(x, u, p) = \frac{1}{2}(-\alpha(u)p_1^2 + p_2^2) = \frac{1}{2} \langle A(u)p, p \rangle \quad (8.73)$$

который соответствует диагональной матрице A со следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= -\alpha(u) < 0, \quad \alpha_{12} = \alpha_{21} = 0, \quad \alpha_{22} = 1 \\ \det(A(u)) &= -\alpha(u) < 0 \end{aligned} \quad (8.74)$$

Таким образом, $\alpha_{11} = -\alpha(u)$ — единственный элемент матрицы A , зависящей от u , а функция $\alpha(u)$ является положительной для любого u .

Удобно ввести покомпонентные обозначения

$$x = x_1, \quad y = x_2$$

Положим, что область G является полуплоскостью $y > 0$. Уравнение Эйлера (8.3) в обозначениях (8.73) и граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \alpha(u) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \alpha'(u) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \\ u(x, 0) &= w(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial y} = \psi(x) \end{aligned} \quad (8.75)$$

Функции $w(x), \psi(x)$ предполагаются достаточно гладкими повсюду, за исключением точки $x = 0$, в которой может нарушаться гладкость $w(x)$ (непрерывность $w(x)$ сохраняется). Функция $\psi(x)$ также может иметь ограниченный скачок в этой точке.

Уравнение (8.75) представляет собой квазилинейное волновое уравнение, в котором скорость волны $a(u) = \sqrt{\alpha(u)}$ зависит от решения u . Использование α вместо a^2 является более удобным для последующих вычислений. Вообще говоря, в качестве множества G можно взять прямоугольник $|x| \leq l, 0 \leq y \leq T$, но это не существенно для локальных построений данного раздела.

Нерегулярность функций $w(x)$, $\psi(x)$ может приводить к негладкому решению задачи (8.75) с двумя ударными волнами (кривые, на которых нарушается гладкость $u(x, y)$), начинающимися в начале координат. Тангенсы углов наклона этих двух кривых при $x = 0$ задаются в (8.69) и в случае (8.74) упрощаются до вида

$$k_1 = \frac{1}{\sqrt{\alpha(u)}}, \quad k_2 = -k_1 = -\frac{1}{\sqrt{\alpha(u)}} \quad (8.76)$$

Две ударные волны делят полуплоскость $y \geq 0$ на три сектора аналогично тому, как показано на рис. 8.2 при $m = 2$. Далее ограничимся рассмотрением только первого сектора, содержащего одну ударную волну, которая соответствует значению k_1 в (8.76). Если граничные условия в (8.75) симметричны (что в общем случае не предполагается), то решение, очевидно, будет иметь симметрию относительно оси y .

Следуя разделу 8.2, первичное решение, совпадающее с $u(x, y)$ в первом секторе G^+ , обозначим через $v(x, y)$, а его градиент через

$$q = (q_1, q_2), \quad q_1 = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad q_2 = \frac{\partial v}{\partial y}$$

Символ G^+ для первого сектора соответствует обозначениям на рис. 8.1, где Γ_2 — начальная точка, а Γ — первая ударная волна.

Гамильтониан (8.47) в рассматриваемом случае принимает вид

$$H(x, y, u, p_1, p_2) = F(x, y, u, \xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2}(-\alpha(u)\xi_1^2 + \xi_2^2) \quad (8.77)$$

$$\xi_1 = p_1 - q_1(x, y), \quad \xi_2 = p_2 - q_2(x, y)$$

Снова используя покомпонентные обозначения

$$\xi = \xi_1, \quad \gamma = \xi_2$$

уравнения сингулярных характеристик (8.57) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\alpha(u)\xi, & \dot{y} &= \gamma, & \dot{u} &= -q_1\alpha(u)\xi + q_2\gamma \\ \dot{\xi} &= \frac{1}{2}q_1\alpha'(u)\xi^2, & \dot{\gamma} &= \frac{1}{2}q_2\alpha'(u)\xi^2 \end{aligned} \quad (8.78)$$

С учетом (8.72), (8.76) и обозначений раздела 8.2, начальные условия для системы (8.78) запишем следующим образом:

$$\begin{aligned} x(0) &= 0, & y(0) &= 0, & u(0) &= c \\ \xi(0) &= \xi_0 = a_2 - a_1 = \frac{a_3 - a_1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{\alpha(c)}}(b_3 - b_1) \\ \gamma(0) &= \gamma_0 = b_2 - b_1 = \frac{b_3 - b_1}{2} - \frac{\sqrt{\alpha(c)}}{2}(a_3 - a_1) = -\xi_0\sqrt{\alpha(c)} \end{aligned} \quad (8.79)$$

Следовательно, параметры (8.72) для случая (8.76) принимают вид

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{a_3 + a_1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{\alpha(c)}}(b_3 - b_1) \\ b_2 &= \frac{b_3 + b_1}{2} - \frac{\sqrt{\alpha(c)}}{2}(a_3 - a_1) \end{aligned} \quad (8.80)$$

Чтобы проинтегрировать систему (8.78) с условиями (8.79), вначале требуется найти градиент

$$q_1(x, y) = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad q_2(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}$$

первичного решения $v(x, y)$. Функция $v(x, y)$ при $x \geq 0$ удовлетворяет уравнению с граничными условиями (8.75) и должна быть найдена в области G_v , охватывающей сектор G^+ . Используя разложения Тейлора, данные построения можно выполнить в малом. Наша цель, в частности, — исследовать начальную часть кривой Γ .

8.4.2. Разложения Тейлора

Рассмотрим несколько первых членов ряда Тейлора в разложении граничных функций в (8.75):

$$\begin{aligned} w(x) &= c + a_1x + A_1 \frac{x^2}{2} + D_1 \frac{x^3}{6} \\ \psi(x) &= b_1 + B_1x + E_1 \frac{x^2}{2} \end{aligned} \quad (8.81)$$

Отметим, что параметры c, a_1, b_1 использовались также в (8.43). Поскольку функции $w(x), \psi(x)$ полагаются заданными, то все коэффициенты в (8.81) можно считать известными параметрами.

Разложение Тейлора для первичного решения $v(x, y)$ имеет вид

$$\begin{aligned} v(x, y) &= c + a_1x + b_1y + \frac{1}{2}(A_1x^2 + 2B_1xy + C_1y^2) + \\ &+ \frac{1}{6}(D_1x^3 + 3E_1x^2y + 3F_1xy^2 + G_1y^3) \end{aligned} \quad (8.82)$$

(что является расширением формулы (8.36)), а для функции $\alpha(u)$ в (8.74), полагая $u = v$, получим

$$\alpha(v) = \alpha_0 + \alpha_1(v - c) + \alpha_2 \frac{(v - c)^2}{2} + \alpha_3 \frac{(v - c)^3}{6} \quad (8.83)$$

Одинаковые параметры $c, a_1, b_1, A_1, B_1, D_1, E_1$ в разложениях (8.81)–(8.83) подбираются так, чтобы удовлетворялись граничные условия

$$v(x, 0) = w(x), \quad \frac{\partial v(x, 0)}{\partial y} = \psi(x)$$

Оставшиеся в (8.82) множители C_1, F_1, G_1 должны быть найдены с помощью уравнения Эйлера (8.75) и разложения (8.83). Запишем переменную v в (8.83) в виде (8.82) и подставим (8.82), (8.83) в уравнение Эйлера (8.75). Приравняв далее соответствующие коэффициенты, имеем

$$\begin{aligned} C_1 &= A_1\alpha_0 + a_1^2 \frac{\alpha_1}{2}, \quad F_1 = D_1\alpha_0 + 2a_1A_1\alpha_1 + a_1^3 \frac{\alpha_2}{2} \\ G_1 &= E_1\alpha_0 + (b_1A_1 + a_1B_1)\alpha_1 + a_1^2b_1 \frac{\alpha_2}{2} \end{aligned} \quad (8.84)$$

Согласно обозначениям, использованным в (8.37), ударная волна Γ задается равенством $y = g_1(x)$, правую часть которого разложим в ряд Тейлора:

$$y = Y_1 x + Y_2 \frac{x^2}{2} + Y_3 \frac{x^3}{6} \quad (8.85)$$

Из определения k_1 в (8.37) имеем $Y_1 = k_1 = 1/\alpha_0$. Общая процедура, приведенная ниже, дает такое же значение Y_1 .

Представим разложение решения начальной задачи (8.78), (8.79) в виде

$$\begin{aligned} x &= x_1 t + x_2 \frac{t^2}{2} + x_3 \frac{t^3}{6}, & y &= y_1 t + y_2 \frac{t^2}{2} + y_3 \frac{t^3}{6} \\ \xi &= \xi_0 + \xi_1 t + \xi_2 \frac{t^2}{2} + \xi_3 \frac{t^3}{6}, & \gamma &= \gamma_0 + \gamma_1 t + \gamma_2 \frac{t^2}{2} + \gamma_3 \frac{t^3}{6} \end{aligned} \quad (8.86)$$

Разложение для u не используется, поскольку $u = v$ на Γ и поэтому в (8.78) можно применять как $\alpha(u)$, так и $\alpha(v)$.

Подставляя первые два разложения из (8.86) в (8.85), приходим к следующим выражениям для Y_i в переменных x_i, y_i :

$$Y_1 = \frac{y_1}{x_1}, \quad Y_2 = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1^3}, \quad Y_3 = \frac{x_1 y_3 - x_3 y_1}{x_1^4} - 3Y_2 \frac{x_2}{x_1^2} \quad (8.87)$$

Используя далее частные производные $q_1 = \partial v / \partial x$, $q_2 = \partial v / \partial y$ функции (8.82) в системе (8.78), а также разложение (8.86) и приравнивая множители при равных степенях t , получаем соотношения для коэффициентов в разложениях (8.86):

$$\begin{aligned} x_1 &= -\xi_0 \alpha_0, & x_2 &= -\xi_0 \gamma_0 b_1 \alpha_1 \\ x_3 &= -\xi_0^3 b_1^2 \alpha_1^2 - \xi_0 \gamma_0^2 C_1 \alpha_1 - \xi_0 \gamma_0^2 b_1^2 \alpha_2 - \\ &\quad - \xi_0^2 \gamma_0 a_1 b_1 \alpha_0 \alpha_2 + \xi_0^2 \gamma_0 B_1 \alpha_0 \alpha_1 - \xi_0^3 \gamma_0 a_1 b_1 \alpha_1^2 \\ y_1 &= \gamma_0, & y_2 &= \xi_0^2 b_1 \alpha_1 \\ y_3 &= -\xi_0^3 a_1 b_1 \alpha_0 \alpha_2 + \xi_0^2 \gamma_0 b_1^2 \alpha_2 - \\ &\quad - \xi_0^3 B_1 \alpha_0 \alpha_1 + \xi_0^2 \gamma_0 C_1 \alpha_1 + 2\xi_0^3 a_1 b_1 \alpha_1^2 \end{aligned} \quad (8.88)$$

Эти равенства дают следующие выражения для величин Y_i в (8.87):

$$\begin{aligned} Y_1 &= -\frac{\gamma_0}{\xi_0 \alpha_0} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_0}} = k_1 \\ Y_2 &= \frac{b_1 \alpha_1}{\alpha^2(c)} \left(\frac{\gamma_0^2}{\xi_0^2 \alpha_0} - 1 \right) = 0 \\ Y_3 &= \gamma_0^4 b_1 \left[2a_1 \alpha_2 - \frac{\alpha_1^2}{\alpha_0} \left(a_1 + \frac{b_1}{\sqrt{\alpha_0}} \right) \right] \end{aligned} \quad (8.89)$$

Здесь использовано соотношение $\gamma_0 = -\xi_0 \sqrt{\alpha_0}$, которое следует из последнего равенства в (8.79) при $\alpha(c) = \alpha_0$. Таким образом, второй член в (8.85) исчезает и ударная волна задается равенством

$$y = k_1 x + Y_3 \frac{x^3}{6} \quad (8.90)$$

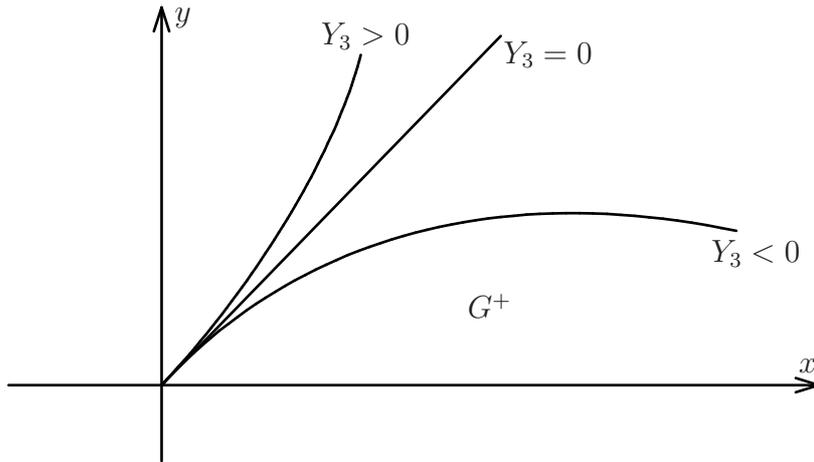


Рис. 8.3

Вблизи начальной точки ударная волна выпуклая, если $Y_3 > 0$, и вогнутая при $Y_3 < 0$ (рис. 8.3).

8.4.3. Частные случаи

Если функция $\alpha(u)$ является константой, $\alpha(u) \equiv \alpha_0$, то в результате интегрирования (8.78) при условиях (8.79) получаем хорошо известную характеристику линейного волнового уравнения:

$$x + \sqrt{\alpha_0} y = 0 \quad (8.91)$$

Из выражений для начальных величин ξ_0, γ_0 в (8.79) следует, что они обращаются в нуль одновременно, если начальная функция $w(x)$ гладкая (тогда $a_3 = a_1$), а функция $\psi(x)$ непрерывная (тогда $b_3 = b_1$), см. (8.43). Таким образом, в общем случае существование ударной волны может быть вызвано негладкостью функции $w(x)$ и/или разрывностью $\psi(x)$. С другой стороны, при $\xi_0 = \gamma_0 = 0$ система (8.78) имеет равновесное решение $x = y = 0, u = c, \xi = \gamma = 0$ и для проверки существования ударной волны требуется дополнительный анализ системы (8.78).

Введем для системы (8.78) новое время (независимая переменная) и новую фазовую переменную согласно равенствам

$$\tau = - \int_0^t \xi(\sigma) d\sigma, \quad \delta = -\frac{\gamma}{\xi}$$

Обозначив дифференцирование по τ через штрих, перепишем систему (8.78) и получим уравнение для δ :

$$\begin{aligned} x' &= \alpha(u), & y' &= -\frac{\gamma}{\xi} = \delta, & u' &= q_1 \alpha(u) - q_2 \delta \\ \xi' &= -\frac{1}{2} q_1 \frac{d\alpha}{du} \xi, & \gamma' &= -\frac{1}{2} q_2 \frac{d\alpha}{du} \xi, & \delta' &= \frac{1}{2} \frac{d\alpha}{du} (q_1 \delta + q_2) \end{aligned} \quad (8.92)$$

Видно, что подсистема с переменными x, y, u, δ отщепляется от оставшихся двух уравнений и вместе с начальными условиями (8.79) (которые также включают условие для δ) может быть записана в виде

$$\begin{aligned} x' &= \alpha, & y' &= \delta, & u' &= q_1\alpha - q_2\delta, & \delta' &= \frac{1}{2} \frac{d\alpha}{du} (q_1\delta + q_2) \\ x(0) &= 0, & y(0) &= 0, & u(0) &= c, & \delta(0) &= \sqrt{\alpha(c)} \end{aligned} \quad (8.93)$$

Таким образом, порядок системы сингулярных характеристик (8.78) может быть уменьшен с 5 до 4, как в системе (8.93). Последняя система удобна еще и тем, что она не имеет сингулярностей для малых ξ, γ и дает регулярное описание ударной волны, если взять $\xi = 0$ и $\gamma = 0$. Это свойство возникает вследствие медленного времени τ .

Если линейный член в разложении (8.81) для w отсутствует, $a_1 = 0$, то из (8.89) получаем

$$Y_3 = -\gamma_0^4 b_1^2 \frac{\alpha_1^2}{\alpha_0 \sqrt{\alpha_0}} < 0$$

Это означает, что ударная волна является вогнутой.

Если же линейный член отсутствует в разложении (8.83), $\alpha_1 = 0$, тогда

$$Y_3 = 2\gamma_0^4 a_1 b_1 \alpha_2$$

В этом случае ударная волна является вогнутой при $a_1 b_1 \alpha_2 < 0$ и выпуклой при $a_1 b_1 \alpha_2 > 0$. Продолжая эту локальную картину, можно обнаружить, что в последнем случае (возможно, с более общей зависимостью $\alpha = \alpha(x, y, u)$) возникает внутреннее отражение ударной волны. Для такого исследования требуется численное построение Г.

Упражнения

8.1. Получить из формулы (8.14) выражение (3.9) для первой вариации в случае скалярного x .

8.2. Используя равенства (8.33), вывести соотношение (8.34).

8.3. Получить равенства (8.33) и записать систему (8.35) для двумерной задачи с лагранжианом $F = F(p_1, p_2) = p_1^2 + p_2^3$.

8.4. Доказать соотношения (8.48) и (8.49).

8.5. Используя (8.50), получить систему (8.58).

8.6. Из равенств (8.68) вывести соотношения (8.69).

8.7. Получить уравнение Эйлера (8.75) и характеристическую систему (8.78) для задачи с лагранжианом (8.73).

8.8. Проверить выражения (8.72) и (8.80).

8.9. Вывести соотношения (8.84).

8.10. Получить формулы (8.87) и (8.89) для разложения ударной волны.

8.11. Вывести систему (8.92) и проверить начальные условия (8.93).

8.12. Найти члены второго порядка малости в разложении

$$u_2(x, y) = c + a_2x + b_2y + \dots$$

где коэффициенты a_2, b_2 заданы в (8.80). Использовать разложение (8.82), а также аналогичное разложение для функции $u_3(x, y)$ в третьем секторе.

Приложение

1. Теорема о неявной функции

Рассмотрим систему из m скалярных уравнений относительно m неизвестных переменных y_1, \dots, y_m :

$$\begin{aligned} F_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) &= 0 \\ F_2(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) &= 0 \\ &\dots\dots\dots \\ F_m(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) &= 0 \end{aligned} \tag{П.1}$$

В векторном виде эта система может быть записана следующим образом:

$$\begin{aligned} F(x, y) &= 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R}^m, \quad F(x, y) \in \mathbb{R}^m \\ F(z) &= 0, \quad z = (x, y) \in \mathbb{R}^{n+m} \end{aligned} \tag{П.2}$$

Величины x_1, \dots, x_n считаются параметрами, а z — расширенный $(n + m)$ -мерный вектор.

Детерминант матрицы Якоби (якобиан) для систем (П.1), (П.2) имеет вид

$$\left| \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial y_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \frac{\partial F_m}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}$$

Теорема. Пусть точка $z^* = (x^*, y^*)$ такова, что $F(z^*) = 0$ и существует ее окрестность $D_z \subset \mathbb{R}^{n+m}$, в которой функции $F_i(z)$ имеют непрерывные производные порядка k по переменным $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m$, $F_i \in C^k(D_z)$, $i = 1, \dots, m$. Предположим, что выполняется неравенство

$$\left| \frac{\partial F(x^*, y^*)}{\partial y} \right| \neq 0$$

Тогда существуют окрестности $D_x \subset \mathbb{R}^n$, $D_y \subset \mathbb{R}^m$ точек x^* и y^* соответ-

ственно, а также единственный набор функций

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n) \\ y_2 &= f_2(x_1, \dots, x_n) \\ &\dots\dots\dots \\ y_m &= f_m(x_1, \dots, x_n) \\ x &= (x_1, \dots, x_n) \in D_x \end{aligned}$$

(в векторной записи $y = f(x)$), такой что

$$y^* = f(x^*); \quad f(x) \in D_y, \quad x \in D_x; \quad f(x) \in C^k(D_x); \quad F(x, f(x)) = 0$$

Доказательство этой теоремы может быть найдено в учебниках по дифференциальному исчислению.

2. Скобки Якоби

Пусть F, G, H — достаточно гладкие скалярные функции от $2n+1$ переменных

$$z = (x, u, p) \in \mathbb{R}^{2n+1}, \quad x = (x_1, \dots, x_n), \quad p = (p_1, \dots, p_n), \quad u \in \mathbb{R}^1$$

Скобкой Якоби функций F и G называется гладкая, обозначаемая через $\{FG\}$ (порядок F, G в этом обозначении важен) и зависящая от вектора z функция, заданная в виде

$$\{FG\} = \sum_{i=0}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial F}{\partial u} \right) \frac{\partial G}{\partial p_i} - \sum_{i=0}^n \left(\frac{\partial G}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial G}{\partial u} \right) \frac{\partial F}{\partial p_i} \quad (\text{П.3})$$

Используя скалярное произведение в \mathbb{R}^n , эту функцию можно также определить следующим образом:

$$\begin{aligned} \{FG\} &= \langle F_x + pF_u, G_p \rangle - \langle G_x + pG_u, F_p \rangle \\ F_x = (F_{x_1}, \dots, F_{x_n}) &= \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n} \right) \in \mathbb{R}^n, \quad F_u = \frac{\partial F}{\partial u} \end{aligned} \quad (\text{П.4})$$

Из (П.3), (П.4) следуют равенства

$$\{FG\} = -\{GF\}, \quad \{FF\} = 0, \quad \{aF + bG, H\} = a\{FH\} + b\{GH\}$$

где a и b — постоянные.

Если функции F, G не зависят от u , то есть $F = F(x, p)$ и $G = G(x, p)$, то выражения (П.3), (П.4) называются скобкой Пуассона, которая имеет более простой вид:

$$\{FG\} = \sum_{i=0}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial G}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial p_i} \right)$$

Для двойных скобок Пуассона от функций F, G, H по переменным x, p выполняется следующее *тождество Якоби*:

$$\{\{FG\}H\} + \{\{GH\}F\} + \{\{HF\}G\} = 0 \quad (\text{П.5})$$

Здесь в левой части все слагаемые содержат вторые производные. Чтобы установить соотношение (П.5), надо показать, что слагаемые взаимно уничтожаются.

В случае скобок Якоби левая сторона в (П.5) содержит также члены с производными только первого порядка. Вместо равенства (П.5) имеем

$$\{\{FG\}H\} + \{\{GH\}F\} + \{\{HF\}G\} = \{FG\}H_u + \{GH\}F_u + \{HF\}G_u$$

Это равенство называется *обобщенным тождеством Якоби*.

3. Инвариантность скобок Якоби

Взаимно-однозначное преобразование

$$\begin{aligned} x &= X(y, v, q), & u &= U(y, v, q), & p &= P(y, v, q) \\ y &= Y(x, u, p), & v &= V(x, u, p), & q &= Q(x, u, p) \end{aligned}$$

в пространстве \mathbb{R}^{2n+1} от переменных x, u, p к новым переменным y, v, q и обратно называется *контактным*, если значение скобок Якоби остается инвариантным, то есть для любых гладких функций $F(x, u, p)$ и $G(x, u, p)$ выполнено тождество

$$\begin{aligned} \{FG\} &= \{\tilde{F}\tilde{G}\} \\ \tilde{F} &= \tilde{F}(y, v, q) = F(X(y, v, q), U(y, v, q), P(y, v, q)) \\ \tilde{G} &= \tilde{G}(y, v, q) = G(X(y, v, q), U(y, v, q), P(y, v, q)) \end{aligned}$$

Скобка $\{\tilde{F}\tilde{G}\}$ здесь вычисляется по переменным y, v, q . *Каноническим* преобразованием переменных называется замена

$$x = X(y, q), \quad p = P(y, q); \quad y = Y(x, p), \quad q = Q(x, p)$$

при которой значение скобок Пуассона остается инвариантным.

Рассмотрим два частных случая контактных преобразований переменных. Первый случай — это преобразование вида

$$\begin{aligned} x &= y, & u &= v + w(x), & p &= q + w_x(x) \\ y &= x, & v &= u - w(x), & q &= p - w_x(x) \end{aligned} \quad (\text{П.6})$$

где $w(x)$ — заданная скалярная функция. Доказательство инвариантности скобок Якоби при преобразовании (П.6) предложено в качестве упражнения к главе 1.

Второй класс контактных преобразований — это так называемые *точечно контактные* преобразования вида

$$\begin{aligned} x &= \phi(y), & u &= v, & p &= A^{-1}q = Bq \\ y &= \psi(x), & v &= u, & q &= B^{-1}p = Ap \\ A &= \|a_{ij}\|_1^n, & a_{ij} &= \frac{\partial \phi_j}{\partial y_i}; & B &= \|b_{ij}\|_1^n, & b_{ij} &= \frac{\partial \psi_j}{\partial y_i} \end{aligned} \quad (\text{П.7})$$

Здесь A и B — квадратные матрицы $n \times n$, которые могут рассматриваться как функции от x и y соответственно. Так как преобразования $x = \phi(y)$ и $y = \psi(x)$ взаимно обратные, то матрицы A и B являются обратными по отношению друг к другу:

$$AB = I, \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} = \delta_{ik} \quad (\delta_{ii} = 1, \delta_{ik} = 0, i \neq k) \quad (\text{II.8})$$

Матрица A (B) возникает тогда, когда на основе некоторой функции $u(x)$ ($v(y)$) вводится функция

$$v(y) = u(\phi(y)) \quad (u(x) = v(\psi(x)))$$

и это равенство далее дифференцируется по переменным y_i (x_i):

$$\begin{aligned} q_i &= \frac{\partial v}{\partial y_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \phi_j}{\partial y_i} = \sum_{j=1}^n a_{ij} p_j \\ p_i &= \frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial v}{\partial y_j} \frac{\partial \psi_j}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n b_{ij} q_j \end{aligned} \quad (\text{II.9})$$

В соотношениях (II.7), (II.8) и ниже используются обозначения матричного умножения. В этой операции в качестве вектора, стоящего справа от матрицы, подразумевается n -мерный вектор-столбец. Результатом умножения также является n -мерный вектор-столбец. Например, в равенстве $q = Ap$, где A — квадратная $n \times n$ -матрица, p и q представляют собой n -мерные векторы-столбцы, компоненты вектора q определяются первым равенством в (II.9).

Для заданных функций $F(x, u, p)$, $G(x, u, p)$ введем соответствующие функции от новых переменных (II.7):

$$\tilde{F}(y, v, q) = F(\phi(y), v, B(y)q), \quad \tilde{G}(y, v, q) = G(\phi(y), v, B(y)q)$$

Вычислим скобку (II.4) в новых переменных:

$$\begin{aligned} \{\tilde{F}\tilde{G}\} &= \langle \tilde{F}_y + q\tilde{F}_v, \tilde{G}_q \rangle - \langle \tilde{G}_y + q\tilde{G}_v, \tilde{F}_q \rangle = \\ &= \langle AF_x + \frac{\partial}{\partial y}(Bq)F_p + F_u Ap, B^T G_p \rangle = \\ &= -\langle AG_x + \frac{\partial}{\partial y}(Bq)G_p + G_u Ap, B^T F_p \rangle = \\ &= \{FG\} + \left\langle \frac{\partial}{\partial y}(Bq)F_p, B^T G_p \right\rangle - \left\langle \frac{\partial}{\partial y}(Bq)G_p, B^T F_p \right\rangle \end{aligned} \quad (\text{II.10})$$

Здесь применены свойства скалярного умножения, правило

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^T y \rangle, \quad A^T B^T = (BA)^T = I^T = I$$

транспонирования матриц, а также выражение для производной

$$\frac{\partial}{\partial y}(Bq) = \|d_{ki}\|_1^n, \quad d_{ki} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial b_{ij}}{\partial y_k} q_j$$

Последние два члена в (П.10) в покомпонентной записи могут быть представлены в виде

$$\sum_{i,k} F_{p_i} G_{p_k} \left(\sum_j q_j \sum_s \left(b_{ks} \frac{\partial b_{ij}}{\partial y_s} - b_{is} \frac{\partial b_{kj}}{\partial y_s} \right) \right) \quad (\text{П.11})$$

При этом суммирование ведется от 1 до n . Опираясь на соотношения (П.7), (П.9), можно получить

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_{ij}}{\partial x_k} &= \sum_s \frac{\partial b_{ij}}{\partial y_s} \frac{\partial \psi_s}{\partial x_k} = \sum_s \frac{\partial b_{ij}}{\partial y_s} b_{ks} \\ \frac{\partial b_{ij}}{\partial x_k} &= \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial x_k \partial x_i} = \frac{\partial b_{kj}}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (\text{П.12})$$

Отсюда следует, что внутренняя сумма в (П.11) равна нулю и соотношение (П.10) упрощается до равенства

$$\{\tilde{F}\tilde{G}\} = \{FG\}$$

Поскольку это тождество верно для любых гладких функций F и G , то тем самым доказано, что замена переменных (П.7) является контактным преобразованием.

Другим важным свойством контактных преобразований является то, что система характеристик

$$\dot{x} = F_p, \quad \dot{u} = \langle p, F_p \rangle, \quad \dot{p} = -F_x - pF_u \quad (\text{П.13})$$

записанная с помощью гамильтониана $F(x, u, p)$, сохраняет свой вид и в новых переменных:

$$\dot{y} = \tilde{F}_q, \quad \dot{v} = \langle q, \tilde{F}_q \rangle, \quad \dot{q} = -\tilde{F}_y - q\tilde{F}_v$$

Действительно, в случае точно контактного преобразования (П.7) это может быть показано следующим образом. Дифференцируя равенства $y = \psi(x)$, $v = u$ относительно независимой переменной t системы (П.13), имеем

$$\begin{aligned} \dot{y} &= B^T \dot{x} = B^T F_p = \frac{\partial}{\partial q} \tilde{F}(y, v, q) = \tilde{F}_q \\ \dot{v} &= \dot{u} = \langle p, F_p \rangle = \langle Bq, F_p \rangle = \langle q, B^T F_p \rangle = \langle q, \tilde{F}_q \rangle \end{aligned} \quad (\text{П.14})$$

Уравнение для \dot{q} получается дифференцированием равенства $q = Ap$:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \dot{A}p + A\dot{p} = \dot{A}p + A(-F_x - pF_u) = \\ &= -\frac{\partial}{\partial y}(Bq)F_p - AF_x - F_u Ap = -\tilde{F}_y - q\tilde{F}_v \end{aligned} \quad (\text{П.15})$$

Выражение $\dot{A}p$ упрощается до $-\frac{\partial}{\partial y}(Bq)F_p$ следующим образом. Дифференцируя тождество $AB = I$, имеем $\dot{A}B + A\dot{B} = 0$, откуда получаем $\dot{A} = -A\dot{B}B^{-1}$. Последнее равенство может быть преобразовано с использованием соотношения $p = Bq$ к виду

$$\dot{A}p = -A\dot{B}B^{-1}Bq = -A\dot{B}q$$

Применяя правило дифференцирования сложной функции, из соотношений (П.12), (П.14) для элементов матрицы \dot{B} имеем

$$\dot{b}_{ij} = \sum_k \frac{\partial b_{ij}}{\partial y_k} \dot{y}_k = \sum_{k,s} \frac{\partial b_{ij}}{\partial y_k} b_{sk} F_{p_s} = \sum_{k,s} \frac{\partial b_{sj}}{\partial y_k} b_{ik} F_{p_s}$$

Отсюда получаем следующее выражение для компонент вектора $A\dot{B}q$:

$$\sum_i a_{mi} \sum_j \dot{b}_{ij} q_j = \sum_{i,j,k,s} a_{mi} b_{ik} \frac{\partial b_{sj}}{\partial y_k} q_j F_{p_s} = \sum_{j,s} \frac{\partial b_{sj}}{\partial y_m} q_j F_{p_s} \quad (\text{П.16})$$

Здесь использованы соотношение (П.8), а также правило замены индекса при помощи символа Кронекера δ_{ik} :

$$\sum_i c_i \delta_{ik} = c_k$$

Соотношение (П.16) завершает доказательство равенства (П.15).

4. Выпрямление поля

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (\text{П.17})$$

где вектор-функция $f(x)$ полагается достаточно гладкой. После взаимно-однозначной замены переменных $x = \phi(y)$ ($y = \psi(x)$), см. (П.7), система (П.17) переходит в систему

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \frac{dy}{dt} = g(y), \quad y \in \mathbb{R}^n \\ \dot{y} &= \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} f(x) = \frac{\partial \psi(\phi(y))}{\partial x} f(\phi(y)) \equiv g(y) \end{aligned} \quad (\text{П.18})$$

Нас интересует нахождение такой функции $\phi(y)$ (и $\psi(x)$), при которой вектор-функция $g(y)$ примет вид

$$g(y) = (0, \dots, 1) \quad (g_k(y) \equiv 0, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad g_n(y) \equiv 1) \quad (\text{П.19})$$

Данная процедура называется *выпрямлением поля* $f(x)$. Выпрямляющее преобразование может быть построено следующим образом.

Зафиксируем некоторую гиперповерхность

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n : x = h(s), \quad s \in G \subset \mathbb{R}^{n-1}\} \quad (s = (s_1, \dots, s_{n-1})) \quad (\text{П.20})$$

такую что векторы

$$\frac{\partial h(s^*)}{\partial s_1}, \dots, \frac{\partial h(s^*)}{\partial s_{n-1}}, \quad f(x^*) \in \mathbb{R}^n \quad (x^* = h(s^*), \quad s^* \in G)$$

являются линейно независимыми. Другими словами, поле значений вектор-функции $f(x)$ в малой окрестности поверхности M трансверсально к ней.

Рассмотрим решения $x = x(t)$ семейства задач Коши

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x(0) = h(s), \quad s \in G \quad (\text{П.21})$$

с компонентами вектора s в качестве параметров. Общее решение

$$x = X(s_1, \dots, s_{n-1}, t) = X(s, t), \quad s \in G, \quad |t| \leq t_0 \quad (\text{П.22})$$

задачи (П.21) существует (при достаточно малом t_0) и является таким же гладким (по переменным s, t), как и функция $f(x)$, [17]. Вследствие определения (П.20) равенство (П.22) удовлетворяет условию теоремы о неявной функции и может быть разрешено относительно переменных s и t :

$$s_1 = S_1(x), \dots, s_{n-1} = S_{n-1}(x), \quad t = S_n(x), \quad x \in D \subset \mathbb{R}^n$$

Здесь D — некоторая окрестность точки x^* .

Покажем, что преобразование вида

$$\begin{aligned} x_1 &= \phi_1(y) \equiv X_1(s, t), \dots, x_n = \phi_n(y) \equiv X_n(s, t) \\ y_1 &= \psi_1(x) \equiv S_1(x), \dots, y_{n-1} = \psi_{n-1}(x) \equiv S_{n-1}(x) \\ y_n &= \psi_n(x) \equiv S_n(x) \quad (y_1 = s_1, \dots, y_{n-1} = s_{n-1}, y_n = t) \end{aligned} \quad (\text{П.23})$$

является выпрямляющим, а параметры s_1, \dots, s_{n-1} поверхности M и независимая переменная t (время) образуют новую переменную y . Таким образом, функция $x = \phi(y)$ получается путем интегрирования системы (П.21). Функция $y = \psi(x)$, в свою очередь, является обратной к $\phi(y)$. Поскольку параметр s_i по построению остается постоянным вдоль любого фиксированного решения системы (П.21), то получаем

$$\frac{ds_i}{dt} = \frac{dy_i}{dt} = 0, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad \frac{dt}{dt} = \frac{dy_n}{dt} = 1$$

Следовательно, новое поле имеет вид (П.19), а использованная замена переменных (П.23) — выпрямляющая.

Это также доказывается и более формально. Можно показать, что функции (П.23) удовлетворяют условиям (П.18), (П.19). Соотношение $y = \psi(X(y))$, где $y = (s, t)$, по построению представляет собой тождество по y , которое покомпонентно записывается в виде

$$y_1 = s_1 = \psi_1(X(y)), \dots, \quad y_{n-1} = s_{n-1} = \psi_{n-1}(X(y)), \quad y_n = t = \psi_n(X(y)) \quad (\text{П.24})$$

Тождества (П.24) могут быть продифференцированы по любой переменной y_k . В результате дифференцирования по $y_n = t$ имеем

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} \dot{X}_j = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} f_j(x) = \dot{y}_i, \quad i = 1, \dots, n-1 \\ 1 &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi_n}{\partial x_j} f_j(x) = \dot{y}_n \end{aligned}$$

Полученные соотношения показывают, что заданное при помощи (П.18), (П.23) поле имеет вид (П.19).

5. Преобразование к простой задаче

Простая задача (1.111)–(1.113) является частным случаем общей нерегулярной задачи (1.106)–(1.108). Без потери общности, граничную функцию в (1.106) можно взять тождественно равной нулю, $v(x) = 0$. Действительно, если ввести новую неизвестную функцию $\tilde{u}(x) = u(x) - v(x)$, то (1.106) сводится к задаче

$$\begin{aligned} \tilde{F}(x, \tilde{u}(x), \tilde{p}(x)) &\equiv F(x, \tilde{u}(x) + v(x), \tilde{p}(x) + q(x)) = 0, \quad x \in D \\ \tilde{u}(x) &= 0, \quad x \in M \quad \left(\tilde{p}(x) = \frac{\partial \tilde{u}(x)}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (\text{П.25})$$

Следует только позаботиться о выполнении условия нерегулярности (1.109). Это условие для новой задачи (П.25) выполнено, поскольку, во-первых, замена переменных

$$\tilde{x} = x, \quad \tilde{u} = u - v(x), \quad \tilde{p} = p - q(x)$$

имеет вид (П.6) и является контактным преобразованием. Во-вторых, условие (1.109) может быть записано с помощью скобок Якоби в виде

$$\{F_1 F\} \equiv \langle F_p, p - q(x) \rangle = 0, \quad F_1(x, u) = u - v(x)$$

который не меняется при контактном преобразовании переменных. Таким образом, можно рассмотреть исходную задачу в форме

$$F(x, u, p) = 0, \quad x \in D; \quad u(x) = 0, \quad x \in M \quad (\text{П.26})$$

Найдем далее точно контактное преобразование, при котором начальная интегральная поверхность (1.108) имеет вид (1.113), но с большей размерностью.

Рассмотрим произвольную достаточно гладкую функцию $w(x)$, заданную на множестве D и принимающую на M вместе с ее градиентом значения

$$\frac{\partial w(x)}{\partial x} = r(x), \quad w(x) = 0, \quad x \in M \subset D$$

Здесь $r(x)$ — функция, задающая значение вектора p на поверхности M , удовлетворяющая условию интегральности (1.107) при $v(x) \equiv 0$, $q(x) \equiv 0$ (то есть условию для задачи (П.26)) и определяющая соответствующую интегральную поверхность (1.108). Такая функция существует, например, как решение задачи Коши

$$F^{k-1}\left(x, w(x), \frac{\partial w(x)}{\partial x}\right) = 0, \quad x \in D; \quad w(x) = 0, \quad x \in M$$

которая рассматривается при начальных условиях, заданных на исходной интегральной поверхности, и удовлетворяет достаточному условию главы 1 вследствие выполнения предположения $F_0^k = \{F_1 F_0^{k-1}\} \neq 0$ теоремы 1.6.

Применим преобразование $x = \phi(y)$, $y = \psi(x)$, построенное в предыдущем разделе и выпрямляющее поле

$$\begin{aligned} \dot{x} = f(x) &\equiv c \frac{w_x(x)}{\langle w_x(x), w_x(x) \rangle} & (c = \text{const} \neq 0) \\ x(0) = h(s), \quad s \in G & & (x(0) \in M) \end{aligned} \quad (\text{П.27})$$

Введем в уравнение (П.26) новую неизвестную функцию

$$\tilde{u}(y) = u(\phi(y))$$

Поскольку поверхность M в новых переменных задается как поверхность \tilde{M} , для которой $y_n = t = 0$, то граничное условие в новых переменных имеет вид

$$\tilde{u}(y_1, \dots, y_{n-1}, 0) = 0$$

Отсюда следует, что первые $n - 1$ компонент градиента обращаются в нуль на \tilde{M} :

$$\tilde{p}_i = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n - 1, \quad y \in \tilde{M}$$

По построению на поверхности M выполняются равенства

$$\frac{\partial u}{\partial x} = r(x) = w_x(x), \quad x \in M$$

Таким образом, на поверхности \tilde{M} (при $y_n = 0$) последняя компонента \tilde{p}_n градиента принимает значение

$$\tilde{p}_n = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_n} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial y_n} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \frac{\partial \phi_n}{\partial y_n} = \frac{\langle w_x(x), cw_x(x) \rangle}{\langle w_x(x), w_x(x) \rangle} = c$$

Здесь использовано равенство $\partial \phi / \partial y_n = \dot{x}$ (см. (П.23)).

В новых переменных

$$y = \psi(x), \quad \tilde{u} = u, \quad \tilde{p} = \frac{\partial \phi}{\partial y} p$$

начальная интегральная поверхность имеет вид

$$\tilde{\Sigma} = \{(y, \tilde{u}, \tilde{p}) : y_n = 0, \tilde{u} = 0, \tilde{p}_1 = 0, \dots, \tilde{p}_{n-1} = 0, \tilde{p}_n = c\} \quad (\text{П.28})$$

где переменные y_1, \dots, y_{n-1} являются параметрами для $\tilde{\Sigma}$. Эти параметры принимают значения из области G (см. (П.27)), а само многообразие (П.28) представляет собой простую форму начального многообразия.

Литература

- [1] *Арнольд В.И.* Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Ижевск: Удмурт. гос. ун-т, 1984. 351 с.
- [2] *Bardi M., Capuzzo-Dolcetta I.* Optimal Control and Viscosity Solutions of Hamilton – Jacobi – Bellman Equations. Boston: Birkhäuser, 1997.
- [3] *Barron E.N., Evans L.C., Jensen R.* Viscosity solutions of Isaacs' equations and differential games with Lipschitz controls. J. Different. Equat., 1984. Vol. 53, no. 2, pp. 213–233.
- [4] *Basar T., Olsder G.J.* Dynamic Noncooperative Game Theory. London: Academic Press, 1995.
- [5] *Bellman R.* Dynamic Programming. Princeton: Princeton University Press, 1957. = *Беллман Р.* Динамическое программирование. М.: ИЛ, 1960. 400 с.
- [6] *Berkovitz L.D.* The existence of value and saddle point in games with fixed duration. SIAM J. Control Optim., 1985. Vol. 23, pp. 172–196.
- [7] *Bernhard P.* Singular surfaces in differential games: an introduction. Lect. Notes in Control and Information Sci. Vol. 3. Differential Games and Applications. Berlin: Springer-Verlag, 1977, pp. 1–33.
- [8] *Bliss G.A.* Lectures on the Calculus of Variations. Chicago: University Chicago Press, 1946. = *Блисс Г.А.* Лекции по вариационному исчислению. М.: ИЛ, 1950. 348 с.
- [9] *Breakwell J.V.* Pursuit of faster evader. In: The Theory and Applications of Differential Games. Dordrecht: Redial, 1975, pp. 243–256.
- [10] *Breakwell J.V., Bernhard P.* A simple game with a singular focal line. J. Optim. Theory Appl., 1990. Vol. 64, no. 2, pp. 419–428.
- [11] *Brockett R.W.* Functional expansions and higher order necessary conditions in optimal control. Lect. Notes in Economics and Mathematical Systems. Vol. 131. Berlin: Springer, 1976, pp. 111–121.
- [12] *Bryson A.E., Ho Y.C.* Applied Optimal Control. Waltham etc.: Blaisdell Publishing Co., 1969. = *Брайсон А., Хо Ю-Ши.* Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир, 1972. 544 с.
- [13] *Черноусько Ф.Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем. М.: Наука, 1988. 320 с.
- [14] *Chernousko F.L., Melikyan A.A.* Some differential games with incomplete information. Lect. Notes in Computer Science. Vol. 27. Berlin: Springer-Verlag, 1974, pp. 445–450.

- [15] Черноусько Ф.Л., Меликян А.А. Игровые задачи управления и поиска. М.: Наука, 1978. 270 с.
- [16] Cliff E.M., Kelley H.J., Lefton L. Thrust-vectored energy turnes. *Automatica*, 1982. Vol. 18, no. 5, pp. 559–564.
- [17] Coddington E.A., Levinson N. *Theory of Ordinary Differential Equations*. New York: McGraw-Hill, 1955. = Коддингтон Е.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1958. 479 с.
- [18] Courant R. *Partial Differential Equations*. New York: InterScience, 1962. = Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.
- [19] Crandall M.G., Lions P.L. Viscosity solutions of Hamilton – Jacobi equations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1983. Vol. 277, no. 1, pp. 1–42.
- [20] Crandall M.G., Evans L.C., Lions P.L. Some properties of viscosity solutions of Hamilton – Jacobi equations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1984. Vol. 282, pp. 487–502.
- [21] Crandall M.G., Ishii H., Lions P.L. User’s guide to viscosity solutions of second order partial differential equations. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1992. Vol. 27, no. 1, pp. 1–67.
- [22] Dafermos C.M. Generalized characteristics in hyperbolic systems of conservation laws. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 1989. Vol. 107, no. 2, pp. 127–155.
- [23] Демьянов В.Ф. Минимакс: дифференцируемость по направлениям. Л.: Ленингр. гос. ун-т, 1974. 112 с.
- [24] Elliot R.J., Kalton N.J. The existence of value in differential games. *Memoirs of the American Mathematical Society*, no. 126. Providence: AMS, 1972.
- [25] Evans L.C., Ishii L.C. Differential games and nonlinear first order PDE on bounded domain. *Manuscripta Math.*, 1984. Vol. 49, pp. 109–139.
- [26] Evans L.C., Souganidis P.E. Differential games and representation formulas for solutions of Hamilton – Jacobi – Isaacs equations. *Indiana Univ. Math. J.*, 1984. Vol. 33, pp. 773–797.
- [27] Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.
- [28] Fleming W.H. The convergence problem for differential games. *J. Math. Anal. and Appl.*, 1961. Vol. 3, pp. 102–116.
- [29] Fleming W.H., Soner H.M. *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions*. Applications of Mathematics, 25. New York: Springer-Verlag, 1993.
- [30] Friedman A. *Differential Games*. Pure and Applied Mathematics. Vol. XXV. New York: Wiley-Interscience, 1971.
- [31] Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. М.: Наука, 1973. 256 с.
- [32] Hestenes M.R. *Calculus of Variations and Optimal Control Theory*. New York: John Wiley, 1966.
- [33] Isaacs R. *Differential Games*. New York: John Wiley, 1965. = Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 480 с.

- [34] *Izumiya S., Kossioris G.T.* Semi-local classification of geometric singularities for Hamilton – Jacobi equations. *J. Different. Equat.*, 1995. Vol. 118, no. 1, pp. 166–193.
- [35] *Kelley H.J., Kopp R.E., Moyer H.G.* Singular extremals. *Topics in Optimization*, G. Leitmann (ed.). New York: Academic Press, 1967, pp. 63–101.
- [36] *Корнеев В.А., Меликян А.А.* Построение обобщенного решения двумерного уравнения Гамильтона – Якоби методом характеристик // *Изв. РАН. Теория и системы управления*, 1995. № 6, с. 168–177.
- [37] *Kossioris G.T.* Formation of singularities for viscosity solutions of Hamilton – Jacobi equations in higher dimensions. *Comm. Partial Different. Equat.*, 1993. Vol. 18, no. 7–8, pp. 1085–1108.
- [38] *Krasovskii N.N., Krasovskii A.N.* A differential game for the minimax of a positional functional. *Progr. Systems Control Theory*. Vol. 17. *Advances in Nonlinear Dynamics and Control: a Report from Russia*. Boston: Birkhäuser, 1993, pp. 41–73.
- [39] *Krasovskii N.N., Subbotin A.I.* *Game-Theoretical Control Problems*. New York: Springer-Verlag, 1988.
- [40] *Кружков С.Н.* Обобщенные решения нелинейных уравнений первого порядка со многими независимыми переменными, I // *Мат. сборник*, 1966. Т. 70, № 3, с. 394–415.
- [41] *Кружков С.Н.* Обобщенные решения уравнений Гамильтона – Якоби типа эйконала. I. Постановка задач, теоремы существования, единственности и устойчивости, некоторые свойства решений // *Мат. сборник*, 1975. Т. 98, № 3, с. 450–493.
- [42] *Kumkov S.S., Patsko V.S.* Parallel algorithm for construction of singular surfaces in linear differential games. *Proc. 8th Intern. Colloq. Different. Equat.*, Plovdiv, Bulgaria, 18–23 Aug. 1997, pp. 275–284.
- [43] *Куржанский А.Б.* *Управление и наблюдение в условиях неопределенности*. М.: Наука, 1977. 392 с.
- [44] *Lewin J.* *Differential Games. Theory and Methods for Solving Game Problems with Singular Surfaces*. London: Springer-Verlag, 1994.
- [45] *Lions P.L.* *Generalized Solutions of Hamilton – Jacobi Equations*. *Research Notes in Mathematics*. Vol. 69. Boston: Pitman, 1982.
- [46] *Lions P.L., Souganidis P.E.* Differential games, optimal control and directional derivatives of viscosity solutions of Bellman’s and Isaacs’ equations. *SIAM J. Control Optim.*, 1985. Vol. 23, no. 4, pp. 566–583.
- [47] *Меликян А.А.* Необходимые условия для особых поверхностей одного типа в дифференциальной игре / *Динамическое управление: Сб. тез. докл. Всесоюзной конф. 30 мая – 1 июня 1979 г.* Свердловск: УНЦ АН СССР, 1979, с. 173–175.
- [48] *Меликян А.А.* Оптимальное взаимодействие двух преследователей в игровой задаче // *Изв. АН СССР. Техн. кибернетика*, 1981. № 2, с. 49–56.
- [49] *Меликян А.А.* Необходимые условия оптимальности на поверхности разрыва одного типа в дифференциальной игре // *Изв. АН СССР. Техн. кибернетика*, 1981. № 4, с. 10–18.

