ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА Том 70. Вып. 5, 2006

УДК 62-50

© 2006 г. С. А. Ганебный, С. С. Кумков, В.С. Пацко

ПОСТРОЕНИЕ УПРАВЛЕНИЯ В ЗАДАЧАХ С НЕИЗВЕСТНЫМ УРОВНЕМ ДИНАМИЧЕСКОЙ ПОМЕХИ

Рассматриваются линейные дифференциальные игры двух лиц с фиксированным моментом окончания. Цель первого игрока – привести движение системы в момент окончания на заданное терминальное множество или достаточно близко к нему. Второй игрок (помеха) препятствует этому. Управление первого игрока скалярное и ограничено по модулю. Особенность постановки в том, что заранее не оговорено какое-либо ограничение управления второго игрока. Предложен и обоснован способ построения управления обратной связи первого игрока, удовлетворительно работающий в широком диапазоне помех и отвечающий на помеху малого уровня малой величиной управляющего воздействия. Для случая небольшой размерности фазовой переменной разработана численная программа. Приведены результаты моделирования системы, описывающей конфликтно-управляемый маятник.

1. Введение. В теории антагонистических дифференциальных игр [1–4] типичны постановки, в рамках которых оговорены геометрические ограничения как полезного управляющего воздействия, так и воздействия помехи. В то же время задание ограничения помехи во многих случаях не является естественным.

Робастным назовем управление обратной связи, которое при "малом" уровне неизвестной заранее помехи обеспечивает хорошее качество тратой "малого" по величине управляющего воздействия. С ростом уровня помехи допускается рост величины управляющего воздействия, гарантирующего хорошее качество. Такой смысл термина "робастное управление" согласуется с принятым в литературе (см., например, [5]).

Построение линейного робастного управления для H^∞-задач на базе теории дифференциальных игр с линейно-квадратичным функционалом платы известно [6]. Исследованы линейные робастные регуляторы в задачах L^1-оптимизации [7–9].

В данной работе рассматриваются задачи с фиксированным моментом окончания и заданным геометрическим ограничением управления первого игрока. Первый игрок заинтересован в приведении управляемой системы в момент окончания на терминальное множество, второй игрок препятствует этому. Понятие робастного управления уточняется на содержательном уровне следующим образом:

1) если управление второго игрока "слабое", то первый игрок должен приводить систему на терминальное множество (желательно, как можно ближе к его центру), и, кроме того, реализация управления первого игрока тоже должна быть "слабой";

2) если управление второго игрока "более сильное", то первый игрок должен попрежнему обеспечивать выполнение цели игры, используя для этого свое "более сильное" управление;

3) если же управление второго игрока "очень сильное" и первый игрок, действуя в пределах своего ограничения, не может гарантировать приведение системы на терминальное множество, то допустимо отклонение от него, но как можно меньшее.

Близкое к описанному понятие робастности использовано ранее [10].

Для построения робастного управления применим методы антагонистических дифференциальных игр с геометрическими ограничениями управлений обоих игроков. Основная идея состоит в следующем. Рассмотрим семейство дифференциальных игр, в которых ограничение управления второго игрока зависит от числового параметра. С каждым значением параметра свяжем также некоторое ограничение управления первого игрока и стабильную трубку (стабильный мост по принятой терминологии [2, 4]) в пространстве *время* × *фазовый вектор*. Получаемое семейство трубок считаем упорядоченным по включению с возрастанием параметра. Первый игрок гарантирует удержание системы внутри каждой из трубок при соответствующем ей уровне помехи, используя свое управление, также лежащее в соответствующем ограничении. Это семейство может рассматриваться как задание в пространстве игры некоторой функции Ляпунова, которая, в свою очередь, позволяет построить управление обратной связи для первого игрока и вычислить гарантию, обеспечиваемую этим управлением.

Указанная идея ниже реализована для задач с линейной динамикой и ограниченным по модулю скалярным управлением первого игрока. Предложен метод построения семейства вложенных стабильных трубок, упорядоченных по возрастанию параметра, задающего геометрическое ограничение управления второго игрока. Описан способ робастного управления, опирающийся на эту систему трубок, и доказана теорема о гарантии.

При численных построениях робастного управления достаточно хранить в памяти компьютера только одну базовую трубку и изменяющуюся во времени поверхность переключения, определяющую знак управляющего воздействия.

2. Постановка задачи. Рассмотрим линейную дифференциальную игру с фиксированным моментом окончания

$$\begin{aligned} &\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)u + \mathbf{C}(t)v \\ &\mathbf{x} \in R^m, \quad t \in T, \quad u \in P = \{u \in R : |u| \le \mu\}, \quad v \in R^q \end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь P – ограничение скалярного управления u первого игрока, $T = [\vartheta_0, \vartheta]$ – промежуток игры. Матричнозначные функции **A** и **C** непрерывны. Вектор-функция **B** липшицева на интервале T.

Первый игрок заинтересован в приведении системы (2.1) в момент ϑ на терминальное множество M, интересы второго игрока противоположны. Терминальное множество M предполагается выпуклым компактом в подпространстве $R^n \subset R^m$ некоторых n выделенных компонент вектора $\mathbf{x}$. Считаем, что M содержит окрестность нуля этого подпространства.

В отличие от стандартной постановки [1, 2, 4] дифференциальной игры в системе (2.1) отсутствует ограничение управления v второго игрока.

Требуется предложить способ построения робастного управления обратной связи для системы (2.1).

3. Управляемая система без фазовой переменной в правой части. Перейдем к системе, в правой части которой нет фазовой переменной:

$$\dot{x} = B(t)u + C(t)v, \quad x \in R^n, \quad t \in T, \quad u \in P, \quad v \in R^q. \tag{3.1}$$

Переход осуществляется ([2], с. 160; [4], с. 89–91]) при помощи равенств

$$x(t) = X_{n,m}(\vartheta, t)\mathbf{x}(t), \quad B(t) = X_{n,m}(\vartheta, t)\mathbf{B}(t), \quad C(t) = X_{n,m}(\vartheta, t)\mathbf{C}(t),$$

где $X_{n,m}(\vartheta, t)$ – n строк фундаментальной матрицы Коши для системы $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$, которые соответствуют подпространству R^n, содержащему терминальное множество M.

В новой задаче первый игрок, как и прежде, пытается привести систему (3.1) на терминальное множество M в момент окончания ϑ, а второй игрок препятствует этому. Множество M – выпуклый компакт в R^n, включающий окрестность нуля.

Дальнейшие рассуждения будем проводить для системы (3.1). Получив способ робастного управления в рамках системы (3.1), переформулируем его затем для системы (2.1).

Символом $E(t) = \{x \in R^n : (t, x) \in E\}$ обозначим сечение множества $E \subset T \times R^n$ в момент $t \in T$.

Пусть $O(\varepsilon) = \{x \in R^n : |x| \leq \varepsilon\}$ – шар радиуса ε в пространстве R^n.

4. Стабильные мосты. Дополнительно рассмотрим на промежутке времени $T = [\vartheta_0, \vartheta]$ дифференциальную игру с терминальным множеством $\mathcal{M}$ и геометрическими ограничениями $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ управлений игроков:

$$\dot{x} = B(t)u + C(t)v, \quad x \in R^n, \quad t \in T, \quad \mathcal{M}, \quad u \in \mathcal{P}, \quad v \in \mathcal{Q}. \tag{4.1}$$

Здесь матрицы $B(t)$, $C(t)$ те же, что и в системе (3.1). Множества $\mathcal{M}$, $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ считаем выпуклыми компактами. Будем рассматривать их как параметры игры.

Ниже $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ будут обозначать измеримые функции времени со значениями в множествах $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ соответственно. Движение системы (4.1) (следовательно, и системы (3.1)), выходящее в момент t_* из точки x_* под действием управлений $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$, обозначим символом $x(\cdot; t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot))$.

Следуя известному подходу [2, 4], дадим определения стабильного и максимального стабильного мостов.

Определение 1. Множество $W \subset T \times R^n$ называется *стабильным мостом* для системы (4.1) с некоторыми фиксированными параметрами $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{M}$, если $W(\vartheta) = \mathcal{M}$ и выполнено следующее свойство *стабильности*: для любой позиции $(t_*, x_*) \in W$ и любого управления $v(\cdot)$ можно подобрать управление $u(\cdot)$ так, что пара $(t, x(t)) = (t, x(t; t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot)))$ остается в множестве W в любой момент $t \in (t_*, \vartheta]$.

Определение 2. Максимальное по включению множество $W \subset T \times R^n$, $W(\vartheta) = \mathcal{M}$, обладающее свойством стабильности, называется максимальным стабильным мостом.

Максимальный стабильный мост является [2, 4] замкнутым множеством. Его t-сечения выпуклы ([4], с. 87) в силу линейности системы (4.1) и выпуклости множества $\mathcal{M}$.

5. Робастное управление обратной связи. Теорема о гарантии. Опишем построение робастного управления для систем (3.1) и (2.1). Вместо слов "управление обратной связи" будем иногда употреблять слово "стратегия".

1°. Выберем множество $Q_{\max} \subset R^q$ – "максимальное" ограничение, налагаемое на управление второго игрока, которое первый игрок "согласен" считать разумным для проблемы приведения системы (3.1) на множество M. Множество $Q_{\max}$ должно включать нуль своего пространства. Обозначим через W максимальный стабильный мост для системы (4.1), соответствующий параметрам $\mathcal{P} = P$, $\mathcal{Q} = Q_{\max}$ и $\mathcal{M} = M$.

Условимся, что множество $Q_{\max}$ выбрано так, что при некотором $\varepsilon > 0$ выполнено соотношение

$$O(\varepsilon) \subset W(t), \quad t \in T. \tag{5.1}$$

Число ε ниже считаем зафиксированным.

2°. Дополнительно введем трубку $\hat{W} \subset T \times R^n$, каждое сечение $\hat{W}(t)$ которой – множество достижимости системы (4.1) в момент t при начальном множестве $O(\varepsilon)$ в момент ϑ_0. При построении трубки $\hat{W}$ считаем, что первый игрок отсутствует ($u \equiv 0$) и ограничение на управление v второго игрока есть $Q_{\max}$. Очевидно, что $\hat{W}$ – максимальный стабильный мост для системы (4.1) при $\mathcal{P} = \{0\}$, $\mathcal{Q} = Q_{\max}$, $\mathcal{M} = \hat{W}(\vartheta)$. Имеем

$$O(\varepsilon) \subset \hat{W}(t), \quad t \in T. \tag{5.2}$$

3°. Рассмотрим семейство множеств W_k, сечения которых определяются формулой

$$W_k(t) = \begin{cases} kW(t), & 0 \le k \le 1 \\ W(t) + (k-1)\hat{W}(t), & k > 1. \end{cases}$$

Множества $W_k(t)$ замкнуты и выпуклы. Для любых чисел $0 \le k_1 < k_2 < 1 < k_3 < k_4$ в силу вложений (5.1), (5.2) выполнены строгие вложения

$$W_{k_1} \subset W_{k_2} \subset W \subset W_{k_3} \subset W_{k_4}.$$

Можно показать[1], что множество W_k в случае $0 \le k \le 1$ есть максимальный стабильный мост для системы (4.1), соответствующий ограничению kP управления первого игрока, ограничению $kQ_{\max}$ управления второго игрока и терминальному множеству kM. В случае $k > 1$ множество W_k – стабильный мост (но не обязательно максимальный) при $\mathcal{P} = P$, $\mathcal{Q} = kQ_{\max}$, $\mathcal{M} = M + (k-1)\hat{W}(\vartheta)$.

Таким образом, с увеличением коэффициента k получаем разрастающуюся систему стабильных мостов, причем каждый последующий мост соответствует большему ограничению, налагаемому на управление второго игрока.

4°. Зададим функцию $V: T \times R^n \to R$ следующим образом:

$$V(t, x) = \min\{k \ge 0 : (t, x) \in W_k\}.$$

Функция $x \mapsto V(t, x)$ при любом $t \in T$ – квазивыпуклая, т.е. ее множества уровня $\{x \in R^n : V(t, x) \le k\} = W_k(t)$ выпуклы. Отметим также, что в силу соотношений (5.1) и (5.2) она удовлетворяет условию Липшица с постоянной $\lambda = 1/\varepsilon$.

Через $\mathcal{A}(t, x)$ обозначим прямую в пространстве R^n, параллельную вектору $B(t)$ и проходящую через точку x:

$$\mathcal{A}(t, x) = \{z \in R^n : z = x + \alpha B(t), \alpha \in R\}.$$

Пусть

$$\mathcal{V}(t, x) = \min_{z \in \mathcal{A}(t, x)} V(t, z).$$

Минимум достигается, поскольку функция $x \mapsto V(t, x)$ непрерывна и уходит в бесконечность при $|x| \to \infty$. Так как эта функция квазивыпуклая, то минимум реализуется либо в точке, либо на отрезке.

Если $B(t) = 0$, будем считать $\mathcal{V}(t, x) \equiv V(t, x)$.

5°. Для любого $t \in T$ положим

$$\Pi(t) = \{x \in R^n : V(t, x) = \mathcal{V}(t, x)\}.$$

Введем также множества

$$\begin{aligned} \Pi_-(t) &= \{x \in R^n : x + \alpha B(t) \notin \Pi(t), \forall \alpha \ge 0\} \\ \Pi_+(t) &= \{x \in R^n : x + \alpha B(t) \notin \Pi(t), \forall \alpha \le 0\}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Множество $\Pi(t)$ является замкнутым, множества $\Pi_-(t)$ и $\Pi_+(t)$ находятся по разные стороны от него. Эти три множества делят пространство R^n на три части.

---

[1] *Ганебный С.А., Кумков С.С., Пацко В.С., Пятко С.Г.* Робастное управление в игровых задачах с линейной динамикой: Препринт. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2005.