- [50] Меликян А.А. Задача Коши с неизвестной границей для дифференциального уравнения в частных производных первого порядка // Докл. АН СССР, 1981. Т. 260, № 2, с. 288–292.
- [51] Меликян А.А., Овсевич А.И. Гамильтоновы системы с заданным инвариантным многообразием // Прикл. математика и механика, 1984. Т. 48, вып. 2, с. 205–213.
- [52] Меликян А.А. Построение оптимальных движений в игровых задачах динамики: Дисс. на соиск. учен. степени д-ра физ.-мат. наук. М: ИПМех РАН, 1985. 288 с.
- [53] Меликян А.А. Позиционный метод анализа особых движений в экстремальных задачах динамики // Докл. АН СССР, 1990. Т. 311, № 1, с. 22–26.
- [54] Меликян А.А., Овакимян Н.В. Особые траектории в задаче простого преследования на многообразии // Прикл. математика и механика, 1991. Т. 55, вып. 1, с. 54–62.
- [55] Меликян А.А., Овакимян Н.В. Игровая задача простого преследования на двумерном конусе // Прикл. математика и механика, 1991. Т. 55, вып. 5, с. 741–751.
- [56] Melikyan A.A. The method of characteristics for constructing singular paths and manifolds in optimal control and differential games. Lecture Notes in Control and Inform. Sci. Vol. 156. Berlin: Springer-Verlag, 1991, pp. 81–90.
- [57] Меликян А.А. Необходимые условия оптимальности особой поверхности в форме синтеза для нелинейной управляемой системы // Изв. АН. Техн. кибернетика, 1993. № 1, с. 158–163.
- [58] Меликян А.А., Овакимян Н.В. Игровая задача простого преследования на многообразиях. Препринт №489. М.: ИПМ АН СССР, 1991. 44 с.
- [59] Меликян А.А., Овакимян Н.В. Дифференциальная игра простого сближения на многообразиях // Прикл. математика и механика, 1993. Т. 57, вып. 1, с. 41–51.
- [60] Melikyan A.A. Singular paths in differential games with simple motion Basar T., Haurie A. (eds.) Advances in Dynamic Games and Applications, Ann. Internat. Soc. Dynam. Games. Vol. 1. Birkhäuser, Boston, 1994, pp. 125–135.
- [61] Melikyan A.A. Necessary optimality conditions for a singular surface in the form of synthesis. J. Optim. Theory Appl., 1994. Vol. 82, no. 2, pp. 203–217.
- [62] Melikyan A.A. Games of simple pursuit and approach on the manifolds. Dynamics and Control, 1994. Vol. 4, no. 4, pp. 395–405.
- [63] Melikyan A.A., Shinar J. Identification and construction of singular surfaces in pursuit-evasion games. Filar J.A., Gaitsgory V., Mizukami K. (eds.) Advances in Dynamic Games and Applications, Ann. Internat. Soc. Dynam. Games. Vol. 5. Birkhäuser, Boston, 2000, pp. 151–175.
- [64] Melikyan A.A. Invariant description of singularities in optimal control and dynamic game problems. Abstracts of the 17th IFIP Conference on System Modelling and Optimization, July, 1995, Prague. Vol. 2, pp. 713–716.

- [65] *Меликян А.А.* Сингулярные характеристики уравнений в частных производных первого порядка // Докл. РАН, 1996. Т. 351, № 1, с. 24–28.
- [66] *Melikyan A.A.* What is Kelley condition from the point of view of synthesis. A Postprint Volume of the 10th IFAC Workshop “Control Applications of Optimization”, Haifa, Israel, December 1995, Shinar J., Kirillova F.M. (eds.). London: Pergamon Press, 1996, pp. 47–50.
- [67] *Melikyan A.A.* Equations for singular focal paths in dynamic games. Filar J.A., Gaitsgory V., Imado F. (eds.) Proceedings of the 7th International Symposium on Dynamic Games and Applications, Kanagawa, 1996. Vol. 2, pp. 690–695.
- [68] *Melikyan A.A., Ovakimyan N.V., Harutiunian L.L.* Games of simple pursuit and approach on a two-dimensional cone. J. Optim. Theory Appl., 1998. Vol. 98, no. 3, pp. 515–543.
- [69] *Пацко В.С., Тарасова С.И.* Нерегулярная дифференциальная игра сближения // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1984. №4, с. 134–142.
- [70] *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961. 392 с.
- [71] *Пожарицкий Г.К.* Задача Айзекса об огибании острова // Прикл. математика и механика, 1982. Т. 46, вып. 5, с. 707–713.
- [72] *Рашиевский П.К.* Геометрическая теория уравнений с частными производными. М. – Л.: Гостехиздат, 1947. 355 с.
- [73] *Roxin E.* Axiomatic approach in differential games. J. Optim. Theory Appl., 1969. Vol. 3, pp. 153–163.
- [74] *Rund H.* The Hamilton – Jacobi Theory in the Calculus of Variations: Its Role in Mathematics and Physics. London: Van Nostrand, 1966.
- [75] *Shinar J., Medinah M., Biton M.* Singular surfaces in a linear pursuit-evasion game with elliptical vectograms. J. Optim. Theory Appl., 1984. Vol. 43, no. 3, pp. 431–456.
- [76] *Subbotin A.I.* Generalization of the main equation of differential game theory. J. Optim. Theory Appl., 1984. Vol. 43, no. 1, pp. 103–133.
- [77] *Subbotin A.I.* Generalized Solutions of First-Order PDEs. The Dynamical Optimization Perspective. Boston: Birkhäuser, 1995. = *Субботин А.И.* Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка: перспективы динамической оптимизации. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 336 с.
- [78] *Sussman H.J.* Lie brackets, real analyticity and geometric control. Brockett R.W., Millman R.S., Sussman H.J. (eds.) Differential Geometric Control Theory. Progress in Mathematics, Vol. 27. Boston: Birkhäuser, 1983, pp. 1–116.
- [79] *Уткин В.И.* Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления. М.: Наука, 1981. 367 с.
- [80] *Вишневецкий Л.С., Меликян А.А.* Оптимальное преследование на плоскости при наличии препятствия // Прикл. математика и механика, 1982. Т. 46, вып. 4, с. 613–620.

-
- [81] *Weyl H.* The Classical Groups, Their Invariants and Representations. Princeton: Princeton University Press, 1946. = *Вейль Г.* Классические группы, их инварианты и представления. М.: ИЛ, 1947. 404 с.
- [82] *Zelikin M.I., Borisov V.F.* Theory of Chattering Control with Applications to Astronautics, Robotics, Economics and Engineering. Boston: Birkhäuser, 1994.

Сокращения

- УЧП – уравнение в частных производных
ЗНЗ – задача с заданными начальными значениями
ЗТЗ – задача с заданными терминальными значениями
МСХ – метод сингулярных характеристик

Предметный указатель

- Вариационное исчисление, 119, 127
Внешний дифференциал, 44
Волна
— вторичная, 264
— ударная, 243, 286
Выпрямление поля, 308
Выпуклая оболочка, 254
Вязкостное решение, 77
- Гамильтониан
— левый, 126
— правый, 126
— расширенный, 135
— сингулярный, 46, 240, 277
Геодезическая линия, 123, 189
Гессиан, 122
- Динамическое программирование, 127
Допустимые
— кривые, 119
— функции, 119
- Естественные граничные условия, 121
- ЗНЗ (задача с заданными начальными значениями), 77, 85
ЗТЗ (задача с заданными терминальными значениями), 77, 85
- Задача
— Больца, 127
— Лагранжа, 127
— Майера, 127
— быстродействия, 128
— вариационная, 119, 277
— с многомерным интегралом, 277
— классическая нерегулярная нехарактеристическая, 63
— простая, 64
— с фиксированным временем окончания, 126
— с фиксированными граничными точками, 119
- Задача Коши
— для интегральных поверхностей, 41, 43
— для проекций, 43
— классическая, 29
— на многообразии, 43
— нерегулярная, 35
— с подвижной границей, 59
— характеристическая, 35
— обобщенная, 42
— регулярная с подвижной границей, 56
— с подвижной границей, 56, 156, 171, 280
- Законы сохранения, 271
- Игра
— преследования, 134, 155, 187
— сближения, 155, 187, 207
Индифферентная зона, 151
Интегральная поверхность, 42
- Касательная гиперплоскость, 36
Контактная плоскость, 45
Координаты
— комплексные, 192
— относительные, 181, 190
Критический конус, 205
- Лагранжиан, 119
— неоднородный, 122
— однородный, 122, 123
Лагранжиан квадратичный, 289
Ломаная Эйлера, 132
- Матрица
— Гессе, 99, 102
— Якоби, 32, 303
- Минимальная трубка, 151

- Многообразие
 — нехарактеристическое, 51
 — сингулярное, 79, 84, 140
 Множество
 — терминальное, 129
 — хорошо проецируемое, 43
 Неравенства Субботина, 137
 Область
 — вторичная, 156, 200
 — допустимая, 236, 243
 — первичная, 156, 187, 193, 200
 Обобщенное тождество Якоби, 305
 Обобщенные характеристики, 84
 Обозначения
 — F, G , 81
 — p, q , 81
 — u, v , 81
 Овыпукление, 251
 Отрезок
 — касательный, 254
 — некасательный, 254
 — полукасательный, 254
 — простой, 254
 Первая вариация, 120, 278
 Первая контактная форма, 42
 Первичное решение, 156, 158, 193
 Переменные
 — автомодельные, 191
 — греческие, 221
 — латинские, 221
 Преобразование
 — каноническое, 230, 305
 — контактное, 230, 305
 — точечно контактное, 305
 — точечное, 230
 Принцип оптимальности, 128
 Проекция множества, 43
 Простейшая сингулярность, 79
 Простое движение, 155
 Пфаффиан, 49
 Ребро возврата, 63
 Риманова метрика, 123
 Сектор
 — нерегулярный, 286
 — регулярный, 286
 Сингулярная
 — гиперплоскость, 225
 — кривая, 79
 — поверхность, 79, 84, 140, 155
 — — рассеивающая, 86, 171, 200
 — — универсальная, 156, 187, 200, 230
 — — эквивокальная, 156, 170, 187, 200
 — точка, 79, 140, 225
 Сингулярные
 — траектории, 140
 — характеристики, 84, 145, 230, 290
 Система сингулярных характеристик, 84
 Скобки
 — Пуассона, 46, 220, 304
 — Якоби, 46, 175, 304
 Скользящий режим, 94
 Сторона
 — несингулярная, 85
 — сингулярная, 85
 Теорема о неявной функции, 303
 Тождество Якоби, 305
 Точка
 — нехарактеристическая, 51
 — регулярная, 79, 140, 225
 — сопряженная, 232
 УЧП первого порядка, 29
 Управление
 — граничное, 233
 — обратной связи, 131, 159
 — оптимальное, 126
 — программное, 131
 Уравнение
 — Айзекса, 133, 161, 181, 211
 — Беллмана, 192, 224, 240
 — Беллмана – Айзекса, 161
 — Гамильтона – Якоби, 78, 123, 125, 247
 — Эйлера, 121, 177, 277
 — динамики, 126
 — эйконала, 159
 Уравнения
 — в форме Гамильтона, 30

-
- характеристик, 30
 - Условие
 - Келли, 217, 220, 222, 232
 - Коппа-Мойера, 217, 239
 - интегральности, 35
 - коллинеарности, 102
 - минимакса, 132
 - трансверсальности, 32
 - Условия
 - Вейерштрасса – Эрдмана, 277, 284
 - вязкостного решения, 83
 - трансверсальности в вариационном исчислении, 121
 - Функция
 - Беллмана, 129, 192, 218
 - платы, 126, 129, 131
 - — неаддитивная, 195
 - цены, 131
 - Характеристическая поверхность, 35
 - Характеристический вектор, 35
 - Характеристическое поле, 36, 290
 - Якобиан, 33, 261, 303

ДОБАВЛЕНИЕ

Избранные статьи

Некоторые свойства уравнения Беллмана – Айзекса для игр на поверхностях вращения*

А. А. Меликян

Геометрические свойства динамической игры могут обусловить ситуацию, когда в некотором подмножестве D пространства игры цена игры зависит только от координат одного из игроков. Следовательно, этот игрок имеет определенное оптимальное поведение, в то время как другой может использовать произвольное управление до достижения границы D . Иными словами, в подмножестве D реализуется задача оптимального управления, а не динамическая игра. Мы покажем, что такое явление имеет место в играх преследования-уклонения на семействе 2D-поверхностей вращения (включающих конусы и гиперboloиды из двух листов) благодаря особым свойствам выпуклости множеств достижимости игроков. Полное решение игр на конусах можно найти в работах [1, 2], игры на гиперboloидах исследованы в работе [3]. Данная статья представляет новые результаты для указанных игр. В рассмотренных важную роль играют фокальные точки, сопряженные с положениями преследователя в вариационной задаче о геодезических линиях.

1. Уравнение Гамильтона – Якоби – Беллмана – Айзекса для игры сближения-уклонения

В дифференциальных играх с простыми движениями уравнение Гамильтона – Якоби – Беллмана – Айзекса (ГЯБА) [4] часто имеет вид

$$-F(x, p) + \nu F(y, q) + 1 = 0 \quad (1)$$

где x, y – векторы положения преследователя P и убегающего E ; p, q – градиенты функции цены игры $V(x, y)$ по x, y :

$$p = \partial V / \partial x, \quad q = \partial V / \partial y$$

Функция $F(\cdot, \cdot)$ в (1) (гамильтониан) имеет смысл нормы, следовательно, она неотрицательна и обращается в нуль, как только второй аргумент равен нулю:

$$F(x, p) \geq 0, \quad F(y, q) \geq 0, \quad F(x, 0) = 0, \quad F(y, 0) = 0$$

*А. Melikyan “Some properties of the Bellman–Isaacs equation for the games on surfaces of revolution”, Int. Game Theory Rev., 2004. Vol. 6(1), pp. 171–179.
Перевод с английского В.А. Корнеева.

В силу этих свойств в некоторой области D пространства x, y следующие уравнения

$$\frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad -F(x, p) + 1 = 0, \quad (x, y) \in D \quad (2)$$

могут иметь место, в то время как соотношения

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad \nu F(x, q) + 1 = 0, \quad (x, y) \in D$$

невозможны. Уравнения (2) означают, что цена игры в области D зависит только от x и не зависит от y . Таким образом, преследователь имеет определенное оптимальное поведение, в то время как убегающий может использовать произвольное управление до достижения границы D . Иначе говоря, в D реализуется задача оптимального управления, а не динамическая игра.

Уравнение (1) предполагает, что максимальная скорость преследователя равна 1, а ν — максимальная скорость убегающего, $\nu \geq 0$. Постоянная ν может также рассматриваться как отношение $\nu = v_E/v_P$ максимальных скоростей. Мы предполагаем, что $\nu \leq 1$.

Как будет видно из дальнейшего, соотношения (2) могут иметь различные аналитические формы, но их сущностью остается независимость цены игры от позиции убегающего.

2. Игры на поверхностях вращения

Рассмотрим семейство поверхностей вращения, заданных в трехмерном пространстве координат x_1, x_2, x_3 равенством

$$x_1^2 + x_2^2 + b = kx_3^2, \quad b \geq 0, \quad k > 0 \quad (3)$$

Здесь b, k — постоянные параметры. При $b > 0$ ($b = 0$) уравнение (3) определяет два листа гиперболоида (конуса) вращения.

В качестве пространства игры рассмотрим поверхность M — один из двух листов (полостей), соответствующий, например, $x_3 \geq 0$. Можно выбрать первые две компоненты $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ в качестве локальных координат, описывающих положения игроков. Тогда динамические уравнения для игроков, совершающих простые движения, записываются в виде

$$\dot{x} = u, \quad \dot{y} = v, \quad x, y, u, v \in \mathbb{R}^2 \quad (4)$$

при ограничениях

$$\sqrt{\langle G(x)u, u \rangle} \leq 1, \quad \sqrt{\langle G(y)v, v \rangle} \leq \nu$$

Здесь $G(x)$ — метрический тензор поверхности, который является 2×2 -матрицей квадратичной формы

$$\langle G(x)dx, dx \rangle = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$$

где x_3 и dx_3 должны быть исключены с использованием (3):

$$kx_3 dx_3 = x_1 dx_1 + x_2 dx_2, \quad x_3 = \sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + b)/k}$$

Отметим, что при $b < 0$ имеем однополостный гиперболоид. Решение игры преследования-уклонения на нем дано в работе [3].

Уравнение ГЯБА в игре преследования-уклонения с динамикой (4) записывается в виде

$$-\sqrt{\langle G^{-1}(x)p, p \rangle} + \nu \sqrt{\langle G^{-1}(y)q, q \rangle} + 1 = 0 \quad (5)$$

3. Игра на конусе

Полагая $b = 0$ в (3), получаем коническую поверхность с вершиной $O(0, 0, 0)$ в начале координат. Одним из удобных способов описания динамики является использование так называемых относительных координат R, r, φ , где R и r — расстояния между точкой O и точками P и E соответственно, а φ — угол между отрезками PO и EO на плоскости развертки конуса.

Динамика игры в относительных координатах имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{R} &= u_1, & \dot{r} &= v_1, & \dot{\varphi} &= \frac{v_2}{r} - \frac{u_2}{R} \\ u_1^2 + u_2^2 &\leq 1, & v_1^2 + v_2^2 &\leq \nu^2 \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь u_i и v_i , $i = 1, 2$, — компоненты скоростей игроков в ортогональной системе, вообще говоря, отличающейся от используемой в (4). С учетом (6) уравнение ГЯБА принимает вид

$$-\sqrt{V_R^2 + V_\varphi^2/R^2} + \nu \sqrt{V_r^2 + V_\varphi^2/r^2} + 1 = 0$$

Независимость цены V от позиции убегающего в области D при записи в относительных координатах означает, что выполнены соотношения

$$V_\varphi = 0, \quad V_r = 0$$

которые, в предположении $V_R > 0$, позволяют упростить уравнение ГЯБА и свести его к дифференциальному уравнению

$$-V_R + 1 = 0$$

с общим решением

$$V = R + C$$

для некоторой постоянной C . Как видно из дальнейшего, при $R = 0$ имеем $V = 0$, так что $C = 0$.

Задействовав автомодельные координаты ρ , φ и время τ ,

$$\rho = r/R, \quad \frac{dt}{d\tau} = t' = R$$

можно понизить порядок динамической системы с трех до двух:

$$\rho' = v_1 - \rho u_1, \quad \varphi' = v_2/\rho - u_2$$

Цена игры Q в переменных ρ, φ удовлетворяет условию автомодельности

$$V(R, r, \varphi) = RQ(r/R, \varphi) = RQ(\rho, \varphi) \quad (7)$$

Используя приведенное выше уравнение ГЯБА или автомодельные уравнения динамики и соответствующую модифицированную функцию платы, как в работах [1, 2], можно получить уравнение ГЯБА для автомодельного случая:

$$-\sqrt{Q_\varphi^2 + (Q - \rho Q_\rho)^2} + \nu \sqrt{Q_\rho^2 + Q_\varphi^2 / \rho^2} + 1 = 0$$

Здесь независимость цены от позиции убегающего означает, что Q не зависит ни от ρ , ни от φ , то есть является константой в области D . Полагая

$$Q_\rho = 0, \quad Q_\varphi = 0$$

из уравнения ГЯБА получаем

$$Q(\rho, \varphi) \equiv 1, \quad (\rho, \varphi) \in D$$

Тогда в силу (7) имеем тождество $V \equiv R$, которое дает для введенной выше константы значение $C = 0$.

4. Игра на гиперboloиде

Пусть постоянная b строго положительна, $b > 0$. Введем относительные координаты R, r, φ , где R (соответственно r) — длина кратчайшей геодезической линии, соединяющей вершину $A(0, 0, \sqrt{b/k})$ поверхности M с точкой $P(E)$; φ — угол между касательными к этим двум геодезическим в точке A в горизонтальной плоскости $x_3 = \sqrt{b/k}$. Отметим, что при $b \rightarrow 0$ переменные R, r такие же, как в (6), а φ отличается от угла, используемого в (6).

Уравнения динамики в относительных координатах имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{R} &= f(R, u_1), & \dot{r} &= f(r, v_1), & \dot{\varphi} &= h(r, v_2) - h(R, u_2) \\ u_1^2 + u_2^2 &\leq 1, & v_1^2 + v_2^2 &\leq \nu^2 \end{aligned}$$

где функции F, H могут быть определены с помощью метрического тензора $G(x)$. Детальное описание этих функций не является важным для дальнейшего.

Уравнение ГЯБА в относительных координатах можно записать формулой

$$\min_u \max_v \left[V_R f(R, u_1) + V_r f(r, v_1) + V_\varphi (h(r, v_2) - h(R, u_2)) \right] + 1 = 0$$

Здесь $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2)$. Для области D , где по определению выполнены равенства $V_\varphi = 0$, $V_r = 0$, имеем

$$\min_{u=(u_1, u_2)} V_R f(R, u_1) + 1 = 0$$

Этот минимум, в предположении $V_R > 0$, достигается при $f(R, u_1) = -1$, что соответствует движению игрока P вдоль геодезической AP к вершине A с максимальной скоростью 1. Таким образом, имеем упрощенное уравнение и его общее решение в виде

$$-V_R + 1 = 0, \quad V(R, r, \varphi) = R + C \quad (8)$$

Для вычисления константы C нужен геометрический анализ, приведенный в следующих трех разделах.

5. Геометрические свойства многообразия B

В основной части D_1 пространства игры, называемой первичной областью, оптимальное движение игроков состоит в движении по геодезической линии, соединяющей игроков. Для некоторых позиций, образующих поверхность Γ_0 , существуют две геодезические линии с равными длинами. Часть поверхности Γ_0 , являющуюся рассеивающей поверхностью, обозначим Γ_1 . Требование оптимальности определяет край $B \subset \Gamma_0$, который отделяет в Γ_0 рассеивающую часть Γ_1 . Точки многообразия B (корузмерности 2) удовлетворяют условиям

$$L^+ = L^-, \quad |a^+ + a^-|_x - \nu|b^+ + b^-|_y = 2(1 - \nu) \quad (9)$$

Здесь L^\pm — длины двух геодезических, a^\pm и b^\pm — внешние единичные касательные векторы этих геодезических в точках P и E . Нормы векторов задаются в виде

$$|a|_x = \sqrt{\langle G(x)a, a \rangle}, \quad |b|_y = \sqrt{\langle G(y)b, b \rangle}$$

В случае конуса многообразию B имеет сингулярную краевую точку, соответствующую вершине конуса. В случае гиперboloида (при $b > 0$) сингулярная точка отсутствует и геометрия края B состоит в следующем. Две геодезические совпадают в позициях края, при этом точки P и E являются, по одному из определений [5], взаимно сопряженными точками относительно геодезического функционала

$$L(\xi) = \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \sqrt{\langle G(\xi)\dot{\xi}, \dot{\xi} \rangle} d\sigma, \quad \xi(\sigma_0) = y, \quad \xi(\sigma_1) = x \quad (10)$$

определенного для кусочно-гладких кривых $\xi = \xi(\sigma) \in M$, $\sigma_0 \leq \sigma \leq \sigma_1$. Это явление было исследовано в [6].

6. Фокальная точка

В пространстве R, r, φ многообразию B коразмерности 2, определенное в (9), представляет собой кривую. Эта кривая заканчивается в точке N_1 , которая в пределе удовлетворяет условию (9) и соответствует взаимно сопряженным точкам P, E . Благодаря вращательной симметрии и левому равенству в (9) эти точки расположены на гиперболе — образующей гиперboloида. Можно предположить, что гипербола лежит в плоскости $x_2 = 0$ и, согласно (3), удовлетворяет уравнению

$$x_1^2 + b = kx_3^2 \quad (11)$$

Две совпадающие геодезические PE представляют собой сегмент гиперболы (11).

Проекция кривой PE на плоскость $x_3 = \text{const}$ является экстремалью функционала (10). Лагранжиан (подынтегральное выражение) в (10) является однородной функцией по $\dot{\xi}$, что вызывает определенное вырождение. Вырождение может быть устранено, если ввести x_1 в качестве независимой переменной и сделать функционал (10) зависящим от одной скалярной функции $x_2 = x_2(x_1)$, или с использованием классических обозначений $x_2 = y$, $x_1 = x$, $y = y(x)$ привести его к виду

$$L = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx, \quad F = \sqrt{g_{11}(x, y) + 2g_{12}(x, y)y' + g_{22}(x, y)y'^2} \quad (12)$$

Здесь g_{ij} — элементы симметрической 2×2 -матрицы $G(x, y)$.

Можно проверить, что кривая $y = y(x) \equiv 0$, $x_0 \leq x \leq x_1$, является экстремальной для (12), то есть удовлетворяет уравнению Эйлера:

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

Фокальный центр $P(x_1, 0)$ сопряжен с $E(x_0, 0)$ относительно функционала (12) и определяется с помощью решения $h(x)$ соответствующей начальной задачи:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(Ph') + (Q' - R)h &= 0, \quad h(x_0) = 0, \quad h'(x_0) = 1 \\ P(x) = F_{y'y'} &= \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}, \quad Q(x) = F_{y'y} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{x}{k(x^2 + b)} \\ R(x) = F_{yy} &= -\frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{x^2}{k(x^2 + b)^2}, \quad g_{11}(x, 0) = 1 + \frac{x^2}{k(x^2 + b)} \end{aligned} \quad (13)$$

Значение x_1 — следующий за x_0 корень решения $h(x)$: $h(x_1) = 0$, $h(x) > 0$ при $x_0 < x < x_1$.

Приведенное выше линейное обыкновенное дифференциальное уравнение (13) есть уравнение Якоби для функционала (12) — уравнение в вариациях для уравнения Эйлера.

Для получения предельного соотношения, вытекающего из правого равенства в (9), нужно найти предел по угловым коэффициентам определенных экстремалей в точках x_0, x_1 .

Пусть $y(x, \varepsilon)$, $x \geq x_0$, — решение уравнения Эйлера с начальными условиями (рис. 1)

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = \alpha + \varepsilon, \quad |\varepsilon| \leq \varepsilon_0$$

Для рассмотренной выше экстремали имеем $y_0 = 0$, $\alpha = 0$. Пусть $\bar{x}_1(\varepsilon)$ — точка, где кривые $y(x, \varepsilon)$ и $y(x, 0)$ пересекаются:

$$y(\bar{x}_1(\varepsilon), \varepsilon) = y(\bar{x}_1(\varepsilon), 0)$$

По определению, предел

$$x_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{x}_1(\varepsilon)$$

представляет собой фокальную точку, сопряженную с x_0 .

Рассмотрим значения разности $y'(x, \varepsilon) - y'(x, 0)$ угловых коэффициентов в точках x_0 и \bar{x}_1 и возьмем их отношение. При $\varepsilon \rightarrow 0$ получаем

$$\frac{y'(\bar{x}_1, \varepsilon) - y'(\bar{x}_1, 0)}{y'(x_0, \varepsilon) - y'(x_0, 0)} = \frac{1}{\varepsilon} [y'(\bar{x}_1, \varepsilon) - y'(\bar{x}_1, 0)] \rightarrow \frac{\partial^2 y(x_1, 0)}{\partial x \partial \varepsilon} = h'(x_1) \quad (14)$$

где $h(x) = \partial y(x, 0) / \partial \varepsilon$ — решение задачи Коши (13), поскольку в (13) записано уравнение в вариациях для уравнения Эйлера.

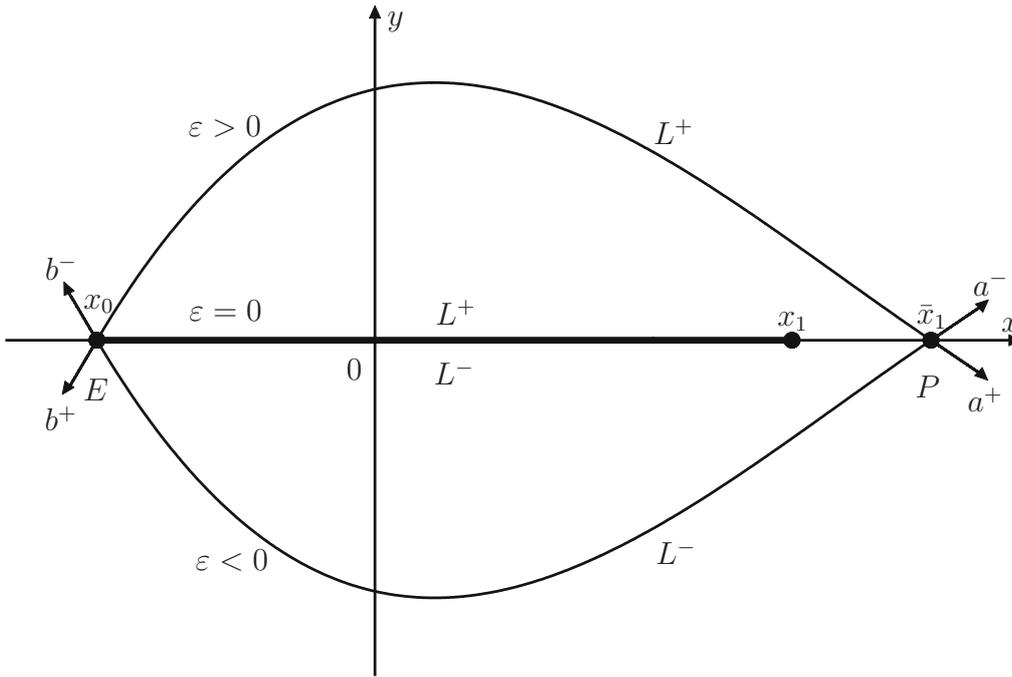


Рис. 1

7. Край многообразия B

Введем компоненты касательных векторов a^\pm, b^\pm в (9) в некоторой точке $N \in B$ (рис. 1):

$$a^+(\dot{x}_0^+, \dot{y}_0^+), \quad a^-(\dot{x}_0^-, \dot{y}_0^-), \quad b^+(\dot{x}_1^+, \dot{y}_1^+), \quad b^-(\dot{x}_1^-, \dot{y}_1^-)$$

Индекс 0 соответствует игроку E , а индекс 1 — игроку P . Благодаря симметрии имеем

$$\dot{x}_0^+ = \dot{x}_0^- = \dot{x}_0, \quad \dot{y}_0^+ = -\dot{y}_0^- = \dot{y}_0; \quad \dot{x}_1^+ = \dot{x}_1^- = \dot{x}_1, \quad \dot{y}_1^+ = -\dot{y}_1^- = \dot{y}_1$$

и правое равенство в (9) принимает вид

$$|\dot{x}_1| \sqrt{g_{11}(x_1, 0)} - \nu |\dot{x}_0| \sqrt{g_{11}(x_0, 0)} = 1 - \nu \quad (15)$$

Так как a^\pm и b^\pm — единичные векторы, получаем также два равенства

$$\dot{x}_1^2 g_{11}(x_1, 0) + \dot{y}_1^2 = 1, \quad \dot{x}_0^2 g_{11}(x_0, 0) + \dot{y}_0^2 = 1 \quad (16)$$

из которых вытекает соотношение

$$|\dot{x}_1| \sqrt{g_{11}(x_1, 0) + (\dot{y}_1/\dot{x}_1)^2} - \nu |\dot{x}_0| \sqrt{g_{11}(x_0, 0) + (\dot{y}_0/\dot{x}_0)^2} = 1 - \nu \quad (17)$$

Геодезические L^+ , L^- приближаются друг к другу при $N \rightarrow N_1$ и

$$a^+ \rightarrow a^- \quad (\dot{y}_0 \rightarrow 0), \quad b^+ \rightarrow b^- \quad (\dot{y}_1 \rightarrow 0)$$

При $\dot{y}_1 \rightarrow 0$, $\dot{y}_0 \rightarrow 0$ из (16) получаем равенства

$$\dot{x}_1^2 g_{11}(x_1, 0) = 1, \quad \dot{x}_0^2 g_{11}(x_0, 0) = 1$$

Для малых значений

$$y'(x_0) = \frac{\dot{y}_0}{\dot{x}_0}, \quad y'(x_1) = \frac{\dot{y}_1}{\dot{x}_1}$$

отношение $y'(x_1)/y'(x_0)$ имеет неопределенность типа 0/0 при $N \rightarrow N_1$. Соотношения (15)–(17) позволяют устранить эту неопределенность и показать, что

$$\left(\frac{y'(x_1)}{y'(x_0)} \right)^2 \rightarrow \nu \frac{g_{11}(x_1, 0)}{g_{11}(x_0, 0)} \quad (18)$$

Уравнение (14) дает альтернативное выражение того же самого предела. Таким образом, из (13) и (18) получаем условие для точки N_1 :

$$h'(x_1) = -\sqrt{\nu} \sqrt{\frac{[x_1^2 + k(x_1^2 + b)](x_0^2 + b)}{[x_0^2 + k(x_0^2 + b)](x_1^2 + b)}} \quad (19)$$

Взаимно сопряженные точки x_0 , x_1 можно найти из соотношений (13), (19). В самом деле, x_0 является корнем уравнения (19), в котором значение x_1 в зависимости от x_0 определяется с помощью (13). Можно применить метод Ньютона для вычисления таких корней. Кроме того, можно начать интегрирование линейного однородного уравнения (13) в точке x_1 с начальными условиями $h(x_1) = 0$, $h'(x_1) = 1$, надлежащим образом модифицируя формулу (19) для точки x_0 , где $h(x_0) = 0$.

Анализ показывает, что числа x_0 и x_1 имеют разные знаки, то есть соответствующие точки E и P находятся по разные стороны относительно вершины A . В переменных R, r, φ такое решение определяет точку

$$R_1 = \int_0^{|x_1|} \sqrt{g_{11}(x, 0)} dx, \quad r_1 = \int_0^{|x_0|} \sqrt{g_{11}(x, 0)} dx, \quad \varphi = \pi \quad (20)$$

где R_1, r_1 — длины поддуг гиперболы (11).

8. Вычисление C

В первичной области D_1 , упомянутой в разделе 5, цена игры S (время оптимального преследования-убегания) представляет собой отношение начального расстояния L между игроками к разности скоростей (как на евклидовой плоскости):

$$S = \frac{L}{1 - \nu} \quad (21)$$

В (21) предполагается, что радиус захвата равен нулю, то есть захват происходит тогда, когда точки P и E совпадают.

Крайняя точка N_1 многообразия B определена в (9) и лежит на границе между областями D и D_1 . Расстояние между игроками в позиции N_1 равно $L = R_1 + r_1$. Таким образом, приравнявая выражения (8) и (21) для цены игры в областях D и D_1 , в точке N_1 получаем соотношения

$$V = R_1 + C = \frac{R_1 + r_1}{1 - \nu} = S, \quad C = \frac{\nu R_1 + r_1}{1 - \nu}$$

которые дают выражение для цены игры $V(R)$:

$$V(R) = R + \frac{\nu R_1 + r_1}{1 - \nu} \quad (22)$$

9. Структура цены игры

В общем случае пространство игры состоит из трех областей D_1 , D_2 и D . Области D_1 и D определены в приведенных выше рассуждениях. Вторичная область D_2 и соответствующее вторичное решение $V = V_2(R, r, \varphi)$ находятся следующим образом (см., например [1]). Используя сингулярные характеристики [1], можно построить две гладкие ветви так называемых эквивокальных поверхностей (оггибающие переключения), начиная с многообразия B в (9) и формируя границу между D_1 и D_2 . Функция V_2 находится как решение вспомогательной задачи Коши с граничными условиями на эквивокальной поверхности. Границу между областями D_1 и D можно построить, приравнявая выражения (21) и (22). Граница между D и D_2 требует более трудоемких вычислений. Для случая конуса ($b = 0$) эти поверхности найдены в работах [1, 2].

Работа поддержана грантом № 01-01-00376 Российского фонда фундаментальных исследований.

Литература

- [1] *Melikyan A.A.* Generalized Characteristics of First-Order PDEs: Applications in Optimal Control and Differential Games. Boston: Birkhäuser, 1998.
- [2] *Melikyan A.A., Ovakimyan N.V., Harutiunian L.L.* Games of simple pursuit and approach on a two-dimensional cone. J. Optim. Theory Appl., 1998. Vol. 98, no. 3, pp. 515–543.
- [3] *Hovakimyan N.V., Melikyan A.A.* Geometry of pursuit-evasion on second order rotation surfaces. Dynamics and Control, 2000. Vol. 10, pp. 297–312.
- [4] *Isaacs R.* Differential Games. New York: John Wiley, 1965. = *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 480 с.
- [5] *Гельфанд И.М., Фомин С.В.* Вариационное исчисление. М.: Государственное изд-во физ.-мат. лит., 1961. 228 с.

- [6] *Hovakimyan N.V., Harutunian L.L.* Game problems on rotation surfaces. In: Game Theory and Applications, Petrosjan L.A., Mazalov V.V. (editors), 1998. Vol. 4, pp. 62–74.

Геометрия оптимальных траекторий в окрестности фокальных особых поверхностей в дифференциальных играх*

А.А. Меликян, П. Бернар

Авторы признательны Институту Ляпунова (INRIA и Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова) за помощь, благодаря которой эта совместная работа стала возможна.

Исследуется специальный тип особенностей в негладких решениях уравнений в частных производных первого порядка с акцентом на уравнение Беллмана – Айзекса. Рассматриваемый тип фокальных многообразий характеризуется вхождением в них полей траекторий с двух сторон и разрывным градиентом. Приводится полный набор уравнений при различных гипотезах о сингулярной поверхности, вплоть до случая, когда никакой априорной гипотезы о ее геометрии нет и поля экстремальных траекторий не обязательно коллинеарны. Указаны два примера дифференциальных игр, имеющих неколлинеарные поля экстремальных траекторий на фокальном многообразии: один — с трансверсальным подходом, другой — с касательным.

1. Введение

В негладких решениях уравнений Гамильтона – Якоби – Беллмана – Айзекса (и, как правило, нелинейных уравнений в частных производных (УЧП) первого порядка) встречаются интересные сингулярные поверхности, связанные с особыми траекториями в дифференциальных играх. Одной из таких поверхностей является так называемая фокальная поверхность, на которую приходят с двух сторон регулярные характеристики (траектории). Входящие поля могут быть либо касательными (так называемый регулярный случай, обнаруженный впервые в [1]), либо трансверсальными (сингулярный случай, предсказанный в [2] и продемонстрированный в [3]). Данные поверхности возникают в ряде прикладных задач и имеют большое теоретическое значение. Они отличаются от универсальных поверхностей (см. [4]) разрывностью градиента решения.

Теория фокальных поверхностей разработана в [2] и [5] для случая коллинеарных скоростей, соответствующих разным сторонам поверхности. В работе [5, с. 77]

* А. Melikyan, P. Bernhard “Geometry of optimal paths around focal singular surfaces in differential games”, Applied Mathematics and Optimization, 2005. Vol. 52, no. 1, pp. 23–37.
Перевод с английского И.М. Ананьевского.

замечено, что в общем случае эти скорости неколлинеарны, и предложен алгоритм построения сингулярной поверхности для ситуации, когда о существовании фокальной поверхности — гиперплоскости известно заранее из соображений симметрии.

До недавнего времени примеров с неколлинеарными скоростями не было известно. Первый пример описан в [6]. Формулировка соответствующей игровой задачи приводится ниже в разделе 6. В разделе 7 представлен нелинейный гамильтониан, удовлетворяющий необходимым условиям из [5] для (неколлинеарной) фокальной поверхности.

Нахождение явной схемы построения указанных особенностей представляет собой открытую проблему с тех пор, как построены другие сингулярные многообразия коразмерности 1 (см. [2]), то есть, по крайней мере, в течение 26 лет. В разделе 5 приведено решение этой проблемы, хотя свойства полей траекторий, генерируемых рассматриваемыми гамильтонианами, требуют дальнейшего изучения.

2. Общее описание фокальной поверхности

Обозначим фокальную $(n - 1)$ -мерную поверхность через Γ , а ее n -мерные полукрестности — через D_0 и D_1 . Регулярные траектории приходят на поверхность с обеих сторон либо по касательной к поверхности, либо трансверсально. Будем различать эти случаи. Промежуточный вариант, когда имеет место касание с одной стороны, а трансверсальность — с другой, также возможен. Такой случай есть просто сочетание двух основных.

Запишем нелинейное уравнение первого порядка для всего пространства состояний в виде

$$F(x, p) = 0, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \quad \left(p = \frac{\partial V}{\partial x} \right)$$

и будем трактовать его либо как абстрактное УЧП, непрерывное решение $V(x)$ которого понимается в вязкостном смысле, либо как уравнение Беллмана – Айзекса для функции цены $V(x)$ некоторой дифференциальной игры. Рассматривая такое уравнение, предполагаем, что переменная времени может быть одной из компонент вектора x , так что уравнение вида

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H(x, t, p) = 0$$

также учтено.

Удобно использовать различные обозначения для функции цены игры, ее градиента и гамильтониана в полукрестностях D_0 и D_1 поверхности Γ , то есть

$$\begin{aligned} D_0 : \quad & V(x), \quad p = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad F(x, p) = 0 \\ D_1 : \quad & W(x), \quad q = \frac{\partial W}{\partial x}, \quad G(x, q) = 0 \end{aligned}$$

В силу непрерывности решения вектор $p - q$ является нормалью к Γ .

Известно, что в случае касания выполнены следующие необходимые условия на поверхности Γ :

$$\begin{aligned} D_0\text{-сторона : } & F(x, p) = 0, \quad \langle F_p(x, p), p - q \rangle = 0 \\ D_1\text{-сторона : } & G(x, q) = 0, \quad \langle G_q(x, q), q - p \rangle = 0 \end{aligned}$$

Для фокальной поверхности в трансверсальном случае имеют место другие четыре необходимых условия:

$$\begin{aligned} D_0\text{-сторона : } & F^+(x, p) = 0, \quad F^-(x, p) = 0 \\ D_1\text{-сторона : } & G^+(x, q) = 0, \quad G^-(x, q) = 0 \end{aligned}$$

Предполагается, что гамильтонианы здесь записываются в виде

$$\min [F^+, F^-], \quad \min [G^+, G^-]$$

причем верхний индекс “плюс” соответствует уравнению Беллмана – Айзекса, то есть

$$F^+(x, p) = 0, \quad x \in D_0; \quad G^+(x, q) = 0, \quad x \in D_1$$

Условие переключения управления минимизирующего игрока имеет вид $F^+ - F^- = 0$ в D_0 и $G^+ - G^- = 0$ в D_1 .

Приведенные выше соотношения являются необходимыми условиями для кусочно-гладкого решения уравнения Беллмана – Айзекса. В [7] можно найти необходимые и достаточные условия таких решений в другой форме. Близкие формулировки имеются в [8], а также для игры с несколькими преследователями в [9]. Следует подчеркнуть, что рассматриваются нелинейные задачи, являющиеся существенно более сложными, чем задачи в рамках линейных постановок [10].

3. Сингулярная поверхность — гиперплоскость

Пусть поверхность Γ является координатной гиперплоскостью $x_n = 0$ в n -мерном пространстве состояний. Для укороченных $(n-1)$ -мерных векторов будем использовать обозначения

$$\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \quad \bar{p} = (p_1, p_2, \dots, p_{n-1}), \quad \bar{q} = (q_1, q_2, \dots, q_{n-1})$$

Условие непрерывности $V(\bar{x}, 0) = W(\bar{x}, 0)$ на Γ влечет за собой равенство $\bar{p} = \bar{q}$ и условие скачка градиента лишь означает, что $p_n \neq q_n$. Анализ для касательного и трансверсального случаев различен.

Касательный случай. Условие касания принимает простой вид:

$$F_{p_n}(\bar{x}, 0, p) = 0$$

Разрешая это уравнение относительно p_n и аналогичное уравнение $G_{q_n}(\bar{x}, 0, q) = 0$ относительно q_n , получаем

$$p_n = P(\bar{x}, \bar{p}), \quad q_n = Q(\bar{x}, \bar{q}) \quad (\bar{p} = \bar{q})$$

Согласно предположению, это должны быть два решения, отвечающие различным сторонам Γ . Подставив функцию P в гамильтониан, получим укороченный гамильтониан

$$\bar{F}(\bar{x}, \bar{p}) = F(\bar{x}, 0, \bar{p}, P(\bar{x}, \bar{p}))$$

Теперь уравнения движения вдоль Γ задаются регулярными (классическими) характеристиками, соответствующими \bar{F} . Условие касания упрощает цепное правило, а именно,

$$\bar{F}_{x_k} = F_{x_k} + F_{p_n} P_{x_k} = F_{x_k}$$

что приводит к следующей системе для регулярных характеристик:

$$\dot{x}_k = F_{p_k}, \quad \dot{p}_k = -F_{x_k}, \quad k = 1, \dots, n-1$$

Хотя значение p_n может быть восстановлено в виде $p_n = P(\bar{x}, \bar{p})$ интегрированием приведенной выше системы характеристик, удобно также иметь дифференциальное уравнение для p_n . Вычисляя полную производную функции F_{p_n} по времени в силу системы, получим уравнение

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} F_{p_n} = \sum_{k=1}^n F_{p_n x_k} \dot{x}_k + \sum_{k=1}^n F_{p_n p_k} \dot{p}_k = \sum_{k=1}^n F_{p_n x_k} F_{p_k} - \sum_{k=1}^{n-1} F_{p_n p_k} F_{x_k} + \dot{p}_n F_{p_n p_n} = \\ &= \sum_{k=1}^n F_{p_n x_k} F_{p_k} - \sum_{k=1}^n F_{p_n p_k} F_{x_k} + F_{p_n p_n} F_{x_n} + \dot{p}_n F_{p_n p_n} = \\ &= \{F_{p_n} F\} + F_{p_n p_n} F_{x_n} + \dot{p}_n F_{p_n p_n} = 0 \end{aligned}$$

где

$$\{F_{p_n} F\} = \sum_{k=1}^n F_{p_n x_k} F_{p_k} - \sum_{k=1}^n F_{p_n p_k} F_{x_k}$$

является скобкой Пуассона функций F_{p_n} и F .

Разрешая это уравнение относительно \dot{p}_n и используя условие касания, приходим к следующим дифференциальным уравнениям для x_n и p_n :

$$\dot{x}_n = F_{p_n} = 0, \quad \dot{p}_n = -F_{x_n} - \frac{\{F_{p_n} F\}}{F_{p_n p_n}}$$

Уравнения для стороны (W, q) имеют ту же форму с соответствующей заменой p, F, V на q, G, W .

Трансверсальный случай. Разрешая уравнение $G^-(\bar{x}, 0, q) = 0$ относительно q_n , находим функцию $q_n = Q(\bar{x}, \bar{q})$. Подставляя ее в гамильтониан G^+ , получаем

$$\bar{G}^+(\bar{x}, \bar{q}) = G^+(\bar{x}, 0, \bar{q}, Q(\bar{x}, \bar{q}))$$

Теперь особые траектории в Γ являются регулярными характеристиками в терминах гамильтониана \bar{G}^+ . Вместо применения цепного правила для дифференцирования функции \bar{G}^+ проще использовать технику множителей Лагранжа и расширенный гамильтониан

$$H = \lambda^+ G^+ + \lambda^- G^-, \quad \lambda^+ + \lambda^- = 1$$

Здесь вместо одного множителя берутся два с условием нормировки. Имеем

$$\begin{aligned}\dot{x}_k &= \bar{G}_{q_k}^+ = \lambda^+ G_{q_k}^+ + \lambda^- G_{q_k}^- \\ \dot{q}_k &= -\bar{G}_{x_k}^+ = -\lambda^+ G_{x_k}^+ - \lambda^- G_{x_k}^-, \quad k = 1, \dots, n-1\end{aligned}$$

Чтобы получить выражения для λ^+ и λ^- , выведем дифференциальное уравнение для q_n . Вычисляя полную производную функции $G^+(x, q)$ по времени в силу системы, получим уравнение

$$\begin{aligned}0 &= \frac{d}{dt} G^+ = \sum_{k=1}^n G_{x_k}^+ \dot{x}_k + \sum_{k=1}^n G_{q_k}^+ \dot{q}_k = \\ &= \sum_{k=1}^n G_{x_k}^+ (\lambda^+ G_{q_k}^+ + \lambda^- G_{q_k}^-) - \sum_{k=1}^{n-1} G_{q_k}^+ (\lambda^+ G_{x_k}^+ + \lambda^- G_{x_k}^-) + \dot{q}_n G_{q_n}^+ = \\ &= \lambda^+ G_{x_n}^+ G_{q_n}^+ + \lambda^- \left[\sum_{k=1}^n G_{x_k}^+ G_{q_k}^- - \sum_{k=1}^n G_{q_k}^+ G_{x_k}^- + G_{q_n}^+ G_{x_n}^- \right] + \dot{q}_n G_{q_n}^+ = \\ &= \lambda^+ G_{x_n}^+ G_{q_n}^+ + \lambda^- \{G^+ G^-\} + \lambda^- G_{q_n}^+ G_{x_n}^- + \dot{q}_n G_{q_n}^+ = 0\end{aligned}$$

Разрешая это уравнение относительно \dot{q}_n , приходим к дифференциальному уравнению

$$\dot{q}_n = -\lambda^+ G_{x_n}^+ - \lambda^- G_{x_n}^- - \frac{\lambda^-}{G_{q_n}^+} \{G^+ G^-\}$$

Аналогично, из условия $dG^-/dt = 0$ находим, что

$$\dot{q}_n = -\lambda^+ G_{x_n}^+ - \lambda^- G_{x_n}^- - \frac{\lambda^+}{G_{q_n}^-} \{G^- G^+\}$$

Приравняв два выражения для \dot{q}_n , получаем соотношение

$$\frac{\lambda^-}{G_{q_n}^+} = \frac{\lambda^+}{G_{q_n}^-}$$

для множителей Лагранжа, что вместе с условием нормировки $\lambda^+ + \lambda^- = 1$ дает

$$\lambda^+ = \frac{G_{q_n}^-}{G_{q_n}^- - G_{q_n}^+}, \quad \lambda^- = \frac{G_{q_n}^+}{G_{q_n}^+ - G_{q_n}^-}$$

С учетом таких значений λ^+ и λ^- имеем два дифференциальных уравнения для x_n и q_n :

$$\begin{aligned}\dot{x}_n &= \lambda^+ G_{x_n}^+ + \lambda^- G_{x_n}^- = 0 \\ \dot{q}_n &= -\lambda^+ G_{x_n}^+ - \lambda^- G_{x_n}^- - \frac{\{G^+ G^-\}}{G_{q_n}^+ - G_{q_n}^-}\end{aligned}$$

Аналогичные уравнения справедливы для (V, p) -стороны.

Система уравнений сингулярных характеристик как для касательного, так и для трансверсального случаев совпадает с системой, полученной в [5] методом сингулярных характеристик. Приведенный выше вывод не использует этот метод и основан на классических характеристиках и скобках Пуассона.