6°. Зададим функцию

$$\bar{V}(t, x) = \min\{V(t, x), 1\}$$

и многозначную функцию

$$\mathbf{U}^0(t, x) = \begin{cases} -\bar{V}(t, x)\mu, & x \in \Pi_-(t) \\ \bar{V}(t, x)\mu, & x \in \Pi_+(t) \\ [-\bar{V}(t, x)\mu, \bar{V}(t, x)\mu], & x \in \Pi(t). \end{cases} \tag{5.4}$$

В качестве стратегии U первого игрока возьмем произвольную однозначную выборку из многозначной функции $\mathbf{U}^0$:

$$U(t, x) \in \mathbf{U}^0(t, x) \quad (t, x) \in T \times R^n.$$

Таким образом, управление $U(t, x)$ “переключается” на множестве $\Pi(t)$. Для простоты множество $\Pi(t)$ будем называть *поверхностью переключения* (ПП), соответствующей моменту t.

7°. Ниже будет сформулирована теорема о гарантии, обеспечиваемой первому игроку произвольной однозначной выборкой $U \in \mathbf{U}^0$. Чтобы описать влияние малых неточностей при построении ПП $\Pi(t)$, будут рассмотрены множества $\Pi^r(t) \supset \Pi(t)$, $r \geq 0$ и определена многозначная функция $\mathbf{U}^r$, такая, что $\mathbf{U}^0(t, x) \subset \mathbf{U}^r(t, x)$.

Если $B(t) \neq 0$, положим

$$\Pi^r(t) = \left\{x \in R^n : x = z + \alpha\frac{B(t)}{|B(t)|}, z \in \Pi(t), |\alpha| \leq r\right\}.$$

Множество $\Pi^r(t)$ есть геометрическое r-расширение множества $\Pi(t)$ с использованием вектора $B(t)$. При $x \in \Pi^r(t)$ выполнено неравенство

$$V(t, x) \leq \mathcal{V}(t, x) + \lambda r. \tag{5.5}$$

Если $B(t) = 0$, условимся считать $\Pi^r(t) = \Pi(t) = R^n$.

Введем множества $\Pi^r_-(t)$, $\Pi^r_+(t)$, отличающиеся от множеств (5.3) заменой $\Pi(t)$ на $\Pi^r(t)$, и определим многозначную функцию $\mathbf{U}^r(t, x)$, отличающуюся от функции (5.4) заменой $\Pi(t)$ на $\Pi^r(t)$ и $\Pi_\pm(t)$ на $\Pi^r_\pm(t)$.

Пусть первый игрок применяет некоторую однозначную стратегию $U \in \mathbf{U}^r$ в дискретной схеме управления [2, 4] с шагом Δ. На каждом интервале дискретной схемы вырабатываемое управление постоянно. Выбирая начальную позицию (t_0, x_0) и программное управление $\upsilon(\cdot)$ второго игрока, получаем движение $t \mapsto x(t)$ системы (3.1).

Пусть β – постоянная Липшица функции $B(t)$ и $\sigma = \max\limits_{t \in T}|B(t)|$.

Справедлива следующая теорема о гарантии.

Теорема. Пусть число $r \geq 0$ и U – стратегия первого игрока, такая, что

$$U(t, x) \in \mathbf{U}^r(t, x) \quad (t, x) \in T \times R^n.$$

Выберем произвольные $t_0 \in T$, $x_0 \in R^n$ и $\Delta > 0$. Зафиксируем число $k \geq 0$ и предположим, что управление второго игрока на промежутке $[t_0, \vartheta]$ ограничено множеством $kQ_{\max}$. Обозначим

$$s = \max\{k, V(t_0, x_0)\}.$$

Пусть $x^*(\cdot)$ – движение системы (3.1), выходящее в момент t_0 из точки x_0 под действием стратегии U в дискретной схеме управления с шагом Δ и некоторого управления $v(t) \in kQ_{\max}$, $t \in [t_0, \vartheta]$. Тогда реализация $u(t) = U(t, x^*(t))$ управления первого игрока подчиняется включению

$$u(t) \in \min\{s + \Lambda(t, t_0, \Delta, r), 1\} \cdot P, \quad t \in [t_0, \vartheta]. \tag{5.6}$$

При этом значение $V(t, x^*(t))$ функции V удовлетворяет неравенству

$$V(t, x^*(t)) \le s + \Lambda(t, t_0, \Delta, r), \quad t \in [t_0, \vartheta]. \tag{5.7}$$

Здесь

$$\Lambda(t, t_0, \Delta, r) = 2\lambda\sqrt{(2\sigma\mu\Delta + r)\beta\mu}(t - t_0) + 4\lambda\sigma\mu\Delta + \lambda r.$$

8°. Возвращаясь к системе (2.1), введем многозначную функцию

$$\tilde{\mathbf{U}}^0(t, \mathbf{x}) = \mathbf{U}^0(t, X_{n,m}(\vartheta, t)\mathbf{x}).$$

Любая однозначная выборка $\tilde{U}(t, \mathbf{x})$ из нее дает робастное управление для системы (2.1). При этом в силу теоремы допустимы небольшие ошибки численного построения ПП $\Pi(t)$.

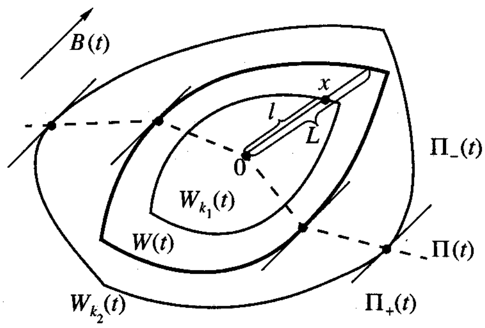
Описана процедура конструирования робастного управления $\tilde{U}$. Эта процедура существенным образом использует упорядоченность стабильных множеств W_k и опирается на построение ПП $\Pi(t)$, изменяющейся во времени. Доказательство теоремы приведено в разд. 7. Оно во многом следует работам [11, 12], в которых ПП были применены для построения оптимального управления обратной связи минимизирующего игрока в линейных антагонистических дифференциальных играх с фиксированным моментом окончания и геометрическими ограничениями управлений обоих игроков.

Для численного построения управления $\tilde{U}$ нужно хранить сечения $W(t)$ моста W и ПП $\Pi(t)$ на некоторой сетке $\{t_i\}$ моментов времени. В момент t, имея позицию $\mathbf{x}(t)$ системы (2.1), пересчитываем ее в координаты системы (3.1) по формуле $x(t) = X_{n,m}(\vartheta, t)\mathbf{x}(t)$. Знак управления $\tilde{U}(t, \mathbf{x}(t)) = U(t, x(t))$ определяется расположением точки $x(t)$ относительно ПП $\Pi(t)$. Анализируя положение точки $x(t)$ по отношению к границе сечения $W(t)$ моста W, вычисляем модуль управления $|\tilde{U}(t, \mathbf{x}(t))|$. При этом используется подобие множеств $W_k(t)$ при $k \le 1$.