4. Поверхность в общем случае. Коллинеарные поля

В общем случае построения существенным образом основаны на методе сингулярных характеристик для экивокальной поверхности, то есть гиперповерхности, на которую характеристики приходят с одной стороны и покидают с другой.

Теория сингулярной экивокальной поверхности. Следуя методике [5], чтобы записать уравнения особого движения, нужно задать на поверхности Γ три (в случае гиперплоскости) необходимых условия оптимальности вида

$$F_0(X, V, p) = 0, \quad F_1(X, V, p) = 0, \quad F_{-1}(X, V, p) = 0$$

Эти условия, вообще говоря, содержат функцию $V(x)$. В терминах функций F_0 , F_1 , F_{-1} так называемый сингулярный гамильтониан H определяется следующим образом:

$$\nu H = \{F_0 F_1\} F_{-1} + \{F_1 F_{-1}\} F_0 + \{F_{-1} F_0\} F_1$$

Здесь ν является множителем однородности, нормирующим независимую переменную (времени), а скобки Якоби

$$\{FG\} = \langle F_x + pF_V, G_p \rangle - \langle G_x + pG_V, F_p \rangle$$

используются вместо скобок Пуассона из-за наличия V . Теперь сингулярные характеристики являются регулярными в терминах H и имеют вид

$$\dot{x} = H_p, \quad \dot{p} = -H_x - pH_V, \quad \dot{V} = \langle p, H_p \rangle$$

Эту систему следует рассматривать на многообразии, заданном равенствами $F_i = 0$, $i = -1, 0, 1$. Последнее уравнение для V , как правило, отделяется от двух первых.

Значение искомой функции с той стороны Γ , где траектории покидают поверхность (в прямом времени), считается известным до построения поверхности. Обозначим эту функцию и ее градиент через $W(x)$, $q(x)$, используя обозначения $V(x)$, $p(x)$ для другой стороны (той, с которой траектории приходят). Функции F_i имеют различные свойства для случаев гладкого и негладкого гамильтонианов в исходной дифференциальной игре. Гладкие гамильтонианы обычно возникают, когда оптимальные управления $u(x, p)$ и $v(x, p)$ обоих игроков гладко зависят от x, p . В этом случае траектории приходят на Γ (в прямом времени) по касательной к поверхности и набор необходимых условий может быть записан так:

$$F_0 = F(x, p) = 0, \quad F_1(x, V) = V - W(x) = 0 \\ F_{-1}(x, p) = \{F_1 F\} = \langle F_p, p - q(x) \rangle = 0$$

Приведенная выше система сингулярных характеристик имеет вид

$$\dot{x} = F_p, \quad \dot{p} = -F_x - \frac{\{\{F F_1\} F\}}{\{\{F_1 F\} F_1\}} (p - q) \quad (\nu = \{\{F_1 F\} F_1\})$$

Отметим, что здесь появляются вторые производные в двойных скобках Якоби: W_{xx} — в числителе и F_{pp} — в знаменателе. В случае регулярных характеристик справа присутствуют только первые производные F_x и F_p .

Рассмотрим негладкий гамильтониан вида

$$F(x, p) = \min [F^+(x, p), F^-(x, p)]$$

с гладкими ветвями F^+ , F^- . Такие гамильтонианы возникают, например, при наличии режимов переключения в управлении минимизирующего игрока. При этом условие переключения управления записывается в виде $F^+ - F^- = 0$. Получаем три необходимых условия

$$F_0 = F^+(x, p) = 0, \quad F_1(x, V) = V - W(x) = 0, \quad F_{-1}(x, p) = F^-(x, p) = 0$$

и система уравнений для сингулярных характеристик принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \lambda^+ F_p^+ + \lambda^- F_p^-, & \dot{p} &= -\lambda^+ F_x^+ - \lambda^- F_x^- - \frac{\{F^- F^+\}}{\nu} (p - q) \\ \lambda^+ &= \{F_1 F^-\} / \nu, & \nu &= \{F_1 F^-\} + \{F^+ F_1\}, & \lambda^+ + \lambda^- &= 1 \end{aligned}$$

Фокальная поверхность: случай касания. Следуя [5], приведем уравнение особого движения вдоль поверхности для случая касания в предположении коллинеарности

$$F_p(x, p) = c G_q(x, q), \quad c = c(x, p, q)$$

Здесь c — коэффициент пропорциональности. В зависимости от физического смысла задачи независимая переменная дифференцирования, параметризующая траекторию (обычно время), может быть различной для каждой стороны Γ . Обозначим эти переменные для двух сторон через t и v . Тогда

$$\frac{dv}{dt} = c(x, p, q)$$

Если, например, время является независимой переменной для обеих сторон, то $c = 1$. Как правило, стремятся использовать два одинаковых набора уравнений для эквивалентной поверхности с каждой из сторон фокальной поверхности. Есть два препятствия: 1) траектории с каждой стороны могут иметь различные направления (неколлинеарны); 2) помимо переменных x, p, q присутствуют вторые частные производные. Первое препятствие снимается предположением о коллинеарности. Используя условие касания, можно выразить члены со вторыми производными через переменные x, p, q (см. [5, с. 82]).

В результате получается следующая система уравнений порядка $3n$ для сингулярных фокальных характеристик в терминах x, p, q :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F_p(x, p) = c G_q(x, q) \\ \dot{p} &= -F_x - \frac{\{\{F F_1\} F\}^*}{\{\{F_1 F\} F_1\}} (p - q) \equiv K(x, p, q) \\ \dot{q} &= -c \left(G_x + \frac{\{\{G G_1\} G\}^*}{\{\{G_1 G\} G_1\}} (q - p) \right) = c K(x, q, p) \\ F_1 &= V - W(x), \quad G_1 = W - V(x) \end{aligned}$$

Отметим перестановку переменных p и q в выражении для K . В приведенных соотношениях используются скобки Якоби, учитывающие наличие переменной V (или W) в функции F_1 (или G_1). Выражение $\{\{FF_1\}F\}^*$ означает скобку Якоби $\{\{FF_1\}F\}$, в которой $\langle W_{xx}F_p, F_p \rangle$ заменено на $-c^2\langle G_x, G_q \rangle$.

Фокальная поверхность: трансверсальный случай. Обозначим через μ^+, μ^- соответствующие множители для окрестности D_1 и запишем предположение о коллинеарности (с коэффициентом $c = 1$) в виде

$$\lambda^+ F_p^+ + \lambda^- F_p^- = \mu^+ G_q^+ + \mu^- G_q^-$$

В этом случае никаких осложнений не возникает и система двух уравнений для эквивокальной поверхности дает следующие $3n$ уравнений для рассматриваемой фокальной поверхности:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \lambda^+ F_p^+ + \lambda^- F_p^- = \mu^+ G_q^+ + \mu^- G_q^- \\ \dot{p} &= -\lambda^+ F_x^+ - \lambda^- F_x^- - \frac{\{F^- F^+\}}{\{F_1 F^-\} + \{F^+ F_1\}}(p - q) \\ \dot{q} &= -\mu^+ G_x^+ - \mu^- G_x^- - \frac{\{G^- G^+\}}{\{G_1 G^-\} + \{G^+ G_1\}}(q - p) \\ \lambda^+ &= \{F_1 F^-\} / (\{F_1 F^-\} + \{F^+ F_1\}), \quad \lambda^+ + \lambda^- = 1 \\ \mu^+ &= \{G_1 G^-\} / (\{G_1 G^-\} + \{G^+ G_1\}), \quad \mu^+ + \mu^- = 1 \end{aligned}$$

5. Система двух УЧП для фокального многообразия в общем случае

Рассмотрим фокальную поверхность Γ с трансверсальным подходом с обеих сторон в общем случае, то есть когда она не является заранее известной гиперплоскостью и предположение о коллинеарности не обязательно выполнено. Вязкостное решение (цену игры) с разных сторон Γ обозначим через $V(x)$ и $W(x)$ с градиентами $p(x)$ и $q(x)$.

На поверхности Γ выполнено условие непрерывности

$$V(x) = W(x)$$

Предположим, что удалось разрешить это уравнение относительно x_n и найти функцию $x_n = X(\bar{x})$. Как правило, условие скачка $p \neq q$ на Γ гарантирует, что это может быть сделано для некоторой координаты x_k . По определению функции X на поверхности Γ имеют место тождества

$$Y(\bar{x}) \equiv V(\bar{x}, X(\bar{x})) \equiv W(\bar{x}, X(\bar{x})), \quad \bar{x} \in R^{n-1}$$

Первое из них есть определение новой скалярной функции от переменной \bar{x} — сужения цены игры на Γ .

Обозначим $(n-1)$ -мерные градиенты двух скалярных функций X и Y через r и s соответственно. Дифференцируя приведенные выше тождества по каждой из

компонент x_k , $k = 1, \dots, n-1$, и принимая во внимание два равенства для каждой стороны Γ , приходим к следующей системе из $2n + 2$ уравнений:

$$s_k = p_k + p_n r_k = q_k + q_n r_k, \quad k = 1, \dots, n-1$$

$$F^+(x, p) = 0, \quad F^-(x, p) = 0, \quad G^+(x, q) = 0, \quad G^-(x, q) = 0$$

Избавимся от $2n$ переменных p и q в этих уравнениях, чтобы получить два равенства, то есть два связанных УЧП первого порядка для функций X и Y . Сначала решим уравнения для градиентов. Получим соотношения

$$p_k = s_k - p_n r_k, \quad q_k = s_k - q_n r_k, \quad k = 1, \dots, n-1$$

которые подставим в уравнения

$$F^+(\bar{x}, X, s_1 - p_n r_1, s_2 - p_n r_2, \dots, s_{n-1} - p_n r_{n-1}, p_n) = 0$$

$$G^+(\bar{x}, X, s_1 - q_n r_1, s_2 - q_n r_2, \dots, s_{n-1} - q_n r_{n-1}, q_n) = 0$$

Заметим, что эти уравнения разрешимы относительно p_n и q_n . В самом деле, для частной производной левой части первого уравнения имеем

$$\frac{\partial F^+}{\partial p_n} = \langle F_p^+, N \rangle, \quad N = (-r_1, -r_2, \dots, -r_{n-1}, 1) \in \mathbb{R}^n$$

Здесь N является градиентом функции $x_n - X(\bar{x})$ в \mathbb{R}^n , то есть нормалью к Γ , и, таким образом, $N = \nu(p - q)$ с некоторым $\nu \neq 0$. Скалярное произведение $\langle F_p^+, N \rangle$ не равно нулю в трансверсальном случае. Следовательно, рассматриваемые два уравнения разрешимы по теореме о неявной функции и решения могут быть записаны в виде

$$p_n = P(\bar{x}, X, r, s), \quad q_n = Q(\bar{x}, X, r, s)$$

Подставляя последние выражения в функции F^- и G^- , получаем два УЧП первого порядка с двумя неизвестными функциями X и Y :

$$R(\bar{x}, X, r, s) = 0, \quad S(\bar{x}, X, r, s) = 0$$

Здесь

$$R(\bar{x}, X, r, s) = F^-(\bar{x}, X, s_1 - r_1 P, s_2 - r_2 P, \dots, s_{n-1} - r_{n-1} P, P)$$

$$S(\bar{x}, X, r, s) = G^-(\bar{x}, X, s_1 - r_1 Q, s_2 - r_2 Q, \dots, s_{n-1} - r_{n-1} Q, Q)$$

Эти два УЧП содержат явно только одну из неизвестных функций X и связаны между собой через частные производные r, s функций $X(\bar{x}), Y(\bar{x})$.

Замечание 1. В касательном случае, чтобы применить теорему о неявной функции, нужно найти функции

$$p_n = P(\bar{x}, X, r, s), \quad q_n = Q(\bar{x}, X, r, s)$$

из уравнений (условий касания)

$$\langle F_p, p - q \rangle = 0, \quad \langle G_q, p - q \rangle = 0$$

и подставить их в соотношения $F(x, p) = 0$ и $G(x, q) = 0$ (уравнения Беллмана – Айзекса). Действительно, подставляя выражения для p_k и q_k в $\langle F_p, p - q \rangle$ и дифференцируя по p_n , получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p_n} \langle F_p, p - q \rangle &= \langle F_p, N \rangle + \langle F_{pp}(p - q), N \rangle = \\ &= \nu \langle F_p, p - q \rangle + \nu \langle F_{pp}(p - q), p - q \rangle = -\nu \{ \{ F_1 F \} F_1 \} \neq 0 \end{aligned}$$

Последняя скобка Якоби, является знаменателем в уравнениях для особого движения и, вообще говоря, должна быть ненулевой. Отметим, что линейная форма от $p - q$ обращается в нуль в силу условия касания и данная скобка равна оставшейся квадратичной форме.

Замечание 2. При $n = 3$ решение рассматриваемой связанной системы УЧП первого порядка может быть, как правило, сведено к решению одного УЧП второго порядка с двумя независимыми переменными. Для этого нужно продифференцировать приведенные выше УЧП $R = 0$ и $S = 0$ по x_i , $i = 1, \dots, n - 1$, чтобы получить $2m + 2$ уравнений (с $m = n - 1$). Всего имеется $m(m + 1)/2$ различных вторых производных $W_{x_i x_j}$, что вместе с первыми производными дает $m(m + 1)/2 + m$ переменных. Если число переменных $W_{x_i x_j}, W_{x_i}$ на единицу меньше числа уравнений, то есть

$$\frac{m(m + 1)}{2} + m = 2m + 2 - 1$$

(например, при $m = 2$ или $n = m + 1 = 3$), то, вообще говоря, можно решить все, кроме одного, уравнения для $W_{x_i x_j}, W_{x_i}$ и подставить результат в единственное оставшееся уравнение. Это приведет к УЧП второго порядка.

Замечание 3. Систему двух УЧП первого порядка можно получить, если сингулярная поверхность является гиперплоскостью или при условии коллинеарности. Однако в обоих случаях возможны некоторые упрощения. В случае гиперплоскости функция $X(\bar{x})$ тождественно равна нулю ($x_n = 0$), так что нужно найти только функцию $Y(\bar{x})$. Эта функция удовлетворяет уравнению с укороченным гамильтонианом, использованным выше, а именно: $\bar{F}(\bar{x}, \bar{p}) = 0$, $Y(\bar{x}) = V(\bar{x}, 0)$, $\bar{p} = \bar{q} = s$.

Условие коллинеарности выделяет ситуацию, когда решение системы двух УЧП может быть сведено к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений для характеристик, подобно случаю одного УЧП. Как правило, система нескольких УЧП требует более сложной техники решения (см., например, [11]).

6. Импульсная дифференциальная игра, возникающая в области финансов

6.1. Предшествующая работа

В [6] исследована дифференциальная игра с импульсным управлением. Теория Айзекса – Бреквелла в геометрической форме с использованием концепции полупроницаемости применена практически без изменений, и построена фокальная особая 2D-поверхность (что также может рассматриваться как решение эквивалентной неимпульсной дифференциальной игры, для которой уравнение Айзекса представляет собой квазивариационное неравенство в дифференциальной форме, относящееся к игре с импульсным управлением).

Фокальная поверхность достигается регулярными траекториями с обеих сторон без касания. Дальнейшие движения по поверхности порождаются каждым из входящих потоков и не являются коллинеарными. Подобная геометрическая картина была предложена в качестве гипотезы в [5]. Частично показано, что условия оптимальности в форме [5] выполнены для задачи из [6]. Это позволило записать систему обыкновенных дифференциальных уравнений для построения фокальной поверхности (в действительности, всех сингулярных поверхностей в рассматриваемой игре) в замкнутой форме, а затем [12] применить технику вязкостных решений, чтобы получить полное доказательство оптимальности.

Уточним задачу следующим образом. Пусть состояние описывается двумерным вектором (x, y) и временем. Пусть v есть управление максимизирующего игрока, а u — минимизирующего, проявляясь либо как “непрерывная компонента” $u(t)$ в динамике, либо как импульсы или скачки амплитуды u_k в моменты времени t_k , выбор которых является частью управления минимизирующего игрока.

Определение игры включает в себя параметры $v^- < C^- < 0 < C^+ < v^+$, а в выражениях типа $C^\varepsilon u$ символ ε означает $\text{sign } u$. Таким образом,

$$C^\varepsilon u = \begin{cases} C^+, & \text{если } u > 0 \\ C^-, & \text{если } u < 0 \\ 0, & \text{если } u = 0 \end{cases}$$

Игра задается динамикой

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (1 + v)x, & v^- \leq v \leq v^+ \\ \dot{y} &= (1 + v)y + u, & y(t_k^+) = y(t_k^-) + u_k \end{aligned}$$

и функцией платы J , содержащей функцию $M(s) = \max\{0, s - K\}$ для некоторого положительного параметра K :

$$J = M(x(T)) + \int_0^T (-v(t)y(t) + C^\varepsilon u(t))dt + \sum_k C^{\varepsilon_k} u_k$$

Сначала эта игра преобразуется в неимпульсную игру путем введения “фиктивного” времени θ и превращения t в переменную состояния с производной, равной 1 в отсутствие скачка и равной 0, когда происходит скачок (по воле минимизирующего

игрока). Во время скачка полагаем $\dot{x} = 0$ и $\dot{y} = \pm 1$ (снова по воле минимизирующего игрока), вводя таким образом скачок по y в момент t . Этот же прием применяется к функции платы.

Уравнение Айзекса принимает форму дифференциального квазивариационного неравенства

$$\min \left\{ \frac{\partial W}{\partial t} + \max_{v \in [v^-, v^+]} v \left[\frac{\partial W}{\partial x} x + \left(\frac{\partial W}{\partial y} - 1 \right) y \right], \frac{\partial W}{\partial y} + C^+, -\frac{\partial W}{\partial y} - C^- \right\} = 0$$

$$W(T, x, y) = M(x)$$

Показано, что при $t \leq T - (1/v^+) \ln(1 + C^+)$ игра имеет фокальную поверхность с неколлинеарными полями характеристик. Эта фокальная поверхность может быть вычислена с помощью системы из двух линейных УЧП. По сути дела, установлено [12], что решение приведенного выше дифференциального квазивариационного неравенства Айзекса задается соотношением

$$W(t, x, y) = Y(t, x) + q^\varepsilon(t)(X(t, x) - y)$$

где $\varepsilon = \text{sign}(X - y)$ и

$$q^-(t) = \max \left\{ e^{v^-(T-t)} - 1, C^- \right\}, \quad q^+(t) = \min \left\{ e^{v^+(T-t)} - 1, C^+ \right\}$$

а функции X и Y удовлетворяют двум связанным линейным УЧП

$$\begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} + \mathcal{T} \left(\begin{pmatrix} X_x \\ Y_x \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} y \right) = 0$$

$$\begin{pmatrix} X(T, x) \\ Y(T, x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ если } x < K; \quad \begin{pmatrix} x \\ x - K \end{pmatrix}, \text{ если } x > K \quad (1)$$

при

$$\mathcal{T} = \frac{1}{q^+ - q^-} \begin{pmatrix} v^+ q^+ - v^- q^- & v^+ - v^- \\ (v^- - v^+) q^- q^+ & v^- q^+ - v^+ q^- \end{pmatrix}$$

исследование которых еще продолжается.

Следовательно, на всем многообразии $y = X(t, x)$ градиент функции W терпит разрыв и многообразие является фокальным в области, где q^- и q^+ постоянны. (С ростом t оно становится эквивокальным, а затем рассеивающим многообразием.)

6.2. Применение теории предыдущего раздела

Используя обозначения предыдущего раздела и учитывая, что сейчас роль x_1, x_2, x_3 играют t, x, y , запишем

$$F^+ = V_t + v^+[V_x x + (V_y - 1)y], \quad F^- = V_y + C^+$$

$$G^+ = W_t + v^-[W_x x + (W_y - 1)y], \quad G^- = W_y + C^-$$

В равенствах $F^+ = 0$ и $G^+ = 0$ заменим V_t, V_x и W_t, W_x на соотношения

$$V_t = Y_t - V_y X_t, \quad V_x = Y_x - V_y X_x$$

$$W_t = Y_t - W_y X_t, \quad W_x = Y_x - W_y X_x$$

Получим

$$\begin{aligned} Y_t - V_y X_t + v^+ [(Y_x - V_y X_x)x + (V_y - 1)X] &= 0 \\ Y_t - W_y X_t + v^- [(Y_x - W_y X_x)x + (W_y - 1)X] &= 0 \end{aligned}$$

Наконец, исключим V_y и W_y , используя равенства $F^- = 0$ и $G^- = 0$:

$$\begin{aligned} Y_t + C^+ X_t + v^+ [(Y_x + C^+ X_x)x - (C^+ + 1)X] &= 0 \\ Y_t + C^- X_t + v^- [(Y_x + C^- X_x)x - (C^- + 1)X] &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Эти два уравнения первого порядка в частных производных легко преобразовать к виду (1) путем умножения слева на матрицу

$$\frac{1}{C^+ - C^-} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -C^- & C^+ \end{pmatrix}$$

Отметим, что данные вычисления проще, чем вывод, предложенный в [6].

6.3. Эквивалентное скалярное УЧП второго порядка

Как было показано выше (раздел 5, замечание 2), в случае, когда пространство состояний имеет, как здесь, размерность 3, можно заменить полученную систему из двух УЧП первого порядка одним скалярным УЧП второго порядка. Дифференцирование двух УЧП по двум независимым переменным (здесь t и x) дает еще четыре соотношения, то есть всего шесть. Поскольку функция Y не входит в исходные уравнения (только ее производные), она не входит также и в эту систему. Поэтому задача состоит в том, чтобы исключить пять первых и вторых частных производных функции Y из шести уравнений.

Здесь все линейно, поэтому процедура основана только на элементарной линейной алгебре. Начиная с (2) или (1), приходим к тому, что из последних четырех уравнений, полученных дифференцированием системы первого порядка по t и x , достаточно исключить все слагаемые с Y . Имеем

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} -v^+(C^+ + 1) & 0 & C^+ & v^+C^+ & 0 \\ -v^-(C^- + 1) & 0 & C^- & v^-C^- & 0 \\ 0 & -v^+(C^+ + 1) & 0 & C^+ & v^+C^+ \\ 0 & -v^-(C^- + 1) & 0 & C^- & v^-C^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_t \\ X_x x \\ X_{tt} \\ X_{tx} x \\ X_{xx} x^2 \end{pmatrix} + \\ & + \begin{pmatrix} 1 & v^+ & 0 \\ 1 & v^- & 0 \\ 0 & 1 & v^+ \\ 0 & 1 & v^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{tt} \\ Y_{tx} x \\ Y_{xx} x^2 \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

Умножив слева на вектор $(1, -1, v^-, -v^+)$ и разделив на $(C^+ - C^-)$, получим

$$\begin{aligned} & -\frac{v^+(1 + C^+) - v^-(1 + C^-)}{C^+ - C^-} X_t - v^+ v^- X_x x + X_{tt} + \\ & + (v^+ + v^-) X_{tx} x + v^+ v^- X_{xx} x^2 = 0 \end{aligned}$$

В полной системе из шести уравнений матрица коэффициентов при слагаемых, содержащих частные производные функции Y , имеет ранг 5, так что это единственное УЧП для одной функции X , которое может быть выведено таким путем.

Заметим, что при записи в терминах $\ln(x)$ вместо x все полученные линейные уравнения в частных производных оказываются уравнениями с постоянными коэффициентами. Это делает возможным исследование их с помощью преобразования Лапласа как по времени, так и по пространству.

Наконец, обратим внимание, что определитель при членах наивысшего порядка равен $-(v^+ - v^-)^2 x^2 / 4 < 0$, так что УЧП является гиперболическим и может быть записано в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v^+ x \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + v^- x \frac{\partial}{\partial x}\right) X - \frac{v^+(1+C^+) - v^-(1+C^-)}{(1+C^+) - (1+C^-)} X_t - v^+ v^- x X_x = 0$$

Данное УЧП описывает два различных (вещественных) поля характеристик как поля экстремальных траекторий $\dot{x} = v^+ x$ и $\dot{x} = v^- x$. Это означает, что оптимальное движение вдоль особой поверхности неединственно, как показано в [6].

7. 3D-дифференциальная игра с гладким гамильтонианом

Рассмотрим дифференциальную игру на фиксированном промежутке времени с терминальной функцией платы. Пусть фазовое пространство трехмерно с фазовым вектором $x = (x_1, x_2, x_3)$, где в качестве последней компоненты выступает переменная времени $t = x_3$. Динамика игры задается уравнениями и ограничениями на управления

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= k(bu_1 - u_2) + v_1 - v_2, & u_1^2 + u_2^2 &\leq 1 \\ \dot{x}_2 &= ku_2 + v_2, & v_1^2 + v_2^2 &\leq 1 \end{aligned}$$

Здесь b — положительная постоянная, $k = k(t)$ — положительная функция времени, которая может быть взята в виде $k = t$ для $t \geq 0$.

Расширенный минимаксный гамильтониан (включающий частную производную $p_3 = \partial V / \partial x_3$ по времени от функции цены) зависит от сопряженного вектора $p = (p_1, p_2, p_3)$ и последней компоненты x_3 вектора состояния x :

$$H(x, p) = p_3 + \sqrt{p_1^2 + (p_2 - p_1)^2} - k \sqrt{b^2 p_1^2 + (p_2 - p_1)^2}$$

Уравнение Гамильтона – Якоби – Беллмана – Айзекса и терминальные условия имеют вид

$$H(x, \partial V / \partial x) = 0, \quad V(x_1, x_2, T) = M(x_1, x_2)$$

где T — момент окончания игры, M — терминальная функция платы.

Функция M предполагается такой, что часть поверхности $x_2 = 0$ является фокальной поверхностью. Поскольку указанный выше гамильтониан $H(x, p)$ есть гладкая функция, траектории приходят на эту поверхность по касательной.

Условие касания (упрощенное) записывается в виде

$$\frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{p_2 - p_1}{\sqrt{p_1^2 + (p_2 - p_1)^2}} - k \frac{p_2 - p_1}{\sqrt{b^2 p_1^2 + (p_2 - p_1)^2}} = 0$$

Можно показать, что это уравнение имеет три действительных корня относительно p_2 при $1 < k < b$:

$$p_2 = p_1, \quad p_2 = p_1 + h, \quad p_2 = p_1 - h \quad \left(h = |p_1| \sqrt{(b^2 - k^2)/(k^2 - 1)} \right)$$

Последняя пара значений может дать два следующих неколлинеарных поля, лежащих по разные стороны от гиперплоскости $x_2 = 0$:

$$\dot{x}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{p_1 - h}{\sqrt{p_1^2 + h^2}} - k \frac{b^2 p_1 - h}{\sqrt{b^2 p_1^2 + h^2}}, \quad \dot{x}_3 = \frac{\partial H}{\partial p_3} = 1$$

по одну сторону и

$$\dot{x}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{p_1 + h}{\sqrt{p_1^2 + h^2}} - k \frac{b^2 p_1 + h}{\sqrt{b^2 p_1^2 + h^2}}, \quad \dot{x}_3 = \frac{\partial H}{\partial p_3} = 1$$

по другую. Для завершения построения нужно сформулировать соответствующие граничные условия, что является предметом дальнейших исследований.

Литература

- [1] *Breakwell J. V., Merz A. W.* Towards a complete solution of the homicidal chauffeur game. Proc. of the 1st International Conference on the Theory and Applications of Differential Games. Amherst: University of Massachusetts, 1969.
- [2] *Bernhard P.* Singular surfaces in differential games: an introduction. Lect. Notes in Control and Information Sci. Vol. 3. Differential Games and Applications. Berlin: Springer-Verlag, 1977, pp. 1–33.
- [3] *Breakwell J. V., Bernhard P.* A simple game with a singular focal line. J. Optim. Theory Appl., 1990. Vol. 64, no. 2, pp. 419–428.
- [4] *Isaacs R.* Differential Games. New York: John Wiley, 1965. = *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 480 с.
- [5] *Melikyan A. A.* Generalized Characteristics of First Order PDEs: Applications in Optimal Control and Differential Games. Boston: Birkhäuser, 1998.
- [6] *Bernhard P., El Farouq N.* An impulsive differential game arising in finance with Interesting Singularities. In: Proceedings of the 10th International Symposium on Dynamic Games and Applications, St. Petersburg, Russia, 2002, July 8–11, pp. 95–96.
- [7] *Субботин А. И.* Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка: перспективы динамической оптимизации. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 336 с.
- [8] *Hovakimyan N. V., Melikyan A. A.* Geometry of pursuit-evasion on second order rotation surfaces. Dynamics and Control, 2000. Vol. 10, no. 3, pp. 297–312.
- [9] *Melikyan A. A., Pourtallier O.* Games with several pursuers and one evader with discrete observations. Nova Journal of Mathematics, Game Theory and Algebra, 1996. Vol. 1, pp. 81–95.

- [10] *Basar T., Bernhard P.* H^∞ -Optimal Control and Related Minimax Design Problems: a Dynamic Game Approach. Boston: Birkhäuser, 1995.
- [11] *Dafermos C.M.* Stability for systems of conservation laws in several space dimensions. SIAM Journal of Mathematical Analysis, 1995. Vol. 26, pp. 1403–1414.
- [12] *Bernhard P.* An explicit viscosity solution of an Isaacs quasi variational inequality arising in option pricing. Proc. of the 4th ISDG Workshop, Goslar, Germany. 2003.

Задачи с начальными и терминальными условиями для уравнения Гамильтона – Якоби*

А.А. Меликян, А.Р. Ахметжанов, Н.В. Овакимян

Уравнения в частных производных (УЧП) первого порядка часто являются основным инструментом моделирования задач теории оптимального управления, дифференциальных игр, обработки изображений, физики и других областей науки. В зависимости от приложений, краевые условия формулируются либо в виде начальных условий (задача с заданными начальными значениями (ЗНЗ)), либо в виде конечных условий (задача с заданными терминальными значениями (ЗТЗ)). ЗНЗ и ЗТЗ в общем случае имеют разные решения. Поэтому, если из постановки не видно, какая именно задача подразумевается, то следует рассматривать обе задачи. В статье, в частности, дается ответ на вопрос: каким образом должны быть связаны начальные и терминальные условия, чтобы в результате получилось одно и то же решение. На первый взгляд, можно ожидать, что для рассматриваемого решения терминальное условие должно получаться автоматически путем его вычисления в рамках начальной задачи на терминальной поверхности. Из второго примера статьи (нестационарная система) видно, что для негладких начальных условий в общем случае такое утверждение неверно. В статье обсуждается отличие формулировок ЗНЗ и ЗТЗ, а также связь между гамильтонианами, фигурирующими в этих задачах.

1. Введение

Рассмотрим нелинейное УЧП первого порядка с краевыми условиями [10, 7]:

$$\begin{aligned} F(x, u, \partial u / \partial x) &= 0, & x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ u(x) &= v(x), & x \in M \subset \partial \Omega \end{aligned} \quad (1)$$

Эта форма охватывает и уравнение Гамильтона – Якоби

$$\frac{\partial u}{\partial t} + H\left(x, \frac{\partial u}{\partial x}, t\right) = 0, \quad (x, t) \in \Omega \quad (2)$$

*А. Melikyan, А. Akhmetzhanov, N. Novakimyan “On initial value and terminal value problems for Hamilton – Jacobi equation”, Systems and Control Letters, 2007. Vol. 56(11–12), pp. 714–721.
Перевод с английского Н.В. Овакимян.

если считать время одной из компонент вектора состояния.

При достаточной гладкости функций u и F ($u(x), F(x, u, p) \in C^2$) локальное решение задачи (1) сводится к интегрированию системы классических характеристик ($p = \partial u / \partial x$) [7, 1]

$$\dot{x} = F_p, \quad \dot{u} = \langle p, F_p \rangle, \quad \dot{p} = -F_x - pF_u \quad (3)$$

В задачах оптимального управления и дифференциальных играх структура гамильтонианов F и H вытекает из уравнений динамики и вида функции платы (см. раздел 3). В задачах обработки изображений, и, в частности, в задаче восстановления формы по тени, структура гамильтониана определяется физическими свойствами рассматриваемой задачи. Плоское изображение описывается с помощью функции интенсивности $I(x)$, где $x = (x_1, x_2) \in G$ — точка области изображения. При определенных предположениях о физическом законе отражения света функция интенсивности имеет вид $I(x) = \langle \gamma, n(x) \rangle$, где $n(x)$ — единичная нормаль к поверхности в точке $x \in G$, а $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ — фиксированное направление, по которому падает свет. Выражая нормаль через частные производные высоты поверхности $x_3 = u(x_1, x_2)$, можно получить УЧП первого порядка [12, 4, 15] в виде

$$I(x) = \frac{-\gamma_1 u_{x_1} - \gamma_2 u_{x_2} + \gamma_3}{\sqrt{1 + u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2}} \quad (4)$$

Во многих задачах физики и теории управления одна или обе функции $u(x)$, $F(x, u, p)$ могут быть негладкими и решение задачи (1) подразумевается в обобщенном смысле. Одним из основных методов поиска обобщенного решения является теория вязкостных решений [11, 3], получившая свое развитие в последние десятилетия. В соответствии с этой теорией уравнениям (1), (2), (4) приписывается два типа решений — для ЗНЗ и ЗТЗ (см. раздел 2). Цель статьи — сравнить эти решения и показать, что при использовании какой-либо новой модели в терминах УЧП первого порядка следует анализировать обе задачи.

При нахождении вязкостных решений полезным является [8, 9] метод сингулярных характеристик [13], обобщающий классический метод характеристик.

Статья построена следующим образом. В разделе 2 изложены основные принципы теории вязкостных решений, а также обсуждаются соответствующие краевые условия. В разделе 3 формулируются ЗНЗ и ЗТЗ для задач теории оптимального управления. В разделе 4 представлены некоторые пояснительные наблюдения. Раздел 5 содержит краткое заключение.

2. Вязкостные решения и краевые условия

Чтобы получить единственное решение для УЧП (1), следует задать соответствующие краевые условия (начальные, терминальные) [10, 5]. В [12] приведен обзор таких условий для задач восстановления формы по тени. Необходимо различать два типа задач: ЗНЗ и ЗТЗ. Поверхность M в (1) для ЗНЗ и ЗТЗ соответственно имеет вид

$$\begin{aligned} M = M_0 &= \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} : t = t_0\} \\ M = M_1 &= \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} : t = t_1\} \end{aligned} \quad (5)$$

Таким образом, M является частью всей границы $\partial\Omega = M_0 \cup M_1$. В случае стационарных систем поверхность M либо совпадает с $\partial\Omega$, либо должна задаваться отдельно. В теории вязкостных решений существует специальный метод для определения M и формулировки краевых условий [3]. В дифференциальных играх поверхность M называется допустимой областью (usable part) границы. Некоторые необходимые условия для нее приведены в [10].

Краевые условия в задачах восстановления формы по тени существенно отличаются от аналогичных условий в задачах оптимального управления. Для них желательно иметь информацию о форме на части границы тени. Но обычно такая информация недоступна. Поэтому можно построить форму с точностью до произвольной краевой функции. Но с другой стороны, построение формы достаточно произвести с точностью до произвольной константы: $u(x) - C$. Когда граница вырождается в точку, константу C можно принять равной значению функции в данной точке. Такие краевые условия используются в дифференциальных играх [10] в методе характеристик.

В некоторых работах, посвященных задачам восстановления формы по тени, экстремальные точки (максимума или минимума) решения характеризуются как вырожденная граница. В таких задачах краевые условия могут иметь специфическую форму сингулярности. Как показано в [12], в общем случае имеют место три вида края (конца границы): контуры видимости; край, соответствующий свету, падающему по касательной; край тени. Первый и второй типы сингулярности аналогичны сингулярности, возникающей в задаче оптимального управления с ограничениями [2, 6]. Метод обобщенных характеристик устанавливает, что семейство регулярных или сингулярных характеристик проектируется на этот край [14].

Напомним определение вязкостного решения [3] для ЗНЗ и ЗТЗ, формулируемое с использованием скалярных тестовых функций $\varphi(x) \in C^1(\Omega)$.

Определение. Непрерывная функция $u : \Omega + M \rightarrow \mathbb{R}^1$ называется вязкостным решением ЗНЗ (1), если выполнены следующие два условия:

1. $u(x) = v(x)$, $x \in M$;
2. для любой тест-функции $\varphi(x) \in C^1(\Omega)$ такой, что минимум (максимум) разности $u(x) - \varphi(x)$ достигается в точке $x^0 \in \Omega$, справедливо неравенство

$$F(x^0, u(x^0), \varphi_x(x^0)) \geq 0 \quad (F(x^0, u(x^0), \varphi_x(x^0)) \leq 0) \quad (6)$$

В определении вязкостного решения для ЗТЗ знаки неравенств в (6) меняются на противоположные и подразумевается другая терминальная поверхность M .

3. Задачи с начальными и терминальными значениями в оптимальном управлении

Терминальные задачи обычно имеют место в теории оптимального управления, а начальные — в физике и механике. Несмотря на то что большинство задач в вариационном исчислении, теории оптимального управления и дифференциальных играх сводятся к ЗТЗ, в некоторых случаях бывает также полезным рассмотреть ЗНЗ. Отметим, что ЗТЗ возникает тогда, когда цена является функцией левого конца оптимальной траектории, а ЗНЗ — когда представляет интерес правый конец траектории.

В этом разделе букву u будем использовать для переменной управления, а скалярные решения УЧП будут обозначаться буквами S или V .

3.1. Нестационарная система и задача вариационного исчисления

Рассмотрим общепринятую формулировку задачи оптимального управления с динамикой

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad u \in U \subset \mathbb{R}^m, \quad t \in [t_0, t_1] \quad (7)$$

краевыми условиями

$$x(t_0) = x^0, \quad x(t_1) = x^1, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (8)$$

и функцией платы

$$J[x, u] = \int_{t_0}^{t_1} L(x, u, t) dt + \Phi_0(x(t_0), t_0) + \Phi_1(x(t_1), t_1) \rightarrow \min_{u(t)} \quad (9)$$

Здесь x — n -мерный вектор состояния, u — m -мерный вектор управления, U — выпуклое множество в \mathbb{R}^m , а $t_1 > t_0$.

Введем функцию, определяемую двумя концами (левым и правым) оптимальной траектории:

$$J^*(x^0, t_0; x^1, t_1) = \min_{u(t)} \left(\int_{t_0}^{t_1} L(x, u, t) dt + \Phi_0(x^0, t_0) + \Phi_1(x^1, t_1) \right)$$

Из метода динамического программирования следует, что функция

$$V(x, t) = \min_{(x^1, t_1)} J^*(x, t; x^1, t_1), \quad (x^1, t_1) \in M_1$$

левого конца является решением ЗТЗ

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + H^l \left(x, \frac{\partial V}{\partial x}, t \right) &= 0, \quad (x, t) \in \Omega \\ V(x, t) &= \Phi_1(x, t), \quad (x, t) \in M_1 \quad (M_1 \subset \partial\Omega) \end{aligned} \quad (10)$$

в то время как функция

$$S(x, t) = \min_{(x^0, t_0)} J^*(x^0, t_0; x, t), \quad (x^0, t_0) \in M_0$$

правого конца является решением ЗНЗ

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} + H^r \left(x, \frac{\partial S}{\partial x}, t \right) &= 0, \quad (x, t) \in \Omega \\ S(x, t) &= \Phi_0(x, t), \quad (x, t) \in M_0 \quad (M_0 \subset \partial\Omega) \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь M_0 и M_1 — заданные начальная и терминальная поверхности соответственно.

Уравнения (10) и (11) записаны с помощью разных гамильтонианов, которые назовем левым (H^l) и правым (H^r). Метод динамического программирования устанавливает следующие соотношения для этих гамильтонианов:

$$\begin{aligned} H^l(x, p, t) &= \min_{u \in U} (\langle p, f(x, u, t) \rangle + L(x, u, t)) \\ H^r(x, p, t) &= \max_{u \in U} (\langle p, f(x, u, t) \rangle - L(x, u, t)) \end{aligned} \quad (12)$$

Таким образом, получаем

$$H^r(x, p, t) = -H^l(x, -p, t) \quad (13)$$

Аналогичные соотношения имеют место и для расширенного гамильтониана, то есть гамильтониана, включающего частные производные $\partial V/\partial t$ и $\partial S/\partial t$ по времени. В задачах оптимального управления, в основном, используется левый гамильтониан.

В задачах вариационного исчисления, когда $\dot{x} = f \equiv u$, $U = \mathbb{R}^n$, гамильтонианы H^l и H^r представляют собой преобразования Лежандра от функции $L(x, u, t) = L(x, \dot{x}, t)$:

$$\begin{aligned} H^l(x, p, t) &= \min_{\dot{x}} (\langle p, \dot{x} \rangle + L(x, \dot{x}, t)) & (p = -L_{\dot{x}}(x, \dot{x}, t)) \\ H^r(x, p, t) &= \max_{\dot{x}} (\langle p, \dot{x} \rangle - L(x, \dot{x}, t)) & (p = L_{\dot{x}}(x, \dot{x}, t)) \end{aligned} \quad (14)$$

Уравнения Гамильтона – Якоби здесь имеют ту же форму (10), (11).

3.2. Стационарная система и задача вариационного исчисления

Пусть функции f, L, Φ_0, Φ_1 в (7)–(13) не зависят от времени ($f = f(x, u)$, $L = L(x, u)$, $\Phi_0 = \Phi_0(x)$, $\Phi_1 = \Phi_1(x)$), а множества Ω, M_0, M_1 лежат в \mathbb{R}^n . Тогда функции цены (функции Беллмана) $V(x), S(x)$ также не зависят от времени и удовлетворяют уравнениям динамического программирования

$$\begin{aligned} H^l(x, p) &= \min_{u \in U} (\langle p, f(x, u) \rangle + L(x, u)) = 0 & (p = \partial V/\partial x) \\ H^r(x, p) &= \max_{u \in U} (\langle p, f(x, u) \rangle - L(x, u)) = 0 & (p = \partial S/\partial x) \end{aligned} \quad (15)$$

при соответствующих краевых условиях на M_1, M_0 . Сравнивая последние соотношения с (10) и (11), отметим, что здесь нет частных производных по времени.

В случае задачи вариационного исчисления уравнения (15) принимают вид

$$\begin{aligned} H^l(x, p) &= \min_{\dot{x}} (\langle p, \dot{x} \rangle + L(x, \dot{x})) = 0 & (p = \partial V/\partial x) \\ H^r(x, p) &= \max_{\dot{x}} (\langle p, \dot{x} \rangle - L(x, \dot{x})) = 0 & (p = \partial S/\partial x) \end{aligned} \quad (16)$$

Для задачи оптимального быстрогодействия, где $L(x, u) \equiv 1$, обычно используется более простой гамильтониан и уравнение динамического программирования записывается (например, для “правого” случая) в виде

$$H^r(x, p) = 1 \quad (H^r(x, p) = \max_{u \in U} \langle p, f(x, u) \rangle)$$

Интересно, что уравнение Гамильтона – Якоби подобного типа возникает в задаче вариационного исчисления с однородным по \dot{x} гамильтонианом (см. следующий раздел).

Замечание 1. Рассмотренные выше уравнения Гамильтона – Якоби для задач вариационного исчисления требуют выполнения условия

$$\det L_{\dot{x}\dot{x}} \neq 0$$

в некоторых переменных (x, \dot{x}, t) . Для стационарной задачи это означает, что лагранжиан $L(x, \dot{x})$ не является однородным по переменной \dot{x} . Отмеченное условие требуется, чтобы выразить переменную \dot{x} из уравнения $p = \mp L_{\dot{x}}(x, \dot{x}, t)$ (условие экстремума в (14) и (16)) согласно теореме о неявной функции. В зависимости от множества U и других параметров задачи это условие может быть существенным и в задачах оптимального управления.

3.3. Задача вариационного исчисления с однородным лагранжианом

Рассмотрим задачу вариационного исчисления с однородным лагранжианом:

$$L(x, \lambda \dot{x}) = \lambda L(x, \dot{x}), \quad \lambda > 0$$

Дифференцируя это равенство по λ и полагая $\lambda = 1$, имеем

$$L(x, \dot{x}) = \langle \dot{x}, L_{\dot{x}}(x, \dot{x}) \rangle$$

Отсюда следует, что левый и правый гамильтонианы в (16) тождественно равны нулю ($H^l(x, p) \equiv 0$, $H^r(x, p) \equiv 0$), поскольку $p = \mp L_{\dot{x}}(x, \dot{x})$. Более того, дифференцируя указанное равенство по \dot{x} , получаем $L_{\dot{x}\dot{x}}\dot{x} = 0$. Так как это линейное уравнение имеет нетривиальное решение, то $\det L_{\dot{x}\dot{x}} = 0$.

Таким образом, для функций $V(x)$ и $S(x)$ следует получить уравнения Гамильтона – Якоби в отличной от (16) форме. Для задач с однородным лагранжианом исследование уравнения Гамильтона – Якоби можно найти, например, в [16]. Несмотря на то что при выполнении равенства $\det L_{\dot{x}\dot{x}} = 0$ к уравнению $p = L_{\dot{x}}(x, \dot{x})$ нельзя применить стандартную теорему о неявной функции, в этом случае может выполняться более общее условие

$$\det \frac{1}{2}(L^2)_{\dot{x}\dot{x}} = \det(L_{\dot{x}}L_{\dot{x}}^T + L L_{\dot{x}\dot{x}}) \neq 0$$

Здесь $L_{\dot{x}}$ — вектор-столбец, а T — символ транспонирования. Данное условие позволяет решить уравнение

$$p = (L^2)_{\dot{x}}/2 = L L_{\dot{x}}$$

и получить функцию $\dot{x} = \omega(x, p)$. Можно показать, что эта функция также однородна по p , то есть $\omega(x, \lambda p) = \lambda \omega(x, p)$, $\lambda > 0$.

Определим теперь правый гамильтониан следующим образом:

$$H^r(x, p) = L(x, \omega(x, p)) \quad (17)$$

Напомним, что формула первой вариации дает [7]

$$\partial S/\partial x = L_{\dot{x}}(x, \dot{x}), \quad \partial V/\partial x = -L_{\dot{x}}(x, \dot{x}) \quad (18)$$

Используя вектор $\partial S/\partial x = p/L(x, \dot{x})$ в качестве второго аргумента гамильтониана и полагая $L > 0$, получаем

$$H^r \left(x, \frac{\partial S}{\partial x} \right) = L \left(x, \omega \left(x, \frac{p}{L} \right) \right) = \frac{L(x, \omega(x, p))}{L(x, \dot{x})} = 1 \quad (19)$$

Аналогичным образом, принимая во внимание соотношение (13) и полагая $H^l(x, p) = -L(x, \omega(x, -p))$, имеем

$$H^l \left(x, \frac{\partial V}{\partial x} \right) = -1 \quad (20)$$

Отметим, что во многих задачах с однородным лагранжианом вырожденность матрицы $L_{\dot{x}\dot{x}}$ (то есть $\det L_{\dot{x}\dot{x}} = 0$) можно устранить путем выбора подходящей координаты вектора x в качестве новой независимой переменной. Тогда уравнения (19), (20) примут форму (10), (11), (14).

Одним из основных и важных примеров однородной задачи является задача о кратчайшей геодезической линии на римановой поверхности, в которой функция $L(x, \dot{x})$ записывается в виде

$$L(x, \dot{x}) = \sqrt{\langle G(x)\dot{x}, \dot{x} \rangle} \quad (L^2(x, \dot{x}) = \langle G(x)\dot{x}, \dot{x} \rangle)$$

Здесь $G(x)$ — симметрическая невырожденная матрица, представляющая собой метрический тензор римановой поверхности с вектором x локальных координат; лагранжиан L — положительный и однородный первого порядка. Для этой задачи получаем следующие соотношения:

$$(L^2)_{\dot{x}\dot{x}}/2 = G(x), \quad p = G(x)\dot{x}, \quad \dot{x} = G^{-1}(x)p = \omega(x, p) \\ H^r(x, p) = -H^l(x, -p) = \sqrt{\langle G^{-1}(x)p, p \rangle}$$

Таким образом, обе функции $S(x)$ и $V(x)$ удовлетворяют одному и тому же уравнению Гамильтона – Якоби

$$\left\langle G^{-1}(x) \frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial x} \right\rangle = 1$$

В [16] доказано, что для однородной задачи в общем случае имеем

$$L^2(x, \dot{x}) = \langle G(x, \dot{x})\dot{x}, \dot{x} \rangle, \quad G(x, \lambda\dot{x}) = G(x, \dot{x}), \quad \lambda > 0$$

То есть теперь матрица G зависит от переменной \dot{x} и является однородной нулевого порядка по этой переменной.

3.4. Замечание по терминологии

Термины ЗНЗ и ЗТЗ понятны для нестационарных задач, например, таких как (11), (10), где краевые условия заданы на поверхностях

$$M_0 = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}: t = t_0\}, \quad M_1 = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}: t = t_1\} \quad (21)$$

Здесь M_0 соответствует начальному моменту времени, а M_1 — конечному. При этом характеристики стартуют на поверхности M_0 и достигают поверхности M_1 .

Ситуация не столь очевидна в стационарных задачах. Согласно традиционной терминологии в данном случае имеем краевую задачу для одного из двух определений решения в (6). Разные знаки в неравенствах (6) порождают два вязкостных решения задачи (1). Необходимо отличать эти два решения. Чтобы избежать введения новой терминологии, естественно относить эти два определения и соответствующие им вязкостные решения к ЗНЗ и ЗТЗ решениям. В этом случае для ЗНЗ решения знаки в (6) соответствуют ЗНЗ для нестационарной задачи, а характеристики отходят от граничной поверхности $M = M_0$. Аналогичным образом, для ЗТЗ решения знаки в (6) соответствуют ЗТЗ для нестационарной задачи и характеристики подходят к граничной поверхности $M = M_1$.

Направление движения вдоль характеристик определяется с помощью вспомогательной переменной времени, которая вводится в уравнениях регулярных характеристик (3) с помощью равенства $\dot{x} = dx/dt = F_p$.

Таким образом, пары (F, M_0) и (F, M_1) , состоящие из гамильтониана и граничной поверхности, порождают в общем случае два различных вязкостных решения.

В некоторых задачах граничные поверхности для ЗНЗ и ЗТЗ могут совпадать, то есть $M = M_0 = M_1$ и $M = \partial\Omega$. Но, конечно, это неверно для задач с граничными поверхностями вида (21).

Вязкостное решение $u(x)$ для ЗНЗ (ЗТЗ), порожденное парой (F, M) , обозначим через $I(F, M)$ ($T(F, M)$). В общем случае имеем $I(F, M) \neq T(F, M)$. Можно показать, что справедливо равенство $I(F, M) = T(-F, M)$. Отсюда получаем $I(F, M) \neq T(F, M) = I(-F, M)$.

В этом смысле можно утверждать, что уравнения $F = 0$ и $-F = 0$ в общем случае имеют разные вязкостные решения (в классическом гладком случае они совпадают). Если исходную задачу в виде ЗТЗ предпочтительно рассматривать как ЗНЗ, то следует использовать обратное время, что эквивалентно изменению знака гамильтониана F (или H).

Заданному гамильтониану $H(x, p)$ в общем случае можно поставить в соответствие восемь различных краевых задач, поскольку для каждого из четырех гамильтонианов

$$H(x, p), \quad -H(x, p), \quad -H(x, -p), \quad H(x, -p)$$

могут быть сформулированы ЗНЗ и ЗТЗ. Несмотря на то что каждая такая задача разумна с математической точки зрения, только половина из них, возможно, имеет физический смысл (см. примеры ниже).

Итак, обобщая рассмотрение ЗНЗ и ЗТЗ в терминах функции Беллмана как функции левого или правого конца оптимальной траектории, можно заключить, что в различных постановках могут возникать гамильтонианы

$$\pm H(x, \pm p)$$

Здесь знак перед H переключает между задачами ЗНЗ и ЗТЗ, а знак перед p переключает между правым и левым концом оптимальной траектории при постановке граничных условий.

Рассмотрим три примера, показывающие различия между решениями ЗНЗ и ЗТЗ для левого и правого уравнений Гамильтона – Якоби – Беллмана.

4. Примеры

4.1. Управление автомобилем

Рассматриваемый пример иллюстрирует стационарную задачу, которой соответствуют различные допустимые области M и различные решения для ЗНЗ и ЗТЗ. Исследуем задачу быстрогодействия, представляющую собой частный случай игры “двух автомобилей” [10]. Уравнения динамики имеют вид

$$\dot{x} = -uy, \quad \dot{y} = ux - 1, \quad |u| \leq 1$$

Пусть

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 > l^2\}$$

где $l > 0$ — параметр задачи.

Цель управления состоит в том, чтобы за минимальное время привести вектор состояния (x, y) на терминальную окружность

$$\partial\Omega: x^2 + y^2 = l^2$$

Соответствующий гамильтониан записывается в виде

$$H(x, y, p, q) = \min_u (-uyp + uxq - q) + 1 = -|qx - py| - q + 1$$

Здесь $p = \partial V / \partial x$, $q = \partial V / \partial y$.

Оптимальное время $V(x, y)$ для задачи быстрогодействия является решением следующей ЗТЗ:

$$H(x, y, \partial V / \partial x, \partial V / \partial y) = 0, \quad V(x, y) = 0, \quad (x, y) \in M$$

Допустимая область M есть верхняя дуга M_1 окружности $\partial\Omega$. На рис. 1 приведен график функции $V(x, y)$, на рис. 2 показаны оптимальные траектории в фазовой плоскости. Данное решение можно получить, используя результаты работы [10].

Для построения оптимального решения можно также рассматривать ЗНЗ с гамильтонианом противоположного знака $(-H(x, y, p, q))$ и такой же допустимой областью M_1 .

Физический смысл имеют только следующие четыре задачи.

Две ЗТЗ:

Задача 1: $H(x, y, p, q) = 0$.

Задача 4: $H(x, y, -p, -q) = 0$.

И две ЗНЗ:

Задача 2: $-H(x, y, p, q) = 0$.

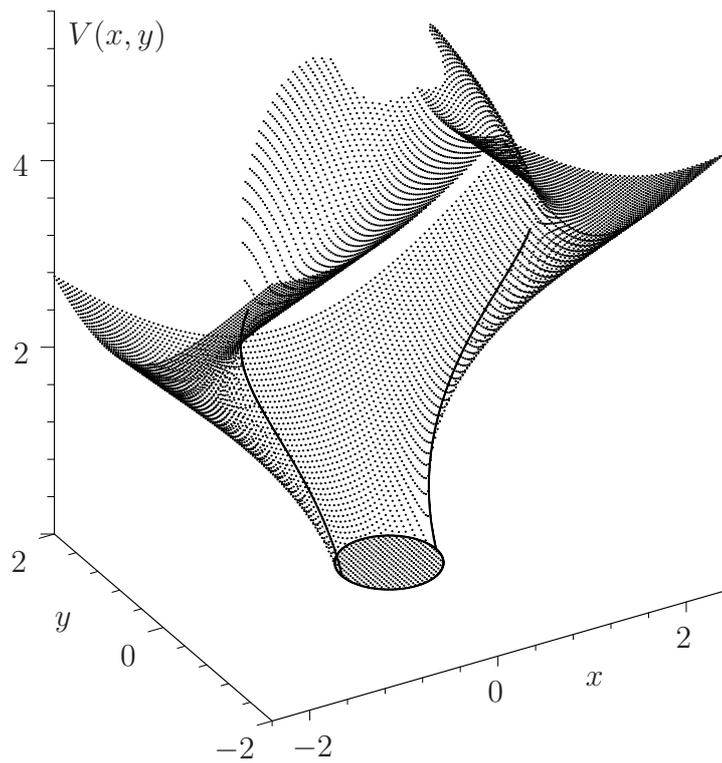


Рис. 1

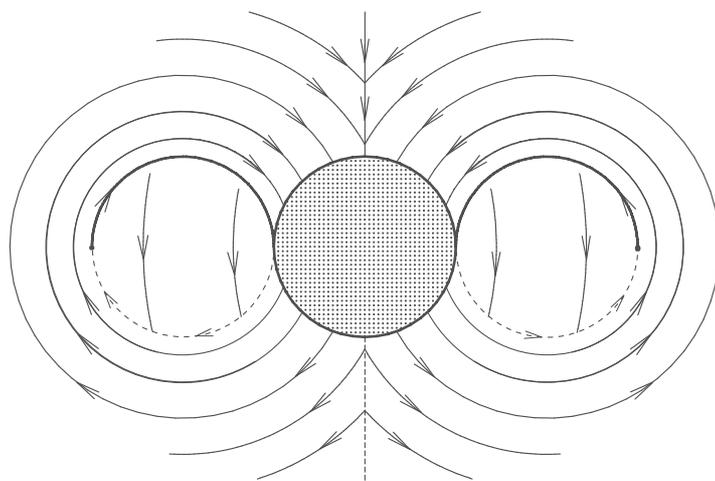


Рис. 2

Задача 3: $-H(x, y, -p, -q) = 0$.

Для задач 1 и 2 в качестве допустимой области M берем дугу M_1 , а для задач 3 и 4 — нижнюю дугу M_0 окружности $\partial\Omega$. Решения $V_1(x, y)$, $V_4(x, y)$ и $S_2(x, y)$, $S_3(x, y)$ этих задач связаны между собой соотношениями

$$V_1(x, y) = S_2(x, y), \quad S_3(x, y) = V_4(x, y) = V_1(-x, -y)$$

Следующие соображения объясняют различия между задачами 1, 2 и 3, 4. Уравнения динамики $\dot{x} = -uy$, $\dot{y} = ux - 1$, приведенные выше, записаны в относительной декартовой системе координат (x, y) , начало которой совпадает с положением машины, а ось y направлена по ее вектору скорости. В задачах 1 и 2, где допустимой областью является дуга M_1 , цена игры зависит от левого конца оптимальной траектории.

В задачах 3 и 4, где допустимой областью является дуга M_0 , можно рассмотреть координаты машины в системе, связанной с центром терминальной окружности. Цена игры здесь зависит от правого конца оптимальной траектории. Обозначим эти координаты через X и Y . Тогда $X = -x$, $Y = -y$, что соответствует отображению M_1 на M_0 . Таким образом, имеем

$$\dot{X} = -uY, \quad \dot{Y} = uX + 1$$

Эти уравнения динамики приводят к гамильтониану задачи 4.

4.2. Двумерная дифференциальная игра

С помощью рассматриваемого ниже примера изучим совместимость начальных и терминальных значений, которые могут порождать одно и то же решение. Данное свойство может быть отнесено как к стационарным, так и к нестационарным задачам. Последние являются более удобными для геометрических иллюстраций. Пусть исследуется нестационарная ЗНЗ с негладкими начальными значениями, заданными в виде [13]

$$\begin{aligned} F(x, y, p, q) &= p + \sqrt{a^2 + q^2} - x\sqrt{b^2 + q^2} = 0, \quad x > 0 \\ u(0, y) &= -|y| + cy \quad (p = \partial u / \partial x, \quad q = \partial u / \partial y, \quad a, b, c = \text{const}) \end{aligned} \quad (22)$$

Уравнение (22) является уравнением ГЯБА для следующей дифференциальной игры с одной пространственной координатой и негладкой интегро-терминальной функцией платы:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= u_1 + (T - t)v_1, \quad 0 \leq t \leq T, \quad u_1^2 + u_2^2 \leq 1, \quad v_1^2 + v_2^2 \leq 1 \\ J &= -|y(T)| + cy(T) + \int_0^T (au_2 + b(T - t)v_2)dt \rightarrow \min_{u_i} \max_{v_i} \end{aligned}$$

Уравнение (22) записано в обратном времени $x = T - t$.

Решение ЗНЗ. Пусть $a = b$ и $c = 0$. Вначале приведем функцию, являющуюся решением задачи, а затем опишем алгоритм ее построения. Решение имеет вид

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \min[u^+(x, y), u^-(x, y)] = -|y| + \sqrt{a^2 + 1}(x^2/2 - x) \\ u^\pm(x, y) &= \mp y + \sqrt{a^2 + 1}(x^2/2 - x) \end{aligned} \quad (23)$$

езде в полуплоскости $y \geq 0$, за исключением области

$$x \geq 1, \quad |y| \leq \frac{(x-1)^2}{2\sqrt{a^2+1}}$$

где оно задается гладкой функцией

$$v(x, y) = -\sqrt{a^2+1}/2 + a\sqrt{(x-1)^4/4 - y^2}$$

Гладкие ветви $u^\pm(x, y)$ могут быть построены с помощью системы классических характеристик с соответствующими начальными условиями:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F_p = 1, & \dot{y} &= F_q = q(1-x)/\sqrt{a^2+q^2} \\ \dot{u} &= pF_p + qF_q = p + qF_q, & \dot{p} &= -F_x = \sqrt{a^2+q^2}, & \dot{q} &= -F_y = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

$$x(0) = 0, \quad y(0) = s, \quad u = -|s|, \quad p(0) = -\sqrt{a^2+1}, \quad q(0) = \text{sign } s, \quad s \in \mathbb{R}$$

Из первого уравнения следует, что переменная x имеет смысл времени — независимой переменной в уравнениях (24). Поскольку переменная q постоянна вдоль решения (24), а производные \dot{y} и \dot{u} линейны по x , то в результате интегрирования этой системы (см. [5, глава 3]) получаем решение (23) с квадратичной зависимостью по пе-

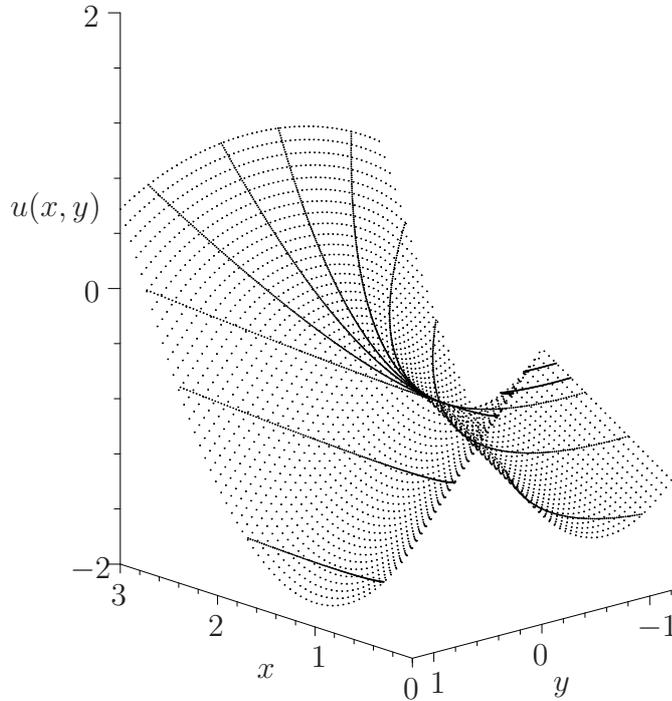


Рис. 3

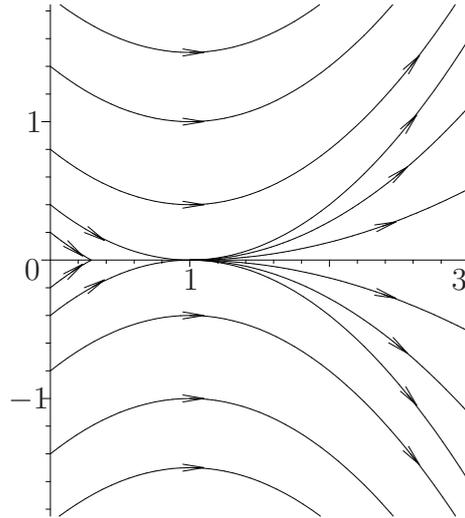


Рис. 4

ременной x . При этом классические характеристики задачи (24) образуют однопараметрическое семейство парабол в (x, y) -плоскости с вертикальной осью симметрии $x = 1$ (см. рис. 3, 4):

$$y - C = \frac{qx(1 - x/2)}{\sqrt{a^2 + q^2}}, \quad C = \text{const} \quad (25)$$

Решение $u = v(x, y)$ в области $x \geq 1$ между двумя граничными параболой, соответствующими значениям $C = \pm 1 / [2\sqrt{a^2 + 1}]$, можно построить путем интегрирования в (24) уравнения для \dot{u} вдоль интегральной воронки, образованной однопараметрическим семейством характеристик (с параметром q), стартующих из точки $(1, 0)$ и задаваемых уравнением

$$y(x) = -q(x - 1)^2 / [2\sqrt{a^2 + q^2}], \quad |q| \leq 1 \quad (26)$$

Полученное таким образом решение $u(x, y)$ является гладким и удовлетворяет уравнению (22) в классическом смысле всюду, за исключением отрезка $y = 0$, $0 \leq x \leq 1$, где имеет место равенство $u^+(x, y) = u^-(x, y)$. На рис. 3 приведен график решения, а на рис. 4 показаны соответствующие характеристики. Необходимо проверить выполнение условия вязкостного решения только на указанном отрезке. Прежде всего, нужно показать, что не существует такой гладкой тест-функции $\varphi(x, y)$, что минимум разности $u - \varphi$ достигается в некоторой точке рассматриваемого отрезка. В [13] с этой целью предложено рассмотреть семейство тест-функций вида

$$\varphi(x, y) = (1 + \theta)u^+(x, y)/2 + (1 - \theta)u^-(x, y)/2, \quad |\theta| \leq 1$$

для которых максимум разности $u - \varphi$ достигается в любой точке отрезка, за ис-

ключением его правого конца $x = 1$. Таким образом, нужно проверить неравенство

$$F(x, 0, \varphi_x, \varphi_y) = (x - 1) \left(\sqrt{a^2 + 1} - \sqrt{a^2 + \theta^2} \right) \leq 0$$

для всех $|\theta| \leq 1$ и $0 \leq x < 1$. Очевидно, что в данном случае неравенство выполнено, хотя при других значениях параметров задачи оно может и нарушаться, см. [13]. Алгоритм исследования точки $x = 1, y = 0$ следующий. Во-первых, для полученного решения $u(x, y)$ функция одного аргумента $u(x, 0)$ является гладкой в точке $x = 1$ и справедливо равенство $u_x(x, 0) = 0$. Это означает, что для любой тест-функции $\varphi(x, y)$, доставляющей максимум (минимум) разности $u - \varphi$ в точке $x = 1, y = 0$, выполнено равенство $\varphi_x = 0$. Далее заметим, что имеет место равенство $F(1, 0, p, q) = p$, поэтому $F(1, 0, \varphi_x, \varphi_y) = \varphi_x = 0$ независимо от значения производной φ_y .

Решение ЗТЗ. Зафиксируем некоторое положительное значение переменной x , например, $x_T = 3$. Этому значению x_T соответствует вышеприведенное решение ЗНЗ вида

$$\begin{aligned} u(3, y) &= -|y| + \frac{3}{2}\sqrt{a^2 + 1}, & |y| &\geq \frac{2}{\sqrt{a^2 + 1}} \\ u(3, y) &= -\sqrt{a^2 + 1}/2 + a\sqrt{4 - y^2}, & |y| &\leq \frac{2}{\sqrt{a^2 + 1}} \end{aligned} \quad (27)$$

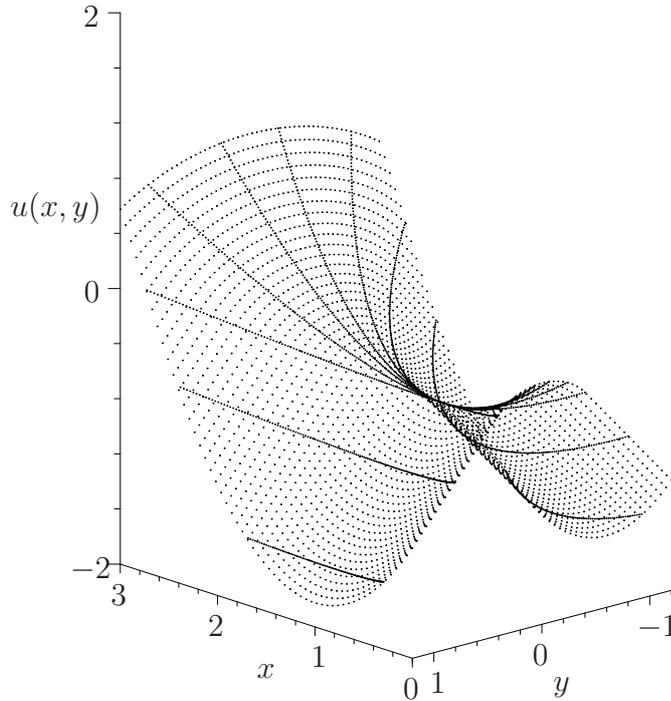


Рис. 5

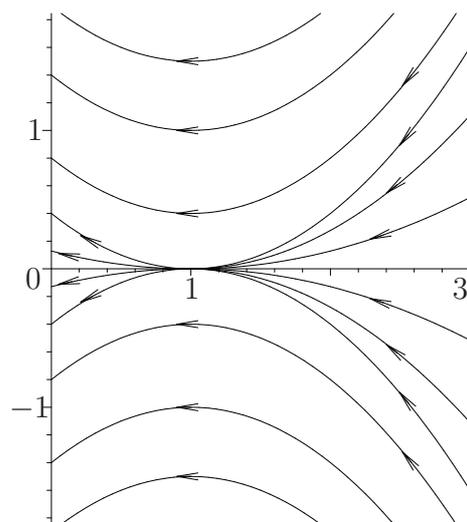


Рис. 6

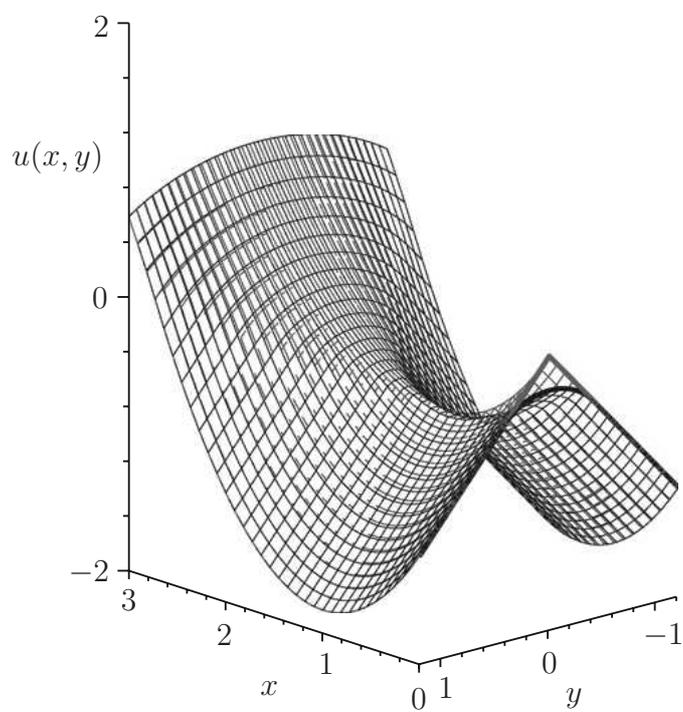


Рис. 7

Рассмотрим теперь ЗТЗ для уравнения (22) в левой полуплоскости $x \leq 3$ с терминальными условиями (27). Можно показать, что решение данной задачи совпадает с решением ЗНЗ (представленным выше) всюду, за исключением области

$$x \leq 1, \quad |y| \leq \frac{(x-1)^2}{2\sqrt{a^2+1}}$$

где решение задается функцией $v(x, y)$. В этой области нарушается условие $u(0, y) = -|y|$. Следовательно, общее решение ЗНЗ является гладким и удовлетворяет уравнению в классическом смысле всюду, кроме точки $x = 1, y = 0$. Эта точка может быть исследована так же, как и в случае ЗНЗ. График полученного решения изображен на рис. 5, а на рис. 6 приведены соответствующие характеристики.

Таким образом, стартуя из области негладких начальных условий (при $x = 0$) и “отражая” решение в точке $x = 3$, можно сглаживать полученное решение $u(x, y)$. Если продолжить процесс такого отражения, то решая последовательно ЗНЗ и ЗТЗ, в результате получим гладкое решение. На рис. 7 приведен совмещенный график решений для ЗТЗ и ЗНЗ.

4.3. Скалярное уравнение эйконала

Уравнение эйконала, известное в геометрической оптике, может также возникать в задачах восстановления формы по тени (в случае вертикального источника света, когда $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ в (4)) и задачах искусственного зрения [17]. Простейшее уравнение эйконала, приведенное ниже (см. [5]), иллюстрирует различие между решениями ЗНЗ и ЗТЗ в случае, когда граничная поверхность для обеих задач совпадает с $\partial\Omega$.

Рассмотрим следующую задачу со скалярной переменной x :

$$F \equiv u_x^2 - 1 = 0, \quad x \in (0, 1), \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0$$

Здесь $\Omega = (0, 1)$, а поверхность M состоит из двух точек $\{0, 1\}$. Можно показать, что вязкостным решением $I(F, M)$ начальной задачи в этом случае является функция $u = h(x)$ вида

$$h(x) = x, \quad x \in [0, 1/2]; \quad h(x) = 1 - x, \quad x \in [1/2, 1]$$

а вязкостным решением $T(F, M)$ терминальной задачи служит функция $u = -h(x)$, см. рис. 8.

Для рассматриваемого примера функции $\pm h(x)$ могут быть получены как пределы решений обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$\pm \varepsilon u_{xx} + u_x^2 - 1 = 0, \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0$$

если положительный параметр ε устремить к нулю. Здесь знаку минус соответствует ЗНЗ, а знаку плюс — ЗТЗ. Решения уравнения для трех различных значений ε , взятых со знаком плюс и минус, представлены на рис. 8.

Поле характеристик для уравнения эйконала можно исследовать, выписав характеристическое уравнение

$$\dot{x} = F_p = 2p = 2u_x$$

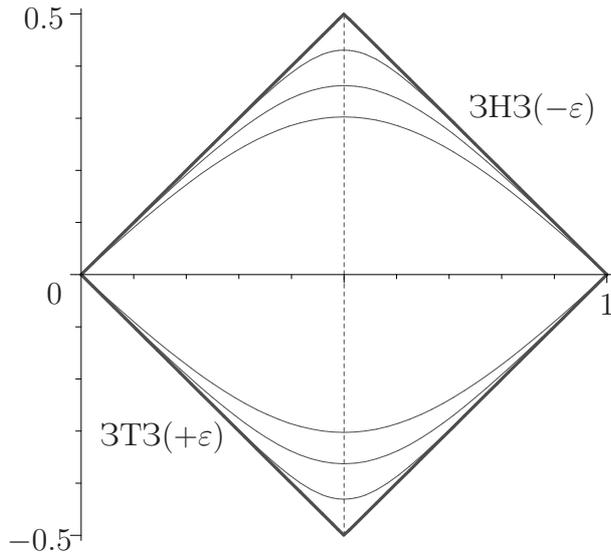


Рис. 8

для переменной x , где $F = p^2 - 1 = 0$ ($p = u_x$). Таким образом, знак величины \dot{x} зависит от производной функции $u(x) = h(x)$. Поле характеристик для ЗНЗ направлено от множества M (концов отрезка $[0, 1]$) внутрь интервала $(0, 1)$, а для ЗТЗ направлено в сторону множества M .

5. Заключение

В статье рассмотрены начальная и терминальная задачи для негладких вязкостных решений уравнения Гамильтона – Якоби. Если граничные условия получены не на основе каких-либо физических соображений, то следует быть внимательными при формулировке соответствующей задачи. В некоторых случаях из физического смысла не следует, какую именно задачу (начальную или терминальную) следует рассматривать. Этот вопрос требует дальнейших исследований.

Литература

- [1] *Arnold V.I.* Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations. New York: Springer, 1998.
- [2] *Cappuzzo-Dolcetta I., Lions P.L.* Viscosity solutions of Hamilton – Jacobi equations and state-constraints. Trans. Amer. Math. Soc., 1990. Vol. 318, pp. 643–683.
- [3] *Crandall M.G., Ishii H., Lions P.L.* User’s guide to viscosity solutions of second order partial differential equations. Bull. Amer. Math. Soc., 1992. Vol. 27, no. 1, pp. 1–67.

- [4] Dupuis P., Oliensis J. On optimal control formulation and related numerical methods for a problem in shape reconstruction. *Ann. Appl. Probab.*, 1994. Vol. 4, no. 2, pp. 287–346.
- [5] Evans L.C. *Partial Differential Equations*. New York: AMS, 1998. = Эванс Л.К. Уравнения с частными производными. Новосибирск: Тамара Рожковская, 2003. 560 с.
- [6] Fleming W.H., Soner H.M. *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions*. Applications of Mathematics, 25. New York: Springer-Verlag, 1993.
- [7] Giaquinta M., Hildebrandt S. *Calculus of Variations I, II*. New York: Springer, 1996.
- [8] Hovakimyan N. *Differential Games of Pursuit–Evasion in Manifolds*. Ph.D. Thesis, 1992.
- [9] Hovakimyan N.V., Melikyan A.A. Geometry of pursuit-evasion on second order rotation surfaces. *Dynamics and Control*, 2000. Vol. 10, no. 3, pp. 297–312.
- [10] Isaacs R. *Differential Games*. New York: John Wiley, 1965. = Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 480 с.
- [11] Lions P.L. Generalized solutions of Hamilton – Jacobi equations. *Research Notes in Mathematics*. Vol. 69. Boston: Pitman, 1982.
- [12] Lions P.L., Rouy E., Tourin A. Shape-from-shading, Viscosity solutions and Edges. *Numer. Math.*, 1993. Vol. 64, pp. 323–353.
- [13] Melikyan A.A. *Generalized Characteristics of First Order PDEs: Applications in Optimal Control and Differential Games*. Boston: Birkhäuser, 1998.
- [14] Melikyan A.A. Singular characteristics of HJBI equation in state constraint optimal control problems. Preprints of IFAC Symposium “Modeling and Control of Economic Systems”, September 6–8, 2001, Klagenfurt, Austria, pp. 155–156.
- [15] Ostrov D. Viscosity solutions and convergence of monotone schemes for synthetic aperture radar shape-from-shading equations with discontinuous intensities. *SIAM J. Appl. Math.*, 1999. Vol. 59, no. 6, pp. 2060–2085.
- [16] Rund H. *The Hamilton – Jacobi Theory in the Calculus of Variations: Its Role in Mathematics and Physics*. London: Van Nostrand, 1966.
- [17] Tannenbaum A. Three snippets of curve evolution theory in computer vision. *Math. Computer Modelling J.*, 1996. Vol. 24, pp. 103–119.

Геометрия игр преследования-убегания на двумерных многообразиях*

А. А. Меликян

Рассматриваются игры преследования-убегания с простыми движениями на двумерных (2D) многообразиях. Анализ охватывает такие пространства игры как 2D-поверхности вращения (конусы и гиперболоиды, состоящие из одного или двух листов, эллипсоиды), евклидову плоскость с выпуклым ограниченным препятствием, двусторонние евклидовы плоскости с отверстием(ями), двусторонние плоские ограниченные фигуры (диск, эллипс, многоугольник). В двустороннем игровом пространстве игроки могут менять сторону на границе (через отверстие).

Во всех случаях пространство игры представляет собой 2D-поверхность или фигуру в 3D евклидовом пространстве, где длина дуги порождается евклидовой метрикой 3D-пространства. Вследствие простых движений оптимальные траектории игроков, вообще говоря, состоят из геодезических линий многообразия пространства игры. Для рассматриваемых пространств могут существовать две (или более) геодезические линии одинаковой длины, соединяющие игроков. В некоторых случаях это приводит к возникновению особой (сингулярной) поверхности, состоящей из траекторий, являющихся огибающими семейства геодезических.

В работе исследуются необходимые и достаточные условия такого и некоторых других типов особенностей (сингулярностей). Указываются игровые пространства, где оптимальные стратегии преследования-убегания не содержат особенностей (сингулярностей) и подобны случаю евклидовой плоскости. Дается краткий обзор и анализ решений игр для нескольких пространств-многообразий.

В приведенном анализе используются вязкостные решения уравнений Гамильтона – Якоби – Беллмана – Айзекса (ГЯБА), вариационное исчисление и геометрические методы. Построены 3D-многообразия, содержащие позиции с двумя или более геодезическими линиями равной длины, соединяющими игроков.

Исследование 2D-игр на многообразиях имеет несколько непосредственных приложений, а также может представлять собой приближенное решение более сложных игр, имеющих абстрактный характер.

* A. Melikyan “Geometry of pursuit-evasion games on two-dimensional manifolds”, In: Jorgensen S., Quincampoix M., Vincent T.L. (eds.) *Advances in Dynamic Games Theory: Numerical Methods, Algorithms, and Applications to Ecology and Economics*, Ann. Internat. Soc. Dynam. Games, 2007. Vol. 9, pp. 173–194. Birkhäuser, Boston.

Перевод с английского В.А. Корнеева.

1. Введение

Простые движения очень часто используются в теории дифференциальных игр при описании различных движущихся объектов [1–4]. Дифференциальные игры с простыми движениями важны для моделирования многих практических задач, они удобны для первого применения новых теоретических методов. Технически решение игровой задачи с простыми движениями, как правило, проще, чем в задачах со сложной динамикой [5, 6]. Например, легко исследуются решения игр сближения и преследования-уклонения в евклидовом пространстве.

Многие игровые модели имеют либо нелинейные динамические уравнения или же они используют простые движения, но в игровом пространстве сложной геометрии, являющемся римановым многообразием, возможно содержащим края или особые точки. Свойство нелинейности в некоторой степени вбирает в себя метрический тензор многообразия, в то время как характер динамических уравнений позволяет эффективно применять геометрические методы. В данной работе рассматриваются дифференциальные игры преследования-убегания с простыми движениями на 2D-многообразии, функция платы есть время преследования (с нулевым радиусом поимки).

Оптимальное время преследования при простом движении игроков на евклидовой плоскости или в евклидовом пространстве есть отношение начального расстояния между игроками (длина кратчайшей геодезической линии) к разности скоростей. Эта формула верна также для игр на поверхностях (многообразиях) при достаточно малых значениях начального расстояния. Оптимальные траектории игроков определяются кратчайшей линией (геодезической), соединяющей игроков. При этом оба игрока, преследователь и убегающий, движутся вдоль этой общей геодезической линии. Подобную стратегию преследующего (убегающего) игрока будем называть первичной стратегией преследования (убегания).

Ситуация меняется, когда пространство игры является многообразием, а не евклидовым пространством, и существуют две (или более) геодезические линии одинаковой длины, соединяющие игроков. Существование двух равных геодезических для некоторых позиций приводит к так называемой вторичной области, где оптимальные движения по-прежнему суть движения вдоль геодезических, но каждый игрок использует свою геодезическую линию, которая отличается от линии, соединяющей игроков. Сингулярная (экивокальная) поверхность, разделяющая первичную и вторичную области, состоит из оптимальных траекторий, которые являются огибающими семейства геодезических; такие поверхности называются также огибающими переключения.

Как показано в [7, 8], в играх на 2D-конусах в дополнение к этим двум типам областей может существовать область D третьего типа, где цена игры зависит только от координат преследователя. Следовательно, этот игрок имеет определенное оптимальное поведение, в то время как убегающий может использовать произвольное управление до достижения границы D . Иными словами, в D получаем задачу оптимального управления, а не динамическую игру. Такое явление имеет место в играх преследования-убегания на семействе 2D-поверхностей вращения, в том числе, на конусах и гиперболоидах из двух листов. Полное решение игр на конусах можно найти в [7, 8]; игры на гиперболоидах исследованы в [9, 10]. Одна-

ко если пространство игры есть, например, выпуклый цилиндр, то наличие двух геодезических линий не меняет оптимальности первичной стратегии.

Существование особой (сингулярной) поверхности существенно зависит от компактности и симметрии игрового пространства. Исследуя геометрические свойства пространства игры, сформулируем достаточное условие оптимальности первичной стратегии во всем пространстве.

На основании решений упомянутых выше игр можно утверждать, что все регулярные пути делятся на три типа: (1) игроки перемещаются по геодезической линии, соединяющей их (первичная стратегия подобна стратегии на евклидовой плоскости); (2) каждый игрок использует свою геодезическую линию, которая отлична от соединяющей их линии (вторичная стратегия); (3) преследователь движется по геодезической, убегающий имеет произвольное движение (ситуация, подобная оптимальному управлению).

2. Пространство игры и динамика

Пусть две точки — игроки P (преследователь) и E (убегающий) — совершают простые движения на многообразии M с невырожденной римановой метрикой. В качестве пространства игры M будут рассматриваться двумерные поверхности в трехмерном евклидовом пространстве с метрикой, порожденной 3D-евклидовой метрикой, и подобласти евклидовой плоскости, возможно, двусторонние.

Пусть $x, y \in \mathbb{R}^2$ — локальные координаты положения игроков. Тогда динамические уравнения простых движений можно записать в виде

$$\dot{x} = u, \quad \dot{y} = v, \quad x, y, u, v \in \mathbb{R}^2 \quad (1)$$

при ограничениях

$$\sqrt{\langle G(x)u, u \rangle} \leq 1, \quad \sqrt{\langle G(y)v, v \rangle} \leq \nu$$

Здесь $G(x)$ — 2×2 -матрица, метрический тензор многообразия (поверхности), определяющий риманову метрику. Это ограничение предполагает, что максимальная скорость преследователя равна 1; считаем, что максимальная скорость ν убегающего положительна. Константу ν можно рассматривать как отношение максимальных скоростей убегающего и преследователя. Будем предполагать, что $\nu < 1$.

Игра преследования-уклонения рассматривается для системы (1) с нулевым радиусом захвата, то есть игра, начинающаяся в момент времени $t = 0$, заканчивается в первый момент $t = T$, когда имеет место условие захвата $x(T) = y(T)$; значение платы есть T .

В случае плоского пространства M метрический тензор является единичной матрицей, $G = I$. Уравнения динамики и ограничения принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u, \quad \dot{y} = v, \quad x, y, u, v \in \mathbb{R}^2 \\ u_1^2 + u_2^2 &\leq 1, \quad v_1^2 + v_2^2 \leq \nu^2 \end{aligned}$$

Здесь $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ — декартовы (локальные) координаты игроков P и E . В случае двустороннего пространства игры нужно также указать, на какой стороне плоскости, верхней или нижней, находится игрок. Кроме того, должны

быть наложены ограничения на краях (ребрах) для предотвращения перемещения игрока за пределы пространства M .

3. Первичное решение

В общем случае, в основной части $D_1 \subset M \times M$ (первичная область) фазового пространства цена игры $V(x, y)$ равна так называемому первичному времени, хорошо известному для евклидова пространства:

$$V_1(x, y) = \frac{L(x, y)}{1 - \nu}, \quad x, y \in D_1 \quad (2)$$

Здесь $L(x, y)$ — минимальное риманово расстояние между P и E , определяемое как минимум геодезического функционала, то есть

$$L(x, y) = \min_{\xi=\xi(\sigma)} \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \sqrt{\langle G(\xi)\dot{\xi}, \dot{\xi} \rangle} d\sigma, \quad \xi(\sigma_0) = y, \quad \xi(\sigma_1) = x \quad (3)$$

где $\xi(\sigma)$ — кусочно-гладкая кривая; $\xi(\sigma) \in M$, $\sigma_0 < \sigma < \sigma_1$.

В первичной области D_1 оптимальные движения игроков суть движения вдоль геодезической линии, соединяющей игроков. Соответствующие оптимальные стратегии имеют вид [11]

$$\begin{aligned} u(x, y) = -a(x, y) & \quad \left(a(x, y) = G^{-1}(x) \frac{\partial L}{\partial x} \right) \\ v(x, y) = \nu b(x, y) & \quad \left(b(x, y) = G^{-1}(y) \frac{\partial L}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

где a и b — внешние единичные касательные векторы к геодезической линии в точках P и E , то есть

$$|a|_x^2 = \langle G(x)a, a \rangle = 1, \quad |b|_y^2 = \langle G(y)b, b \rangle = 1$$

Минимум в (3) в общем случае записывается в виде

$$L(x, y) = \min_{\alpha \in A} S(x, y, \alpha) = S(x, y, \alpha^*), \quad \alpha^* \in A^* \subset A \quad (5)$$

Здесь $S(x, y, \alpha)$ — семейство локальных минимумов геодезического функционала, а α — параметр семейства из некоторого множества A . В рассматриваемых задачах такой набор состоит обычно из двух элементов, $A = \{+, -\}$, и формула (5) принимает вид (рис. 1)

$$L(x, y) = \min[L^+(x, y), L^-(x, y)] \quad (6)$$

Можно показать, что первичное время (2) гарантируется игроку P во всем пространстве $M \times M$, то есть захват происходит не позднее, чем в момент времени (2). Действительно, рассмотрим полную производную по времени от $S(x, y, \alpha)$ для фиксированного α :

$$\dot{S} = \langle a, u \rangle + \langle b, v \rangle \quad (a = S_x, b = S_y)$$

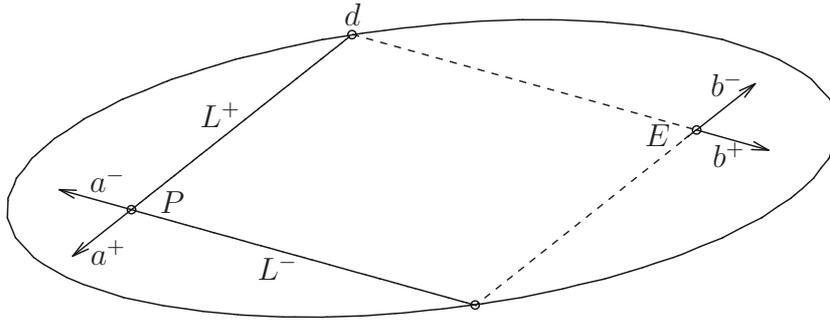


Рис. 1

Максимальное уменьшение расстояния между игроками, которое может получить игрок P , есть [12]

$$\min_u \dot{L} = \min_u \min_{\alpha \in A^*} \dot{S} = -1 + \min_{\alpha \in A^*} \langle b, v \rangle \leq -1 + \nu \quad (7)$$

Множество A^* определено в (5), а для неравенства, приведенного здесь и доказывающего утверждение, используется ограничение на вектор v .

Аналогичное утверждение, гарантирующее время (2) для игрока E , неверно, поскольку справедливо следующее свойство максимина:

$$\max_v \dot{L} = \max_v \min_{\alpha \in A^*} \dot{S} \leq \min_{\alpha \in A^*} \max_v \dot{S}$$

Учитывая сказанное, удобно представить фазовое пространство $M \times M$ как сумму

$$M \times M = D_1 + D_2$$

Оптимальное время захвата в D_1 имеет вид (2), а во второй области D_2 время захвата (поимки) строго меньше времени (2).

4. Неединственность геодезических. Многообразия Γ и B

При рассмотрении многообразий единственность геодезических линий с минимальной длиной, вообще говоря, нарушается существованием двух геодезических с длинами, обозначаемыми L^+ и L^- , см. (6). Также могут быть позиции с несколькими геодезическими или с их бесконечным количеством. Заметим, что для двустороннего плоского эллипса есть четыре позиции с бесконечным числом геодезических: когда игроки находятся на разных сторонах и в разных фокальных точках. Для прямоугольника имеются позиции с двумя или тремя геодезическими (и четырьмя в случае квадрата).

Обозначим многообразие с неединственной геодезической линией через Γ , $\Gamma \subset M \times M$. Анализ показывает, что Γ — трехмерное (3D) подмногообразие с краем. Внутренние точки Γ соответствуют позициям с двумя геодезическими. В окрестности этих точек существуют два локальных минимума длины геодезической линии,

обозначим их через L^+ и L^- . Для внутренних точек многообразия Γ выполнено равенство

$$\Gamma : L^+(x, y) = L^-(x, y) \quad (8)$$

Граничные точки многообразия Γ могут иметь одну, две или более геодезических с равными длинами. Построение таких границ для некоторых конкретных игровых пространств приведено в разделе 5.

Для многих игровых пространств часть $\Gamma_1 \subset \Gamma$ многообразия Γ является (по терминологии [1]) рассеивающей поверхностью, то есть из каждой точки подмногообразия Γ_1 выходят две оптимальные (первичные) траектории с одинаковым временем преследования (2). Первичное преследование проводится по любой из двух геодезических, выбор конкретной линии осуществляется игроком P .

В зависимости от геометрических характеристик пространства M множество Γ_1 может совпадать со всем Γ , и тогда первичное решение является решением игры во всем пространстве. Если Γ_1 и Γ не совпадают, то наличие двух геодезических позволяет игроку P маневрировать так, что в некотором подмножестве $D_2 \subset M \times M$ фазового пространства $M \times M$ оптимальное время преследования строго меньше времени (2).

Выведем необходимые условия оптимальности первичного решения во всем пространстве. Такое условие связывает геометрические характеристики пространства (фигуры) M и параметр ν .

Соотношение (8) означает, что минимум (6) достигается на обоих элементах и множества A , A^* в (5) совпадают. Тогда производную величины (6) вдоль решений (1) в точках множества Γ можно записать в виде

$$\dot{L} = \min [\langle a^+, u \rangle + \langle b^+, v \rangle, \langle a^-, u \rangle + \langle b^-, v \rangle] \quad (9)$$

Здесь a^\pm и b^\pm — единичные внешние касательные векторы к геодезическим линиям в точках P и E , рис. 1. Вычисления приведены для локально-евклидовой метрики $G = I$; общие формулы схожи.

Вывод формулы (7) показывает, что игрок P может гарантировать время (2) при помощи стратегии $u = -a^+$ или $u = -a^-$, см. (4). Назначим теперь игроку P для позиции из множества Γ управление

$$u = -\frac{a^+ + a^-}{|a^+ + a^-|} \quad (10)$$

при котором игрок движется не вдоль одной из геодезических, а выбирает направление между ними. Подставив управление (10) в формулу (9), получаем оценку

$$\dot{L} \leq -\frac{|a^+ + a^-|}{2} + \nu \frac{|b^+ + b^-|}{2} \quad (11)$$

Здесь использованы равенства

$$|a^+ + a^-|^2 = \langle a^+ + a^-, a^+ + a^- \rangle = 2(1 + \langle a^+, a^- \rangle)$$

а также тот факт, что максимум

$$\max_v \min[\langle b^+, v \rangle, \langle b^-, v \rangle]$$

достигается на векторе

$$v = \nu \frac{b^+ + b^-}{|b^+ + b^-|}$$

Сравнивая соотношения (7) и (11), заключаем, что управление (10) предпочтительнее для игрока P , если в рассматриваемой точке многообразия Γ выполнено неравенство

$$|a^+ + a^-| - \nu|b^+ + b^-| > 2(1 - \nu) \quad (12)$$

Хотя соотношения (9)–(12) носят “мгновенный” характер (относятся к начальному моменту времени), они обеспечивают существование достаточно малого интервала времени, в течение которого игрок P получает более быстрое, чем (7), убывание расстояния между игроками, и тем самым улучшает время (2).

Поверхность Γ_1 лежит в области D_1 , где время (2) оптимально, поэтому условие (12) там не может быть выполнено. Таким образом, в точках поверхности Γ_1 выполнены соотношения

$$\Gamma_1 : L^+ = L^-, \quad |a^+ + a^-| - \nu|b^+ + b^-| \leq 2(1 - \nu) \quad (13)$$

Для того чтобы первичное решение было глобально оптимальным, необходимо, чтобы множество (12) было пустым. Иными словами, край B многообразия Γ_1 , задаваемый равенствами

$$B : L^+ = L^-, \quad |a^+ + a^-| - \nu|b^+ + b^-| = 2(1 - \nu) \quad (14)$$

не должен иметь общих точек с внутренностью многообразия Γ .

5. Примеры многообразий Γ и B

Опишем многообразия Γ , B и их края $\partial\Gamma$, ∂B , построенные для некоторых пространств игры.

Поверхности вращения. Пусть поверхность вращения M в 3D-евклидовом пространстве с координатами x_1, x_2, x_3 задана соотношением

$$x_3 = f\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right) \quad (15)$$

Здесь $f(z)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция при $0 \leq z < \infty$, такая что

$$f'(0) = 0, \quad f'(z) > 0, \quad 0 < z < \infty \quad (16)$$

В этих условиях поверхность M имеет дважды дифференцируемую монотонную образующую и не ограничена. Как частный случай, в соотношении (15) рассмотрим функцию

$$f(z) = \frac{\sqrt{z^2 + m^2}}{k}$$

которая дает верхнюю полость гиперboloида (конуса) вращения

$$x_1^2 + x_2^2 + m^2 = kx_3^2, \quad m, k > 0 \quad (17)$$

где параметры m, k — положительные действительные числа. При $m = 0$ уравнение (17) определяет конус вращения. Взяв $-m^2$ вместо m^2 , получаем однополостный гиперболоид. Решение игры сближения-уклонения на нем приведено в [9].

Рассмотрим в качестве пространства игры поверхность M . Выберем первые две компоненты $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ в качестве локальных координат, описывающих положения игроков. Тогда уравнения динамики игроков, выполняющих простые движения, можно записать в виде (1), где элементы $g_{ij}(x)$ метрического тензора $G(x)$ вычисляются при помощи квадратичной формы

$$\langle G(x)dx, dx \rangle = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$$

Исключая dx_3 с использованием (15) и вводя обозначение $z = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, получим

$$g_{11} = 1 + \frac{f'^2(z)x_1^2}{x_1^2 + x_2^2}, \quad g_{22} = 1 + \frac{f'^2(z)x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}, \quad g_{12} = g_{21} = \frac{f'^2(z)x_1x_2}{x_1^2 + x_2^2} \quad (18)$$

Благодаря вращательной симметрии M многообразие Γ также симметрично. Любая точка на Γ соответствует положению игроков, находящихся в общей плоскости, проходящей через ось x_3 . В качестве локальных координат на Γ можно выбрать угол β между этой плоскостью и, например, координатной плоскостью $x_2 = 0$, а также расстояния R и r от игроков P и E до вершины $(0, 0, f(0))$.

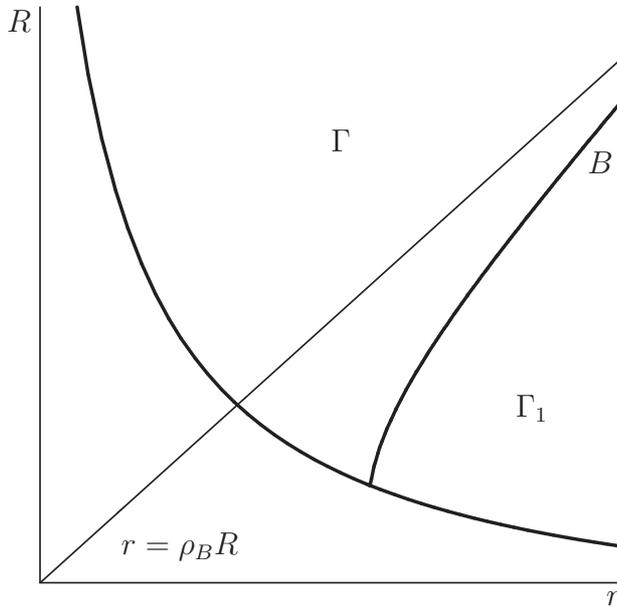


Рис. 2

Будем строить образующее сечение многообразия Γ . Полные многообразия Γ , $\partial\Gamma$, B , ∂B могут быть получены вращением кривых на рис. 2 относительно одной из осей координат.

Численные построения показывают [10], что точки многообразия Γ на плоскости R, r (при фиксированном B) лежат выше кривой $\partial\Gamma$, имеющей асимптоты, параллельные осям координат, рис. 2. Точкам ниже кривой $\partial\Gamma$ соответствуют позиции с одной геодезической линией. Можно выделить два возможных варианта перехода от двух геодезических к одной. Первый: точка из Γ достигает $\partial\Gamma$ сверху и происходит слияние двух геодезических линий, так что на самой кривой $\partial\Gamma$ существует одна геодезическая. Второй: три (или более) геодезические равной длины могут возникнуть на $\partial\Gamma$. Такое явление происходит, когда пространство игры — двусторонний прямоугольник или поверхность вращения с образующей соответствующей формы. Для многих поверхностей, подобных гиперболоидам или параболоидам, численно исследованных в [10], имеет место первый вариант. В этой статье рассмотрим именно такие поверхности. Однако для определения, какой вариант на самом деле имеет место, требуются глобальные (численные) исследования.

Рассмотрим сначала границу $\partial\Gamma$. Можно предположить (и дальнейшие исследования это подтверждают), что две геодезические длиной L^+ и L^- совпадают для позиций из $\partial\Gamma$. Это означает, что точки P и E являются, согласно одному из определений [17], взаимно сопряженными точками для функционала (3), определяющего геодезическую. Это явление, численно исследованное в [10], дает алгоритм прямого вычисления. Таким образом, определение $\partial\Gamma$ означает, что нужно найти все взаимно сопряженные точки P и E . Благодаря осевой симметрии и равенству $L^+ = L^-$ в (8), эти точки можно рассматривать как точки образующей поверхности M , которая лежит, например, в координатной плоскости $x_2 = 0$ и, в соответствии с (15), определяется равенствами

$$x_3 = f(x_1), x_1 \geq 0; \quad x_3 = f(-x_1), x_1 \leq 0 \quad (19)$$

Две совпадающие геодезические PE представляют собой участок кривой (19), который в силу (16) является дважды дифференцируемой кривой.