Замечание. Авторы не утверждают, что предложенный метод построения робастного управления реализует какой-либо критерий оптимальности. Отметим также, что есть произвол в выборе множества $Q_{\max}$. Зафиксировав множество $Q_{\max}$, имеем дело с построением управления обратной связи для динамической помехи, стесненной ограничением заданной формы, но неизвестного уровня.

6. Построение робастного управления в случае двумерной системы вида (3.1). Если в исходной управляемой системе (2.1) множество M определяется лишь двумя координатами фазового вектора $\mathbf{x}$ (т.е. $n = 2$), то при переходе к системе (3.1) получаем размерность фазового вектора x, равную двум. Множества $W(t)$, $\hat{W}(t)$ в этом случае представляют собой множества на плоскости. Множество $\Pi(t)$ назовем *линией переключения* (ЛП) для момента t.

Описанный выше способ управления выглядит теперь следующим образом. Выбор управляющего воздействия состоит из двух частей: выбор знака и выбор модуля. В каждый момент времени t имеем семейство вложенных множеств $W_k(t)$ на плоскости (см. фиг. 1, где $k_1 < 1 < k_2$). На каждом из этих множеств найдем точки, для которых прямая,



Фиг. 1

параллельная вектору $B(t)$, является опорной к множеству. Соединив эти точки, получим ЛП $\Pi(t)$, определяющую знак управления. Модуль управляющего воздействия задается формулой

$$|U(t,x)| = \begin{cases} (l/L)\boldsymbol{\mu}, & x \in W(t) \\ \boldsymbol{\mu}, & x \notin W(t). \end{cases}$$

Здесь $l = |x|$, а L – длина отрезка, проходящего через точку x и соединяющего начало координат с границей множества $W(t)$.

Для случая $n = 2$ разработаны [13, 14] эффективные алгоритмы и программы построения максимальных стабильных мостов в линейных антагонистических дифференциальных играх. Эти программы используются при конструировании сечений $W(t)$ и $\hat{W}(t)$ максимальных стабильных мостов W и $\hat{W}$.

Робастное управление обратной связи строится на основе сечений $W(t_i)$ множества W и ЛП $\Pi(t_i)$, которые запоминаются на некоторой сетке $\{t_i\}$ моментов времени. При численных построениях сечения $W(t_i)$ – выпуклые многоугольники, они хранятся в подходящем виде. Каждая ЛП $\Pi(t_i)$ представляет собой ломаную с четырьмя линейными сегментами. Для запоминания в памяти компьютера каждой такой ломаной нужно записать пять ее вершин (одна из которых является началом координат).

7. Доказательство теоремы. Для записи изменения функции V вдоль движения $x(\cdot)$ системы (3.1) на некотором промежутке $[t_1, t_2]$ введем обозначение

$$\mathrm{Var}(V, [t_1, t_2]) = V(t_2, x(t_2)) - V(t_1, x(t_1)). \tag{7.1}$$

Вспомогательные утверждения. Для компактных множеств X, Y в R^n пусть

$$d(X, Y) = \max_{x\in X}\min_{y\in Y}|x - y|$$

хаусдорфово отклонение множества X от множества Y.

Символом $G_k(t;\ \bar{t},\ \bar{x})$ при $k \geq 0$ обозначим множество достижимости системы (3.1) в момент $t \geq \bar{t}$ из состояния $\bar{x}$ в момент $\bar{t}$ с использованием всевозможных измеримых программных управлений $u(t) \in P$, $v(t) \in kQ_{\max}$ на промежутке $[\bar{t}, t]$. Положим

$$\mathbf{G}_k(t;\ \bar{t}, \bar{x}) = G_k(t;\ \bar{t}, \bar{x}) + O(2(t - \bar{t})\sigma\mu).$$

Лемма 1. Пусть

$$k \geq 0, \quad \bar{t} \in T, \quad \bar{x} \notin \operatorname{int} W_k(\bar{t}), \quad \delta > 0, \quad \bar{t} + \delta \leq \vartheta. \tag{7.2}$$

Пусть $x^*(\cdot)$ – движение системы (3.1) в силу программных управлений $u(t) \in P$, $\upsilon(t) \in kQ_{\max}$, выходящее в момент $\bar{t}$ из точки $\bar{x}$. Тогда справедлива оценка

$$\mathcal{V}(\bar{t} + \delta, x^*(\bar{t} + \delta)) \leq V(\bar{t}, \bar{x}) + \lambda\beta\mu\delta^2. \tag{7.3}$$

Доказательство. Обозначим $\hat{t} = \bar{t} + \delta$. Поскольку $\bar{x} \notin \operatorname{int} W_k(\bar{t})$, то $c_* = V(\bar{t}, \bar{x}) \geq k$. Поэтому, используя свойства функции V, по управлению $\upsilon(\cdot)$ можно найти такое управление $u'(\cdot)$, что $u'(t) \in \bar{c}P \subset P$, где $\bar{c} = \bar{V}(\bar{t}, \bar{x})$, и при этом движение $x'(\cdot)$, выходящее в момент $\bar{t}$ из точки $\bar{x}$ и порождаемое управлениями $u'(\cdot)$ и $\upsilon'(\cdot)$, удовлетворяет включению

$$x'(t) \in W_{c_*}(t), \quad t \in [\bar{t}, \hat{t}]. \tag{7.4}$$

Имеем

$$\begin{aligned} x^*(\hat{t}) - x'(\hat{t}) &= \int_{\bar{t}}^{\hat{t}} B(t)(u(t) - u'(t))dt = \\ &= \int_{\bar{t}}^{\hat{t}} (B(t) - B(\hat{t}))(u(t) - u'(t))dt + B(\hat{t})\int_{\bar{t}}^{\hat{t}} (u(t) - u'(t))dt. \end{aligned} \tag{7.5}$$

Символом π обозначим оператор ортогонального проектирования пространства R^n на подпространство, ортогональное вектору $B(\hat{t})$.

Принимая во внимание, что управления $u(t)$ и $u'(t)$ ограничены по модулю числом μ, функция $B(t)$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной β и $\pi B(\hat{t}) = 0$, из соотношения (7.5) получим

$$|\pi x^*(\hat{t}) - \pi x'(\hat{t})| \leq \beta\mu\delta^2. \tag{7.6}$$

Пусть $\tilde{x}$ – ближайшая к множеству $W_{c_*}(\hat{t})$ точка на прямой $\mathcal{A}(\hat{t}, x^*(\hat{t}))$. Из включения $x'(\hat{t}) \in W_{c_*}(\hat{t})$, вытекающего из неравенства (7.4), и определения оператора π следует, что

$$d(\{\tilde{x}\}, W_{c_*}(\hat{t})) \leq |\pi\tilde{x} - \pi x'(\hat{t})| = |\pi x^*(\hat{t}) - \pi x'(\hat{t})|.$$

Отсюда, учитывая липшицевость функции $x \to V(t, x)$ и равенство $c_* = V(\bar{t}, \bar{x})$, получаем

$$V(\hat{t}, \tilde{x}) \leq c_* + \lambda d(\{\tilde{x}\}, W_{c_*}(\hat{t})) \leq V(\bar{t}, \bar{x}) + \lambda|\pi x^*(\hat{t}) - \pi x'(\hat{t})|.$$

Требуемое неравенство (7.3) вытекает из неравенства (7.6) и того, что

$\mathcal{V}(\hat{t}, x^*(\hat{t})) \leq V(\hat{t}, \tilde{x})$.