Проекция кривой PE на плоскость $x_3 = \text{const}$ — экстремаль геодезического функционала в (3). Лагранжиан (подынтегральное выражение) в (3) представляет собой однородную функцию по $\dot{\xi}$, что влечет определенное вырождение. Это вырождение может быть устранено, если ввести x_1 в качестве независимой переменной и преобразовать функционал (3) при помощи некоторой скалярной функции $x_2 = x_2(x_1)$ с использованием классических обозначений $x_2 = y, x_1 = x, y = y(x)$ к виду

$$L = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx, \quad F = \sqrt{g_{11}(x, y) + 2g_{12}(x, y)y' + g_{22}(x, y)y'^2} \quad (20)$$

где g_{ij} — элементы симметрической 2×2 -матрицы $G(x, y)$.

Можно проверить, что исследуемая кривая $y = y(x) \equiv 0, x_0 \leq x \leq x_1$, является экстремалью для (20), то есть удовлетворяет уравнению Эйлера

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

Фокальная точка $P(x_1, 0)$ сопряжена с точкой $E(x_0, 0)$ по отношению к функцио-

налу (16) и определяется при помощи решения $h(x)$ начальной задачи [17]:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(Ph') + (Q' - R)h &= 0, \quad h(x_0) = 0, \quad h'(x_0) = 1 \\ P(x) = F_{y'y'} &= \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}, \quad Q(x) = F_{y'y} = \frac{f'^2(x)}{x\sqrt{g_{11}}} \\ R(x) = F_{yy} &= \frac{f'(x)f''(x)}{x\sqrt{g_{11}}} - \frac{f'^2(x)}{x^2\sqrt{g_{11}}}, \quad g_{11}(x, 0) = 1 + f'^2(x) \end{aligned} \quad (21)$$

Значение x_1 — следующий за x_0 корень функции $h(x)$:

$$h(x_1) = 0, \quad h(x) > 0, \quad x_0 < x < x_1$$

Обыкновенное линейное дифференциальное уравнение (21) известно как уравнение Якоби для функционала (20); это уравнение в вариациях относительно уравнения Эйлера. Чтобы построить $\partial\Gamma$, достаточно найти соответствующие значения x_1 при всех $x_0 > 0$.

Можно показать, что общее решение уравнения Якоби (21) имеет вид

$$h(x) = C_1x + C_2x\varphi(x) \quad \left(\varphi(x) = \int \frac{\sqrt{g_{11}(x, 0)}}{x^2} dx \right)$$

Начальные условия из (21) приводят к следующим значениям констант:

$$C_1 = -\frac{x_0\varphi(x_0)}{\sqrt{g_{11}(x_0, 0)}}, \quad C_2 = \frac{x_0}{\sqrt{g_{11}(x_0, 0)}}$$

Требование $h(x_1) = 0$ дает равенство

$$\varphi(x_0) - \varphi(x_1) = 0 \quad (22)$$

которое определяет точки $\partial\Gamma$.

Край ∂B многообразия B является подмногообразием $\partial\Gamma$, для которого выполнено последнее равенство в (14). Так как касательные векторы a^+ и a^- , b^+ и b^- совпадают в (14) и это равенство, очевидно, выполняется, нужна его предельная форма, когда рассматриваемая точка стремится к $\partial\Gamma$ изнутри Γ . Используя в (14) разложения второго порядка по малым $|a^+ - a^-|$ и $|b^+ - b^-|$, как в [18], можно получить следующее условие для точки ∂B :

$$h'(x_1) = -\sqrt{\nu} \frac{P(x_0)}{P(x_1)} = -\sqrt{\nu} \sqrt{\frac{g_{11}(x_1, 0)}{g_{11}(x_0, 0)}} \quad (23)$$

Здесь учтена связь (21) между $P(x)$ и $g_{11}(x, 0)$. Применяя формулу общего решения, можно упростить уравнение (23) и привести его к виду $x_0 = -\sqrt{\nu}x_1$. Таким образом, получаем для края ∂B следующие два уравнения:

$$\partial B: \varphi(x_0) - \varphi(x_1) = 0, \quad x_0 = -\sqrt{\nu}x_1 \quad (24)$$

Исключение переменной x_0 дает уравнение

$$\varphi(x_1) + \varphi(\sqrt{\nu}x_1) = 0$$

относительно неизвестной x_1 . Можно применить метод Ньютона для решения этого уравнения. Решение системы (24) — точка, которая определяет многообразие ∂B с точностью до вращения вокруг вертикальной оси x_3 .

Для параболоида вращения, когда $f(z) = kz^2/2$ в (15), имеем

$$\varphi(x) = \frac{\sqrt{1+k^2x^2}}{x} - k \ln(kx + \sqrt{1+k^2x^2})$$

Для гиперboloида с $f(z) = \sqrt{(z^2+b)}/k$ в (15) первообразная $\varphi(x)$ выражается в эллиптических функциях.

Как видно из (24), числа x_0 и x_1 имеют разные знаки, то есть соответствующие точки E и P находятся по разные стороны относительно вершины A . Таким образом, в относительных координатах R, r, φ (см. раздел 7) точка ∂B записывается в виде

$$R_1 = \int_0^{|x_1|} \sqrt{g_{11}(x,0)} dx, \quad r_1 = \int_0^{|x_0|} \sqrt{g_{11}(x,0)} dx, \quad \varphi = \pi \quad (25)$$

где R_1, r_1 — длины частей дуги кривой (19).

Конус. Гиперboloид вращения. Рассмотрим частный случай (17), когда M является (верхней) полостью гиперboloида вращения. Численные построения показывают [10], что кривая $\partial\Gamma$ асимптотически приближается к оси координат (рис. 2). Многообразие B , определенное в (14), имеет край ∂B , лежащий на кривой $\partial\Gamma$, а кривая B имеет асимптоту

$$r = \rho_B R, \quad \rho_B = \rho_B(\nu, \alpha)$$

которая сама играет роль многообразия B в случае конуса (рис. 2). Зависимость коэффициента ρ_B от скоростного коэффициента ν и половины угла плоскостной развертки конуса α может быть найдена в явном виде [13].

Конус реализуется в пределе при $m \rightarrow 0$. Кривая $\partial\Gamma$ тогда стремится к прямому углу, образованному положительными полуосьями. Кривая B стремится к своей асимптоте, и точка ∂B в пределе совпадает с началом координат. Граница $\partial\Gamma$ для конуса является плоскостью с полуосью, перпендикулярной к ней. Многообразие B снова окажется конусом, так что оно диффеоморфно пространству игры M [13].

Двусторонний плоский угол. Такое пространство игры эквивалентно случаю конуса. Есть два преобразования (деформации) конуса в плоскую фигуру: сложить его вдоль двух противоположных образующих в плоский двусторонний угол, или разрезать по одной образующей и развернуть на плоскости. Значение угла α равно половине угла плоской развертки, то есть $0 < \alpha < \pi$. Оба преобразования сохраняют длины геодезических, и между оптимальными траекториями имеется взаимно-однозначное соответствие.

Удобно различать острые конусы, параметры ν, α которых удовлетворяют соотношениям

$$0 \leq \nu \leq 1 - \sin \alpha, \quad 0 \leq \alpha \leq \pi/2 \quad (26)$$

и остальные (тупые) конусы. Острые конусы имеют непустые множества D_3 и D_2^0 такие, что $D_2 = D_2^0 + D_3$. Если игра начинается в точке из D_3 , оптимальный захват происходит в вершине. Для тупых конусов множество D_3 пусто, в то время как D_2 не пусто. Многообразия Γ и B имеют структуру, показанную на рис. 3.

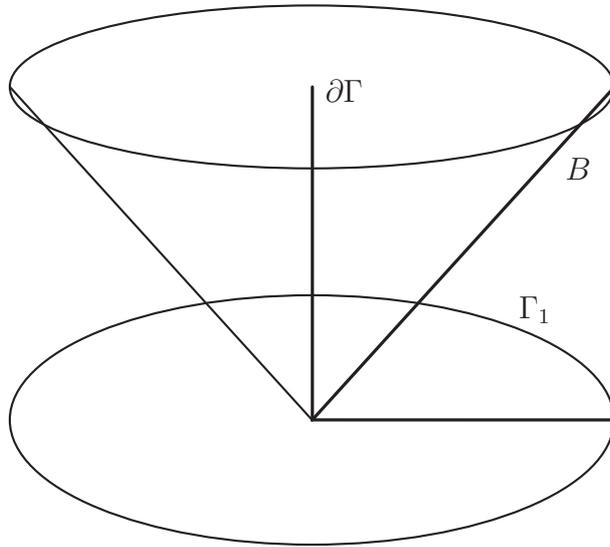


Рис. 3

Двусторонняя плоскость с круговым отверстием. В этом случае игроки могут перемещаться по обеим сторонам евклидовой плоскости и могут менять сторону в точках заданной окружности [14]. Решение задачи похоже на задачу преследования-убегания на (односторонней) плоскости с круговым препятствием [15, 16].

Пусть R и r — расстояния до игроков P и E соответственно от центра O окружности с единичным радиусом. Угол между отрезками OP и OE обозначим через φ . Многообразие Γ определяется равенством $\varphi = \pi$, а его рассеивающее подмножество задается соотношениями

$$\varphi = \pi, \quad \sqrt{1 - R^{-2}} - \nu\sqrt{1 - r^{-2}} \leq 1 - \nu$$

Случай равенства в правом соотношении соответствует множеству B . Кривая B показана на рис. 4; ее асимптота есть линия $r = \sqrt{\nu}$.

Прямой угол с вершиной Q вместе с кривой B дает образующую, вращение которой вокруг оси ординат формирует многообразия Γ и B .

Построения показывают, что множество B не пусто для всех рассматриваемых значений скорости.

Многоугольник. Когда пространство игры представляет собой выпуклый многоугольник, например, треугольник, прямоугольник и т.д., можно показать, что

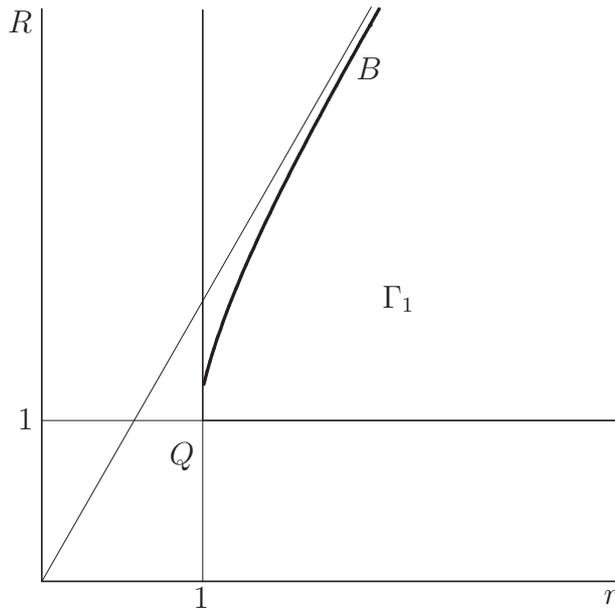


Рис. 4

множество B не пусто, и, таким образом, первичная стратегия не является глобально оптимальной. Действительно, в достаточно малой окрестности вершины оптимальные пути такие же, как и в случае плоского угла (конуса), когда сингулярные эквивокальные пути всегда существуют. Заметим, что в случае острого угла при вершине (см. условие (26)) игрок P может осуществить захват игрока E в этой вершине.

Плоская двусторонняя полоса, цилиндр. Множество B пусто в случае пространства игры, поскольку (в связи с возможными перестановками точек P и E) имеем соотношения (12), (14) для касательных векторов:

$$|a^+ + a^-| = |b^+ + b^-| < 2$$

Для таких векторов равенство (14) не выполняется (невозможно) для всех значений ν .

Эллипс. В случае эллипса множество B либо пусто, либо не зависит от параметров ν, ε . Здесь ε — эксцентриситет эллипса,

$$\varepsilon = c/a, \quad 0 < \varepsilon < 1, \quad c^2 = a^2 - b^2$$

a, b — большая и малая полуоси.

На рис. 5 показана кривая на плоскости ν, ε , которая разделяет множества A_1, A_2 , соответствующие “вытянутому” и “круглому” эллипсам. Для эллипса с параметрами из области A_1 множество B пусто и первичная стратегия глобально оптимальна. То же самое верно для точек самой кривой, для которой множество B не пусто, но неравенство (12) не выполняется.

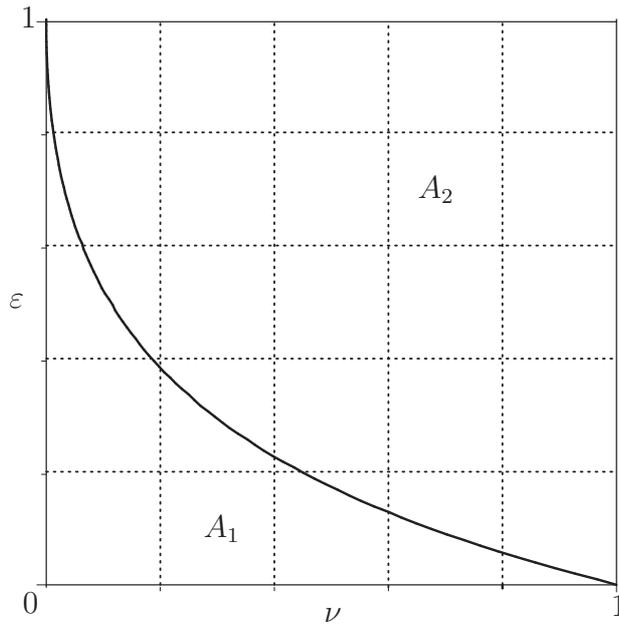


Рис. 5

Точки (ν, ϵ) множества A_1 удовлетворяют условию

$$A_1 : \max_{(P,E)} (|a^+ + a^-| - \nu|b^+ + b^-|) \leq 2(1 - \nu), \quad (P, E) \in \Gamma$$

Граница множества A_1 , определяемая знаком равенства в этом соотношении, была найдена численно.

На рис. 6 показаны эллипсы, соответствующие параметрам разделяющей кривой (максимальное ϵ при заданном параметре скорости ν), для которых первичная стратегия еще эффективна.

Многообразие Γ в случае эллипса не имеет осевой симметрии, как для некоторых игровых пространств, рассмотренных ранее. Такая симметрия есть в случае круга.

Полезно сначала проанализировать множество Γ для сферы, поскольку здесь каждому положению игрока P соответствует ровно одно положение игрока E (на противоположном конце диаметра), при котором теряется единственность геодезической линии наименьшей длины, соединяющей игроков. Это означает, что в соответствующем координатном описании Γ является также сферой (диффеоморфна сфере). Вспоминая, что для 2D-игровых пространств множество Γ является, вообще говоря, трехмерным многообразием, в случае сферы мы видим своего рода вырождение, которое, однако, может исчезнуть при деформации сферы. На рис. 7 множество Γ представлено для эллипсоида вращения с эксцентриситетом образующего эллипса.

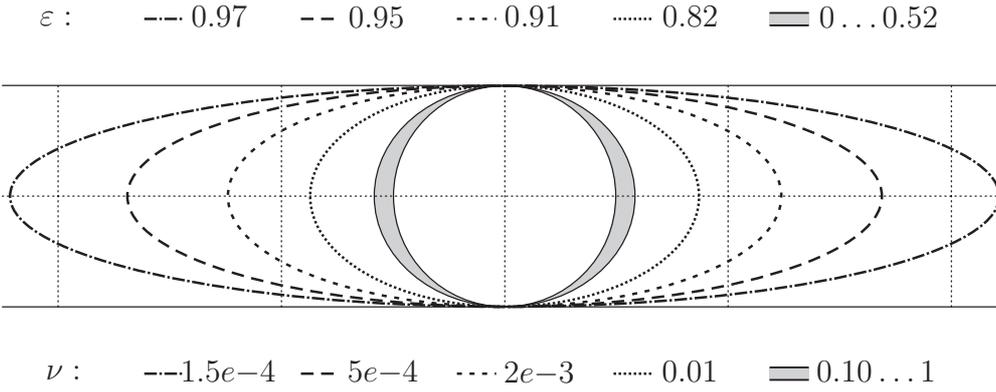


Рис. 6

Можно доказать, что две геодезические равной длины существуют на двустороннем эллипсе только тогда, когда игроки находятся на разных сторонах и в одном и том же конфокальном (меньшем) эллипсе. В случае диска радиуса 1 получаем, что P и E находятся на одной и той же окружности некоторого меньшего радиуса r , $0 \leq r \leq 1$.

Дадим описание множества Γ для диска. Пусть $\varphi \in [0, \pi]$ — угол между радиусами OP и OE (точка O является центром). В (r, φ) -плоскости точки Γ лежат в верхней части прямоугольника на рис. 8. Нижняя граница Γ представлена кривой $r = \cos(\varphi/2)$. Полное многообразие Γ можно получить отражением изображения относительно оси абсцисс и вращением вокруг оси ординат (рис. 9).

Множество Γ для эллипса имеет более сложную структуру и представлено на рис. 9 в эллиптических координатах.

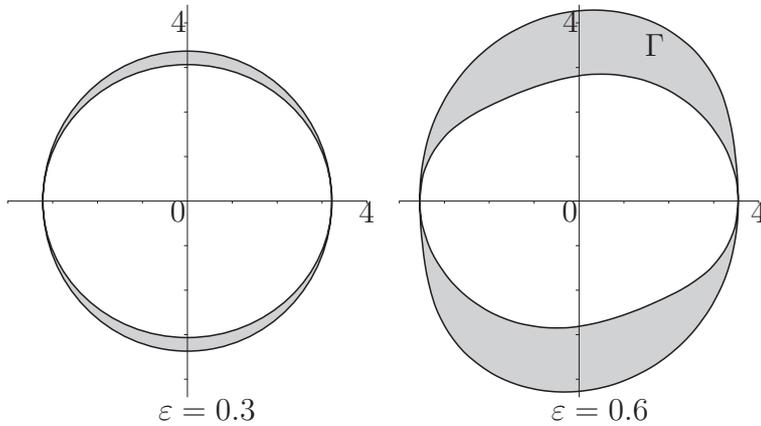


Рис. 7

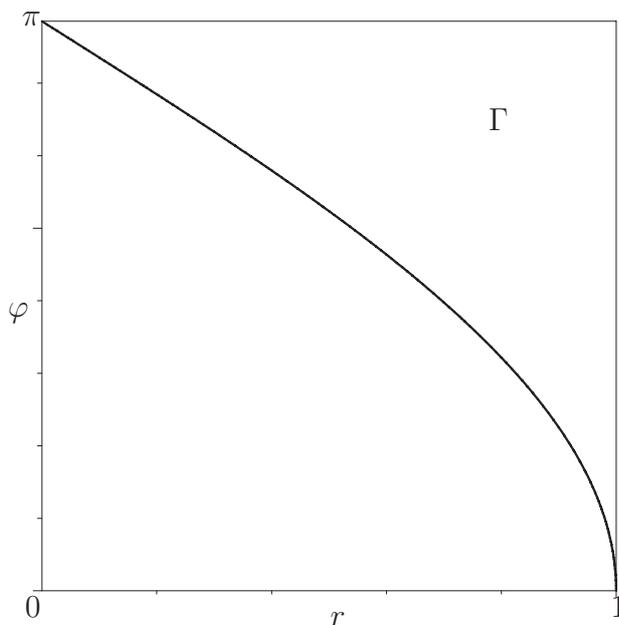


Рис. 8

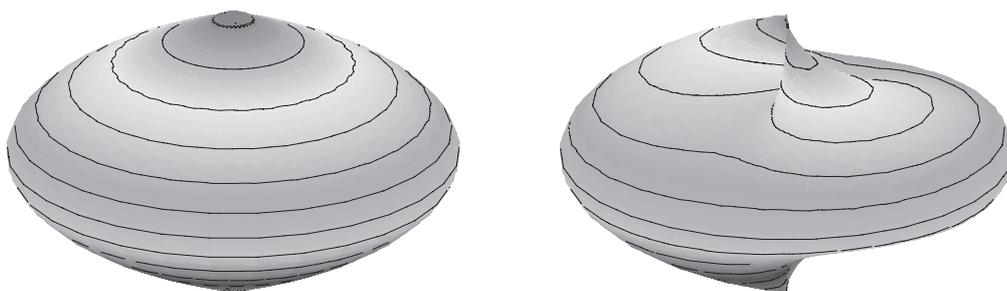


Рис. 9. Многообразие Γ для круга (слева) и эллипса $\varepsilon = 0.8$ (справа)

6. Вторичная область. Экивокальные поверхности

В известных примерах игр преследования-убегания с простыми движениями в дополнение к первичным движениям можно встретить следующие типы оптимальных траекторий [7, 13, 15, 18]. Граница Γ_2 между множествами D_1 и D_2 состоит из сингулярных экивокальных траекторий, когда каждый игрок перемещается вдоль огибающей семейства геодезических линий. Область D_2 может складываться из двух частей, $D_2 = D_2^0 + D_3$, так что в области D_2^0 каждый игрок движется по своей геодезической линии, отличной от той, которая их соединяет. В области D_3 пресле-

дователь должен двигаться только по геодезической, а убегающий имеет неоднозначный оптимальный выбор. Таким образом, цена игры в D_3 является решением задачи оптимального управления только для игрока P .

В играх на евклидовой плоскости с препятствием имеются также части траекторий, лежащие на препятствии (при выходе на ограничение) [14–16].

В зависимости от геометрии пространства игры множества D_3 или D_2 могут быть пустыми. В последнем случае множество D_1 представляет собой все фазовое пространство.

Экивокальные поверхности. В случае, когда многообразие B не пусто и существуют позиции, в которых нарушается условие (14), то есть

$$L^+ = L^-, \quad |a^+ + a^-|_x - \nu|b^+ + b^-|_y > 2(1 - \nu)$$

возникают две ветви Γ_2^+ и Γ_2^- сингулярной экивокальной поверхности (оггибающие с переключением). Эти поверхности могут быть построены в рамках соответствующей задачи Коши для системы сингулярных характеристик [7], в которой в качестве независимой переменной используется обратное время:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= -F_r, \quad \dot{r} = F_z + \frac{\{\{FF_1\}F\}}{\{\{F_1F\}F_1\}} \left(r - \frac{\partial V_1}{\partial z}(z) \right) \\ z(0) &= z_0, \quad r(0) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_1^+}{\partial z}(z_0) + \frac{\partial V_1^-}{\partial z}(z_0) \right), \quad z_0 \in B \end{aligned} \quad (27)$$

Здесь $F = F(z, r)$ — левая часть уравнения ГЯБА (гамильтониан) для игры сближения-уклонения (1):

$$\begin{aligned} F(z, r) &= -\sqrt{\langle G^{-1}(x)p, p \rangle} + \nu\sqrt{\langle G^{-1}(y)q, q \rangle} + 1 = 0 \\ p &= \frac{\partial V}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad z = (x, y) \in \mathbb{R}^d, \quad r = (p, q) \in \mathbb{R}^d \end{aligned} \quad (28)$$

Функция $F_1 = F_1(z, V)$ имеет вид

$$F_1(z, V) = V - V_1(z)$$

Здесь и в (27) надо использовать функцию V_1^+ (V_1^-) для ветви Γ_2^+ (Γ_2^-). Функции V_1^\pm задаются формулой (2) с L^\pm вместо L . Скобка Якоби (Пуассона) для двух функций $F(z, V, r)$ и $G(z, V, r)$ определяется соотношением

$$\{FG\} = \langle F_z + rF_V, G_r \rangle - \langle G_z + rG_V, F_r \rangle$$

Вторичное решение. Вторичное решение $V = V_2(z)$, $z \in D_2$, определяется как решение уравнения ГЯБА (28) с граничным условием

$$V_2(z) = V_1(z), \quad z \in \Gamma_2^+ + B + \Gamma_2^-$$

заданным на экивокальной поверхности. Соответствующая задача Коши является нерегулярной [7], поскольку характеристики покидают граничную поверхность Γ_2

по касательной. Регулярные характеристики, стартующие с многообразия B , касаются обеих поверхностей Γ^+ , Γ^- и образуют *медиальную поверхность*. Начальные условия для этих характеристик такие же, как в (27).

Можно показать, что оптимальные траектории в D_2 для обоих игроков являются геодезическими линиями, отличными от линии, соединяющей точки P и E . Более подробный алгоритм построения описан в [7, 11].

7. Подобласть произвольного управления убегающего

В работах [9, 7] показано, что в игре на конической поверхности в дополнение к областям D_1 и D_2^0 существует область D_3 , где цена игры не зависит от координат убегающего. Возможность существования такой области можно заметить из анализа уравнения ГЯБА.

В дифференциальных играх преследования-уклонения с простыми движениями уравнение ГЯБА часто имеет вид, аналогичный (28):

$$-H(x, p) + \nu H(y, q) + 1 = 0 \quad (29)$$

Здесь x, y — векторы координат преследователя P и убегающего E , векторы p, q суть градиенты цены игры $V(x, y)$ относительно x и y , определенные в (28).

Функция H в (29) имеет смысл нормы (см. (28)), следовательно, является неотрицательной и обращается в нуль, как только p и q равны нулю:

$$H(x, p) \geq 0, \quad H(y, q) \geq 0, \quad H(x, 0) = 0, \quad H(y, 0) = 0$$

Благодаря этим свойствам в некоторой области D пространства x, y могут быть справедливы равенства

$$\frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad -H(x, p) + 1 = 0, \quad (x, y) \in D \quad (30)$$

в то время как соотношения

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad \nu H(x, q) + 1 = 0, \quad (x, y) \in D$$

невозможны. Уравнения (30) означают, что цена игры в области D зависит только от x и не зависит от y . Следовательно, преследователь имеет определенное оптимальное поведение, в то время как убегающий может использовать произвольное управление, пока не достигнет границы D . Иными словами, в D имеем задачу оптимального управления, а не динамическую игру.

Как будет видно из дальнейшего, соотношения (30) могут иметь другое аналитическое представление, но их сущностью остается независимость цены игры от позиции убегающего.

Исследуем решение в области D_3 для игры на поверхности вращения. Введем относительные координаты R, r, φ , где R (соответственно r) — длина кратчайшей геодезической линии, соединяющей вершину $A(0, 0, f(0))$ поверхности M с точкой P (точкой E); φ — угол между касательными к этим двум геодезическими в точке A в горизонтальной плоскости $x_3 = f(0)$.

Уравнения динамики в относительных координатах имеют вид

$$\begin{aligned}\dot{R} &= u_1, & \dot{r} &= v_1, & \dot{\varphi} &= \frac{v_2}{h(r)} - \frac{u_2}{h(R)} \\ u_1^2 + u_2^2 &\leq 1, & v_1^2 + v_2^2 &\leq \nu^2 \\ x &= h(R), & R &= \int_0^x \sqrt{1 + f'^2(\tau)} d\tau\end{aligned}$$

где функция h определена как обратная.

Запишем уравнение ГЯБА в относительных координатах:

$$\begin{aligned}F(R, r, \varphi, V_R, V_r, V_\varphi) &= \\ &= \min_u \max_v \left[V_R u_1 + V_r v_1 + V_\varphi (v_2/h(r) - u_2/h(R)) \right] + 1 = \\ &= -\sqrt{V_R^2 + V_\varphi^2/h^2(R)} + \nu \sqrt{V_r^2 + V_\varphi^2/h^2(r)} + 1 = 0\end{aligned}$$

В области D_3 относительных координат независимость цены игры от позиции убегающего означает, что

$$V_\varphi = 0, \quad V_r = 0$$

Эти соотношения в предположении $V_R > 0$ сводят уравнение ГЯБА к дифференциальному уравнению более простого вида

$$-V_R + 1 = 0$$

с общим решением

$$V = R + C \tag{31}$$

при некоторой постоянной C .

Чтобы вычислить константу C , нужно найти точки, где области D_1 , D_2 и D_3 граничат друг с другом. Для этого требуется следующий геометрический анализ.

В пространстве относительных координат R, r, φ такую точку можно найти на медиальной поверхности, введенной в разделе 6. В рассматриваемой игре медиальной поверхностью является плоскость симметрии $\varphi = \pi$. Оптимальные пути, лежащие в этой плоскости, подчиняются системе регулярных характеристик

$$\begin{aligned}\dot{R} &= F_{V_R}, & \dot{r} &= F_{V_r}, & \dot{\varphi} &= F_{V_\varphi} \\ \dot{V}_R &= -F_R, & \dot{V}_r &= -F_r, & \dot{V}_\varphi &= -F_\varphi = 0\end{aligned}$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned}(R, r, \varphi) &\in B, & V_R &= (V_{1R}^+ + V_{1R}^-)/2 \\ V_r &= (V_{1r}^+ + V_{1r}^-)/2, & V_\varphi &= (V_{1\varphi}^+ + V_{1\varphi}^-)/2\end{aligned}$$

В общем случае оптимальный вектор фазовой скорости разрывен в начальной точке на многообразии B . Разрыв может произойти из-за изменения знака значения V_r в начальных условиях. Можно показать, что на поверхности Γ выполнено равенство $V_{1r}^+ = V_{1r}^-$, так что $V_r = V_{1r}^+$ и величина V_r меняет знак вместе с V_{1r}^+ . Картина

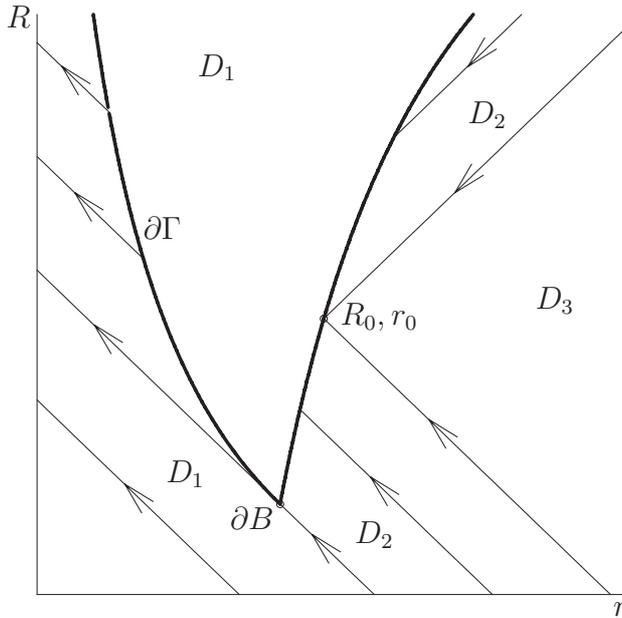


Рис. 10

оптимальных траекторий на медиальной плоскости $\varphi = \pi$ показана на рис. 10. В точке $Q = (R_0, r_0)$ имеет место критическое соотношение $V_{1r}^+ = 0$.

Оптимальные траектории, достигающие множества B между точками Q и ∂B , удовлетворяют системе

$$\dot{R} = -1, \quad \dot{r} = \nu, \quad \dot{\varphi} = 0 \quad (V_r \geq 0)$$

а другие траектории подчиняются системе

$$\dot{R} = -1, \quad \dot{r} = -\nu, \quad \dot{\varphi} = 0 \quad (V_r \leq 0)$$

так что \dot{r} имеет скачок (разрыв) в точке Q . Отметим, что последняя система уравнений описывает интересное явление: два игрока двигаются навстречу друг другу по геодезической линии, в то время как “естественное” поведение убегающего — двигаться в противоположном направлении.

Точка Q является местом, где области D_1 , D_2 и D_3 граничат друг с другом. Зная координаты R_0, r_0 точки Q , можно вычислить расстояние $L = R_0 + r_0$ между игроками. Тогда, приравнявая выражения (2) и (31) для цены игры в областях D_3 и D_1 , в точке Q получаем соотношения

$$V = R_0 + C = \frac{R_0 + r_0}{1 - \nu} = V_1, \quad C = \frac{\nu R_0 + r_0}{1 - \nu}$$

которые дают следующее выражение для цены игры $V(R)$:

$$V_3 = V(R) = R + \frac{\nu R_0 + r_0}{1 - \nu} \tag{32}$$

Если точка Q уходит в бесконечность, множество D_3 отсутствует. Точка Q может совпадать с ∂B . В этом случае координаты R_0, r_0 в приведенной выше формуле должны быть заменены координатами R_1, r_1 точки ∂B . Алгоритм нахождения величин R_1, r_1 приведен выше, см. (25).

Для точки Q имеем $b^+ = -b^-$ и, следовательно, $y'(x_0) = \infty$ (в обозначениях раздела 5, см. (20)). Таким образом, для точки P получаем $|a^+ + a^-| = 2(1 - \nu)$. Чтобы вычислить R_0, r_0 , надо рассмотреть двухточечную задачу для уравнения Эйлера со следующими условиями:

$$y'(x_0) = \infty, \quad y'^2(x_1) + f'^2(x_1) = \nu(2 - \nu)/(1 - \nu)^2$$

Таким образом, в общем случае пространство игры состоит из трех областей: $D_1, D_2, D = D_3$. Границей между областями D_1 и D_2 является поверхность Γ_2 , построенная с использованием (27). Граница между областями D_1 и D_3 может быть найдена путем приравнивания выражений (2) и (32). Граница между D_2 и D_3 требует более трудоемких вычислений. В случае конуса ($B = 0$) эти поверхности описаны в [13, 7].

8. Выводы

Характер оптимальных траекторий. Локальный анализ в общем случае и решение ряда конкретных игр преследования-убегания с простыми движениями на многообразиях показывают, что оптимальными траекториями для обоих игроков являются геодезические линии, причем это либо линии, соединяющие игроков, либо различные геодезические для каждого игрока. Сингулярные пути представлены эквивокальными траекториями, которые являются огибающими семейства геодезических. Также возможны части траекторий, лежащие на краю многообразия (пространства игры), как в игре на плоскости с препятствием. В некотором фазовом подпространстве можно встретить неединственное произвольное оптимальное движение убегающего, когда возникает задача оптимального управления для преследователя.

Сингулярные поверхности. Список сингулярных поверхностей, возникающих в играх с простыми движениями на многообразиях, включает в себя рассеивающие, эквивокальные поверхности, границы области оптимального управления и края пространства игры. Эквивокальная сингулярная поверхность (огибающая с переключением) состоит из оптимальных путей, которые также могут лежать на краю многообразия. Граница области оптимального управления, вообще говоря, не содержит оптимальные пути, хотя можно встретить такие пути в игре на остром конусе, где вырождение происходит за счет автомоделного решения для конуса.

Первичная стратегия. Наиболее простую структуру имеет первичная стратегия. Чтобы получить ее глобально, нужно проверить наличие многообразия B . Во всех рассмотренных играх, за исключением цилиндра (плоская двусторонняя полоса) и эллипса, такое многообразие не пусто, при этом эллипс не должен быть слишком "вытянутым" (для непустоты). Игра на многоугольнике показывает, что для глобальной оптимальной первичной стратегии граница плоской фигуры должна обладать соответствующей степенью гладкости.

Открытые вопросы. Полное решение игры на неограниченной поверхности (вращения), такой как гиперboloид или параболоид, может выявить невырожденную границу области оптимального управления и ее связь с первичной и вторичной областями.

Игра на ограниченной поверхности, подобной трехосному эллипсоиду, может продемонстрировать другую рассеивающую поверхность, разделяющую движения, идущие к различным вершинам поверхности.

Относительно несложное решение для игры с простыми движениями может быть использовано в качестве приближения для более сложных игр или в качестве абстракции в смысле [19].

Литература

- [1] *Isaacs R.* Differential Games. New York: John Wiley, 1965. = *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 480 с.
- [2] *Krasovskii N.N., Subbotin A.I.* Game-Theoretical Control Problems. New York: Springer-Verlag, 1988.
- [3] *Субботин А.И.* Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка: перспективы динамической оптимизации. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 336 с.
- [4] *Petrosjan L.A., Zenkevich N.A.* Game Theory. Singapore, London: World Scientific Publ., 1996.
- [5] *Bernhard P.* Singular surfaces in differential games: an introduction. Lect. Notes in Control and Information Sci. Vol. 3. Differential Games and Applications. Berlin: Springer-Verlag, 1977, pp. 1–33.
- [6] *Patsko V.S., Turova V.L.* Level sets of the value function in differential games with the homicidal chauffeur dynamics. Intern. Game Theory Review, 2001. Vol. 3, no. 1, pp. 67–112.
- [7] *Melikyan A.A.* Generalized Characteristics of First Order PDEs: Applications in Optimal Control and Differential Games. Boston: Birkhäuser, 1998.
- [8] *Melikyan A.A., Ovakimyan N.V., Harutiunian L.L.* Games of simple pursuit and approach on a two-dimensional cone. J. Optim. Theory Appl., 1998. Vol. 98, no. 3, pp. 515–543.
- [9] *Hovakimyan N.V., Melikyan A.A.* Geometry of pursuit-evasion on second order rotation surfaces. Dynamics and Control, 2000. Vol. 10, pp. 297–312.
- [10] *Hovakimyan N.V., Harutiunian L.L.* Game problems on rotation surfaces. In: Game Theory and Applications, Petrosjan L.A., Mazalov V.V. (editors), 1998. Vol. IV, pp. 62–74.
- [11] *Melikyan A.A.* Games of simple pursuit and approach on the manifolds. Dynamics and Control, 1994. Vol. 4, no. 4, pp. 395–405.
- [12] *Демьянов В.Ф.* Минимакс: дифференцируемость по направлениям. Л.: Ленингр. гос. ун-т, 1974. 112 с.
- [13] *Меликян А.А., Овакимян Н.В.* Игровая задача простого преследования на двумерном конусе // Прикл. математика и механика, 1991. Т. 55, вып. 5, с. 741–751.

-
- [14] *Melikyan A.A.* Games of pursuit on two-sided plane with a hole. 8th Intern. Symp. on Dynamic Games and Applications. Maastricht, 1998, pp. 394–396.
- [15] *Вишневецкий Л.С., Меликян А.А.* Оптимальное преследование на плоскости при наличии препятствия // Прикл. математика и механика, 1982. Т. 46, вып. 4, с. 613–620.
- [16] *Пожарицкий Г.К.* Задача Айзекса об огибании острова // Прикл. математика и механика, 1982. Т. 46, вып. 5, с. 707–713.
- [17] *Гельфанд И.М., Фомин С.В.* Вариационное исчисление. М.: Государственное изд-во физ.-мат. лит., 1961. 228 с.
- [18] *Melikyan A.A.* Some properties of the Bellman – Isaacs equation for the games on the surfaces of revolution. International Game Theory Review, 2001. Vol. 6, no. 1, pp. 171–179.
- [19] *Pappas G.J., Simic S.* Consistent Abstractions of Affine Control Systems. IEEE Trans. on Automatic Control, 2002. Vol. 47, no. 5, pp. 745–756.

Простейшие особенности и обобщенные характеристики для уравнения Гамильтона – Якоби с гамильтонианом в виде максимума вогнутых функций*

М.В. Дей, А.А. Меликян

Рассматриваются кусочно-гладкие вязкостные решения уравнения Гамильтона – Якоби, гамильтониан в котором можно представить в виде максимума конечного числа гладких вогнутых функций. Исследованы возможные типы основных особенностей, связанных с точками разрыва производных решения или гамильтониана на некоторой гладкой гиперповерхности. Каждый такой тип описан с помощью соответствующих свойств гамильтониана и классических характеристик в окрестности рассматриваемой сингулярности. При построениях используются уравнения сингулярных характеристик, предложенные А.А. Меликяном.

1. Введение

Рассмотрим вязкостные решения уравнения $F(x, \nabla u(x)) = 0$ с гамильтонианом

$$F(x, p) = - \min_i H_i(x, p) \quad (1)$$

Функции $H_i(x, p)$, $i = 1, \dots, k$, полагаются дважды непрерывно-дифференцируемыми ($H_i \in C^2$) и выпуклыми по p для каждого фиксированного x . Применяя в (1) эквивалентную запись $F = \max_i(-H_i)$ и учитывая, что функция $-H_i(x, p)$ вогнута по p для любых i, x , получаем объяснение используемого в названии статьи словосочетания “максимум вогнутых функций”.

Цель работы в том, чтобы классифицировать основные простейшие сингулярности коразмерности единица для непрерывных кусочно-гладких вязкостных решений уравнения $F(x, \nabla u(x)) = 0$. Аналогичные исследования могут быть проделаны и при изучении граничных условий в вязкостном смысле, но это выходит за рамки данной работы.

*M.V. Day, A.A. Melikyan “Simple singularities for Hamilton–Jacobi equations with maxconcave Hamiltonians and generalized characteristics”, J. Optim. Theory Appl., 2008. Vol. 138, no. 2, pp. 155–174.

Перевод с английского А.Е. Утемова.

Уравнения Гамильтона – Якоби с функцией F вида (1) возникают в дифференциальных играх, в которых минимизирующий игрок может выбирать свое управление $a(t)$ из конечного числа значений $a(t) \in \{1, \dots, k\}$, а максимизирующий игрок выбирает свое управление $w(t)$ из некоторого континуума значений.

Пусть, например, два игрока, используя свои управления, задают в пространстве состояний \mathbb{R}^n траекторию, описываемую дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = f(x, a(t), w(t)), \quad x(0) = x_0 \quad (2)$$

Предположим, что платой в игре является функция

$$J(x_0, a(\cdot), w(\cdot)) = \int_0^\tau L(x(s), a(s), w(s)) ds + g(x(\tau))$$

Здесь τ — момент первого контакта траектории с терминальным множеством E , а $g: E \rightarrow \mathbb{R}^n$ — некоторая заданная функция.

Решение (верхнее) V указанной игры обычно удовлетворяет равенству $F(x, \nabla V(x)) = 0$ в вязкостном смысле, где функция F задана соотношением (1), а функции H_i определяются [1] формулой

$$H_i(x, p) = \sup_w \{ \langle p, f(x, i, w) \rangle + L(x, i, w) \} \quad (3)$$

Функции H_i могут быть выпуклыми по p и гладкими в зависимости от допущений, налагаемых на f и L (см. раздел 4).

Подобные задачи рассматриваются в теории массового обслуживания (см., например, [2–6]). В качестве минимизирующего игрока с управлением $a(t)$ фигурирует служба приоритетов, а второй игрок моделирует возможные варианты нагрузки на систему. В некоторых примерах функция цены игры конструируется явно с помощью уравнений характеристик для H_i . При таких построениях важно иметь информацию о всех возможных типах сингулярностей, которые могут возникнуть в рассматриваемой задаче.

В разделе 2 разъясняется, что имеется в виду под термином простейшая особенность (сингулярность) коразмерности 1, а также приводятся некоторые соображения относительно построения многообразия Γ , содержащего сингулярности. Полезным инструментом для построения многообразия Γ является *метод сингулярных характеристик*. В статье содержится краткое изложение данного метода. Полное описание приведено в монографии [7].

В разделе 3 дается описание основных типов простейших сингулярностей. При этом используются общепринятые термины: “рассеивающая”, “экивокальная”, “фокальная” и “универсальная” поверхности, но делается различие между восходящими и нисходящими сингулярными поверхностями, поскольку им соответствуют вязкостные решения разных видов. Рассматриваются неособые поверхности переключения.

Для каждого типа предлагается соответствующий способ построения сингулярного многообразия Γ . В некоторых случаях это подразумевает дополнительную идентификацию сингулярных характеристик, которые распространяются по сингулярной поверхности. Однако авторы не ставят целью статьи усовершенствование

теории сингулярных характеристик. Работа посвящена получению системы уравнений сингулярных характеристик для каждого из нескольких стандартных типов сингулярностей, но не касается сложностей, связанных с возможным вырождением этой системы, что имеет место в некоторых задачах. В заключение в разделе 4 исследуется расширенный вариант примера из [5], который демонстрирует ряд сингулярностей, рассмотренных в разделе 3.

2. Простейшие особенности и сингулярные характеристики

Понятие вязкостного решения позволяет рассматривать негладкие и даже разрывные функции $u(x)$ в качестве решений исходной задачи. Полное изучение всех возможных типов сингулярностей выходит за рамки данной работы. Вводится несколько упрощающих предположений о расположении и структуре сингулярностей, которые приводят к изучению только так называемых “простейших” сингулярностей [7].

2.1. Предположения о сингулярностях коразмерности 1

Для определенности рассмотрим в \mathbb{R}^n множество $O = A + \Gamma + B$, состоящее из объединения непересекающихся подмножеств. Здесь Γ — гладкое ($\Gamma \in C^2$) многообразие размерности $n - 1$, разделяющее множество O на два открытых непересекающихся подмножества A и B (рис. 1). Символом $n(x)$, $x \in \Gamma$, обозначим единичный вектор нормали к Γ в точке x , ориентированный от подмножества A к подмножеству B . Из предположения о гладкости Γ следует, что $n(x) \in C^1$.

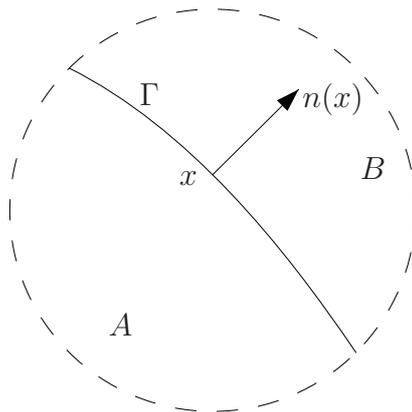


Рис. 1. Множество O и сингулярная поверхность Γ .

Пусть функция $u(x)$, $x \in O$, является непрерывной. Обозначим через $u_A(x)$ и $u_B(x)$ ее сужения на множества A и B соответственно. Условимся, что эти функции достаточно гладкие: $u_A(x) \in C^2$ и $u_B(x) \in C^2$. Таким образом, их градиенты непрерывно дифференцируемы, то есть $p_A(x) = \nabla u_A(x) \in C^1$, $p_B(x) = \nabla u_B(x) \in C^1$.

Пусть p_A и p_B имеют непрерывные продолжения на Γ . В некоторых случаях допустимо предположить, что указанные продолжения являются гладкими на Γ . В данной работе такое предположение используется с целью вывода уравнений сингулярных характеристик. Соответствующие построения приведены в разделе 2.3.

Будем считать, что все функции H_i обладают определенным свойством равномерной монотонности на Γ , что позволяет четко определить, в каких случаях гладкое продолжение градиентов $p_A(x)$ и $p_B(x)$ возможно, а в каких нет. Это предположение поясняется в разделе 2.2. Условимся также, что функция $u(x)$ является вязкостным решением уравнения

$$-\min_{i=1}^k H_i(x, \nabla u(x)) = 0 \quad (4)$$

Здесь функции $H_i : O \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ полагаются гладкими ($H_i \in C^2, i = 1, \dots, k$) и выпуклыми по p при любом $x \in O$. Часто бывает, что сингулярные поверхности Γ состоят из точек x , для которых в (4) изменяется значение индекса минимизации i . В данной работе считаем, что только точки из Γ могут обладать этим свойством. Таким образом, предполагается существование значения индекса $i = a$ (не обязательно единственного), при котором в (4) достигается минимум для всех $x \in A$ и, соответственно, существование значения $i = b$, при котором достигается минимум для всех $x \in B$. Тогда для $1 \leq i \leq k$ получаем

$$\begin{aligned} H_a(x, p_A(x)) &\leq H_i(x, p_A(x)) && \text{при любом } x \in A \\ H_b(x, p_B(x)) &\leq H_i(x, p_B(x)) && \text{при любом } x \in B \end{aligned}$$

Возможны случаи, когда $a = b$, даже если $p_A(x) \neq p_B(x)$ на Γ (см. описание нисходящей рассеивающей поверхности в разделе 3.2), или $a \neq b$, но $p_A(x) = p_B(x)$ на Γ (сингулярности переключения в разделе 3.2).

2.2. Классические характеристики

Поскольку функция $u(x)$ является гладкой с каждой стороны (A или B) многообразия Γ , то на них она может быть описана с помощью классических характеристик. Геометрические свойства характеристик вблизи Γ (а именно, подходят они к Γ или отходят от нее, пересекают ли они Γ трансверсально или с касанием) будут существенными при рассмотрении разных типов сингулярностей.

В дифференциальных играх классические характеристики являются, как правило, траекториями, описываемыми уравнением (2). Знак минус в уравнении (4) важен для рассмотрения уравнения Гамильтона – Якоби – Айзекса в вязкостном смысле. Таким образом, следует внимательно учитывать этот знак при соотношении направлений течения времени для уравнения (2) и для классических характеристик.

Классические уравнения характеристик относительно неизвестных $x(t)$ и $p(t) = \nabla u(x(t))$ для уравнения $F(x, \nabla u(x)) = 0$ имеют вид

$$\dot{x} = \frac{\partial}{\partial p} F(x, p), \quad \dot{p} = -\frac{\partial}{\partial x} F(x, p) \quad (5)$$

В той области (A или B), где для некоторого фиксированного индекса i выполняется равенство $F(x, \nabla u) = -H_i(x, \nabla u)$, первое уравнение в (5) принимает вид

$$\dot{x} = \frac{\partial}{\partial p} F(x, \nabla u(x)) = -\frac{\partial}{\partial p} H_i(x, \nabla u(x)) = -f(x, i, w^*)$$

Здесь полагается, что при управлении $w = w^*$ второго игрока достигается максимум в (3). Рассматриваемое уравнение задает траектории движения уравнения (2) в обратном времени. Однако в литературе, посвященной сингулярным поверхностям в дифференциальных играх, различные типы сингулярностей исследуются с помощью траекторий, направление движения вдоль которых соответствует прямому времени ([7, глава 3; 8]). С целью сохранения общепринятого подхода, в данной работе на рисунках направление движения вдоль траекторий, обозначенное стрелками (см., например, графики, изображенные на рис. 2 справа), будет соответствовать прямому течению времени в уравнении динамики (2). Такое направление является обратным по отношению к направлению движения вдоль характеристик.

При замене зависимой переменной $u(x)$ на переменную $v(x) = -u(x)$ знак минус в (4) исчезает. Эквивалентное в вязкостном смысле уравнение для $v(x)$ имеет вид $\tilde{F}(x, \nabla v(x)) = 0$, где

$$\tilde{F}(x, p) = -F(x, -p) = \min_i H_i(x, -p)$$

Значения функции \tilde{F} равны минимуму от конечного числа выпуклых функций. Таким образом, гамильтонианы F и \tilde{F} эквивалентны с учетом указанной замены зависимой переменной. В случае гамильтониана \tilde{F} имеем характеристики, отвечающие прямому течению времени в уравнении движения. Наличие этого свойства дает незначительное преимущество постановке задачи с гамильтонианом \tilde{F} . Тем не менее, мы продолжим использовать постановку с гамильтонианом F .

Рассмотрим задачу о построении решения $u(x)$ при помощи классических характеристик. Предположим, что для игровой задачи, сформулированной во введении, в некоторой точке $x = x(t^*)$ на терминальном множестве E , которое обычно является частью границы области определения функции $u(\cdot)$, задано условие $u(x) = g(x)$. Для того чтобы определить значение функции $u(x)$ в точке $x = x(t_*)$ при $t_* < t^*$, проинтегрируем в обратном времени уравнение $F(x, \nabla u) = 0$ вдоль оптимальной траектории $x(t)$. Это соответствует движению по характеристике в прямом времени системы (5). Другими словами, такое движение вдоль характеристик указывает направление “потока информации”, необходимой для построения решения.

Поскольку стрелки на рисунках обозначают направление движения в обратном времени системы (5) (вдоль *обращенных* характеристик), то направление построения решения будет противоположным по отношению к направлению, указанному стрелками. Если при этом траектория достигает сингулярной поверхности Γ , то метод классических характеристик становится неприменимым и дальнейшие построения зависят от типа возникшей сингулярности. В некоторых случаях (эквивальная и универсальная поверхности) требуется получить уравнения, описывающие данную сингулярность, для того чтобы построить поверхность Γ и определить скачок градиента ∇u при переходе через эту поверхность. Только затем можно продолжить вычисления с помощью классических характеристик. Метод сингулярных

характеристик дает соответствующие уравнения. В других случаях (рассеивающая и неособая экивокальная поверхности) следует проанализировать свойства классических характеристик вблизи поверхности Γ и уже затем ее построить.

2.2.1. Свойство n -монотонности функций H_i

Одно простое, но очень важное наблюдение позволяет связать поведение обращенных характеристик вблизи многообразия Γ со свойствами соответствующего гамильтониана H_i . Пусть пара функций $x(t)$, $p(t) = \nabla u(x(t))$ описывает (обращенную) характеристику в области A вблизи многообразия Γ , где по предположению имеем $F(x, \nabla u(x)) = -H_a(x, \nabla u(x))$:

$$\dot{x} = \frac{\partial}{\partial p} H_a(x, p), \quad \dot{p} = -\frac{\partial}{\partial x} H_a(x, p)$$

Допустим, что эта характеристика выходит на поверхность Γ при $t = t_0$. Тогда

$$\langle n(x_0), \dot{x}(t_0) \rangle = \left\langle n(x_0), \frac{\partial}{\partial p} H_a(x_0, p_0) \right\rangle = \frac{d}{d\rho} H_a(x_0, p_0 + \rho n(x_0)) \Big|_{\rho=0} \quad (6)$$

Здесь $x_0 = x(t_0) \in \Gamma$, $p_0 = p(t_0)$. Если выражение в (6) положительно, то, поскольку единичный вектор нормали $n(x)$ направлен в область B , получаем, что $x(t) \in A$ при $t < t_0$ и $x(t) \rightarrow x_0 \in \Gamma$ при $t \rightarrow t_0$. Другими словами, траектория $x(t)$ приближается к многообразию Γ со стороны области A . Если соотношение (6) отрицательно, можно сказать, что траектория $x(t)$ отходит от многообразия Γ со стороны области A , то есть $x(t_0) \in \Gamma$ и $x(t) \in A$ при $t > t_0$. Таким образом, направление характеристик вблизи Γ со стороны области A определяется монотонностью функции $H_a(x_0, p_0 + \rho n(x_0))$ по переменной ρ в окрестности $\rho = 0$. Заметим, что если выражение в (6) равно нулю (и $\dot{x} \neq 0$), то траектория $x(t)$ касается многообразия Γ . Здесь мы уже не можем сделать однозначный вывод о том, подходят характеристики к поверхности Γ или отходят от нее. Поэтому анализ этого случая будет сопровождаться дополнительным предположением о подходе или отходе.

Такие же рассуждения относительно характеристик применимы и для области B . Но при этом знак выражения (6) изменяется на противоположный, поскольку вектор $n(x)$ направлен не в область A , а от нее.

Скажем, что функция $H_i(x_0, \cdot)$ является n -возрастающей (строго) при $p = p_0$, если соотношение (6) неотрицательно (положительно). Аналогично, функция $H_i(x_0, \cdot)$ называется n -убывающей (строго) при $p = p_0$, если соотношение (6) неположительно (отрицательно). Отметим, что согласно нашему предположению функция $\rho \rightarrow H_i(x_0, p_0 + \rho n(x_0))$ гладкая и выпуклая. В случае, когда выражение (6) равно нулю, будем считать функцию $H_i(x_0, \cdot)$ одновременно n -возрастающей и n -убывающей. Условимся говорить, что она является n -касательной при $p = p_0$. В разделе 3 покажем, что наличие у функции $u(x)$, $x \in \Gamma$, свойств вязкостного решения связано со знаком выражения $\min_i H_i(x_0, p_A(x_0) + \rho n(x_0))$ на соответствующем интервале изменения параметра ρ . Тем самым установится взаимосвязь между вязкостным решением и свойствами n -монотонности функций H_i .

2.2.2. Условие равномерной n -монотонности

Вполне возможно, что соотношение (6) меняет знак при варьировании точки x_0 вблизи сингулярной поверхности. Однако наша задача состоит не в изучении возможных переходов между различными типами сингулярностей, а лишь в выделении основных типов, которые не изменяются на Γ в некоторой ограниченной окрестности O . Поэтому предположим, что знаки соотношений

$$\left\langle n(x), \frac{\partial}{\partial p} H_a(x, p_A(x)) \right\rangle, \quad \left\langle n(x), \frac{\partial}{\partial p} H_b(x, p_B(x)) \right\rangle$$

не изменяются при $x \in \Gamma$. Другими словами, договоримся, что каждое из этих соотношений либо строго положительно, либо равно тождественно нулю, либо строго отрицательно на Γ .

2.3. Метод сингулярных характеристик

Для большинства рассматриваемых ниже типов сингулярностей можно выписать три уравнения, связывающие на поверхности Γ значения функций $u(x)$ и $p = p_B(x)$:

$$F_i(x, u, p) = 0, \quad i = -1, 0, 1 \quad (7)$$

Обычно одним из уравнений является $H_b(x, p) = 0$, а два других описывают специфические свойства данного типа сингулярности. (Зависимость от u также возможна в ряде задач.) Эти уравнения используются для построения многообразия Γ в примерах.

Метод сингулярных характеристик (МСХ) представляет собой обобщение метода классических характеристик (МКХ). Для разъяснения сути МСХ снова рассмотрим МКХ, но уже в предположении, что гамильтониан F , в отличие от (1), зависит от функции u : $F = F(x, u(x), \nabla u(x))$. Пусть требуется найти гладкое решение уравнения $F(x, u(x), \nabla u(x)) = 0$. Этому решению поставим в соответствие n -мерное многообразие Σ в пространстве \mathbb{R}^{2n+1} , состоящее из точек

$$(x, u, p) = (x, u(x), \nabla u(x))$$

Необходимо, чтобы гамильтониан F был равен нулю на Σ , а дифференциальная форма $du - \langle p, dx \rangle$ обращалась в нуль на касательном пространстве к этому многообразию. Многообразию Σ обладает свойством инвариантности

$$\dot{x} = F_p, \quad \dot{u} = \langle p, F_p \rangle, \quad \dot{p} = -F_x - pF_u \quad (8)$$

относительно уравнений классических характеристик. Другими словами, если точка $(x(0), u(0), p(0))$ лежит на Σ , то и точка $(x(t), u(t), p(t))$ лежит на Σ при $t \geq 0$. Наличие свойства инвариантности позволяет построить Σ на основе его подмногообразия меньшей размерности [9].

Ситуация с многообразием Γ и уравнениями (7) аналогична. Свяжем с Γ и функцией u многообразие $\Sigma_\Gamma \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ размерности $(n-1)$, состоящее из точек

$$(x, u, p) = (x, u(x), p_B(x)), \quad x \in \Gamma \quad (9)$$

Функции F_i из (7) должны быть равными нулю на Σ_Γ , а дифференциальная форма $du - \langle p, dx \rangle$ обращается в нуль на касательном пространстве к Σ_Γ . Кроме понижения размерности задачи, это приводит к системе ОДУ (единственной с точностью до скалярного множителя) в пространстве \mathbb{R}^{2n+1} , для которой многообразие Σ_Γ есть инвариант. Сказанное может быть применено для построения Σ_Γ на основе подмногообразия, состоящего из начальных точек. Рассматриваемая система ОДУ имеет вид аналогичный (8), но вместо функции F в ней используется так называемый *сингулярный гамильтониан* H , задаваемый равенством

$$\mu H = \{F_0 F_1\} F_{-1} + \{F_1 F_{-1}\} F_0 + \{F_{-1} F_0\} F_1 \quad (10)$$

Здесь $\mu = \mu(x, u, p)$ – ненулевой множитель однородности, а $\{\cdot\}$ – скобки Якоби: $\{GF\} = \langle G_x + pG_u, F_p \rangle - \langle F_x + pF_u, G_p \rangle$. Скобки Якоби, например, возникают при вычислении производной от функции $G = G(x, u, p)$ вдоль характеристической кривой (8):

$$\{GF\}(x(t), u(t), p(t)) = \frac{d}{dt} G(x(t), u(t), p(t)) \quad (11)$$

Из определения скобок Якоби следует свойство их антисимметричности, то есть $\{FG\} = -\{GF\}$.

Множитель однородности $\mu \neq 0$ в (10) может быть выбран произвольно. Хотя его выбор может существенно затронуть характеристическое векторное поле сингулярного гамильтониана H , на многообразии Σ_Γ (где функции F_i обращаются в нуль) множитель μ влияет только на масштабирование времени. Таким образом, характеристические уравнения на Σ_Γ сводятся к линейной комбинации соответствующих характеристических полей для функций F_i :

$$\dot{x} = \sum_{-1}^1 \lambda_i \frac{\partial}{\partial p} F_i, \quad \dot{u} = \sum_{-1}^1 \lambda_i \left\langle p, \frac{\partial}{\partial p} F_i \right\rangle, \quad \dot{p} = - \sum_{-1}^1 \lambda_i \left(\frac{\partial}{\partial x} F_i + p \frac{\partial}{\partial u} F_i \right) \quad (12)$$

Здесь коэффициенты λ_i , $i = -1, 0, 1$, равны, соответственно, величинам $\{F_0 F_1\}/\mu$, $\{F_1 F_{-1}\}/\mu$ и $\{F_{-1} F_0\}/\mu$. Соотношения (12), называемые ниже уравнениями МСХ, представляют собой уравнения сингулярных характеристик для многообразия Σ_Γ . Взяв начальную точку $(x(0), u(0), p(0)) \in \Sigma_\Gamma$, получаем $(x(t), u(t), p(t)) \in \Sigma_\Gamma$ и, в частности, $u(t) = u(x(t))$, $p(t) = p_B(x(t))$. В плоском случае ($n = 2$) нам необходима только одна точка $(x(0), u(0), p(0)) \in \Sigma_\Gamma$, чтобы построить Σ_Γ в малом. Данный подход подробно изложен в [7].

Вывод уравнений (12) производится в предположении выполнения двух условий “невыврождения” (условия “нехарактеристичности” в [7]). Во-первых, на многообразии Σ_Γ скобки Якоби $\{F_i F_j\}$, $i \neq j$, не должны одновременно обращаться в нуль. Во-вторых, на касательном к Σ_Γ пространстве дифференциальные формы dF_i вместе с формой $du - \langle p, dx \rangle$ должны быть линейно независимыми. Оказывается, что оба условия эквивалентны тому, что правая часть в (12), рассматриваемая как векторное поле, не обращается в нуль на многообразии Σ_Γ (см. лемму 1.2 в [7]). Будем полагать, что эти условия выполнены для уравнений МСХ, соответствующих различным типам простейших сингулярных поверхностей Γ . Мы не будем исследовать ситуации, где такие условия нарушены.

2.3.1. Условия продолжения

Заметим, что для выполнения стандартного условия C^1 -гладкости правой части системы (12), обеспечивающего локальное существование и единственность решения, можно потребовать C^2 -гладкость F_i ($F_i \in C^2$). В некоторых случаях функции F_i определяются как скобки Якоби от функций H_i , поэтому предположим, что $H_i \in C^3$ вместо C^2 -гладкости. В других случаях функции F_i включают в себя функции $u_A(x)$ или $p_A(x) = \nabla u_A(x)$, и поэтому для $u_A(x)$ потребуем существование ее C^2 - или C^3 -продолжения при переходе через Γ в область B .

Пусть функция H_a является строго n -убывающей в точках $(x, p_A(x))$ для всех $x \in \Gamma$. Другими словами, выражение (6) на Γ отрицательно. Из наших предположений следует, что функция $u_A(x)$ имеет непрерывное продолжение на Γ . Если это продолжение C^2 -гладкое, то многообразие Γ вместе с функциями $u_A(x)$ и $p_A(x)$, заданными на нем, образует нехарактеристическую начальную поверхность для уравнения $H_a(x, \nabla u_A(x)) = 0$. Поэтому согласно стандартной теории существует единственное C^2 -гладкое продолжение функции $u_A(x)$ (решение уравнения $H_a = 0$) на область B . (В действительности, продолжение существует в некоторой окрестности Γ со стороны подмножества B , но уменьшением множества O можно положить его существование на всем подмножестве B). В этом случае будем говорить, что функция $u_A(x)$ удовлетворяет *условию C^2 -продолжения*. Если оказалось, что продолжение функции имеет C^3 -гладкость на всем множестве O , будем говорить, что оно удовлетворяет *условию C^3 -продолжения*.

Если функция H_b является строго n -возрастающей в точке $(x, p_B(x))$ при всех $x \in \Gamma$, то есть $H_b > 0$ на Γ , то условие существования C^2 -продолжения функции $u_B(x)$ (как решения уравнения $H_b(x, \nabla u_B(x)) = 0$) на множество O , аналогично предыдущему, назовем *условием C^2 -продолжения для функции $u_B(x)$* .

С другой стороны, если для каждого $x \in \Gamma$ функция $H_a(x, \nabla u(x))$ n -касательна при $\nabla u(x) = p_A(x)$, то в общем случае функция $u_A(x)$ может не иметь C^2 -гладкого продолжения при переходе через Γ . Этот эффект поясняют следующие эвристические соображения. Характеристики, соответствующие функции H_a и заполняющие подмножество A , можно параметризовать в виде функции $x_A(s, t)$, где t — время, фигурирующее в уравнениях характеристик, а величина $s = (s_1, \dots, s_{n-1})$ параметризует некоторую гиперповерхность, состоящую из начальных точек в A . Обе матрицы $\partial x_A / \partial(s, t)$ и $\partial p_A / \partial(s, t)$ корректно определены до тех пор, пока $x_A(s, t) \in O$. Более того, на подмножестве A якобиан $|\partial x_A / \partial(s, t)|$ отличен от нуля, но на Γ , вследствие условия касания, он может обращаться в нуль. На подмножестве A , где, напомним, $p_A(x) = \nabla u_A(x) \in C^1$, получаем равенство

$$\partial p_A / \partial x = \partial p_A / \partial(s, t) (\partial x_A / \partial(s, t))^{-1}$$

При $x_A \rightarrow \Gamma$ первый множитель (матрица) определен, но некоторые компоненты второго множителя (обратной матрицы Якоби для переменной x_A) могут иметь разрыв. Таким образом, следует ожидать возникновения особенностей в производной $\partial p_A / \partial x$ на Γ . Этот разрыв можно непосредственно наблюдать в некоторых примерах (см., например, [6], а именно, уравнение для $\bar{\alpha}_i, \bar{\alpha}_l$ вверху стр. 286).

3. Возможные типы сингулярностей

Вернемся к главной цели данной работы — классификации возможных простейших типов сингулярностей. Рассмотрим точку x на многообразии Γ . Из непрерывности функции u следует, что векторы $p_A(x)$ и $p_B(x)$ имеют общую касательную компоненту τ и только нормальные компоненты $\rho_i = \langle n(x), p_i(x) \rangle, i = a, b$, могут отличаться:

$$p_A(x) = \tau + \rho_a n(x), \quad p_B(x) = \tau + \rho_b n(x)$$

Если $\rho_a > \rho_b$, то имеет место *восходящая* (upward) сингулярность, как изображено в верхней части рис. 2. Она исследуется в подразделе 3.1. Случай $\rho_a < \rho_b$ соответствует *нисходящей* (downward) сингулярности. Такая сингулярность показана

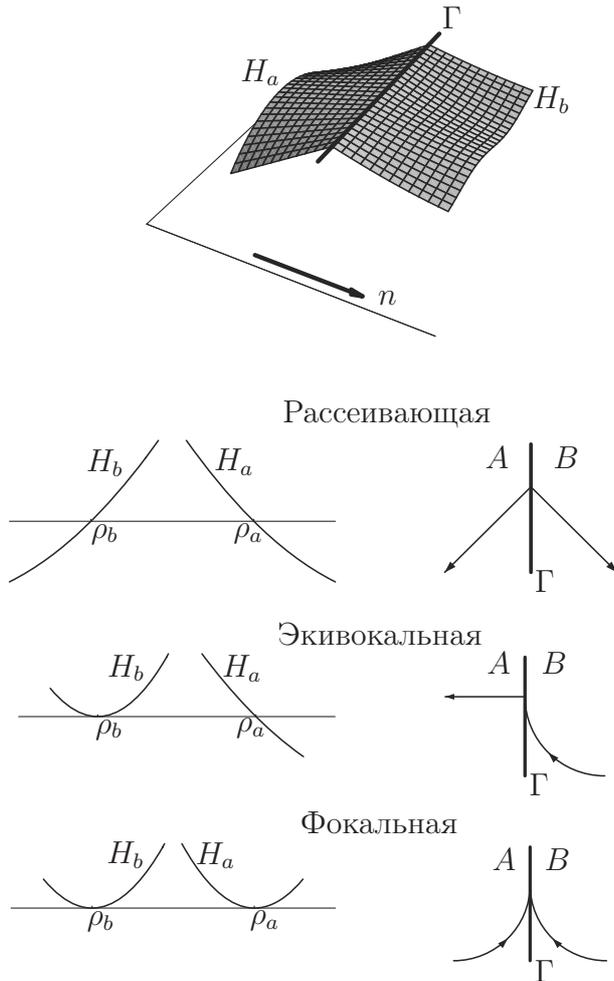


Рис. 2. Восходящие сингулярности.

на рис. 4 и обсуждается в подразделе 3.2. Если $\rho_a = \rho_b$, но индекс i , при котором достигается минимум в (1), различен с двух сторон Γ (то есть $a \neq b$), получаем *неособую поверхность переключения* (nonsingular switching surface), исследуемую в подразделе 3.3 и изображенную на рис. 6.

Сингулярная поверхность Γ , от которой с обеих сторон отходят (обращенные) характеристики, в общем случае называется *рассеивающей* (dispersal) поверхностью. Если характеристики подходят к поверхности Γ с одной стороны и отходят с другой, то она называется *эквивокальной* (equivocal) поверхностью. Когда же обращенные характеристики подходят к Γ с обеих сторон, имеем либо *фокальную* (focal) поверхность, если $\rho_a \neq \rho_b$, либо *универсальную* (universal), если $\rho_a = \rho_b$. Каждый такой тип возможен в описанных выше восходящем, нисходящем и неособом случаях. Согласно рассуждениям подраздела 2.2.1, тип поведения характеристик вблизи поверхности Γ связан со свойствами n -монотонности функций $H_i(x, \cdot)$, $i = a, b$, при $x \in \Gamma$. Для каждого случая типовая иллюстрация будет состоять из графика отображения $\rho \rightarrow H_i(x, \tau + \rho n(x))$ (слева) для пояснения свойства монотонности и рисунка поверхности Γ (справа), на котором показано поведение (подход/отход/касание) обращенных характеристик с каждой стороны Γ .

Напомним, что непрерывная функция $u(x)$ является вязкостным решением уравнения $F(x, \nabla u(x)) = 0$, $x \in O$, если при любой тест-функции $\varphi \in C^1$, для которой разность $u - \varphi$ имеет (а) локальный минимум или (б) локальный максимум в точке $x \in O$, справедливы, соответственно, соотношения

$$(a) \quad F(x, \nabla \varphi(x)) \geq 0, \quad (b) \quad F(x, \nabla \varphi(x)) \leq 0 \quad (13)$$

Свойство (13а) определяет *верхнее* решение, а свойство (13б) — *нижнее* решение, см. [1, 10]. При наших предположениях это сводится к классическому понятию решения отдельно в подобластях A и B : $H_a(x, p_A(x)) = 0$ при $x \in A$ и $H_b(x, p_B(x)) = 0$ при $x \in B$. Принципиальным является вопрос о выполнении (13) для $x \in \Gamma$.

3.1. Восходящие сингулярности

При $\rho_b < \rho_a$ имеем случай восходящей сингулярности. Очевидно, что здесь не существует такой гладкой тест-функции $\varphi(x)$, которая доставляла бы локальный минимум разности $u - \varphi$ в точке x . Таким образом, свойство верхнего решения формально выполнено.

Рассмотрим векторы $p = \nabla \varphi(x)$ для тест-функций φ , доставляющих локальный максимум разности $u - \varphi$ в точке x . Они составляют отрезок $[p_B(x), p_A(x)]$ — выпуклую оболочку векторов $p_A(x)$ и $p_B(x)$. Имеем разложение

$$p = \tau + \rho n(x), \quad \rho_b \leq \rho \leq \rho_a$$

Свойство вязкостного решения состоит в том, что $F(x, p) \leq 0$ для таких p . В случае гамильтониана F вида (1) это означает, что $H_i(x, p) \geq 0$ при $i = 1, \dots, k$ и $p \in [p_B(x), p_A(x)]$. Поскольку решение $u(\cdot)$ является классическим на подмножествах A и B , то в граничных точках $p_A(x)$ и $p_B(x)$ должны выполняться равенства $H_a(x, p_A(x)) = 0$ и $H_b(x, p_B(x)) = 0$. Таким образом, функция $\rho \rightarrow H_b(x, \tau + \rho n(x))$ равна нулю при $\rho = \rho_b$ и неотрицательна при $\rho_b < \rho < \rho_a$. Это означает, что функция $H_b(x, \cdot)$ является n -возрастающей при $p = p_B(x)$. Используя аналогичные

рассуждения для функции $H_a(x, \cdot)$, получаем, что она является n -убывающей при $p = p_A(x)$. Отсюда, в частности, следует, что обращенные характеристики вблизи многообразия Γ не могут приближаться к нему трансверсально; только с касанием. Однако покидать многообразие Γ характеристики могут трансверсально.

В отличие от рассматриваемого в следующем подразделе случая нисходящей сингулярности, дополнительные значения индекса i (кроме a и b) не оказывают никакого влияния на геометрические свойства решения. Как только для некоторой пары значений $i = a, b$ установлена геометрия характеристик, чтобы проверить свойства вязкостного решения, следует лишь убедиться в выполнении неравенств $H_i(x, \tau + \rho n(x)) \geq 0$ при значениях $i \neq a, b$ и $\rho_a \leq \rho \leq \rho_b$. Поэтому все иллюстрации приведены только для $i = a, b$. Так сделано и в случае $a = b$ при условии, что функция $H_a(x, \cdot)$ является n -касательной одновременно для $p = p_A(x)$ и $p = p_B(x)$. Это соответствует некоторой ситуации вырождения в рассеивающем и эквивокальном случаях.

3.1.1. Восходящая рассеивающая поверхность

Простейший случай соответствует строгой n -монотонности функций $H_i(x, \cdot)$, $i = a, b$, одновременно при $p = p_A(x)$ и $p = p_B(x)$. Тогда поведение характеристик должно соответствовать случаю *рассеивающей* поверхности, изображенному на рис. 2. В этом случае (обращенные) характеристики обязательно отходят от многообразия Γ с обеих сторон трансверсально.

Напомним, что по построению функции $u_A(x)$ и $u_B(x)$ получаются с помощью интегрирования характеристик. Таким образом, для нахождения Γ имеются характеристики, соответствующие H_a, H_b и функции $u_A(x)$ и $u_B(x)$. Если сделать предположение о существовании C^2 -продолжений для функций $u_A(x)$ и $u_B(x)$ (см. раздел 2.3), то имеющиеся семейства характеристик позволяют продолжить $u_A(x)$ и $u_B(x)$ на окрестность многообразия Γ . Тогда многообразие Γ можно найти просто через пересечение графиков функций: $\Gamma = \{x : u_A(x) = u_B(x)\}$. Гладкость многообразия Γ следует из теоремы о неявной функции. При этом вектор $p_A(x) - p_B(x)$ ортогонален Γ . Таким образом, для поиска Γ в данном случае не требуется выписывать уравнения МСХ.

Вырожденные варианты этого случая (отход от Γ с обеих сторон) возможны, если одна или обе функции $H_a(x, p)$ и $H_b(x, p)$ являются n -касательными соответственно при $p = p_A(x)$ и $p = p_B(x)$. Верхняя часть рис. 3 отвечает рассеивающей поверхности, когда обращенные характеристики отходят от Γ по касательной в подмножество B . Многообразие Γ состоит из точек, для которых выполнено равенство $u_A(x) = u_B(x)$ и которые принадлежат огибающей характеристик со стороны подмножества B . Возникновение подобной структуры может быть воспринято просто как замечательное совпадение, но не более. Если характеристики одновременно касаются Γ при $i = a, b$ и с обеих сторон отходят от Γ , то такой вариант является вдвойне замечательным совпадением.

3.1.2. Восходящая эквивокальная поверхность

Если функция $H_i(x, \cdot)$ является n -касательной, по крайней мере, на одной из сторон многообразия Γ , то возможны другие типы восходящей сингулярности.

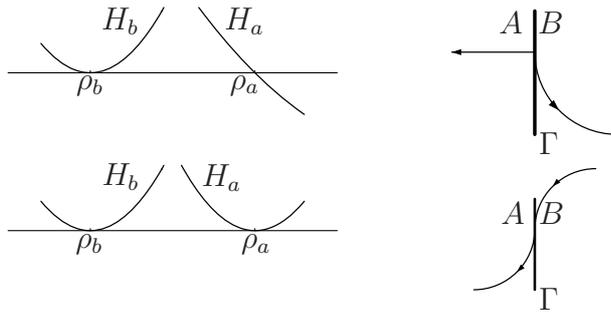


Рис. 3. Вырожденные восходящие сингулярности.

Предположим, что функция H_b n -касательна при $p = p_B(x)$, а функция H_a строго убывает при $p = p_A(x)$. Это делает возможным для обращенной характеристики в области B подход к Γ при условии, что это происходит по касательной. Такой случай соответствует *экивокальной* сингулярной поверхности (рис. 2). Существенное отличие от случая вырожденной рассеивающей поверхности (рис. 3, верхняя часть) состоит в направлении (обращенных) характеристик в области B .

Для построения решения в случае экивокальной поверхности в первую очередь требуется, используя начальные условия, проинтегрировать уравнения характеристик, соответствующие гамильтониану H_a , и получить функции $u_A(x)$, $p_A(x) = \nabla u_A(x)$ на подмножестве A и на A -стороне многообразия Γ . Затем, учитывая разрывность градиента $\nabla u(x)$ на Γ , нужно просчитать значение функции $p_B(x)$ на Γ . Далее следует проинтегрировать на подмножестве B уравнения характеристик, соответствующие гамильтониану H_b . Но такой прием не всегда удастся реализовать на практике. Дело в том, что характеристические уравнения на подмножестве A сами по себе не несут информации о существовании сингулярной поверхности. Другими словами, поиск сингулярной поверхности является отдельной глобальной задачей. Тем не менее, если для задачи на плоскости ($n = 2$) из каких-либо соображений известна некоторая точка x , принадлежащая сингулярной кривой Γ , то эту кривую можно построить, используя подходящие уравнения МСХ. При произвольном n потребуем знание некоторого подмногообразия размерности $n - 2$, вложенного в искомое многообразие Γ . Тогда можно воспользоваться уравнениями МСХ, чтобы построить Γ .

Предположим, что значения функций $u_A(x)$ и $p_A(x)$ известны на множестве $A + \Gamma$. Поскольку характеристики, соответствующие гамильтониану H_a и решению $u_A(x)$, подходят к Γ со стороны подмножества A трансверсально, имеет смысл воспользоваться условием C^3 -продолжения из раздела 2.3 для продолжения функций $u_A(x)$ и $p_A(x)$ через Γ на подмножество B (по-прежнему решая уравнение $H_a = 0$). Наша задача заключается в том, чтобы найти многообразие Γ и значение функции $p_B(x)$ на нем. Другими словами, требуется найти многообразие Σ_Γ , см. (9). Сделанные предположения позволяют получить три уравнения, описывающие множество Σ_Γ . Во-первых, для точек $(x, u, p) \in \Sigma_\Gamma$ выполняется равенство $u - u_A(x) = 0$. Во-

вторых, поскольку $p = p_B(x)$, имеем $H_b(x, p) = 0$. В-третьих, вектор $p_B(x) - p_A(x)$ ортогонален к Γ в точке x .

Условие n -касания для функции H_b (рис. 2) означает, что нормальная компонента вектора $\partial H_b(x, p_B(x))/\partial p$ равна нулю. Отсюда следует, что вектор $p = p_B(x)$ удовлетворяет равенству

$$\left\langle \frac{\partial H_b(x, p)}{\partial p}, p - p_A(x) \right\rangle = 0$$

Рассматривая $u_A(x)$ и $p_A(x)$ как известные функции, получаем следующие три уравнения вида (7), описывающие многообразие Σ_Γ , которое соответствует случаю восходящей экивокальной поверхности Γ :

$$\begin{aligned} F_1(x, u, p) &= u - u_A(x) = 0 \\ F_0(x, u, p) &= H_b(x, p) = 0 \\ F_{-1}(x, u, p) &= \left\langle \frac{\partial}{\partial p} H_b(x, p), p - p_A(x) \right\rangle = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

Заметим, что для C^2 -гладкости функции F_{-1} необходима C^3 -гладкость функций H_b и продолжения $u_A(x)$. Уравнения (14) приводят к стандартной сингулярной характеристической системе, см. (1.88) в [7]. С помощью простых вычислений можно получить равенство $\{F_1 F_0\} = F_{-1}$, которое обращается в нуль на Σ_Γ . Таким образом, в (12) величина λ_{-1} равна нулю. Кроме этого, поскольку функция H_b не зависит от u , то частная производная $\partial F_0/\partial u$ также равна нулю. Предполагая $\{F_1 F_{-1}\} \neq 0$, можно взять эту величину в качестве множителя однородности μ . Тогда уравнения МСХ примут следующую упрощенную форму:

$$\dot{x} = \frac{\partial}{\partial p} H_b, \quad \dot{u} = \left\langle p, \frac{\partial}{\partial p} H_b \right\rangle, \quad \dot{p} = -\frac{\partial}{\partial x} H_b - \frac{\{F_0 F_{-1}\}}{\{F_{-1} F_1\}} (p - p_A) \quad (15)$$

Здесь только последнее слагаемое в уравнении для \dot{p} отличает систему (15) от уравнений характеристической системы (8) в подобласти B для гамильтониана H_b . (Выражения $\{F_0 F_{-1}\}$ и $\{F_{-1} F_1\}$ содержат матрицу Гессе функции $u_A(x)$, а также частные производные второго порядка функции H_b . Эти величины подробно не разъясняются и поэтому не выписываются.) Если многообразие Γ найдено, а также на нем определены значения функции $p_B(x)$, то интегрируя систему классических характеристических уравнений для гамильтониана H_b при начальных условиях $x \in \Gamma$, $u = u_A(x)$, $p = p_B(x)$, можно получить значения функций $u_B(x)$ и $p_B(x)$ для $x \in B$. Это завершает построение функции $u(x)$ и многообразия Γ в области O в случае существования описанной выше конфигурации решения. В разделе 4 приведен пример такого типа экивокальной поверхности.

Возможен вырожденный случай, когда касание многообразия Γ характеристиками имеет место и при $i = a$ (нижняя часть рис. 3), причем (обращенные) характеристики отходят от Γ в подмножество A . В этом случае многообразие Γ может быть легко определено как огибающая характеристик подобласти A . Таким образом, здесь можно обойтись без уравнений МСХ. Имея многообразие Γ и нормаль $n(x)$ к нему, можно далее найти функцию $p_B(x)$ с помощью равенства $p_B(x) = p_A(x) + \rho n(x)$, где скалярный параметр $\rho < 0$ определяется из уравнения $H_b(x, p_B(x)) = 0$.

3.1.3. Восходящая фокальная поверхность

Оставшаяся простейшая восходящая сингулярность имеет место, когда обе функции $H_a(x, \cdot)$ и $H_b(x, \cdot)$ обращаются в нуль соответственно при $p = p_A(x)$ и $p = p_B(x)$, а обращенные характеристики подходят к многообразию Γ по касательной с обеих сторон (фокальный случай на рис. 2). С точки зрения построения это самый сложный тип сингулярности, поскольку требуется одновременно определить точку $x \in \Gamma$ и значение в ней функций $p_A(x)$ и $p_B(x)$. При этом на Γ должны выполняться следующие уравнения:

$$\begin{aligned} H_a(x, p_A(x)) &= 0, & H_b(x, p_B(x)) &= 0 \\ \left\langle \frac{\partial}{\partial p} H_a(x, p_A(x)), p_B(x) - p_A(x) \right\rangle &= 0 \\ \left\langle \frac{\partial}{\partial p} H_b(x, p_B(x)), p_B(x) - p_A(x) \right\rangle &= 0 \end{aligned}$$

Кроме того, вектор $p_A(x) - p_B(x)$ должен быть нормалью к Γ . Как упоминалось ранее, алгоритм построения многообразия Γ в этом случае выходит за рамки стандартного метода сингулярных характеристик. Можно, например, использовать связанную пару УЧП, описывающих поведение функций $p_A(x)$ и $p_B(x)$ на Γ , см. [11]. Однако обзор конструктивных методов построения фокальных поверхностей здесь не предполагается.

3.2. Нисходящие сингулярности

Рассмотрим теперь сингулярности нисходящего типа, представленные на рис. 4. В этом случае величина ρ нормальной компоненты вектора p должна иметь положительный скачок при пересечении сингулярной поверхности Γ в направлении нормали: $\rho_a < \rho_b$.

Не существует гладкой функции φ , при которой разность $u - \varphi$ имеет локальный максимум в точке x . Таким образом, свойство нижнего решения формально выполнено. Рассмотрим векторы $p = \nabla \varphi(x)$ для тест-функций φ , доставляющих локальный минимум разности $u - \varphi$ в точке x . Они составляют отрезок $[p_A(x), p_B(x)]$. Свойство верхнего решения требует для таких векторов p выполнения неравенства $F \geq 0$. Учитывая вид функции F , получаем, что при каждом $p \in [p_A(x), p_B(x)]$ должно выполняться неравенство $\min_i H_i(x, p) \leq 0$. Другими словами, для каждого $\rho_a \leq \rho \leq \rho_b$ существует такое значение индекса i , что $H_i(x, \tau + \rho n(x)) \leq 0$. Кроме того, имеет место равенство $H_i = 0$ при $i = a, \rho = \rho_a$ и $i = b, \rho = \rho_b$. Таким образом, те значения индекса i , на которых минимум в (1) по функциям $H_i(x, p)$ не реализуется, никак не связаны с искомым вязкостным решением. Отметим, что этому минимуму для всех векторов $p \in [p_A(x), p_B(x)]$ может соответствовать единственное значение индекса $i = a = b$, а также два и более значений (см. рис. 5). В случае нисходящей фокальной поверхности обычно требуется существование, по крайней мере, трех различных значений: $i = a, b, c$ (рис. 4).

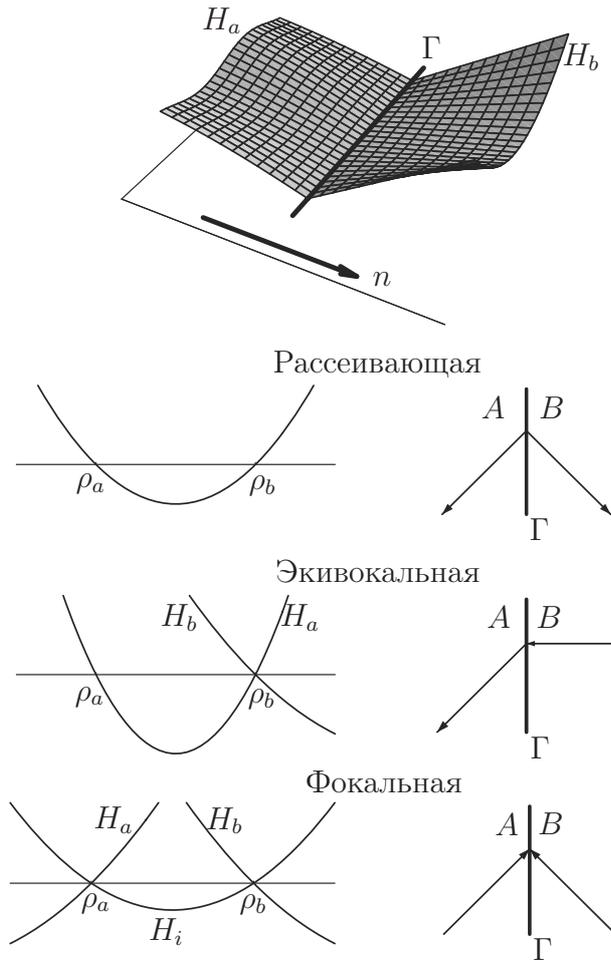


Рис. 4. Нисходящие сингулярности.

3.2.1. Нисходящая рассеивающая поверхность

Для рассматриваемой здесь поверхности функция $H_a(x, \cdot)$ является n -убывающей при $p = p_A(x)$, а функция $H_b(x, \cdot)$ — n -возрастающей при $p = p_B(x)$. Изображенный на рис. 4 случай рассеивающей поверхности предполагает строгую n -монотонность, а также равенство индексов $a = b$, соответствующих минимуму. Однако подобный случай возможен и при $a \neq b$, когда для еще одного значения индекса i достигается минимум $\min_i H_i \leq 0$. Из свойства строгой монотонности для концевых точек $p(x)$ следует, что (обращенные) характеристики отходят от поверхности Γ трансверсально с обеих сторон. Как и для других рассмотренных выше типов рассеивающих поверхностей, многообразие Γ может быть легко определено как множество точек, в которых выполняется равенство $u_A(x) = u_B(x)$; сами

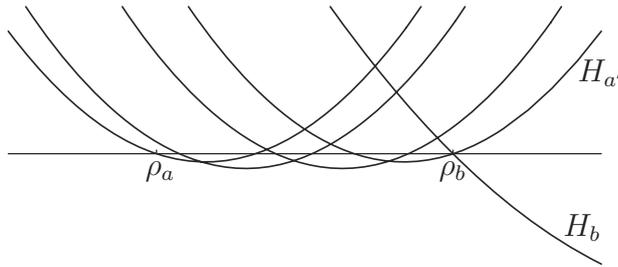


Рис. 5. Нисходящая экивокальная поверхность, соответствующая нескольким несовпадающим значениям минимизирующих индексов.

функции $u_A(x)$ и $u_B(x)$ получаются путем интегрирования уравнений характеристик в направлении от заданных где-то начальных условий. Возможны вырожденные случаи, связанные с односторонним или двусторонним касанием. Аналогично ситуации, описанной в разделе 3.1, это трактуется как замечательное совпадение множества $\Gamma = \{x : u_A(x) = u_B(x)\}$ с огибающей (огibaющими) характеристик с соответствующей стороны (с обеих сторон).

3.2.2. Нисходящая экивокальная поверхность

Рассматриваемый здесь тип экивокальной поверхности возникает в случае, когда функции $H_a(x, \cdot)$ и $H_b(x, \cdot)$ являются n -убывающими соответственно при $p = p_A(x)$ и $p = p_B(x)$. Если эта монотонность строгая, то связанная с ней экивокальная конфигурация имеет вид, изображенный на рис. 4. Так же, как и для экивокальной поверхности из предыдущего раздела, наличие поверхности Γ бывает трудно распознать при построениях. Но если имеются основания для ее существования, а также задано некоторое вложенное в Γ подмногообразие размерности $n-2$, то поверхность Γ можно получить с помощью уравнений МСХ.

Пусть уже известны значения функций $u_A(x)$ и $p_A(x)$ с A -стороны поверхности Γ . Для невырожденного случая предположим строгую монотонность функции $H_a(x, \cdot)$ при $p = p_A(x)$. Из геометрического смысла сингулярности получаем, что для функций $u = u_A(x)$ и $p = p_B(x)$ на B -стороне поверхности Γ выполняются следующие уравнения:

$$H_{a'}(x, p) = 0, \quad H_b(x, p) = 0, \quad u - u_A(x) = 0$$

Здесь $a' = a$, если (как на рис. 4) минимум по функциям $H_i(x, p)$ достигается только при значениях индекса $i = a, b$. Однако если имеет место ситуация, изображенная на рис. 5, то a' — это индекс, на котором достигается минимум по функциям $H_i(x, p)$ на интервале $(\rho_b - \varepsilon, \rho_b)$ (слева от точки ρ_b на рис. 5). Теперь, используя соотношения

$$F_0 = H_b, \quad F_{-1} = H_{a'}, \quad F_1(x, u, p) = u - u_A(x)$$

запишем уравнения МСХ вида (12). Для того чтобы имела место C^2 -гладкость функции F_1 , будем использовать условие C^2 -продолжения функции $u_A(x)$, как

описано в разделе 2.3. Получаем еще один общий тип сингулярной поверхности (см. [7, (1.95)]). Полагая множитель однородности равным

$$\mu = \{F_0 F_1\} + \{F_1 F_{-1}\} = \{H_b F_1\} - \{H_{a'} F_1\}$$

систему уравнений сингулярных характеристик можно записать в виде

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \lambda_1 \frac{\partial}{\partial p} H_{a'} + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial p} H_b, & \dot{p} &= \lambda_1 \left\langle p, \frac{\partial}{\partial p} H_{a'} \right\rangle + \lambda_2 \left\langle p, \frac{\partial}{\partial p} H_b \right\rangle \\ \dot{p} &= -\lambda_1 \frac{\partial}{\partial x} H_{a'} - \lambda_2 \frac{\partial}{\partial x} H_b - \frac{\{H_{a'} H_b\}}{\mu} (p - p_A(x)) \end{aligned} \quad (16)$$

где $\lambda_1 = \{H_b F_1\}/\mu$, $\lambda_2 = -\{H_{a'} F_1\}/\mu$.

Возможны вырожденные случаи. Если имеет место касание характеристиками поверхности Γ с B -стороны, то имеем $0 = \langle p - p_A(x), \partial H_b / \partial p \rangle = \{F_1 F_0\}$, откуда следует равенство $\lambda_1 = 0$. Отсюда с помощью уравнений МСХ можно найти поверхность Γ . Если функция $H_a(x, \cdot)$ является n -касательной при $p = p_A(x)$ (вдоль всей поверхности Γ), то Γ представляет собой огибающую характеристик с A -стороны и может быть найдена на основе этого свойства.

3.2.3. Нисходящая фокальная поверхность

Фокальная поверхность имеет место в том случае, если траектории подходят к поверхности Γ с обеих сторон. Для этого необходимо, чтобы функция $H_a(x, \cdot)$ была n -возрастающей при $p = p_A(x)$, а функция $H_b(x, \cdot)$ — n -убывающей при $p = p_B(x)$. Если эти монотонности строгие, то $a \neq b$ и требуется, по крайней мере, еще одно значение индекса i , на котором достигался бы минимум по функциям $H_i(x, \cdot)$ на промежутке $\rho_a \leq p \leq \rho_b$, как это проиллюстрировано для фокальной конфигурации на рис. 4.

Возможен вырожденный случай, когда хотя бы одна из функций $H_a(x, \cdot)$ или $H_b(x, \cdot)$ является n -касательной. Так же, как и при фокальной восходящей поверхности, рассмотренной в разделе 3.1, для построения нисходящей поверхности требуется система уравнений, определяющая Γ и обе функции $p_A(x)$, $p_B(x)$ при $x \in \Gamma$. Это выходит за рамки стандартного МСХ (см., например, [11]).

3.3. Неособые поверхности переключения

До сих пор считалось, что $p_A(x) \neq p_B(x)$ при $x \in \Gamma$. Сейчас исследуем случай, когда для всех $x \in \Gamma$ выполнено равенство $p_A(x) = p_B(x)$. Таким образом, функция $u(x)$ имеет C^1 -гладкость на всем множестве $O = A + \Gamma + B$ и является классическим решением уравнения $F(x, \nabla u(x)) = 0$. Несмотря на это, если индекс минимизации i изменяет свое значение при пересечении поверхности Γ , то есть $a \neq b$, особенность в геометрии характеристик все же может иметь место. В этом случае поверхность Γ будем называть *неособой поверхностью переключения*. Исследуем ее как предельный случай рассмотренных выше типов сингулярностей при $\rho_b - \rho_a \rightarrow 0$.

3.3.1. Неособая рассеивающая поверхность

Возникает как предельный случай рассеивающей поверхности, рассмотренной в разделе 3.1. Полагаем, что функция $H_a(x, \cdot)$ является n -убывающей при $p = p_A(x) = p_B(x)$, а функция $H_b(x, \cdot)$ — n -возрастающей. Конфигурация рассеивающей поверхности при строгой монотонности этих функций изображена на рис. 6. Так же, как и выше, возможен вырожденный случай, когда, по крайней мере, одна из функций H_i является n -касательной. Аналогично исследованным типам рассеивающих поверхностей из предыдущих разделов, поверхность Γ может быть найдена в виде $\Gamma = \{x : u_A(x) = u_B(x)\}$, где функции u_A и u_B находятся с помощью уравнений классических характеристик и заданных где-то начальных условий. Уравнения МСХ в данном случае не нужны. (В действительности также необходимо, чтобы на Γ выполнялось равенство $H_a(x, p_A(x)) = H_b(x, p_B(x))$, что делает этот тип сингулярности переопределенным и, таким образом, едва ли возможным).

3.3.2. Неособая экивокальная поверхность

Если обе функции $H_a(x, \cdot)$ и $H_b(x, \cdot)$ являются n -убывающими при $p = p_A(x) = p_B(x)$, то имеет место экивокальный тип сингулярной поверхности, изображенный на рис. 6. Вырожденный случай, в котором функция H_b n -касательна, может быть исследован как предельный случай экивокальной поверхности из раздела 3.1. Имея функции $u_A(x)$ и $p_A(x)$ (продолженные с характеристик A -стороны), можно описать поверхность Γ просто как множество точек, удовлетворяющих уравнению $H_b(x, p_A(x)) = 0$. Таким образом, в данном случае уравнения МСХ не нужны. В разделе 4 приведен соответствующий пример.

3.3.3. Универсальная поверхность

Последний тип неособой поверхности переключения представляет собой предельный случай фокальной поверхности из раздела 3.2. Здесь обращенные характеристики приближаются к поверхности Γ с обеих сторон. Дополнительно учитывая равенство $p_A(x) = p_B(x)$, назовем такую поверхность *универсальной*. Функция $H_a(x, \cdot)$ в данном случае n -возрастающая при $p = p_A(x) = p_B(x)$, а функция $H_b(x, \cdot)$ — n -убывающая при том же значении p . На рис. 6 приведена конфигурация такой сингулярности при условии, что обе монотонности строгие. (Случай $i \neq a, b$, представленный на рис. 5, в данном случае не подходит.) Для рассматриваемого типа сингулярной поверхности (так же, как и выше для фокальных поверхностей) функции $u_A(x)$ и $u_B(x)$ не известны, что не позволяет использовать их в уравнениях МСХ для построения поверхности Γ .

Тем не менее, поскольку на Γ выполняется равенство $p_A(x) = p_B(x)$, то каждой точке $x \in \Gamma$ соответствует единственный вектор p . Это обстоятельство возвращает нас к ситуации, когда следует найти поверхность Σ_Γ , состоящую из точек (9). Для этих целей уравнения МСХ являются удобным инструментом.

Ясно, что для каждой точки $x \in \Gamma$ и соответствующего вектора $p = p_A(x) = p_B(x)$ должны быть выполнены два уравнения

$$F_1 = H_a(x, p) = 0, \quad F_0 = H_b(x, p) = 0 \quad (17)$$

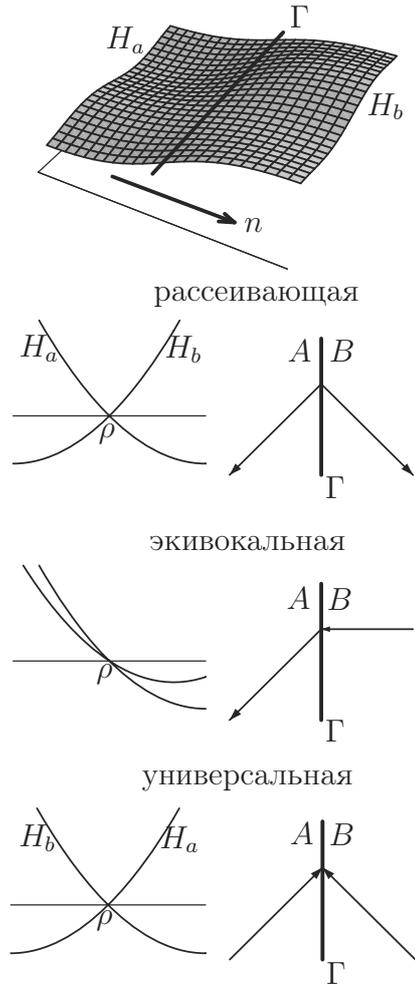


Рис. 6. Неособая поверхность переключения.