Лемма 2. Пусть выполнены условия (7.2). Предположим, что

$\mathbf{G}_k(\bar{t} + \delta;\, \bar{t}, \bar{x}) \subset \Pi_+(\bar{t} + \delta) \quad (\mathbf{G}_k(\bar{t} + \delta;\, \bar{t}, \bar{x}) \subset \Pi_-(\bar{t} + \delta))$.

Пусть $x^*(\cdot)$ – движение системы (3.1) в силу постоянного управления

$$u(t) \equiv \bar{V}(\bar{t}, \bar{x})\mu, \quad (u(t) \equiv -\bar{V}(\bar{t}, \bar{x})\mu) \tag{7.7}$$

и некоторого управления $\upsilon(t) \in kQ_{\max}$, выходящее в момент $\bar{t}$ из точки $\bar{x}$. Тогда справедлива оценка

$$V(\bar{t} + \delta, x^*(\bar{t} + \delta)) \leq V(\bar{t}, \bar{x}) + \lambda\beta\mu\delta^2. \tag{7.8}$$

Доказательство. Обозначим $\hat{t} = \bar{t} + \delta$, $c_* = V(\bar{t}, \bar{x})$. Как и в начальной части доказательства леммы 1, по заданному $\upsilon(\cdot)$ выберем управление $u'(t) \in \bar{c}P$, где $\bar{c} = \bar{V}(\bar{t}, \bar{x})$, так чтобы соответствующее движение $x'(\cdot)$, выходящее в момент $\bar{t}$ из точки $\bar{x}$, удовлетворяло включению

$$x'(t) \in W_{c_*}(t), \quad t \in [\bar{t}, \hat{t}]. \tag{7.9}$$

Так как $|u(t)| \equiv \bar{V}(\bar{t}, \bar{x})\mu$ и $\bar{c}P = \{u \in R : |u| \le \bar{V}(\bar{t}, \bar{x})\mu\}$, то

$$|u(t)| \ge |u'(t)|, \quad t \in [\bar{t}, \hat{t}].$$

Положим

$$\tilde{z} = x'(\hat{t}) + B(\hat{t})\int_{\bar{t}}^{\hat{t}}(u(t) - u'(t))dt. \tag{7.10}$$

Покажем, что

$$V(\hat{t}, \tilde{z}) \le V(\hat{t}, x'(\hat{t})). \tag{7.11}$$

Рассмотрим случай

$$\mathbf{G}_k(\hat{t};\, \bar{t}, \bar{x}) \subset \Pi_+(\hat{t}) \quad u(t) \equiv \bar{V}(\bar{t}, \bar{x})\mu.$$

Имеем $x'(\hat{t}) \in \Pi_+(\hat{t})$, $\tilde{z} \in \Pi_+(\hat{t})$. Поскольку $u(t) \ge u'(t)$, $t \in [\bar{t}, \hat{t}]$, то при $B(\hat{t}) \ne 0$, используя представление (7.10), получаем, что точка $\tilde{z}$ лежит на прямой $\mathcal{A}(\hat{t}, x'(\hat{t}))$ относительно точки $x'(\hat{t})$ в направлении вектора $B(\hat{t})$. Отсюда, учитывая квазивыпуклость функции $x \mapsto V(t, x)$, выводим неравенство (7.11).

В случае

$$\mathbf{G}_k(\hat{t};\, \bar{t}, \bar{x}) \subset \Pi_-(\hat{t}) \quad u(t) \equiv -\bar{V}(\bar{t}, \bar{x})\mu$$

неравенство (7.11) доказывается аналогично.

Поскольку правая часть неравенства (7.11) не превышает c_*, получаем включение

$$\tilde{z} \in W_{c_*}(\hat{t}).$$

Стало быть,

$$d(\{x^*(\hat{t})\}, W_{c_*}(\hat{t})) \le |x^*(\hat{t}) - \tilde{z}|.$$

Используя определение вектора $\tilde{z}$, имеем

$$x^*(\hat{t}) - \tilde{z} = x^*(t) - x'(\hat{t}) - B(\hat{t})\int_{\bar{t}}^{\hat{t}}(u(t) - u'(t))dt = \int_{\bar{t}}^{\hat{t}}(B(t) - B(\hat{t}))(u(t) - u'(t))dt.$$

Поэтому $|x^*(\hat{t}) - \tilde{z}| \le \beta\mu\delta^2$.

Требуемое неравенство (7.8) вытекает из того, что

$$V(\hat{t}, x^*(\hat{t})) \le V(\hat{t}, \tilde{z}) + \lambda|x^*(\hat{t}) - \tilde{z}|, \quad V(\hat{t}, \tilde{z}) \le V(\bar{t}, \bar{x}).$$

Лемма 3. Пусть

$$k \ge 0, \quad \bar{t} \in T, \quad \hat{t} \in (\bar{t}, \vartheta].$$

Пусть $x^*(\cdot)$ – движение системы (3.1) в силу постоянного управления (7.7) и некоторого управления $\upsilon(t) \in kQ_{\max}$, выходящее в момент $\bar{t}$ из точки $\bar{x}$. Предположим, что

$$x^*(t) \in \Pi_+(t)\backslash \mathrm{int}W_k(t), \quad (x^*(t) \in \Pi_-(t)\backslash \mathrm{int}W_k(t))$$

при всех $t \in [\bar{t}, \hat{t}]$. Тогда справедлива оценка

$$V(\hat{t}, x^*(\hat{t})) \le V(\bar{t}, \bar{x}). \tag{7.12}$$

Доказательство. Без ограничения общности, рассмотрим случай, когда

$$u(t) \equiv \bar{V}(\bar{t}, \bar{x})\mu, \quad x^*(t) \in \Pi_+(t) \backslash \mathrm{int} W_k(t), \quad t \in [\bar{t}, \hat{t}].$$

Предположим, что

$$V(\hat{t}, x^*(\hat{t})) > V(\bar{t}, \bar{x}). \tag{7.13}$$

Пусть $\tilde{t}$ – максимальный момент из промежутка $[\bar{t}, \hat{t}]$, когда $V(t, x^*(t)) = V(\bar{t}, \bar{x})$.

Разделим интервал $[\tilde{t}, \hat{t}]$ моментами $t_1, t_2, \ldots, t_m$ $(t_1 = \tilde{t}, t_m = \hat{t})$ с шагом δ так, чтобы для любых $n = 1, 2, \ldots, m-1$ выполнялось соотношение

$$\mathbf{G}_k(t_{n+1}; t_n, x^*(t_n)) \subset \Pi_+(t_{n+1}).$$

Это можно сделать, опираясь на предположение о расположении точки $x^*(t)$ относительно ПП $\Pi(t)$. Отметим, что при любом n имеет место неравенство

$$V(t_n, x^*(t_n)) \ge V(\bar{t}, \bar{x}). \tag{7.14}$$

Рассмотрим произвольный промежуток времени $[t_n, t_{n+1}]$. Символом $\tilde{x}_n(\cdot)$ обозначим движение системы (3.1) в силу постоянного управления $\tilde{u}_n(t) \equiv \bar{V}(t_n, x^*(t_n))\mu$ первого игрока и оговоренного в формулировке леммы управления $\upsilon(\cdot)$ второго игрока, выходящее в момент t_n из точки $x^*(t_n)$.

В силу леммы 2 имеем неравенство

$$V(t_{n+1}, \tilde{x}(t_{n+1})) \le V(t_n, x^*(t_n)) + \lambda\beta\mu\delta^2. \tag{7.15}$$

Оценим $V(t_{n+1}, x^*(t_{n+1}))$ через $V(t_{n+1}, \tilde{x}(t_{n+1}))$:

$$V(t_{n+1}, x^*(t_{n+1})) \le V(t_{n+1}, \tilde{x}(t_{n+1})) + \lambda|\tilde{x}(t_{n+1}) - x^*(t_{n+1})|. \tag{7.16}$$

Поскольку

$$\tilde{x}(t_{n+1}) - x^*(t_{n+1}) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} B(t)(\tilde{u}_n(t) - u(t))dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} B(t)(\bar{V}(t_n, x^*(t_n)) - \bar{V}(\bar{t}, \bar{x}))\mu dt,$$

то

$$|\tilde{x}(t_{n+1}) - x^*(t_{n+1})| \le \sigma\mu(\bar{V}(t_n, x^*(t_n)) - \bar{V}(\bar{t}, \bar{x}))\delta. \tag{7.17}$$

Здесь воспользовались неравенством

$$\bar{V}(t_n, x^*(t_n)) \ge \bar{V}(\bar{t}, \bar{x}) \tag{7.18}$$

вытекающим из неравенства (7.14).

В силу соотношений (7.16), (7.17) получаем

$$V(t_{n+1}, x^*(t_{n+1})) \le V(t_{n+1}, \tilde{x}(t_{n+1})) + \lambda\beta\mu\delta(\bar{V}(t_n, x^*(t_n)) - \bar{V}(\bar{t}, \bar{x})).$$

Согласно неравенству (7.18)

$$\bar{V}(t_n, x^*(t_n)) - \bar{V}(\bar{t}, \bar{x}) \le V(t_n, x^*(t_n)) - V(\bar{t}, \bar{x}).$$

Из неравенства (7.15) и последних двух неравенств следует неравенство

$$V(t_{n+1}, x^*(t_{n+1})) \le V(t_n, x^*(t_n)) + \lambda\beta\mu\delta^2 + \lambda\sigma\mu\delta(V(t_n, x^*(t_n)) - V(\bar{t}, \bar{x})),$$

которое запишем при помощи обозначения (7.1)

$$\operatorname{Var}(V, [t_n, t_{n+1}]) \le \lambda\beta\mu\delta^2 + \lambda\sigma\mu\delta\operatorname{Var}(V, [\bar{t}, t_n]). \tag{7.19}$$

Отметим, что

$$\begin{gathered}\operatorname{Var}(V, [\bar{t}, t_n]) = \operatorname{Var}(V, [t_1, t_n]) = \sum_{p=1}^{n-1}\operatorname{Var}(V, [t_p, t_{p+1}]) \\ \operatorname{Var}(V, [t_1, t_2]) \le \lambda\beta\mu\delta^2.\end{gathered} \tag{7.20}$$

Займемся оценкой величины

$$V(\hat{t}, x^*(\hat{t})) - V(\bar{t}, \bar{x}) = \operatorname{Var}(V, [t_1, t_m]) = \sum_{n=1}^{m-1}\operatorname{Var}(V, [t_n, t_{n+1}]). \tag{7.21}$$

Рассмотрим геометрическую прогрессию

$$a_n = a_1 b^{n-1}, \quad k = 1, \ldots, m-1; \quad a_1 = \lambda\beta\mu\delta^2, \quad b = 1 + \lambda\sigma\mu\delta. \tag{7.22}$$

Из соотношений (7.19), (7.20), (7.22) видно, что

$$\operatorname{Var}(V, [t_n, t_{n+1}]) \le a_n, \quad n = 1, \ldots, m-1. \tag{7.23}$$

Имеем

$$\begin{gathered}\sum_{n=1}^{m-1} a_n = a_1\frac{b^{m-1}-1}{b-1} = \\ = \frac{\beta\delta}{\sigma}((1+\lambda\sigma\mu\delta)^{(\hat{t}-\bar{t})/\delta} - 1) \le \frac{\beta\delta}{\sigma}(e^{\lambda\sigma\mu(\hat{t}-\bar{t})} - 1) \le \frac{\beta\delta}{\sigma}(e^{\lambda\sigma\mu T} - 1).\end{gathered} \tag{7.24}$$

Здесь использовано равенство $m - 1 = (\hat{t} - \bar{t})/\delta$.

Соотношения (7.21), (7.23), (7.24) приводят к неравенству

$$V(\hat{t}, x^*(\hat{t})) \le V(\bar{t}, \bar{x}) + \frac{\beta\delta}{\sigma}(e^{\lambda\sigma\mu T} - 1), \tag{7.25}$$

которое справедливо при разбиении промежутка $[\bar{t}, \hat{t}]$ с любым достаточно малым шагом δ. Получили противоречие с предположением (7.13).

Таким образом, оценка (7.12) доказана.

Следующая лемма дает тривиальную оценку изменения функции V вдоль движения системы (3.1) при некотором допустимом программном управлении первого игрока и ограниченном программном управлении второго игрока.

Лемма 4. Пусть

$$k \ge 0, \quad \bar{t} \in T, \quad \bar{x} \notin \operatorname{int}W_k(\bar{t}), \quad \hat{t} \in (\bar{t}, \vartheta].$$

Пусть $x^*(\cdot)$ – движение системы (3.1) в силу программных управлений $u(t) \in P$ и $v(t) \in kQ_{\max}$, выходящее в момент $\bar{t}$ из точки $\bar{x}$. Тогда справедлива оценка

$$V(\hat{t}, x^*(\hat{t})) \le V(\bar{t}, \bar{x}) + 2\lambda\sigma\mu(\hat{t} - \bar{t}). \tag{7.26}$$

Доказательство. Пусть $c_* = V(\bar{t}, \bar{x})$. По управлению $v(\cdot)$ построим такое управление $u'(\cdot)$, что $u'(t) \in P$ и движение $x'(\cdot)$, выходящее в момент $\bar{t}$ из точки $\bar{x}$ под действием $u'(\cdot)$ и $v(\cdot)$, удовлетворяет включению

$$x'(t) \in W_{c_*}(t), \quad t \in [\bar{t}, \hat{t}].$$

Следовательно,

$$V(\hat{t}, x'(\hat{t})) \le V(\bar{t}, \bar{x}). \tag{7.27}$$

Поскольку

$$x^*(\hat{t}) - x'(\hat{t}) = \int_{\bar{t}}^{\hat{t}} B(t)(u(t) - u'(t))dt,$$

то

$$|x^*(\hat{t}) - x'(\hat{t})| \le 2\sigma\mu(\hat{t} - \bar{t}). \tag{7.28}$$

Учитывая условие Липшица для функции $x \mapsto V(t, x)$, имеем

$$V(\hat{t}, x^*(\hat{t})) - V(\hat{t}, x'(\hat{t})) \le \lambda|x^*(\hat{t}) - x'(\hat{t})|.$$

Это вместе с неравенствами (7.27) и (7.28) дает неравенство (7.26).