Недостающее третье уравнение следует из предположения, что обращенные характеристики подходят к поверхности Γ с обеих сторон и при пересечении Γ индекс минимизации изменяется с a на b . Со стороны подмножества A такие характеристики, соответствующие гамильтониану H_a , достигают точек поверхности Γ . Таким образом, на подмножестве A справедливо неравенство $H_b - H_a \geq 0$, а на Γ равенство $H_b - H_a = 0$. Отсюда получаем, что производная разности $(H_b - H_a)$, вычисленная вдоль обращенной характеристики, соответствующей гамильтониану H_a , должна быть неотрицательна в точках достижения этой характеристикой поверхности Γ , то есть

$$0 \geq \frac{d}{dt}(H_b(x(t), p(t)) - H_a(x(t), p(t))) = -\{H_b - H_a, H_a\} = -\{H_b, H_a\}$$

Здесь для вычисления полной производной вдоль характеристики использовалось равенство (11) с включением в него знака минус (поскольку рассматриваются обращенные характеристики), а также равенство $\{H_a H_a\} = 0$, вытекающее из антисимметричности. Таким образом, для точек поверхности Σ_Γ справедливо неравенство $\{H_b H_a\} \geq 0$. Если в выкладках поменять местами роли гамильтонианов H_a и H_b , то можно получить аналогичное неравенство и для B -стороны поверхности Γ , а именно, $-\{H_b H_a\} = \{H_a H_b\} \geq 0$. В результате находим, что $\{H_b H_a\} = 0$ на Σ_Γ . Это и есть третье уравнение для точек поверхности Σ_Γ :

$$F_{-1} = \{H_b H_a\} = 0 \quad (18)$$

Система уравнений МСХ для таких гамильтонианов F_i (см. (1.90) в [7]) имеет стандартный вид. Поскольку на Γ имеют место равенства $\{F_0 F_1\} = F_{-1} = 0$, то в (12) член λ_{-1} обращается в нуль на этой поверхности. Множитель однородности μ удобно взять в виде $\mu = \{F_1 F_{-1}\} + \{F_{-1} F_0\}$. Тогда система уравнений МСХ (12) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \lambda_0 \frac{\partial}{\partial p} H_b + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial p} H_a, & \dot{u} &= \lambda_0 \left\langle p, \frac{\partial}{\partial p} H_b \right\rangle + \lambda_1 \left\langle p, \frac{\partial}{\partial p} H_a \right\rangle \\ \dot{p} &= -\lambda_0 \frac{\partial}{\partial x} H_b - \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x} H_a \end{aligned}$$

Универсальная поверхность такого типа часто возникает в теории очередей, см. раздел 4.1. (Также см. поверхность “F” в [5, рис. 4], хотя там не приводятся пояснения.)

4. Пример

Исследования асимптотик в теории массового обслуживания показывают, как упоминалось во введении, что подобные задачи сводятся к решению соответствующих игровых задач. В уравнениях Гамильтона – Якоби – Беллмана – Айзекса при этом фигурирует гамильтониан, имеющий вид максимума конечного числа гладких вогнутых функций, то есть такой же, как и в данной работе.

В этом разделе исследуется задача, в которой возникают рассмотренные типы сингулярных поверхностей. По сути, это расширение примера из раздела 6 работы [5], где изучалась небольшая треугольная подобласть в первом квадранте (ниже пунктирной линии на рис. 7). Одна из причин такого ограничения заключается в том, что в [5] рассматривались только гладкие решения. Здесь же изучим продолжение решения на более обширную подобласть первого квадранта, заполненную характеристиками (рис. 7). В этой подобласти как раз и возникают исследованные выше типы сингулярностей. Мы не ставим задачу найти полное решение соответствующей дифференциальной игры или исследовать граничные условия на координатных осях. Нас интересуют только возникающие в этом примере типы сингулярностей.

Размерность рассматриваемой задачи равна двум ($n = 2$), а индекс i может принимать только значения 1 и 2. Функции H_i определяются так же, как и в (3),

где

$$f(x, i, w) = w - g_i, \quad L(x, i, w) = \frac{|x|^2 - |w|^2}{2}$$

Величины g_i являются заданными векторами: $g_1 = (2, 1)^T$, $g_2 = (1/2, 2)^T$. Таким образом,

$$H_i(x, p) = \frac{|p|^2}{2} - \langle p, g_i \rangle + \frac{|x|^2}{2}$$

Используя эти выражения, сформируем для рассматриваемой задачи гамильтониан (1) в виде максимума вогнутых функций H_i . На рис. 7 изображено семейство характеристик, из которых конструируется интересующее нас решение. Исследуем несколько типов возникающих здесь сингулярных характеристик.

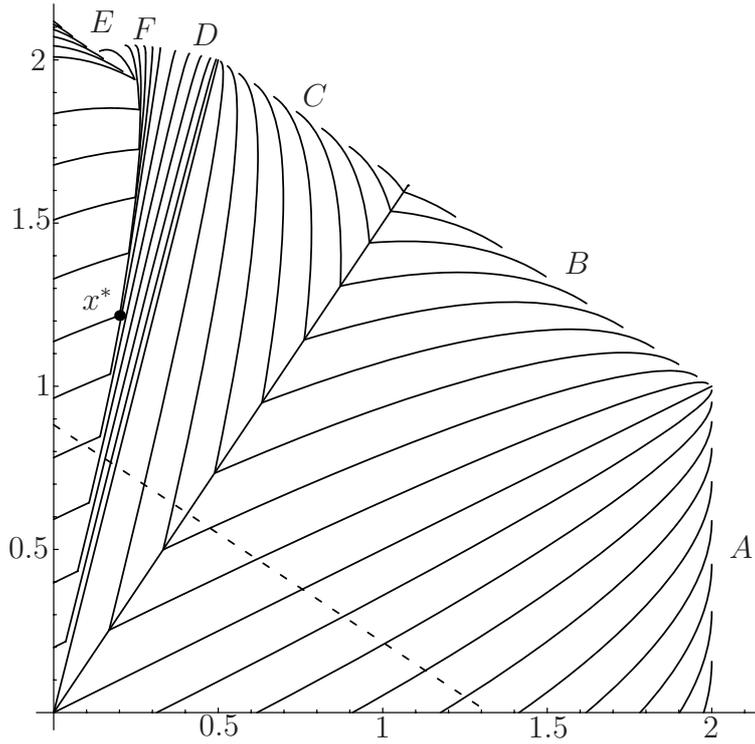


Рис. 7. Пример задачи теории массового обслуживания.

4.1. Универсальная поверхность

Линия, разделяющая подобласти B и C , представляет собой универсальную поверхность Γ , рассмотренную в разделе 3.3. Ее можно легко найти, решив три алгебраических уравнения (17) и (18), другими словами уравнения $H_1 = 0$, $H_2 = 0$ и $\{H_1 H_2\} = 0$. Раскрывая последнюю скобку, получаем, что $0 = \langle x, g_1 - g_2 \rangle$. Находим

также, что $0 = H_2 - H_1 = \langle p, g_1 - g_2 \rangle$. Таким образом, многообразию Σ_Γ соответствует поверхность (кривая) Γ , на которой оба вектора x и p лежат в одномерном подпространстве пространства \mathbb{R}^2 , ортогональном вектору $g_1 - g_2$. На основании этого можно построить кривую Γ и найти на ней значения вектора $p(x)$ с точностью до скалярного множителя, который легко определяется из уравнения $H_i(x, p(x)) = 0$. (В результате получаем такую же кривую в пространстве векторов x и p , которая была записана параметрически в виде $x^a(t)$ и $p^a(t)$ в [5].)

4.2. Неособая экивокальная поверхность

Построение решения в подобластях E , F и D зависит от значений вектора $p(x)$ для $x = (0, x_2)^T$ на вертикальной оси. Определение этих значений включает использование специальных уравнений сингулярных характеристик, связанных с неявно заданными граничными условиями для производных (см. [5, 12]). Для наших целей определим значения вектора $p(x)$ на вертикальной оси в явном виде следующим образом:

$$p(0, x_2) = \frac{3 - \sqrt{9 - 2x_2^2}}{2}(1, 1)^T$$

Данные значения удовлетворяют равенству $H_1(x, p(x)) = 0$ при $x = (0, x_2)^T$. С такими начальными значениями подобласть E оказывается заполнена характеристиками, соответствующими гамильтониану H_1 . Эти характеристики порождают в подобласти E функции $u_E(x)$ и $p_E(x) = \nabla u_E(x)$. Однако значение индекса $i = 1$ доставляет минимум в (1) только в некоторой окрестности вертикальной оси, а не во всей области, заполняемой этими характеристиками. Как и для экивокальной поверхности из раздела 3.3, множество точек $H_2(x, p_E(x)) = 0$ описывает неособую экивокальную часть кривой Γ той же структуры, что и на рис. 6. Она является границей между подобластями E и D (рис. 7) ниже точки $x^* \approx (0.20, 1.22)^T$ (тоже отмеченной на рисунке). Характеристики, пересекающие кривую ниже точки x^* , непрерывны по p , то есть $p_D(x) = p_E(x)$, и непрерывно продолжаются на подобласть D . Этому продолжению соответствует индекс минимизации $i = 2$.

На рис. 8 в верхнем ряду и слева в нижнем ряду изображены графики функций H_i для точек $x \in \Gamma$, передвигающихся вверх до точки x^* . Видно, что график функции H_b ($b = 2$) постепенно выравнивается и при $x = x^*$ касается оси абсцисс (левый нижний график на рис. 8).

4.3. Восходящая экивокальная поверхность

В точке $x = x^*$ возникает некоторого рода бифуркация графиков функций H_i . Ситуация здесь представляет собой предельный случай при $\rho_b \rightarrow \rho_a$ восходящей экивокальной поверхности, рассмотренной в разделе 3.1 и показанной на рис. 2. Взяв в качестве $p_A(x)$ вектор $p_E(x)$, неособую экивокальную кривую Γ можно продолжить за пределы (выше) точки x^* так, чтобы выполнялись соотношения (14). Для этого можно использовать уравнения МСХ (15). Результатом такого продолжения будет сингулярная экивокальная кривая Γ выше точки x^* , которая является границей между подобластями E и F (рис. 7), а соответствующие типовые графики функций H_i при $x \in \Gamma$ имеют вид, представленный на рис. 8 справа внизу. Характеристики в подобласти F порождаются гамильтонианом H_2 с заданными на Γ

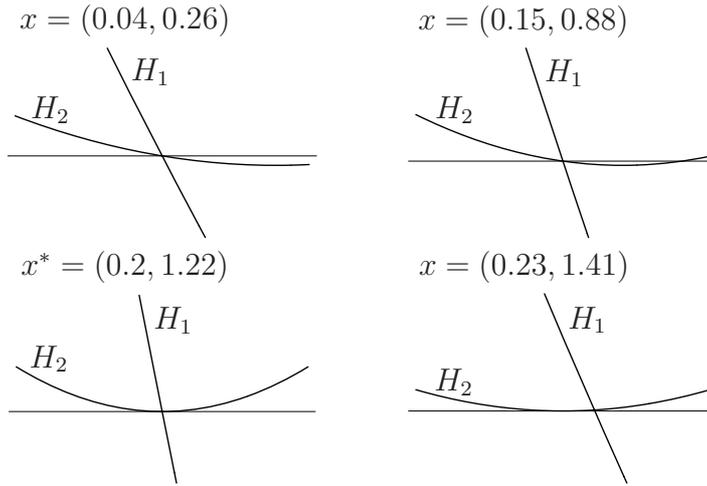


Рис. 8. Бифуркация экивокальной поверхности.

начальными условиями и соответствующими значениями вектора p на H_2 -стороне кривой Γ , полученными в результате решения системы уравнений (15).

В рассматриваемом примере для получения более простой системы с двумя неизвестными, описывающей кривую Γ , можно взять систему (14) вместо системы из четырех неизвестных, которая возникает при использовании (15). Получив значения функций $u_E(x)$ и $p_E(x)$ для $x \in \Gamma$, найдем далее значения функции $p(x) = p_F(x)$. Для этого воспользуемся двумя последними уравнениями в (14). Соответствующее решение записывается при помощи формулы

$$p - g_2 = \frac{r(x)}{|p_E(x) - g_2|^2} \cdot \begin{bmatrix} r(x) & \sqrt{2H_2(x, p_E(x))} \\ -\sqrt{2H_2(x, p_E(x))} & r(x) \end{bmatrix} \cdot (p_E(x) - g_2) \quad (19)$$

Здесь $r(x) = (|g_2|^2 - |x|^2)^{1/2}$. Поскольку известно, что вектор $p - p_E(x)$ является нормалью к кривой Γ , то дифференциальное уравнение для этой кривой можно найти в виде $\dot{x} \perp (p - p_E(x))$, где p выражается из (19). Полученное таким образом уравнение можно решить численно, взяв $x = x^*$ в качестве начальной точки.

Подводя итог, отметим, что построение решения в подобластях E , F и D начинается с нахождения функции u на вертикальной оси, чтобы получить значения u и $p = \nabla u$, удовлетворяющие определенным граничным условиям [5] на этой оси. Затем, используя классические характеристики, эти функции продолжаем на внутреннюю часть подобласти E до пересечения с экивокальной кривой (кривыми) у правой границы подобласти. Нижняя часть этой кривой является неособой экивокальной кривой переключения. Функцию p можно продолжить через нее по непрерывности. Верхняя часть экивокальной кривой Γ является сингулярной экивокальной и вычисляется с помощью уравнений МСХ, описывающих также разрыв функции p на этой кривой. Как только несингулярная и сингулярная экивокальные кривые построены, использование классических характеристик позволяет продолжить решение на подобласти D и F .

Приведенные результаты показывают, что изучение сингулярностей вязкостных решений и их описание с помощью МСХ важны при нахождении точного решения в конкретных задачах.

Литература

- [1] *Bardi M., Capuzzo-Dolcetta I.* Optimal Control and Viscosity Solutions of Hamilton–Jacobi–Bellman Equations. Boston: Birkhäuser, 1997.
- [2] *Atar R., Dupuis P.* A differential game with constrained dynamics and viscosity solutions of a related HJB equation. *Nonlinear Anal.*, 2002. Vol. 51, pp. 1105–1130.
- [3] *Atar R., Dupuis P., Shwartz A.* An escape time criterion for queuing networks: asymptotic risk-sensitive control via differential games. *Math. Oper. Res.*, 2003. Vol. 28, pp. 801–835.
- [4] *Ball J.A., Day M.V., Kachroo P.* Robust feedback control of a single server queuing system. *Math. Control Signals Syst.*, 1999. Vol. 12, pp. 307–345.
- [5] *Day M.V.* Boundary-influenced robust controls: two network examples. *ESAIM: Control Optim. Calc. Var.*, 2006. Vol. 12, pp. 662–698.
- [6] *Day M.V., Hall J., Menendez J., Potter D., Rothstein I.* Robust optimal service analysis of single-server re-entrant queues. *Comput. Optim. Appl.*, 2002. Vol. 22, pp. 261–302.
- [7] *Melikyan A.A.* Generalized Characteristics of First Order PDEs: Applications in Optimal Control and Differential Games. Boston: Birkhäuser, 1998.
- [8] *Isaacs R.* Differential Games. New York: John Wiley, 1965. = *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 480 с.
- [9] *Арнольд В.И.* Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Ижевск: Удмурт. гос. ун-т, 1984. 351 с.
- [10] *Crandall M.G., Ishii H., Lions P.L.* User’s guide to viscosity solutions of second order partial differential equations. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1992. Vol. 27, no. 1, pp. 1–67.
- [11] *Melikyan A.A., Bernhard P.* Geometry of optimal paths around focal singular surfaces in differential games. *Appl. Math. Optim.*, 2005. Vol. 52, no. 1, pp. 23–37.
- [12] *Day M.V.* On Neumann type boundary conditions for Hamilton–Jacobi equations in smooth domains. *Appl. Math. Optim.*, 2006. Vol. 53, pp. 359–381.

Краевые сингулярности и характеристики уравнения Гамильтона – Якоби*

А.А. Меликян, Г.Я. Олсдер

Рассматриваются локальные решения краевых задач для уравнений в частных производных первого порядка, когда классическое достаточное условие существования решения не выполняется, но решение все же существует, определенное на одной или на обеих сторонах граничной поверхности. Отметим три возможных сочетания такой поверхности и локального решения на ней: (1) часть граничной поверхности с заданным на ней граничным значением искомой функции; (2) часть граничной поверхности, на которой граничное значение искомой функции изначально не задается, а находится в процессе построения; (3) сингулярная поверхность, возникающая при построении во внутренней части области. В двух последних случаях, которые являются типичными для задач оптимального управления и дифференциальных игр, значение решения на поверхности вычисляется при помощи сингулярных характеристик. Будет показано, что характер сингулярности полностью определяется знаками двух вложенных скобок Пуассона, естественно возникающих в уравнениях сингулярных характеристик. Напоминаются понятия регулярных и сингулярных характеристик и формулируется новое достаточное условие для существования и единственности в нерегулярном случае. Это условие в инвариантной форме использует скобки Пуассона (Якоби) и является удобным в приложениях. Приводятся несколько примеров с нерегулярными решениями и граничными характеристиками.

1. Введение

Во многих задачах оптимального управления, дифференциальных игр и математической физики возникает следующая краевая задача в терминах УЧП первого порядка (Гамильтона – Якоби, Беллмана – Айзекса) и скалярной неизвестной функции $u(x)$ [7, 2, 4, 5]:

$$\begin{aligned} F(x, u(x), p(x)) = 0, \quad x \in \Omega, \quad p(x) = \frac{\partial u(x)}{\partial x} \\ u(x) = w(x), \quad x \in M \subset \partial\Omega = M + M_0 \end{aligned} \tag{1}$$

* А. Melikyan, G.J. Olsder “Boundary singularities and characteristics of Hamilton – Jacobi equation”, J. Dynamical and Control Systems, 2010. Vol. 16, no. 1, pp. 77–99.
Перевод с английского В.А. Корнеева.

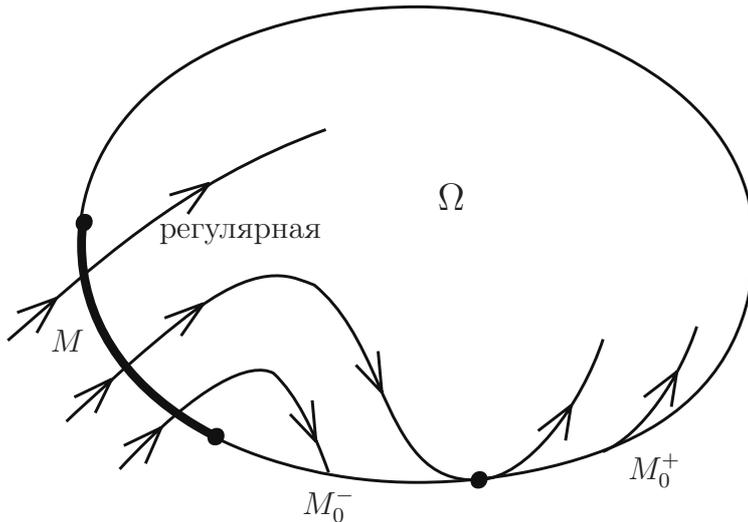


Рис. 1

Вообще говоря, чтобы получить единственное решение во всей области Ω , следует указать граничные условия только на части M границы $\partial\Omega$ (см. рис. 1). В книге [7] такая поверхность M называется допустимой областью границы. Поверхность M_0 свободна от граничных условий, или же предел решения из Ω к M_0 не совпадает с заранее указанным граничным значением.

В процессе построения решения (например, с помощью характеристик) еще одна новая краевая подзадача может возникнуть вблизи поверхности $M_0^+ \subset M_0$. Такая подзадача может быть регулярной или нерегулярной и имеет общий характер, как показывают последние два примера данной статьи.

1.1. Классические характеристики

Как известно, в случае гладких функций F , $w(x)$ и гладкой гиперповерхности M (все, по крайней мере, класса C^2) построение гладкого решения $u(x) \in C^2(\Omega)$ сводится к интегрированию классических (регулярных) характеристик системы ОДУ [4, 5, 10]:

$$\dot{x} = F_p, \quad \dot{u} = \langle p, F_p \rangle, \quad \dot{p} = -F_x - pF_u; \quad p = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2)$$

Здесь производная берется относительно некоторой независимой переменной t , $\dot{x} = dx/dt$, не обязательно имеющей смысл времени.

Классические характеристики допускают обобщение, которое полезно для построения негладких решений с возможно негладкой левой частью F (см. раздел 3).

1.2. Начальная полоса

Для интегрирования характеристической системы (2) на некотором промежутке $[t_0, t_1]$ нужны начальные условия для переменных (x, u, p) . Зададим $x(t_0) = x^*$,

$u(t_0) = w(x^*)$, $x^* \in M$, и найдем $p(t_0)$. Для этого можно продифференцировать граничное условие

$$u(x) - w(x) = 0, \quad x \in M$$

по направлениям $y_j(x)$, касательным к M , и тогда в сочетании с УЧП (2) приходим к системе n уравнений относительно $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$:

$$\begin{aligned} F(x, w(x), p) = 0, \quad q(x) &= \frac{\partial w(x)}{\partial x} \\ \langle p - q(x), y_j(x) \rangle &= 0, \quad j = 1, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (3)$$

где $y_j(x) \in \mathbb{R}^n$, $j = 1, \dots, n-1$, — базис касательного пространства $T_x M$ в точке $x \in M$. Многообразие Σ определено в (x, u, p) -пространстве формулами (3) и называется начальной полосой (или начальной полоской [4]).

1.3. Условие регулярности

Предположим, что якобиан системы (3) относительно вектора p отличен от нуля для некоторой пары (x^*, p^*) , удовлетворяющей системе, то есть

$$\Delta(x^*, p^*) = \det |F_p, y_1, \dots, y_{n-1}| \neq 0$$

Тогда согласно теореме о неявной функции существует C^1 -решение $p = r(x)$ системы (3), $p^* = r(x^*)$. Параметризуя поверхность M в виде $x = \varphi(s)$ по надлежащему $(n-1)$ -мерному параметру $s \in S_0 \subset \mathbb{R}^{n-1}$ (когда можно взять $y_j = \partial\varphi/\partial s_j$, $j = 1, \dots, n-1$), получаем начальные условия

$$x(t_0) = \varphi(s), \quad u(t_0) = w(\varphi(s)), \quad p(t_0) = r(\varphi(s)), \quad s \in S_0$$

и соответствующее решение системы (3) в виде

$$x = X(s, t), \quad u = U(s, t), \quad p = P(s, t), \quad s \in S_0, \quad |t - t_0| \leq \varepsilon$$

Якобиан уравнения $x = X(s, t)$ при $t = t_0$, $s = s^*$, где $\varphi(s^*) = x^*$, не равен нулю, то есть $\Delta(x^*, p^*) \neq 0$. Таким образом, можно разрешить это уравнение относительно (s, t) , чтобы получить $t = T(x)$, $s = S(x)$ и сформировать решение

$$u(x) = U(S(x), T(x)), \quad p(x) = P(S(x), T(x)) = \frac{\partial u}{\partial x}$$

задачи (1). Функция $u(x)$ здесь принадлежит классу C^2 , так как $p(x)$ является, по крайней мере, функцией класса C^1 . Видно, что условие (регулярности) $\Delta(x, p) \neq 0$ является важным и гарантирует две вещи: наличие начальной полосы

$$\Sigma = \{z = (x, u, p) \in \mathbb{R}^{2n+1} : u = w(x), \quad p = r(x), \quad x \in M\}$$

и обратимость уравнения $x = X(s, t)$.

Отметим еще одну форму условия регулярности, которая будет использоваться в дальнейшем. В случае, когда поверхность M задается при помощи скалярной функции g уравнением $g(x) = 0$ и $g_x \neq 0$, выполнены равенства $\langle g_x(x), y_j(x) \rangle = 0$,

$j = 1, \dots, n - 1$, поскольку вектор g_x нормален к M , так же как и вектор $p - q$. Поэтому имеем $g_x = \lambda(p - q)$ с некоторой скалярной величиной λ . Условие регулярности означает, что вектор F_p не принадлежит линейному подпространству, натянутому на y_j . Таким образом,

$$\langle F_p, g_x(x) \rangle \neq 0$$

Это соотношение (условие регулярности) гарантирует существование локального C^2 -решения $u(x)$, определенного по обе стороны от поверхности M .

Если множество Ω задано неравенством $g(x) \leq 0$, то имеем $\langle F_p, g_x(x) \rangle \leq 0$ для начальной задачи и $\langle F_p, g_x(x) \rangle \geq 0$ для терминальной задачи, в зависимости от того, идет ли поток характеристик внутрь Ω или покидает Ω (см. [12]).

Цель данной работы — исследование и сравнение нерегулярных задач, локально связанных со следующими поверхностями: (1) часть граничной поверхности с заданным краевым условием [7, 2, 4, 5]; (2) часть граничной поверхности без первоначально указанного на ней значения искомой функции; это значение вычисляется во время построения решения [11]; (3) сингулярная поверхность, возникающая при построении решения во внутренней части области [10]. Кроме того, будет получено новое достаточное условие существования и единственности нерегулярных решений. Для этой цели используются две вложенные скобки Пуассона (Якоби), возникающие в уравнениях сингулярных характеристик. Знаки скобок определяют характер сингулярности (особенности).

2. Нерегулярная задача и граничные условия на M

Предположим, что условие регулярности не выполнено для всех $x \in M$, то есть для всех $x \in M$ имеем

$$\langle F_p(x, w(x), r(x)), g_x(x) \rangle = 0$$

Такая задача будет называться нерегулярной. Для анализа нерегулярной задачи полагаем, что начальная полоса

$$\Sigma = \{z = (x, u, p) \in \mathbb{R}^{2n+1}: u = w(x), p = r(x), x \in M\} \quad (4)$$

задана заранее, а функции $w(x)$ и $r(x)$ удовлетворяют условиям полосы (3) для $x \in M = \{x \in \mathbb{R}^n: g(x) = 0\}$.

Хотя имеются начальные условия для интегрирования системы характеристик, приведенный алгоритм построения $u(x)$ не работает для нерегулярной задачи, потому что уравнение $x = X(s, t)$, вообще говоря, не может быть разрешено относительно (s, t) . Но нерегулярная задача все же может иметь решение при определенных допущениях.

Чтобы сформулировать такие предположения, обозначим $z = (x, u, p)$ и введем векторное поле (правая часть векторного уравнения характеристик)

$$\xi_F(z) = (F_p, \langle p, F_p \rangle, -F_x - pF_u) \in \mathbb{R}^{2n+1}$$

Будем различать следующие два случая.

Нерегулярная характеристическая задача. Так называется задача, для которой вектор F_p касателен к M в \mathbb{R}^n и вектор ξ_F касателен к Σ в \mathbb{R}^{2n+1} :

$$\langle F_p(z), g_x(x) \rangle = 0, \quad \xi_F \in T_z \Sigma, \quad z \in \Sigma, \quad x \in M$$

Нерегулярная нехарактеристическая задача. В случае, когда выполнено только первое условие касания,

$$\langle F_p(z), g_x(x) \rangle = 0, \quad \xi_F \notin T_z \Sigma, \quad z \in \Sigma, \quad x \in M$$

нерегулярная задача называется нехарактеристической.

Рис. 2 иллюстрирует поведение характеристик в x -пространстве.

Нерегулярная характеристическая задача имеет бесконечное множество C^2 -решений [4, 10]. Нехарактеристическая задача может иметь единственное решение. Выпишем достаточное условие для этого.



Рис. 2

2.1. Начальная полоса для нерегулярной нехарактеристической задачи

В нерегулярном случае догадываемся заменить первое уравнение $F(x, w(x), r(x)) = 0$ в условиях полосы (3) уравнением $\langle F_p(z), g_x(x) \rangle = 0$, тогда как более отдаленная сингулярность может сохраниться. Чтобы сформулировать задачу, введем функции

$$F^i = \left\langle g_x, \frac{\partial}{\partial p} F^{i-1} \right\rangle = \left\langle g_x, \frac{\partial}{\partial p} \right\rangle^i F, \quad i = 1, 2, \dots, \quad F^0 = F$$

Теперь рассмотрим систему относительно неизвестного p :

$$\begin{aligned} F^{k-1}(x, w(x), p) = 0, \quad \langle p - w_x(x), y_j(x) \rangle = 0 \\ j = 1, \dots, n-1, \quad x \in M \end{aligned} \quad (5)$$

Пусть система (5) удовлетворяется в некоторой точке $z^* = (x^*, w(x^*), p^*)$ и справедливо соотношение

$$F^k(z^*) \neq 0$$

Последнее равносильно тому, что якобиан системы отличен от нуля. Таким образом, существует единственное решение $p = r(x)$, $x \in M$, определяющее новое многообразие Σ . Если, кроме того, это решение удовлетворяет $k - 1$ уравнению

$$\begin{aligned} F(x, w(x), r(x)) &= 0 \\ F^1(x, w(x), r(x)) &= \langle g_x, F_p \rangle = 0 \\ &\dots \dots \dots \\ F^{k-2}(x, w(x), r(x)) &= \langle g_x, F_p^{k-3} \rangle = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

где $x \in M$, то будем говорить, что нерегулярная нехарактеристическая задача имеет порядок нерегулярности $k - 1$ и начальную полосу Σ . Уравнения (6) описывают переопределение Σ . Таким образом, ситуация общего положения имеет место только для регулярного случая $k = 1$. Нехарактеристичность такой задачи будет показана в дальнейшем, так же как и неравенство $F^k(z^*) \geq 0$, если мы хотим иметь $g(x) \geq 0$ на Ω .

Для исследования нерегулярной нехарактеристической задачи может быть полезно понятие сингулярных характеристик.

3. Метод сингулярных характеристик

Приведем краткое описание метода сингулярных характеристик для уравнения (1). Как известно, если $u(x)$ и $F(x, u, p)$ гладкие, то локальное построение решения задачи (1) сводится к интегрированию системы (2) классических характеристик. Такое интегрирование создает n -мерную полосу Σ_n , содержащую начальную полосу $\Sigma \subset \Sigma_n$, а решение $u(x)$ является проекцией Σ_n в (x, u) -пространство. Если функция u и/или функция F негладкие, то система (2) терпит разрывы. Особенности (сингулярности), как правило, лежат на гладких многообразиях. Сингулярные характеристики дают способ описания такого многообразия. Дифференциально-геометрические описания регулярных и сингулярных характеристик аналогичны [1]. В регулярном случае уравнение $F(x, u, p) = 0$ определяет $2n$ -мерную поверхность W_1 в $(2n + 1)$ -мерном пространстве (x, u, p) . Классические характеристики (2) задают касательное поле на W_1 , которое генерирует интегральное многообразие Σ_n стандартной 1-формы $du - \langle p, dx \rangle$ (то есть сохраняет свойство полосы $\Sigma \subset \Sigma_n$). Для данного многообразия W_1 поле с такими свойствами определено однозначно с точностью до множителя однородности.

Аналогичные касательные характеристические поля могут быть определены на поверхности W_k нечетной коразмерности $k = 1, 3, \dots$ при некоторых общих требованиях к W_k . Интегральные кривые этого характеристического поля на поверхности коразмерности 3 или выше называются сингулярными характеристиками. Во многих случаях, используя как регулярные, так и сингулярные характеристики, можно построить искомое решение $u(x)$, даже если оно и/или гамильтониан негладкие [10].

Соответствующая методика построения называется *методом сингулярных характеристик* (МСХ). Регулярные и сингулярные характеристики составляют множество обобщенных характеристик.

Дифференциально-геометрическое описание поля характеристик на четномерном многообразии приведено в [1]. Чтобы записать соответствующие аналитические формулы, предположим, что сингулярности функции u лежат на поверхности $\Gamma \subset \Omega$, $\dim \Gamma = n - 1$, которая связана с поверхностью W_3 коразмерности 3 в (x, u, p) -пространстве (см. замечание после теоремы 1). В общем случае W_3 локально описывается тремя уравнениями

$$W_3: F_1(x, u, p) = 0, \quad F_0(x, u, p) = 0, \quad F_{-1}(x, u, p) = 0 \quad (7)$$

Выбор F_i определяется типом сингулярности и свойствами решения, такими как неравенства, которым удовлетворяет вязкостное решение, или условиями согласования через сингулярные поверхности Γ . Одно из F_i может представлять само УЧП, скажем, $F_0 \equiv F$. Вектор p в (7) является предельным значением градиента функции u с рассматриваемой стороны сингулярной гиперповерхности $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$. Соответствующее касательное поле (систему сингулярных характеристик) на W_3 можно записать с помощью так называемого *сингулярного гамильтониана* H^σ :

$$\mu H^\sigma = \{F_1 F_0\} F_{-1} + \{F_0 F_{-1}\} F_1 + \{F_{-1} F_1\} F_0 \quad (8)$$

Здесь $\mu = \mu(z)$ — ненулевой множитель однородности (гладкая функция), а $\{\cdot\}$ — скобка Якоби:

$$\{FG\} = \langle F_x + pF_u, G_p \rangle - \langle G_x + pG_u, F_p \rangle$$

Это выражение становится скобкой Пуассона, если нет зависимости от u , то есть $F_u = 0, G_u = 0$.

Теорема. Пусть $\xi_{H^\sigma}(z^*) \neq 0$ для некоторого $z^* \in W_3$. Тогда система (регулярных характеристик в терминах H^σ из (8))

$$\dot{z} = \xi_{H^\sigma}(z), \quad z \in W_3, \quad \xi_{H^\sigma} = (H_p^\sigma, \langle p, H_p^\sigma \rangle, -H_x^\sigma - p H_u^\sigma) \quad (9)$$

локально определяет единственное (сингулярное) поле характеристик на W_3 .

Сформулированная теорема вытекает из [10, теорема 1.3]. Заметим, что для построения сингулярного многообразия Γ система (9) интегрируется от некоторой начальной $(n - 2)$ -мерной полосы Σ_{n-2} , чтобы получить $(n - 1)$ -мерную полосу Σ_{n-1} , а проекция этой полосы на (x, u) -пространство определяет многообразие Γ и соответствующие значения u .

В [10] также показано, как стандартные типы сингулярных гиперповерхностей, возникающие в дифференциальных играх (универсальные, эквивокальные и фокальные; см. книгу Р. Айзекса [7]), описываются сингулярными характеристиками.

3.1. Эквивокальные сингулярные характеристики в дифференциальных играх

Для иллюстрации рассмотрим сингулярную поверхность эквивокального типа (см. [7]). Регулярные характеристики подходят к эквивокальной поверхности Γ с

одной стороны и отходят от нее с другой, а градиент $p(x)$ разрывен на Γ . В случае гладкого гамильтониана $F \in C^2$ это приводит к следующему набору необходимых условий, определяющих многообразие W_3 :

$$W_3 : \quad F_0 = F = 0, \quad F_1(x, u) = u - v(x) = 0 \\ F_{-1} = \{F_1 F\} = \langle F_p, p - q \rangle = 0, \quad q = \frac{\partial v}{\partial x}$$

Здесь $v(x) \in C^2$ — решение уравнения (1) со стороны подхода к Γ . Равенство, определяющее функцию F_{-1} , является условием касания, которое вытекает из требования существования вязкостного решения. МСХ приводит к следующему результату.

Теорема . Пусть $\mu(z) = \{\{F_1 F\} F_1\}$. Предположим, что $\mu(z^*) \neq 0$ и $\{\{F F_1\} F\} \neq 0$ для некоторого $z^* \in W_3$. Тогда начальная полоса Σ , определяемая формулой (4), лежит в W_3 и является инвариантным многообразием следующей системы сингулярных характеристик:

$$\dot{x} = F_p, \quad \dot{u} = \langle p, F_p \rangle, \quad \dot{p} = -F_x - p F_u - \frac{\{\{F F_1\} F\}}{\{\{F_1 F\} F_1\}} (p - q) \quad (10)$$

Доказательство теоремы 2 вытекает из результатов книги [10, теорема 1.5, лемма 2.3].

Система (10) позволяет построить поверхность Γ . Для нахождения решения $u(x)$ со стороны отхода от Γ имеем нерегулярную краевую задачу благодаря условию касания.

Если гамильтониан F не является гладким, ситуация иная. Расширенный вид негладкого гамильтониана представляет собой минимум из двух (или более) гладких функций H_i :

$$F(x, u, p) = \min[H_0(x, u, p), H_1(x, u, p)]$$

Теперь условия (7) применяются с использованием

$$W_3 : \quad F_0 = H_0, \quad F_{-1} = H_1, \quad F_1(x, u) = u - v(x)$$

Соответствующая система сингулярных характеристик выглядит следующим образом:

$$\dot{x} = \lambda_0 H_{0p} + \lambda_1 H_{1p}, \quad \dot{u} = \lambda_0 \langle p, H_{0p} \rangle + \lambda_1 \langle p, H_{1p} \rangle \\ \dot{p} = -\lambda_0 (H_{0x} + p H_{0u}) - \lambda_1 (H_{1x} + p H_{1u}) - \frac{\{H_1 H_0\}}{\mu} (p - q(x)) \quad (11) \\ \lambda_0 + \lambda_1 = 1, \quad \lambda_0 = \frac{\{F_1 H_1\}}{\mu}, \quad \mu = \{F_1 H_1\} + \{H_0 F_1\}$$

В этом случае построение решения $u(x)$ на другой стороне Γ приводит к регулярной краевой задаче.

3.2. Граничные сингулярные характеристики

Понятие граничных сингулярных характеристик позволяет упростить анализ задачи с нерегулярными граничными условиями по сравнению с анализом, приведенным в [10].

В этом разделе рассмотрим часть $M_0 = M_0^+ + M_0^-$ границы либо без заданного на ней заранее значения решения, либо в случае, когда оно задано, но не совпадает со значением предела решения изнутри Ω . Мы предполагаем, что поток характеристики выходит за пределы Ω через M_0^- , а для M_0^+ характеристики не приближаются к границе.

Предположим, что в окрестности M_0^+ область Ω локально задается неравенством $g(x) < 0$, то есть

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n: g(x) < 0\}$$

Здесь $g(x)$ — гладкая скалярная функция, так что поверхность M_0^+ описывается равенством $g(x) = 0$. Таким образом, предположение относительно M_0^+ означает, что

$$M_0^+: \langle F_p, g_x \rangle \leq 0$$

где g_x — вектор внешней нормали к $\partial\Omega$. Вектор $p(x) = u_x(x)$ в точке x на границе $g(x) = 0$ обозначает непрерывное продолжение градиента из открытой области $g(x) < 0$. Следовательно, многообразие Σ^+ , записанное ниже, определяется выполнением условия полосы (так как имеем $F(x, u(x), u_x(x)) = 0$):

$$\Sigma^+ = \{z = (x, u, p) \in \mathbb{R}^{2n+1}: u = u(x), p = u_x(x), x \in M_0^+\}$$

Решение исходной краевой задачи понимается в вязкостном смысле (см., например, [5, 10, 6]). Как показано в [6], так называемое свойство верхнего решения должно быть выполнено вплоть до поверхности M_0 . Исходя из этого, в [11] доказано, что в случае гладкого гамильтониана $F(x, u, p)$ имеют место следующие условия на M_0^+ :

$$\langle F_p, g_x \rangle \geq 0, \quad \langle F_{pp}g_x, g_x \rangle = -\{\{gF\}g\} \geq 0$$

Сравнение с предыдущим неравенством на M_0^+ приводит к равенству

$$\langle F_p, g_x \rangle = \{gF\} = 0$$

Получаем, что три условия

$$W_3: F_0 = F = 0, \quad F_1(x) = g(x) = 0, \quad F_{-1} = \{gF\} = \langle F_p, g_x \rangle = 0$$

выполнены на границе. Эти условия порождают систему сингулярных характеристик, аналогичную системе для эквивокальной поверхности (10).

Теорема . Пусть $\mu(z) = \{\{gF\}g\}$. Предположим, что для некоторого $z^* \in W_3$ выполнены соотношения $\mu(z^*) \neq 0$ и $\{\{Fg\}F\} \neq 0$. Тогда начальная полоса Σ^+ лежит в W_3 и является инвариантным многообразием следующей системы характеристик:

$$\dot{x} = F_p, \quad \dot{u} = \langle p, F_p \rangle, \quad \dot{p} = -F_x - pF_u + \frac{\{\{Fg\}F\}}{\langle F_{pp}g_x, g_x \rangle} g_x \quad (12)$$

Доказательство теоремы 3 аналогично доказательству теоремы 2 (см. также [11]). В дальнейшем будет показано, что числитель $\{\{Fg\}F\}$ неотрицателен.

В случае негладкого гамильтониана $F = \min[H_0, H_1]$ имеем $F_i = 0$ на граничной поверхности, где

$$W_3: \quad F_0 = H_0, \quad F_1(x) = g(x), \quad F_{-1} = H_1$$

Это приводит к следующей системе уравнений характеристик, похожей на (11):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \lambda_0 H_{0p} + \lambda_1 H_{1p}, & \dot{u} &= \lambda_0 \langle p, H_{0p} \rangle + \lambda_1 \langle p, H_{1p} \rangle \\ \dot{p} &= -\lambda_0 (H_{0x} + p H_{0u}) - \lambda_1 (H_{1x} + p H_{1u}) - \frac{\{H_1 H_0\}}{\mu} g_x \\ \lambda_0 + \lambda_1 &= 1, & \lambda_0 &= \frac{\{g H_1\}}{\mu}, & \mu &= \{g H_1\} + \{H_0 g\} \end{aligned} \quad (13)$$

Регулярные характеристики отходят от граничной поверхности трансверсально, как в регулярной задаче. В общем случае тангенциальный отход характеристик также возможен, если решение локально определяется одной из ветвей H_0 или H_1 . Тогда вместо (13) имеем систему сингулярных характеристик, похожую на (12), где в качестве F записано H_0 или H_1 .

3.3. Сингулярность более высокого порядка

В случае гладкого гамильтониана дальнейшая сингулярность может возникнуть, когда $\{g\{gF\}\} = 0$ и $\{g\{g\{gF\}\}\} \neq 0$ на Σ^+ . Вероятен также и следующий шаг. Для его описания используем функции F_i , введенные ранее, записав их другим эквивалентным представлением в терминах скобок Якоби:

$$F^i = \{gF^{i-1}\} = \left\langle g_x, \frac{\partial}{\partial p} \right\rangle^i F, \quad i = 1, 2, \dots, \quad F^0 = F$$

Предположим, что для некоторого k имеем $F^i = 0$, $i = 0, 1, \dots, k-1$, и $\{F^{k-1}F\} \neq 0$ на Σ^+ . Рассмотрим многообразие

$$W_3: \quad F_0 = F = 0, \quad F_1(x) = g(x) = 0, \quad F_{-1} = F^{k-1} = 0$$

с определенными на нем сингулярными характеристиками

$$\dot{x} = F_p, \quad \dot{u} = \langle p, F_p \rangle, \quad \dot{p} = -F_x - p F_u - \frac{\{F^{k-1}F\}}{\{gF^{k-1}\}} g_x$$

В дальнейшем будет показано, что на рассматриваемом многообразии из условия $\{F^{k-1}F\} \neq 0$ следует соотношение $F^k = \{gF^{k-1}\} \neq 0$.

4. Сравнение граничных условий на M и M_0^+

Принимая во внимание нерегулярность условий, например, равенство $\langle F_p, g_x \rangle = 0$ на граничной поверхности M_0^+ , можно увидеть много общего в условиях на M и M_0^+ . С обеими поверхностями M и M_0^+ связано многообразие W_3 ,

а именно,

$$\begin{aligned} \text{для } M : \quad & F = 0, \quad u - w(x) = 0, \quad \langle F_p, p - w_x \rangle = 0 \\ \text{для } M_0^+ : \quad & F = 0, \quad g(x) = 0, \quad \langle F_p, g_x \rangle = 0 \end{aligned}$$

с определенным на нем полем характеристик

$$\xi_H(z) = (H_p, \langle p, H_p \rangle, -H_x - p H_u) \in \mathbb{R}^{2n+1}$$

Здесь H — сингулярный гамильтониан. На многообразии M_0^+ нужно построить поле характеристик, чтобы получить граничное значение $u(x)$, и необходимо иметь x -компоненту H_p вектора ξ_H отличной от нуля, в то время как на M такое значение задано. На многообразии M поле характеристик порождает новое граничное значение, продолжая его от некоторого $(n-2)$ -мерного подмногообразия $M_s \subset M$ на все M . Продолженное значение должно быть равным заданному. И это действительно имеет место, так как функция $u - w(x)$ является первым интегралом поля ξ_H . В самом деле,

$$\frac{d}{dt}(u - w(x)) = \dot{u} - \langle w_x, \dot{x} \rangle = \langle H_p, p - w_x \rangle = 0$$

поскольку $p - w_x$ — вектор нормали к M , то есть $g_x = \lambda(p - w_x)$.

Таким образом, более важным является поле характеристик для поверхности M_0^+ . Из уравнений характеристик

$$\dot{x} = F_p, \quad \dot{u} = \langle F_p, p \rangle, \quad \dot{p} = -F_x - p F_u - \frac{A}{B}(p - q)$$

можно предположить, что достаточными условиями эффективности системы могут быть соотношения $A \neq 0$ и $B \neq 0$, что также приводит к правильному выбору многообразия W_3 . В следующем разделе покажем, что условие $B \neq 0$ следует из соотношения $A \neq 0$.

Интересная ситуация возникает в регулярном случае, когда многообразии

$$W_3 : \quad F(z) = 0, \quad g(x) = 0, \quad u - w(x) = 0$$

определяется граничными условиями. Поле характеристик $\xi_H(z)$ на W_3 для построения значения искомой функции не нужно, так как это значение задано. Для того чтобы понять роль поля $\xi_H(z)$, введем понятие характеристической точки [1]. Точка $z \in W_3$, для которой $\xi_H(z) = 0$, называется характеристической точкой многообразия W_3 .

Лемма 1. *Начальная поверхность Σ для регулярной задачи состоит из характеристических точек многообразия W_3 , определяемого уравнением и начальными условиями.*

Доказательство. Характеристическое поле многообразия W_3 имеет вид

$$\xi_H(z) = (0, 0, \langle F_p, p - w_x \rangle g_x - \langle F_p, g_x \rangle (p - w_x))$$

В этом $(2n+1)$ -векторе только n последних компонент не равны тождественно нулю. Условие характеристичности точки $z = (x, u, p) \in W_3$ принимает вид

$$\langle F_p, p - w_x \rangle g_x - \langle F_p, g_x \rangle (p - w_x) = 0$$

Пусть $y_1(x), \dots, y_{n-1}(x) \in \mathbb{R}^n$ — базис касательного пространства $T_x M$, то есть, в частности,

$$\langle g_x, y_j \rangle = 0$$

Умножая скалярно приведенное выше n -векторное уравнение на y_j , получаем

$$\langle F_p, g_x \rangle \langle y_j, p - w_x \rangle = 0, \quad j = 1, \dots, n-1$$

Отметим, что аналогичные умножения на F_p дают тождественный нуль. Это означает, что среди n нетривиальных уравнений в $\xi_H(z) = 0$ только $n-1$ независимы. Для регулярного случая имеем

$$\langle F_p, g_x \rangle \neq 0$$

Приведенные выше уравнения совместно с уравнением (1) дают систему (3) для начальной полосы, что завершает доказательство леммы.

Таким образом, начальная полоса в регулярной задаче состоит из стационарных точек поля характеристик $\xi_H(z)$ на многообразии W_3 .

5. Достаточные условия существования и единственности

В теореме 4, сформулированной далее в этом разделе, рассмотрим локальные решения, определенные, возможно, по одну или обе стороны граничной поверхности. Решение нерегулярной нехарактеристической задачи надо искать в более широком классе функций. Такой класс, определенный данной поверхностью Γ , обозначим через $K(\Gamma)$.

Пусть окрестность D точки $x^* \in \Gamma \subset \mathbb{R}^n$ задана, и пусть гладкая гиперповерхность Γ делит область D на две открытых подобласти:

$$D = D_0 + \Gamma + D_1$$

Функции класса $K(\Gamma)$ определяются либо во всей области D , либо только в одной из подобластей $D_0 + \Gamma$, $D_1 + \Gamma$. Потребуем дифференциальные свойства

$$u(x) \in C^1(D), \quad u(x) \in C^2(D_i), \quad i = 0, 1$$

для функций, определенных в D , и

$$u(x) \in C^1(D_i + \Gamma), \quad u(x) \in C^2(D_i)$$

для функций, определенных в D_i . Включение $u(x) \in C^1(D_i + \Gamma)$ означает, что градиент функции $u(x)$ имеет непрерывное продолжение из D_i на Γ . Это позволяет дать классическую интерпретацию решения уравнения

$$F\left(x, u(x), \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0$$

в области $D_i + \Gamma$. Таким образом, может не быть непрерывных вторых производных для $u(x) \in K(\Gamma)$, хотя $C^2(D) \subset K(\Gamma)$.

Роль множества Ω в (1) играет D_0 или D_1 .

5.1. Формулировка простой задачи

Для упрощения доказательства теоремы 4 сделаем замену переменных. Поскольку важные условия теоремы 4 выражаются в терминах скобок Якоби, можно попробовать применить контактные преобразования переменных, сохраняющие значение скобок и вид характеристических уравнений.

Используя контактные преобразования, можно свести исходную задачу к так называемой простой задаче с граничной поверхностью, граничным условием и начальной полосой следующего вида (см. [10]):

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0\}, \quad u(0, x_2, \dots, x_n) = 0$$

$$\Sigma = \{(x, u, p) \in \mathbb{R}^{2n+1} : x_1 = 0, u = 0, p_1 = 1, p_2 = 0, \dots, p_n = 0\}$$

Значение $p_1 = 1$ удовлетворяет уравнению

$$F^{k-1}(0, x_2, \dots, x_n, 0, p_1, 0, \dots, 0) = 0$$

и соотношению

$$\frac{\partial F^{k-1}}{\partial p_1} = F^k \neq 0$$

в то время как дополнительные $k - 1$ уравнений, переопределяющих начальную полосу Σ , принимают форму

$$F = F^0(0, x_2, \dots, x_n, 0, p_1, 0, \dots, 0) = 0$$

$$F^i(0, x_2, \dots, x_n, 0, p_1, 0, \dots, 0) = \frac{\partial F^{i-1}}{\partial p_1} = 0, \quad i = 1, \dots, k - 2$$

Функция $g(x)$ для простой задачи имеет вид $g(x) = x_1$.

Простая задача может быть рассмотрена для $n = 2$, когда $x = (x_1, x_2)$; случай $n > 2$ исследуется аналогично. Поверхность M в $2D$ -простой задаче — это координатная ось $x_1 = 0$ с нулевым граничным условием на ней:

$$M = \{(x_1, x_2) : x_1 = 0, x_2 \in \mathbb{R}^1\}, \quad u(0, x_2) = 0, \quad x_2 \in \mathbb{R}^1$$

Локальные рассуждения на самом деле будут ограничены некоторым отрезком $|x_2| \leq \delta$, исходной точкой является начало координат $x^* = (0, 0)$.