Завершение доказательства теоремы. Установим справедливость неравенства (5.7). При выполнении этого неравенства также выполняется и включение (5.6), поскольку

$$|U(t, x)| \le \bar{V}(t, x)\mu = \min\{V(t, x), 1\}\mu.$$

На промежутке времени $[t_0, \vartheta]$ выделим замкнутые интервалы, на которых $x^*(t) \notin \notin \operatorname{int} W_k(t)$. Вне этих интервалов имеем $V(t, x^*(t)) < k \le s$, и неравенство (5.7) автоматически выполняется.

Пусть $[\xi, \zeta]$ – произвольный из указанных интервалов. Считаем, что его нельзя расширить влево с соблюдением условия $x^*(t) \notin \operatorname{int} W_k(t)$. Тогда либо $V(\xi, x^*(\xi)) = k$, либо $V(\xi, x^*(\xi)) > k$. Последний случай возможен лишь при $\xi = t_0$.

Докажем соотношение (5.7) на промежутке $[\xi, \zeta]$.

1°. Пусть $\beta > 0$, $\sigma > 0$. Положим

$$h = \sqrt{(2\sigma\mu\Delta + r)/\beta\mu}. \tag{7.29}$$

А. Выделим вдоль движения $x^*(\cdot)$ “петли”, связанные с заходом в множество $\Pi^r(t)$. Определим также свободные промежутки.

Двигаясь от ξ к ζ, находим первый момент t, когда $x^*(t) \in \Pi^r(t)$. Такой момент назовем моментом начала первой петли и обозначим t_1. Далее отмечаем момент $\tilde{t}_1$ окончания первой петли как последний момент t на промежутке $[t_1, t_1 + h] \cap [\xi, \zeta]$, в который $x^*(t) \in \Pi^r(t)$. Момент $\tilde{t}_1$, в частности, может совпадать с t_1.

В качестве момента t_2 начала второй петли возьмем первый момент $t \in [t_1 + h, \zeta]$, когда $x^*(t) \in \Pi^r(t)$. Затем отмечаем момент $\tilde{t}_2$ окончания второй петли как последний момент t на промежутке $[t_2, t_2 + h] \cap [\xi, \zeta]$, когда $x^*(t) \in \Pi^r(t)$.

Продолжая такой процесс, получим набор петель на $[\xi, \zeta]$.

Удаляем из $[\xi, \zeta]$ внутренность промежутков построенных петель. Получаем упорядоченный набор отрезков времени. Каждый из них называем свободным промежутком. Он может быть вырожденным, т.е. состоящим из одной точки.

Если на $[\xi, \zeta]$ петли отсутствуют, то считаем $[\xi, \zeta]$ свободным промежутком.

Б. Пусть $[\tau, \eta]$ – некоторый свободный промежуток. Покажем, что приращение функции V на нем описывается неравенством

$$\operatorname{Var}_f(V, [\tau, \eta]) \le 2\lambda\sigma\mu\Delta. \tag{7.30}$$

Нижний индекс f подчеркивает, что изменение функции V подсчитывается на свободном промежутке.

На внутренности свободного промежутка движение $x^*(\cdot)$ идет по одну сторону от множества

$$\Pi^r = \{(t, x) : t \in T, x \in \Pi^r(t)\},$$

а стало быть, и по одну сторону от множества

$$\Pi = \{(t, x) : t \in T, x \in \Pi(t)\},$$

В момент t_Δ начала очередного дискрета времени при

$$x^*(t_\Delta) \in \Pi_+^r(t_\Delta) \quad (x^*(t_\Delta) \in \Pi_-^r(t_\Delta))$$

выбирается управление

$$u(t_\Delta) = \bar{V}(t_\Delta, x^*(t_\Delta))\mu \quad (u(t_\Delta) = -\bar{V}(t_\Delta, x^*(t_\Delta))\mu)$$

и это управление действует до начала следующего дискрета. В силу леммы 3 имеем $\mathrm{Var}(V, [t_\Delta, t_\Delta + \Delta]) \le 0$, если $t_\Delta + \Delta \le \eta$, и $\mathrm{Var}(V, [t_\Delta, \eta]) \le 0$ в случае $t_\Delta + \Delta > \eta$.

Производя суммирование для всех дискретов времени, начинающихся на полуинтервале $[\tau, \eta)$, получаем

$$\mathrm{Var}(V, [t_\Delta^{(1)}, \eta]) \le 0.$$

Здесь $t_\Delta^{(1)}$ – начало первого дискрета на $[\tau, \eta)$.

Для промежутка $[\tau, t_\Delta^{(1)}]$ в силу леммы 4 находим

$$\mathrm{Var}(V, [\tau, t_\Delta^{(1)}]) \le 2\lambda\sigma\mu(t_\Delta^{(1)} - \tau) \le 2\lambda\sigma\mu\Delta.$$

Складывая два последних неравенства, приходим к оценке (7.30).

В. Будем говорить, что $[\tau, \eta]$ – промежуток вида E_1, если он составлен из некоторой петли $[t_i, \tilde{t}_i]$ и примыкающего к ней справа свободного промежутка. Промежуток $[\tau, \eta]$ вида E_1 при дополнительном условии $\tau + h \le \eta$ будем называть промежутком вида E_2.

Оценим приращение функции V вдоль движения $x^*(\cdot)$ на промежутке вида E_1.

Рассмотрим промежуток петли $[t_i, \tilde{t}_i]$. Воспользовавшись леммой 1 при $\delta = \tilde{t}_i - t_i$, получим

$$\mathcal{V}(\tilde{t}_i, x^*(\tilde{t}_i)) \le V(t_i, x^*(t_i)) + \lambda\beta\mu(\tilde{t}_i - t_i)^2.$$

Поскольку $\tilde{t}_i - t_i \le h$, то второе слагаемое в правой части можно заменить на $\lambda\beta\mu h(\tilde{t}_i - t_i)$. Учитывая неравенство

$$V(\tilde{t}_i, x^*(\tilde{t}_i)) \le \mathcal{V}(\tilde{t}_i, x^*(\tilde{t}_i)) + \lambda r$$

справедливое в силу неравенства (5.5) и включения $x^*(\tilde{t}_i) \in \Pi^r(\tilde{t}_i)$, приходим к соотношению

$$\mathrm{Var}(V, [t_i, \tilde{t}_i]) \le \lambda\beta\mu h(\tilde{t}_i - t_i) + \lambda r. \tag{7.31}$$

На свободном промежутке $[\tilde{t}_i, \eta]$ имеем неравенство (7.30) при $\tau = \tilde{t}_i$, объединяя которое с неравенством (7.31) с учетом соотношения $\tilde{t}_i - t_i \le \eta - \tau$, получим

$$\mathrm{Var}_1(V, [\tau, \eta]) \le \lambda\beta\mu h(\eta - \tau) + 2\lambda\sigma\mu\Delta + \lambda r. \tag{7.32}$$

Нижний индекс 1 подчеркивает, что подсчет приращения функции V происходит на промежутке вида E_1.