Таким образом, начальная полоса (поверхность Σ) — одномерная прямая линия в 5-мерном пространстве:

$$\Sigma = \{(x_1, x_2, u, p_1, p_2) : x_1 = 0, x_2 = s, u = 0, p_1 = 1, p_2 = 0, s \in \mathbb{R}^1\}$$

Следующие значения обращаются в нуль на Σ : $x_1 = 0$, $u = 0$, $p_2 = 0$, $F_{p_1} = 0$. Некоторые дополнительные обращающиеся в нуль величины, такие как $F_{x_2} = 0$ и $F_{p_1 x_2} = 0$, можно найти дифференцированием по x_2 переопределяющих равенств.

Следствие 2 из теоремы 4 связано с простой задачей.

5.2. Формулировка теоремы

Ниже будут использованы различные комбинации вложенных скобок. Введем новые обозначения $F_0 = F$ и $F_1 = g$ для функций $F(z)$ и $g(x)$ и рассмотрим вложенные скобки следующей структуры:

$$G_{ms} = \{ \dots \{F_0 F_1\} F_{j_3} \dots F_{j_{m+1}} \}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (14)$$

Здесь j_ν равно либо 0, либо 1; s — число единиц в векторе $(j_1, j_2, j_3, \dots, j_{m+1})$ с $j_1 = 0, j_2 = 1$. Следовательно, $s \leq m$. Скобки с одинаковым m будем называть скобками уровня m .

Нам необходимы также специальные обозначения для двух крайних случаев, когда все значения $j_\nu, \nu \geq 2$, в (14) одинаковые:

$$F_0^{i+1} = \{g F_0^i\} = \left\langle g_x, \frac{\partial}{\partial p} \right\rangle^{i+1} F$$

$$F_0^0 = F, \quad F_1^{i+1} = \{F_1^i F\}, \quad F_1^0 = g(x), \quad i = 0, 1, \dots$$

Здесь F_0^i совпадает с введенным ранее F^i .

Функции F, w и поверхность $M \subset D$ предполагаются достаточно гладкими.

Теорема. *Нерегулярная нехарактеристическая задача с заданной начальной поверхностью Σ разрешима в классе функций $K(M)$, если для некоторого целого $k \geq 2$ выполнены следующие условия:*

$$F_0^i(z) = 0, \quad z \in \Sigma, \quad i = 0, 1, \dots, k-1$$

$$\{F_0^{k-1} F_0\} \neq 0 \quad \text{для} \quad z^* \in \Sigma$$

При нечетных k решение единственно и определяется во всей области D ; поток характеристик имеет направление g_x (направление $-g_x$), если $F_1^k > 0$ ($F_1^k < 0$).

Для четных k скобки F_1^k и $\{F_0^{k-1} F_0\}$ имеют один и тот же знак и существуют два решения (или одно двузначное решение), которые при $F_1^k > 0$ определены в той полукрестности M , куда направлен вектор g_x , а при $F_1^k < 0$ — в противоположной полукрестности. Эти решения как при четных, так и при нечетных k имеют ограниченные вторые производные в точках M .

Следствие 1. *Все скобки уровня $0, 1, \dots, k-1$, порожденные функциями $F_0 = F$ и $F_1 = g$, тождественно равны нулю на Σ . Все скобки уровня k отличны от нуля; скобки с участием нечетного числа функций F_1 имеют для четных k тот же знак, что и $\{F_0^{k-1} F_0\}$. Этот знак является инвариантным относительно замены $F \rightarrow -F$.*

Следствие 2. *Нерегулярная простая задача имеет решение класса $K(M)$, если для некоторого $k \geq 2$ в точках $(0, x_2, 0, 1, 0) \in \Sigma$ выполнены условия*

$$\frac{\partial F}{\partial p_1} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial^{k-1} F}{\partial p_1^{k-1}} = 0, \quad \frac{\partial^k F}{\partial p_1^k} \neq 0, \quad F_{x_1} + p_1 F_u \neq 0$$

Для четных k два решения определены в полуплоскости $x_1 \geq 0$, если произведение $(-F_{x_1} - p_1 F_u) \frac{\partial^k F}{\partial p_1^k}$ положительно, и в полуплоскости $x_1 \leq 0$, если произведение отрицательно.

Замечание 1. В предварительных рассуждениях, а также в формулировке утверждения достаточности в теореме 4 и в его доказательстве надо следовать схеме [10, теорема 1.6]. Разница лишь в том, что вместо понятия сингулярных характеристик (10) здесь используется понятие граничных характеристик (12) (которые были введены позднее в [11]). Это позволяет несколько упростить условия теоремы и ее доказательство.

Замечание 2. Теорема 4 позволяет определить тип решения нерегулярной нехарактеристической задачи только вычислением скобок Якоби в точках исходной поверхности Σ . Скобки Якоби не изменяются при преобразовании в x -пространстве. Так как произвольная начальная гладкая поверхность M может быть преобразована в плоскость $x_1 = 0$, условия теоремы 4 инвариантны и не зависят от конкретной системы координат.

6. Примеры

6.1. Одномерный иллюстративный пример

В качестве иллюстрации приведем пример с минимально возможной размерностью вектора x (равной единице), допустимой в теореме 4.

Рассмотрим задачу Коши

$$F = F(x, p) = p^m - x = 0, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad p = \frac{du}{dx}, \quad u(0) = 0$$

Здесь $m > 1$ — целое число; x, u и p — скаляры; начальная (нульмерная) поверхность M является точкой $x = 0$. Начальная полоса Σ также нульмерная, а параметр p на ней удовлетворяет условию $F(0, p) = p^m = 0$. Таким образом, $\Sigma = \{(0, 0, 0)\}$, то есть многообразие Σ состоит из одной точки.

Задача нерегулярная и нехарактеристическая, поскольку

$$\frac{\partial F}{\partial p} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial^{m-1} F}{\partial p^{m-1}} = 0, \quad \frac{\partial^m F}{\partial p^m} \neq 0, \quad F_x + p F_u = -1 \neq 0$$

Характеристическая система с соответствующими начальными условиями на Σ имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F_p = mp^{m-1}, & \dot{u} &= p F_p = mp^m, & \dot{p} &= -F_x = 1 \\ x(0) &= 0, & u(0) &= 0, & p(0) &= 0 \end{aligned}$$

Единственный касательный вектор к Σ и характеристический вектор ξ_F на Σ равны соответственно $\eta = (0, 0, 0)$, $\xi_F = (0, 0, 1)$ и не коллинеарны. Это также означает, что рассматриваемая задача при $m > 1$ является нерегулярной нехарактеристической.

Решение характеристической системы записывается в виде

$$x(t) = t^m, \quad u(t) = \frac{m}{m+1} t^{m+1}, \quad p(t) = t$$

Для нечетных m первые два уравнения дают соотношения

$$t = x^{1/m}, \quad u(x) = \frac{m}{m+1}x^{(m+1)/m}$$

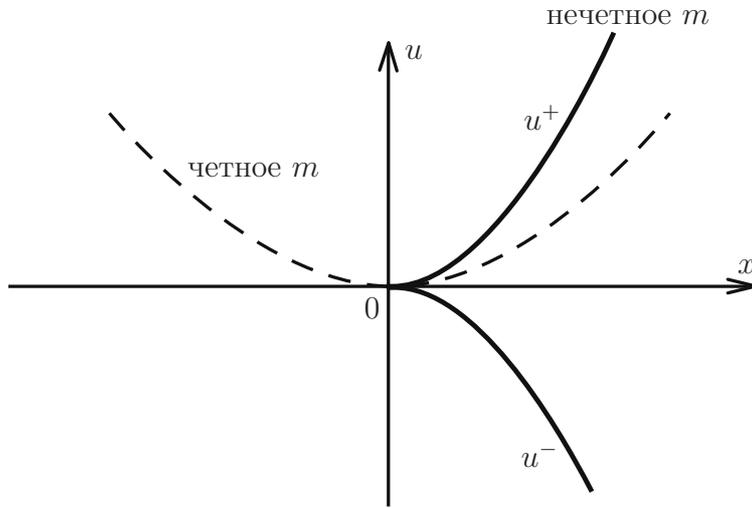


Рис. 3

При четных m значение $x(t)$ положительно и обратная к $x = t^m$ функция имеет две ветви

$$t = x^{1/m}, \quad t = -x^{1/m}, \quad x \geq 0$$

Подстановка в $u = u(t)$ дает два решения

$$u^+(x) = \frac{m}{m+1}x^{(m+1)/m}, \quad u^-(x) = -\frac{m}{m+1}x^{(m+1)/m}, \quad x \geq 0$$

которые определены только для $x \geq 0$ (рис. 3).

Функция $u(x)$ во всех случаях имеет при $x = 0$ нулевую первую производную, вторая производная бесконечна для $m > 1$. Если $m = 1$, то вторая производная конечна, что соответствует регулярной задаче.

6.2. Дифференциальная игра с фазовыми ограничениями

Рассмотрим краевую задачу для $u(x, t)$ с $x, t \in \mathbb{R}$:

$$F(x, t, p, q) = q + \sqrt{a^2 + p^2} - t\sqrt{b^2 + p^2} = 0, \quad (x, t) \in \Omega$$

$$p = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\Omega = \{(x, t) : t > 0, -x + \alpha t < 0\}, \quad g(x, t) = -x + \alpha t$$

Нас интересует боковая граница $g(x, t) = -x + \alpha t = 0$. Граничное условие дано только для x -полуоси:

$$u(x, 0) = kx, \quad a, b, k = \text{const}, \quad b > a > 0, \quad k < 0$$

Рассматриваем эту задачу как двумерную с $x_1 = x$, $x_2 = t$, $p_1 = p$ и $p_2 = q$.

Поставленная задача является уравнением Гамильтона–Якоби–Беллмана–Айзекса в обратном времени (в соответствии с методикой [7]) для некоторой дифференциальной игры с интегральной платой, терминальным множеством $t = 0$, $x \geq 0$ и фазовым ограничением. Обсуждение этих деталей опускается.

Положим

$$H(t, p) = \sqrt{a^2 + p^2} - t\sqrt{b^2 + p^2}$$

Имеем

$$F = q + H(t, p) = 0$$

Можно проинтегрировать следующие уравнения регулярных характеристик с соответствующими начальными условиями на полуоси $x \geq 0$:

$$\begin{aligned} \dot{x} = F_p = H_p &= \frac{p}{\sqrt{a^2 + p^2}} - \frac{tp}{\sqrt{b^2 + p^2}} \\ \dot{u} = pF_p + qF_q &= pH_p - H, \quad \dot{p} = -F_x = 0 \\ x(0) = s, \quad u(0) &= ks, \quad p(0) = k, \quad s \in \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

Уравнения для переменных t и q здесь не выписаны, так как t выступает в качестве независимой переменной и $q = -H(t, p)$.

Проекция характеристик на (x, t) -плоскость суть параболы

$$x - C = \frac{kt}{\sqrt{a^2 + k^2}} - \frac{kt^2}{2\sqrt{b^2 + k^2}}, \quad C = \text{const}$$

определяющие следующее решение на части Ω :

$$u(t, x) = kx + \frac{t^2}{2}\sqrt{b^2 + k^2} - t\sqrt{a^2 + k^2}$$

Существует последняя парабола при $C = C_0$, касающаяся боковой стороны $g(x, t) = 0$ в точке $t = t_0$ (рис. 4):

$$t_0 = \sqrt{\frac{b^2 + k^2}{a^2 + k^2}} - \frac{\alpha\sqrt{b^2 + k^2}}{k}, \quad C_0 = \frac{t_0}{2} \left(\alpha - \frac{k}{\sqrt{a^2 + k^2}} \right)$$

После этой параболы оставшаяся часть Ω не заполнена характеристиками. Чтобы заполнить ее, сначала проинтегрируем уравнения сингулярных характеристик вдоль боковой границы. Для этой части границы, в силу $g(x, t) = -x + \alpha t = 0$, условие касания имеет вид

$$\{gF\} = -H_p + \alpha = 0$$

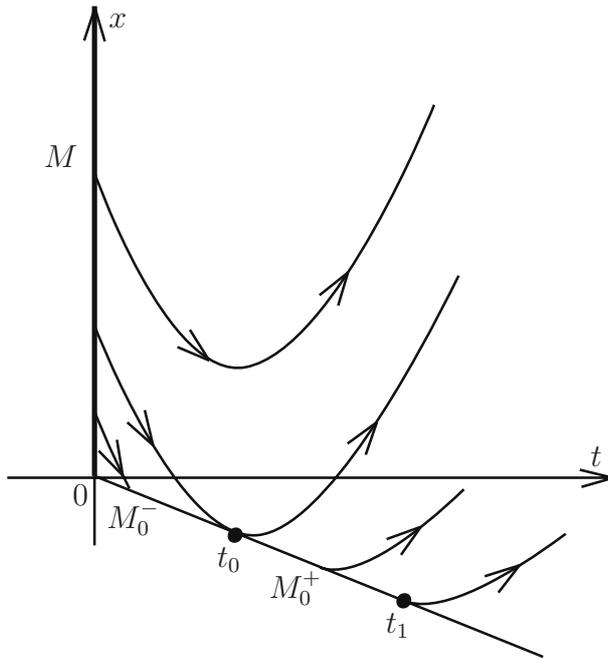


Рис. 4

Вложенные скобки могут быть легко вычислены:

$$\{\{Fg\}F\} = -\frac{p}{\sqrt{b^2 + p^2}}, \quad \{\{gF\}g\} = -H_{pp}$$

Сингулярные характеристики вдоль границы принимают вид

$$\dot{x} = H_p = \alpha, \quad \dot{p} = \frac{p}{H_{pp}\sqrt{b^2 + p^2}}, \quad \dot{t} = p\alpha - H$$

Заметим, что для регулярных характеристик имеем $\dot{p} = 0$.

Интегрирование уравнений сингулярных характеристик дает возможность получить граничные значения для всех переменных на свободной части боковой границы и, тем самым, построить начальную полосу для нерегулярной нехарактеристической задачи. В общем случае это позволяет проинтегрировать регулярные характеристики в Ω и заполнить всю область. Чтобы убедиться в том, что характеристики будут заполнять выделенную сторону, нужно проверить знак скобки в теореме 4 с четным $k = 2$:

$$\{F^1 F\} = \{\{gF\}F\} = -\{\{Fg\}F\} = \frac{p}{\sqrt{b^2 + p^2}} < 0$$

Таким образом, две ветви решения будут заполнять сторону, противоположную направлению вектора $(-1, \alpha)$ (имеем $g_x = -1, g_t = \alpha$), которая на самом деле необхо-

дима для данной задачи. Среди этих двух ветвей, безусловно, выберем ту, которая соответствует прямому времени t .

Заметим, что сингулярные характеристики распространяются на некотором интервале $t_0 \leq t \leq t_1$. Для положительного $\alpha > 0$ имеем $t_1 = \infty$, а для $\alpha \leq 0$ момент t_1 конечен, то есть сингулярные характеристики заканчиваются.

Для отрицательных α можно показать, что остается пустая часть в Ω . Это означает, что из этой части невозможно привести фазовый вектор (вектор состояния) на терминальное множество $t = 0$, $x \geq 0$ без нарушения фазовых ограничений. Математически можно назначить (не единственным образом) определенные граничные значения на пустой части линии $g(x, t) = 0$, чтобы получить какое-то решение. Таким образом, в этом смысле решение не единственно.

Отметим также, что для данной конкретной задачи малой размерности можно найти значение p на боковой границе только из условия касания $-H_p + \alpha = 0$ без интегрирования системы сингулярных характеристик. Например, при $\alpha = 0$ получаем

$$x = 0, \quad p = -a\sqrt{\frac{(b/a)^2 - t^2}{t^2 - 1}}, \quad 1 < \sqrt{\frac{b^2 + k^2}{a^2 + k^2}} = t_0 \leq t \leq t_1 = \frac{b}{a}$$

Формально ограничение на t исходит из требования иметь положительное выражение под корнем. Несмотря на то что момент t_1 конечен, для частного случая $\alpha = 0$ область заполнена, потому что последняя регулярная характеристика, начинающаяся при $t = t_1$, $x = 0$, совпадает с t -осью $t \geq t_1$.

6.3. Граничные характеристики в игровой задаче о брахистохроне

Этот пример иллюстрирует граничные характеристики в $2D$ -задаче с негладким гамильтонианом, в то время как значение искомой функции может быть гладким. Задача известна как задача о долихобрахистохроне (брахистохроне), подробную формулировку и решение см. [7, 3]. Модификация задачи рассмотрена в [8].

Игра с динамикой

$$\dot{x}_1 = \sqrt{x_2} \cos u_1 + \frac{1}{2}w(u_2 + 1), \quad \dot{x}_2 = \sqrt{x_2} \sin u_1 + \frac{1}{2}w(u_2 - 1)$$

$$u_1 \in [0, 2\pi), \quad |u_2| \leq 1$$

рассматривается в первом квадранте (x_1, x_2) -плоскости. Здесь u_1 — управление первого игрока, u_2 — второго; $w > 0$ — параметр задачи. Терминальная поверхность определяется соотношениями $x_1 = 0$, $x_2 \geq 0$. Платой служит время до попадания на терминальную поверхность. Оно минимизируется первым игроком и максимизируется вторым.

Как показано в [7, 3], допустимая область границы задается неравенством $x_2 > w^2$ и начинается в точке

$$A: \quad x_1 = 0, \quad x_2 = w^2$$

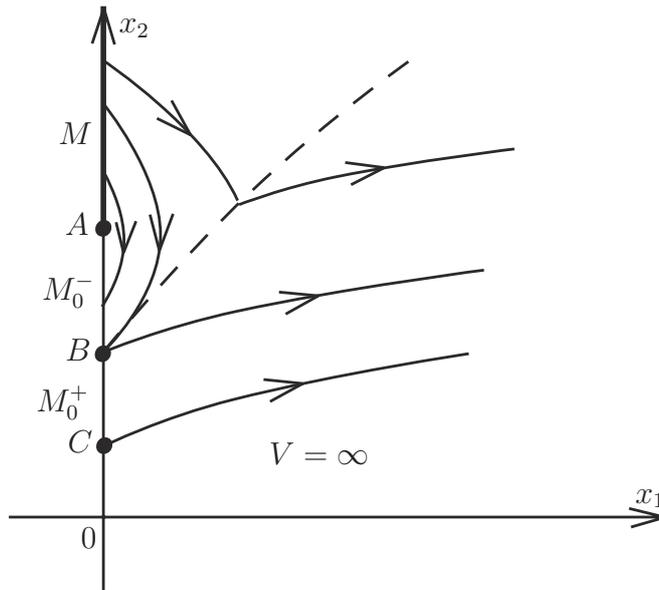


Рис. 5

Имеются еще две точки на оси x_2 ,

$$B: \quad x_1 = 0, \quad x_2 = b = \frac{2\pi^2 w^2}{(\pi + 2)^2} \approx 0.75w^2$$

$$C: \quad x_1 = 0, \quad x_2 = c = \frac{w^2}{2}$$

характеризующие решение (рис. 5). Через отрезок AB поток характеристик в обратном времени выходит за пределы первой четверти. Игра также может закончиться, если она началась вблизи участка BC при сколь угодно малом положительном x_1 . Движение вдоль участка BC отвечает сингулярным характеристикам.

Уравнение Гамильтона – Якоби – Беллмана – Айзекса для данной задачи в терминах частных производных p_1 и p_2 цены игры $V(x_1, x_2)$ имеет вид

$$\min_{u_1} \max_{u_2} \left[p_1 \left(\sqrt{x_2} \cos u_1 + \frac{w(u_2 + 1)}{2} \right) + p_2 \left(\sqrt{x_2} \sin u_1 + \frac{w(u_2 - 1)}{2} \right) \right] + 1 =$$

$$= \max \left[R + \frac{w(p_1 + p_2)}{2}, R - \frac{w(p_1 + p_2)}{2} \right] = 0$$

где

$$R = 1 + \frac{w(p_1 - p_2)}{2} - \sqrt{x_2} \sqrt{p_1^2 + p_2^2}$$

Оптимальные управления задаются равенствами

$$\begin{aligned} \cos u_1 &= -\frac{p_1}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}}, & \sin u_1 &= -\frac{p_2}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}} \\ u_2 &= \operatorname{sign}(p_1 + p_2) \end{aligned}$$

Обе гладкие ветви гамильтониана должны обращаться в нуль на отрезке BC :

$$H_0 = R + \frac{w(p_1 + p_2)}{2} = 0, \quad H_1 = R - \frac{w(p_1 + p_2)}{2} = 0$$

Это эквивалентно вместе с $R = 0$ условию u_2 -переключения $p_1 + p_2 = 0$, что дает $p_1 = -p_2$. На отрезке BC , очевидно, имеем $p_2 \leq 0$. Таким образом,

$$\cos u_1 = \frac{p_2}{\sqrt{2p_2^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin u_1 = -\frac{p_2}{\sqrt{2p_2^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Из равенства $R = 0$ получаем соотношение

$$p_2 = \frac{1}{w - \sqrt{2x_2}}$$

которое согласуется с гипотезой $p_2 \leq 0$ на BC . В общем случае, чтобы найти сингулярные управления, нужно написать уравнения сингулярных характеристик. Но в рассматриваемой задаче малой размерности достаточно использовать условие $\dot{x}_1 = 0$:

$$\dot{x}_1 = -\sqrt{x_2/2} + w(u_2 + 1)/2 = 0, \quad u_2^\sigma = \sqrt{2x_2}/w - 1 > 0$$

Можно также проверить, что $u_2^\sigma \leq 1$.

Отметим, что в задаче есть u_2 -линия переключения (пунктирная линия на рис. 5), идущая к точке B изнутри первой четверти. Таким образом, отрезок BC можно рассматривать как продолжение линии переключения, где $p_1 + p_2 = 0$, с угловой точкой B .

Полученные результаты совпадают с теми, что описаны в [3] на основе другого подхода.

Сингулярные характеристики в обратном времени задают на отрезке BC значения p_1, p_2 и V . Для этой частной задачи нужно проинтегрировать только скалярное уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(0, x_2)}{\partial x_2} &= \frac{1}{w - \sqrt{2x_2}} \\ V(0, b) = V^* &= \frac{\pi^2 w}{\pi + 2}, \quad b = \frac{2\pi^2 w^2}{(\pi + 2)^2} \end{aligned}$$

Здесь V^* — оптимальное время, которое требуется, чтобы перейти из точки B на множество M . Получаем

$$\begin{aligned} V &= \sqrt{2b} - \sqrt{2x_2} + w \ln \frac{\sqrt{2b} - w}{\sqrt{2x_2} - w} + \frac{\pi^2 w}{\pi + 2} \\ c < x_2 &\leq b, \quad c = \frac{w^2}{2} \end{aligned}$$

Несмотря на тот факт, что значение $V(0, x_2)$ определяется по постановке задачи как нуль для $x_2 \geq 0$, решение $V(x_1, x_2)$ отлично от нуля и конечно для $c < x_2 \leq b$ при $x_1 \rightarrow +0$. Значение $V(x_1, x_2)$ бесконечно для $0 \leq x_2 \leq c$, $x_1 = 0$.

Теперь можно решить краевую задачу с отрезком BC , взятым в качестве начальной поверхности для уравнения $H_1(x, p) = 0$. В отличие от предыдущего примера, это регулярная краевая задача, так как на BC имеем

$$\frac{dx_1}{d\tau} = -H_{1p_1} = \sqrt{\frac{x_2}{2}} > 0, \quad \tau = T - t$$

Последние два примера демонстрируют определенное качественное сходство. В обоих случаях за поверхностью M следует поверхность M_0^- , через которую поток характеристик выходит из области Ω , а потом приходит на поверхность M_0^+ с сингулярными характеристиками для соответствующей краевой задачи. Такие конфигурации также появляются во многих других задачах (см., например, [9]).

7. Выводы

Нерегулярные краевые задачи для нелинейных уравнений в частных производных первого порядка локально рассматриваются в непосредственной близости от следующих поверхностей: (1) часть граничной поверхности с заданным граничным значением; (2) часть граничной поверхности без значения искомой функции, первоначально указанного на ней; нужное значение определяется во время построения решения; (3) сингулярная поверхность, возникающая при построении во внутренней части области.

Построение решения для последних двух случаев может быть проведено методом сингулярных характеристик, что позволяет утверждать, что эти два случая, в отличие от первого, являются ситуациями общего положения.

Показано, что сингулярность решения для нерегулярных задач полностью определяется знаками двух вложенных скобок Пуассона (Якоби), возникающих в уравнениях сингулярных характеристик. Это позволяет сформулировать новое достаточное условие для существования и единственности нерегулярного решения.

Литература

- [1] Арнольд В.И. Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Ижевск: Удмурт. гос. ун-т, 1984. 351 с.
- [2] Basar T., Olsder G.J. Dynamic Noncooperative Game Theory. London: Academic Press, 1995.
- [3] Чигирь С.А. Об игровой задаче о долихобрахистохроне // Прикл. математика и механика, 1976. Т. 40, вып. 6, с. 1003–1013.
- [4] Courant R. Partial Differential Equations. New York: InterScience, 1962. = Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.

-
- [5] *Evans L.C.* Partial Differential Equations. New York: AMS, 1998. = *Эванс Л.К.* Уравнения с частными производными. Новосибирск: Тамара Рожковская, 2003. 560 с.
- [6] *Fleming W.H., Soner H.M.* Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions. Applications of Mathematics, 25. New York: Springer-Verlag, 1993.
- [7] *Isaacs R.* Differential Games. New York: John Wiley, 1965. = *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 480 с.
- [8] *Камнева Л.В.* Достаточные условия стабильности для функции цены дифференциальной игры в терминах сингулярных точек // Прикл. математика и механика, 2003. Т. 67, вып. 3, с. 366–383.
- [9] *Lewin J., Olsder G.J.* Conic surveillance evasion. J. Optim. Theory Appl., 1979. Vol. 19, pp. 107–125.
- [10] *Melikyan A.A.* Generalized Characteristics of First Order PDEs: Applications in Optimal Control and Differential Games. Boston: Birkhäuser, 1998.
- [11] *Меликян А.А.* Сингулярные характеристики в граничных условиях уравнения Гамильтона – Якоби // Докл. РАН., 2005. Т. 404, № 4, с. 451–455.
- [12] *Melikyan A., Novakimyan N., Akhmetzhanov A.* On initial value and terminal value problems for Hamilton – Jacobi equation. System and Control Letters, 2007. Vol. 56, pp. 714–721.

Универсальные поверхности и гладкие решения уравнений Беллмана*

А.А. Меликян, А.И. Овсеевич

В работе исследуются ростки решений нелинейного скалярного уравнения в частных производных первого порядка (уравнения Беллмана). Рассматривается случай, когда гамильтониан, определяющий само уравнение, представляет собой не гладкую функцию, а является минимумом значений двух гладких функций (гамильтонианов). Получены необходимые и близкие к ним достаточные условия, гарантирующие гладкость решения в окрестности заданной точки, принадлежащей универсальной поверхности переключения.

1. Введение

Рассмотрим нелинейное уравнение

$$F\left(x, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0 \quad (1)$$

где $F(x, p)$ — негладкая функция вида

$$F = \min\{F_-, F_+\} \quad (2)$$

а функции F_-, F_+ гладкие.

Уравнение (1) естественным образом возникает, например, в стандартной задаче оптимального быстрогодействия с условием попадания на заданное терминальное многообразие M :

$$\dot{x} = f(x) + vg(x), \quad |v| \leq 1 \quad (3)$$

$$x(T) \in M, \quad T \rightarrow \min \quad (4)$$

Минимизированный гамильтониан (2), связанный с этой задачей, имеет вид

$$F = \langle f, p \rangle - |\langle g, p \rangle| + 1$$

При этом

$$F_- = \langle f, p \rangle - \langle g, p \rangle + 1, \quad F_+ = \langle f, p \rangle + \langle g, p \rangle + 1$$

Заметим, что в данном примере, как и в других, возникающих из задач теории управления, функции F_-, F_+ и F вогнутые по p . Известно [1, 2], что при естественных предположениях о свойствах функций f, g минимальное значение функционала T этой задачи, как функция начального состояния x , является вязкостным решением уравнения (1).

*А.А. Melikyan, А.И. Ovseevich "Universal surfaces and smooth solutions of Bellman's equations", Russian Journal of Mathematical Physics, 2011. Vol. 18, no. 2, pp. 176–182.
Перевод с английского А.И. Овсеевича.

В теории оптимального управления уравнение в частных производных (1) называется уравнением Беллмана (Гамильтона – Якоби – Айзекса – Беллмана), а его решение u — функцией Беллмана. Согласно принципу максимума Понтрягина оптимальные фазовые траектории являются характеристиками (соответствующими гамильтониану $F(x, p)$) в той части фазового пространства, где функция Беллмана гладкая. В дальнейшем будем предполагать, что гамильтонианы F_- и F_+ вогнутые по p .

Рассмотрим поверхность переключения

$$\Gamma = \left\{ x : F_- \left(x, \frac{\partial u}{\partial x} \right) = F_+ \left(x, \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right\}$$

и предположим, что она является универсальной. Это означает, что а) поверхность Γ состоит из оптимальных траекторий, б) оптимальные траектории, исходящие из дополнения к Γ , подходят к ней (то есть направлены) трансверсально.

Возникает вопрос о формулировке условия универсальности в терминах свойств функции Беллмана. Как показано в [3], естественным, хотя и не необходимым или достаточным условием такого рода, является условие гладкости $u \in C^2$.

В работе рассматриваются необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять гамильтонианы F_- , F_+ , чтобы в окрестности данной точки x на универсальной поверхности переключения существовало гладкое решение уравнения Беллмана (1). Для этого приходится использовать язык симплектической геометрии [5], в частности, работать с лагранжевыми многообразиями вместо функций.

2. Гладкая функция Беллмана в окрестности универсальной поверхности

В этом разделе формулируется и доказывается теорема о необходимых условиях, которым удовлетворяет гладкая функция Беллмана на универсальной поверхности. Результат представляет собой частный случай теоремы 6.3 из [3]. Для удобства читателя ниже приведено новое упрощенное и уточненное доказательство. В дальнейшем, ограничиваясь локальным рассмотрением, считаем, что все функции, поверхности и т. п. определены в некоторой нефиксированной окрестности D изучаемой точки x . Иными словами, рассматриваются не сами геометрические объекты, а их ростки в этой точке.

Теорема. Пусть $u \in C^2$ — гладкое в окрестности точки x решение уравнения (1), причем

А) точка x лежит на гладкой гиперповерхности

$$\Gamma = \left\{ x : F_- \left(x, \frac{\partial u}{\partial x} \right) = F_+ \left(x, \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right\}$$

Б) характеристики, исходящие из дополнения к поверхности Γ , направлены в ее сторону и трансверсальны к ней.

Тогда в точке $(x, \frac{\partial u}{\partial x})$ справедливы следующие утверждения.

1. Скобка Пуассона $\{F_- F_+\}$ равна нулю.
2. Выполнены неравенства

$$\{\{F_- F_+\} F_-\} \leq 0, \quad \{\{F_+ F_-\} F_+\} \leq 0$$

Кроме того, поверхность Γ является универсальной в том смысле, что любая характеристика сингулярного гамильтониана F , начинающаяся на поверхности

$$\tilde{\Gamma} = \left\{ (x, p) : x \in \Gamma, p = \frac{\partial u}{\partial x} \right\}$$

остаётся на ней.

Доказательство. Условие трансверсальности B) и классический метод характеристик показывают, что в окрестности точки x существуют гладкие решения u_i уравнений

$$F_i \left(x, \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) = 0, \quad i = \pm \quad (5)$$

совпадающие с u на гиперповерхности Γ . Более того, имеется разбиение

$$D = D_- + \Gamma + D_+$$

окрестности D точки x , где D_i — полуокрестности поверхности Γ , причем $u = u_i$ в области D_i . Покажем, что $u_i \geq u_j$ при $j \neq i$. Иными словами, справедливо соотношение $u = \max\{u_-, u_+\}$.

В самом деле, по определению поверхности Γ , замыкание полуокрестности D_{\pm} можно задать равенствами

$$F_{\pm} \left(x, \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0$$

и неравенствами

$$F_{\mp} \left(x, \frac{\partial u}{\partial x} \right) \geq 0$$

Тот факт, что полученное разбиение окрестности точки x можно задать неравенствами для самих функций u_i является одним из проявлений принципа максимума. Нужный нам вариант принципа максимума можно сформулировать так:

Пусть M — росток многообразия с краем, а v_1, v_2 — гладкие ростки функций в точке края ∂M , совпадающие на ∂M . Предположим, что выполнено дифференциальное неравенство

$$H \left(x, \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) \geq H \left(x, \frac{\partial v_2}{\partial x} \right)$$

где H — гладкий и выпуклый по импульсной переменной гамильтониан. Пусть край — нехарактеристический в том смысле, что ковектор

$$\frac{\partial H}{\partial p} \left(x, \frac{\partial v_1}{\partial x} \right)$$

не обращается в нуль на касательной плоскости к ∂M . Тогда, если ковектор $\frac{\partial H}{\partial p} \left(x, \frac{\partial v_1}{\partial x} \right)$ направлен внутрь M , то выполнено неравенство $v_1 \geq v_2$, если же он направлен наружу, то выполнено противоположное неравенство $v_1 \leq v_2$.

Применим этот принцип максимума к следующей ситуации: пусть $M = D_+$, $H = -F_+$, $v_1 = u_+$, $v_2 = u_-$. Имеем

$$H \left(x, \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) = -F_+ \left(x, \frac{\partial u_+}{\partial x} \right) = 0, \quad H \left(x, \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) = -F_+ \left(x, \frac{\partial u_-}{\partial x} \right) \leq 0$$

Вектор $\frac{\partial H}{\partial p} \left(x, \frac{\partial v_1}{\partial x} \right)$ направлен внутрь D_+ . Следовательно, $u_+ \geq u_-$ в замыкании D_+ .

Аналогично, $u_- \geq u_+$ в замыкании D_- .

Дифференцируя уравнения (5), получим

$$\frac{\partial F_i}{\partial x} + P_i \frac{\partial F_i}{\partial p} = 0 \tag{6}$$

Здесь P_i — матрица Гессе с элементами $\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_l}$, а $\frac{\partial F_i}{\partial x}$, $\frac{\partial F_i}{\partial p}$ — соответствующие градиенты.

Отсюда в свою очередь следует, что

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial F_-}{\partial x}, \frac{\partial F_+}{\partial p} \right\rangle + \left\langle P_- \frac{\partial F_-}{\partial p}, \frac{\partial F_+}{\partial p} \right\rangle &= 0 \\ \left\langle \frac{\partial F_+}{\partial x}, \frac{\partial F_-}{\partial p} \right\rangle + \left\langle P_+ \frac{\partial F_+}{\partial p}, \frac{\partial F_-}{\partial p} \right\rangle &= 0 \end{aligned} \tag{7}$$

где угловые скобки обозначают стандартное скалярное произведение. Положим $\Delta = u_- - u_+$ и определим матрицу Гессе P с элементами $P_{ij} = \frac{\partial^2 \Delta}{\partial x_i \partial x_j}$. Вычитая из первого уравнения (7) второе, получим

$$\{F_- F_+\} + \left\langle P \frac{\partial F_-}{\partial p}, \frac{\partial F_+}{\partial p} \right\rangle = 0 \tag{8}$$

Поскольку $u \in C^2$, то на поверхности Γ имеем $P = 0$ и, следовательно, $\{F_- F_+\} = 0$. Это доказывает утверждение 1 теоремы.

Обозначим функцию $\{F_- F_+\}$ через $F_0 = F_0(x, p)$ и рассмотрим скобку Пуассона $\{F_0 F_i\}$, где $i = \pm$. Принимая во внимание (6), имеем

$$\{F_0 F_i\} = \left\langle \frac{\partial F_i}{\partial p}, \left(\frac{\partial F_0}{\partial x} + P_i \frac{\partial F_0}{\partial p} \right) \right\rangle = \left\langle \frac{\partial F_i}{\partial p}, \frac{\partial}{\partial x} F_0 \left(x, \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) \right\rangle$$

Отсюда, дифференцируя (8) по x и учитывая обращение P в нуль, получаем на поверхности Γ равенство

$$\{F_0 F_i\} = - \sum_{klm} \frac{\partial F_i}{\partial p_k} \frac{\partial F_-}{\partial p_l} \frac{\partial F_+}{\partial p_m} Q_{klm} \tag{9}$$

Здесь $Q_{klm} = \frac{\partial^3 \Delta}{\partial x_k \partial x_l \partial x_m}$ — полностью симметрический тензор. Выберем локальные координаты так, чтобы $x_1 = 0$ было уравнением поверхности Γ и полуокрестность D_+ задавалась неравенством $x_1 > 0$. Тогда $\Delta = o(x_1^2)$ и единственная ненулевая компонента тензора Q_{klm} на поверхности Γ это $Q_{111} = \frac{\partial^3 \Delta}{\partial x_1^3}$.

Рассмотрим для определенности случай $i = -$ в (9). Получим

$$\{F_0 F_-\} = - \left(\frac{\partial F_-}{\partial p_1} \right)^2 \frac{\partial F_+}{\partial p_1} \frac{\partial^3 \Delta}{\partial x_1^3} \tag{10}$$

Поскольку $\Delta \leq 0$ в D_+ и $\Delta = o(x_1^2)$ в окрестности Γ , то имеем $\frac{\partial^3 \Delta}{\partial x_1^3} \leq 0$ на Γ . По предположению теоремы, характеристики направлены к поверхности Γ . Это означает, в частности, что $\frac{\partial F_+}{\partial p_1} \leq 0$ на Γ . Следовательно, из (10) вытекает, что скобка $\{F_0 F_-\}$ имеет тот же знак, что и $\frac{\partial^3 \Delta}{\partial x_1^3}$, то есть $\{F_0 F_-\} \leq 0$. Аналогичные рассуждения показывают, что $\{F_0 F_+\} \geq 0$. Это окончательно доказывает утверждение 2 теоремы.

Универсальность поверхности Γ , то есть тот факт, что она состоит из сингулярных характеристик, является следствием трансверсального подхода характеристик гамильтонианов F_{\pm} к поверхности Γ из областей D_{\pm} .

Замечание. Отметим, что доказательство утверждения 1 теоремы можно оформить более геометрически и практически без формул. Для этого вместо функций u_{\pm} рассмотрим соответствующие лагранжевы многообразия $L_{\pm} = \{(x, \frac{\partial u_{\pm}}{\partial x})\}$. Поверхность $\tilde{\Gamma}$ является гиперповерхностью в L_{\pm} , и условие $u \in C^2$ означает, что вдоль $\tilde{\Gamma}$ лагранжевы многообразия L_{\pm} касаются друг друга. Рассмотрим гамильтоновы векторные поля $\xi_{\pm} = \xi_{F_{\pm}}$, где ξ_H обозначает гамильтоново векторное поле с гамильтонианом H . Очевидно, что поле ξ_{\pm} касается L_{\pm} . Следовательно, вдоль $\tilde{\Gamma}$ оба поля касаются обоих многообразий одновременно. Поскольку симплектическая форма обращается в нуль на касательном пространстве к многообразию L_{\pm} , то, в частности, значение формы на паре векторов ξ_{\pm} равно нулю в точках $\tilde{\Gamma}$. Но это значение совпадает со скобкой Пуассона $\{F_+ F_-\}$.

3. Достаточные условия существования универсальной поверхности

Цель данного раздела — формулировка условий (по возможности близких к необходимым условиям теоремы 1), которых достаточно для существования ростка универсальной поверхности в некоторой фиксированной точке x фазового пространства \mathbb{R}^n .

Теорема. Пусть $Q = (x, p)$ — некоторая точка фазового пространства \mathbb{R}^{2n} , в которой выполнены следующие условия:

1. для скобки Пуассона $F_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{F_- F_+\}$ имеем $F_0 = 0$;
2. $F_- = F_+ = 0$;
3. справедливы строгие неравенства $\{\{F_- F_+\} F_-\} < 0$, $\{\{F_+ F_-\} F_+\} < 0$;
4. векторы $\frac{\partial F_{\pm}}{\partial p}$ и $\frac{\partial F_-}{\partial p} \{F_+ F_0\} + \frac{\partial F_+}{\partial p} \{F_0 F_-\}$ не равны нулю;
5. три n -мерных вектора $\frac{\partial F_{\pm}}{\partial p}, \frac{\partial F_0}{\partial p}$ порождают пространство максимально возможного ранга $\min\{n, 3\}$.

Тогда существует C^2 -гладкое в окрестности точки x решение u уравнения (1), для которого $p = \frac{\partial u}{\partial x}(x)$. Поверхность

$$\Gamma = \left\{ x : F_- \left(x, \frac{\partial u}{\partial x} \right) = F_+ \left(x, \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right\}$$

является гладкой универсальной гиперповерхностью.

Доказательство. Рассмотрим подмногообразие W (точнее, росток подмногообразия в точке Q), заданное уравнениями $F_- = F_+ = F_0 = 0$ в пространстве $\mathbb{R}^{2n} = \{(x, p)\}$ со стандартной симплектической формой $\omega = \sum dp_k \wedge dx_k$. Утверждается, что W — гладкое подмногообразие. Рассмотрим для этого гамильтоновы векторные поля $\xi_i = \xi_{F_i}$, $i = \pm, 0$, где ξ_H обозначает гамильтоново векторное поле с гамильтонианом H . Положим $\omega_{ij} = \omega(\xi_i, \xi_j)$. Согласно общей формуле

$$\omega(\xi_H, \xi_G) = \{HG\}$$

из условия 3 теоремы получим, что $\omega_{0\pm} \neq 0$ в точке Q . Отсюда вытекает, что размерность пространства $V = \text{span}(\xi_i)$, натянутого на векторы $\xi_i, i = \pm, 0$, не меньше двух (точнее, в нем есть двумерное подпространство, на котором форма ω невырождена). Кроме того, в пространстве V имеется ненулевой вектор $\eta = \xi_- \omega_{+0} + \xi_+ \omega_{0-}$, который ортогонален всем векторам из V относительно формы ω (характеристический вектор). Соотношение $\eta \neq 0$ вытекает из условия 4 теоремы.

Таким образом, $\dim V = 3$. Это означает, что дифференциалы $dF_i, i = \pm, 0$, в точке Q линейно независимы. Поэтому применима теорема о неявной функции, из которой вытекает гладкость W . Более того, проекция $\pi : W \rightarrow \mathbb{R}^n$, задаваемая формулой $\pi(x, p) = x$, имеет максимальный ранг в точке Q .

Рассмотрим характеристики, отвечающие гамильтониану [3, 4]

$$\Phi = F_- \{F_+ F_0\} + F_+ \{F_0 F_-\} + F_0 \{F_- F_+\}$$

Как легко видеть, все скобки Пуассона $\{\Phi F_i\}, i = \pm, 0$, обращаются в нуль на многообразии W , и поэтому гамильтонов поток оставляет многообразие W инвариантным. Заметим, что введенный выше вектор η совпадает с $\xi_\Phi(Q)$.

Многообразие W не является симплектическим, однако, если его профакторизовать (локально) по действию гамильтонова потока, отвечающего Φ , то получится симплектическое многообразие \widetilde{W} . В самом деле, касательное пространство \widetilde{T} к фактору \widetilde{W} является фактором касательного пространства T к W по прямой, натянутой на вектор ξ_Φ . Касательное пространство к W можно отождествить с косортогональным дополнением V^\perp в \mathbb{R}^{2n} к трехмерному пространству V , а вектор ξ_Φ порождает пересечение $V \cap T = V \cap V^\perp$. На факторпространстве $T/V \cap V^\perp = V^\perp/V \cap V^\perp$ форма ω индуцирует естественную симплектическую структуру.

Заметим, что многообразие \widetilde{W} можно отождествить (локально) с пересечением W с произвольной гиперплоскостью в \mathbb{R}^{2n} , трансверсальной к вектору $\xi_\Phi(Q)$. Поэтому можно говорить о проекции $\pi : \widetilde{W} \rightarrow \mathbb{R}^n$, задаваемой формулой $\pi(x, p) = x$. Выберем в качестве такой гиперплоскости прообраз $\pi^{-1}(H)$ некоторой трансверсальной к вектору $\pi_* \eta$ гиперплоскости H в \mathbb{R}^n . Здесь π_* обозначает действие отображения π на касательный вектор. Многообразие \widetilde{W} имеет большое количество лагранжевых подмногообразий (размерности $n - 2$). Среди них найдется такое многообразие $\widetilde{\mathcal{L}}$, которое трансверсально к слоям отображения π . Иначе говоря, оно диффеоморфно проектируется в $H \subset \mathbb{R}^n$. В самом деле, слой отображения π является инволютивным многообразием (то есть симплектическая форма на нем равна нулю), и потому его размерность не превышает $n - 2$. В силу условия 5 теоремы этот слой гладкий, поскольку проекция $\pi : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ имеет максимальный ранг в точке Q . Следовательно, среди лагранжевых подпространств в касательном пространстве к \widetilde{W} в Q имеется пространство, трансверсальное к слою. Из теоремы Дарбу следует, что найдется лагранжево подмногообразие в \widetilde{W} , касательное пространство к которому совпадает с упомянутым лагранжевым подпространством. Оно и будет искомым.

Рассматривая характеристики, отвечающие точкам $\widetilde{\mathcal{L}}$, получим некоторое инволютивное подмногообразие \mathcal{L} в W размерности $n - 1$, которое также диффеоморфно проектируется в \mathbb{R}^n , поскольку вектор $\xi_\Phi(Q)$ трансверсален к гиперплоскости H , содержащей $\pi(\widetilde{\mathcal{L}})$. Обозначим образ \mathcal{L} в \mathbb{R}^n через Γ . Это гладкая гиперповерхность.

Теперь, используя \mathcal{L} в качестве данных Коши для уравнений

$$F_i \left(x, \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) = 0$$

где $i = \pm$, найдем локальные решения u_i . Можно определить полуокрестности D_i поверхности Γ как

$$D_i = \bigcup_{t < 0} \pi \phi_i(t) \Gamma$$

Здесь ϕ_i — фазовый поток, соответствующий гамильтониану F_i . Вектор $-\pi_* \xi_{\Phi}(Q)$ является, с одной стороны, касательным к Γ , а с другой стороны, линейной комбинацией векторов

$$\pi_* \xi_i = \frac{\partial F_i}{\partial p}$$

где $i = \pm$, со строго положительными (с учетом знаков неравенств в условии 3) коэффициентами. Варьируя лагранжево многообразие $\tilde{\mathcal{L}}$, можно добиться того, чтобы векторы $\pi_* \xi_i$ были трансверсальны к Γ . Поэтому характеристики гамильтонианов F_i идут из D_i к поверхности Γ и подходят к ней трансверсально. Иными словами, D_i состоит из полухарактеристик для гамильтониана F_i , заканчивающихся на Γ . Следовательно, $D_- + \Gamma + D_+$ — разложение окрестности точки Q в непересекающееся объединение.

Остается убедиться, что сужения функций u_i на замыкания $\bar{D}_i = D_i + \Gamma$ гладко склеиваются вдоль Γ . Этот факт нетрудно установить, обращая рассуждения из доказательства теоремы 1. В самом деле, вводя систему локальных координат в \mathbb{R}^n , в которой $x_1 = 0$ — уравнение поверхности Γ , видим, во-первых, что x_1 -компонента

$$(\pi_* \xi_i)_{x_1} = \left(\frac{\partial F_i}{\partial p} \right)_{x_1}$$

вектора $\pi_* \xi_i$ является (строго) отрицательной при $x_1 = 0$; во-вторых, получаем аналог уравнения (8) в виде

$$\{F_- F_+\} + (\pi_* \xi_-)_{x_1} (\pi_* \xi_+)_{x_1} \frac{\partial^2 \Delta}{\partial x_1^2} = 0 \quad (11)$$

Поскольку $\{F_- F_+\} = 0$ на Γ , то $\frac{\partial^k \Delta}{\partial x_1^k} = 0$ при $k = 0, 1, 2$.

Следовательно, функции u_i совпадают на Γ с точностью до членов второй степени по x , и потому эти две функции склеиваются вдоль Γ в одну функцию $u \in C^2$.

Литература

- [1] *Evans L.C.* Partial Differential Equations. New York: AMS, 1998. = *Эванс Л.К.* Уравнения с частными производными. Новосибирск: Тамара Рожковская, 2003. 560 с.
- [2] *Lions P.L.* Generalized Solutions of Hamilton – Jacobi Equations. Research Notes in Mathematics. Vol. 69. Boston: Pitman, 1982.

- [3] *Melikyan A.A.* Generalized Characteristics of First Order PDEs: Applications in Optimal Control and Differential Games. Boston: Birkhäuser, 1998.
- [4] *Меликян А.А., Овсеевич А.И.* Гамильтоновы системы с заданным инвариантным многообразием и их приложения // Прикл. математика и механика, 1984. Т. 48, вып. 2, с. 205–213.
- [5] *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989. 416 с.

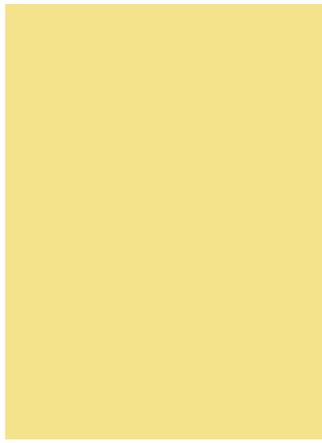
Научное издание

Арик Артаваздович Меликян

ОБОБЩЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ УРАВНЕНИЙ
В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА.
ПРИЛОЖЕНИЯ К ЗАДАЧАМ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ
И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ ИГРАМ

Дизайнер Артем Арикович Меликян
Компьютерный набор и верстка А.Г. Иванов, А.Е. Утемов

Подписано в печать 07.07.2014. Формат $70 \times 100 \frac{1}{16}$.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 36,44. Уч. изд. л. 37,87.
Гарнитура Ngqvc. Бумага офсетная №1. Заказ № 14-47.
АНО «Ижевский институт компьютерных исследований»
426034, г. Ижевск, ул. Кооперативная, 5.
<http://shop.rcd.ru> E-mail: mail@rcd.ru Тел./факс: +7 (3412) 50-02-95



ISBN 978-5-4344-0198-2



9 785434 401982