Перейдем к оценке приращения Var_2 функции V вдоль движения $x^*(\cdot)$ на промежутке вида E_2. Поскольку в этом случае $\eta - \tau \ge h$, то из соотношения (7.29) следует неравенство

$$2\lambda\sigma\mu\Delta + \lambda r \le \lambda\beta\mu h(\eta - \tau).$$

Привлекая неравенство (7.32), получим

$$\mathrm{Var}_2(V, [\tau, \eta]) \le 2\lambda\beta\mu h(\eta - \tau). \tag{7.33}$$

Г. Рассмотрим промежуток $[\xi, t]$ $(t \le \zeta)$. Представим его составленным из первого свободного промежутка $[\xi, \bar{t}\,]$, конечного числа промежутков вида E_2, идущих друг за другом от момента $\bar{t}$ до некоторого момента $\hat{t}$ (их суммарный промежуток времени есть $[\bar{t}, \hat{t}\,]$), и остаточного промежутка $[\hat{t}, t]$ вида E_1. Применяя последовательно оценки (7.30), (7.33), (7.32), имеем

$$\mathrm{Var}(V, [\xi, t]) = \mathrm{Var}_f(V, [\xi, \bar{t}]) + \mathrm{Var}(V, [\bar{t}, \hat{t}]) + \mathrm{Var}_1(V, [\hat{t}, t]) \le$$

$$\le 2\lambda\sigma\mu\Delta + 2\lambda\beta\mu h(\hat{t} - \bar{t}) + \lambda\beta\mu h(t - \hat{t}) + 2\lambda\sigma\mu\Delta + \lambda r = 2\lambda\beta\mu h(t - \bar{t}) + 4\lambda\sigma\mu\Delta + \lambda r.$$

Подставляя h по формуле (7.29), получим

$$\mathrm{Var}(V, [\xi, t]) \le \Lambda(t, \xi, \Delta, r). \tag{7.34}$$

2°. Пусть $\beta = 0$, $\sigma \ge 0$. Двигаясь от ξ к t $(t \le \zeta)$, находим первый момент, когда $x^*(t) \in \Pi^r(t)$. Обозначим его $\bar{t}$. Пусть $\hat{t}$ – последний на $[\xi, t]$ момент, когда $x^*(t) \in \Pi^r(t)$. Имеем

$$x^*(t) \notin \Pi^r(t), \quad t \in [\xi, \bar{t}) \cup (\hat{t}, t].$$

Для промежутков $[\xi, \bar{t}\,]$ и $[\hat{t}, t]$, опираясь на леммы 3, 4 (так же, как при выводе неравенства (7.30)), получим

$$\mathrm{Var}(V, [\xi, \bar{t}]) \le 2\lambda\sigma\mu\Delta, \quad \mathrm{Var}(V, [\hat{t}, t]) \le 2\lambda\sigma\mu\Delta. \tag{7.35}$$

Для промежутка $[\bar{t}, \hat{t}\,]$, обращаясь к лемме 1 при $\beta = 0$, имеем

$$\mathcal{V}(\hat{t}, x^*(\hat{t})) \le V(\bar{t}, x^*(\bar{t})).$$

Поэтому, учитывая неравенство

$$V(\hat{t}, x^*(\hat{t})) \le \mathcal{V}(\hat{t}, x^*(\hat{t})) + \lambda r,$$

приходим к оценке

$$\mathrm{Var}(V, [\bar{t}, \hat{t}]) \le \lambda r. \tag{7.36}$$

Объединяя неравенства (7.35), (7.36), получим

$$\mathrm{Var}(V, [\xi, t]) \le 4\lambda\sigma\mu\Delta + \lambda r. \tag{7.37}$$

3°. Опираясь на неравенство (7.34) для случая, когда $\beta > 0$, $\sigma > 0$, и на неравенство (7.37) в случае $\beta = 0$, $\sigma \ge 0$, имеем оценку

$$V(t, x^*(t)) \le V(\xi, x^*(\xi)) + \Lambda(t, \xi, \Delta, r). \tag{7.38}$$

В момент ξ значение $V(\xi, x^*(\xi))$ функции V равняется либо k, либо $V(t_0, x_0)$. Таким образом,

$$V(\xi, x^*(\xi)) \le \max\{k, V(t_0, x_0)\} = s.$$

Подставив это неравенство в соотношение (7.38) и приняв во внимание, что

$$\Lambda(t, t_0, \Delta, r) \ge \Lambda(t, \xi, \Delta, r),$$

получаем неравенство (5.7).

8. Пример. Конфликтно-управляемый маятник. Пусть система, описывающая линеаризованный конфликтно-управляемый маятник, задается следующим образом:

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{x}_2 + \upsilon, \quad \dot{\mathbf{x}}_2 = -\mathbf{x}_1 + u. \tag{8.1}$$

Здесь u, υ – скалярные управления первого и второго игроков (полезное управление и помеха). Величина управления первого игрока ограничена: $|u| \le 1$. Это неравенство определяет множество P. Геометрическое ограничение на управление второго игрока по постановке задачи не задано.

Поведение системы будем изучать на промежутке времени $T = [0, 10]$. На плоскости фазовых переменных $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ определим терминальное множество M в виде круга радиуса 2 с центром в начале координат. Первый игрок пытается привести систему (8.1) на множество M в момент окончания $\vartheta = 10$.

Для построения робастного управления $\tilde{U}$ следует выбрать вспомогательное ограничение $Q_{\max}$ на управление второго игрока. Возьмем его в виде $|\upsilon| \le 1$.

На фиг. 2 для моментов $t = 0, 2, 4, 6, 8, 10$ приведены сечения $W(t)$ максимального стабильного моста W, соответствующего множествам P, $Q_{\max}$ и M. Штрихами показаны также ЛП $\Pi(t)$. Символы + и – обозначают знак управления в соответствующей области. Изображения даны в координатах x_1, x_2 игры (3.1).

Предполагаем, что робастное управление $\tilde{U}(t, \mathbf{x})$ вырабатывается в дискретной схеме управления с шагом $\Delta = 0.05$. В качестве начальной точки примем $\mathbf{x}(0) = (0, 1)$. Можно проверить, что

$$x(0) = X_{2,2}(10, 0)\mathbf{x}(0) \in W(0).$$

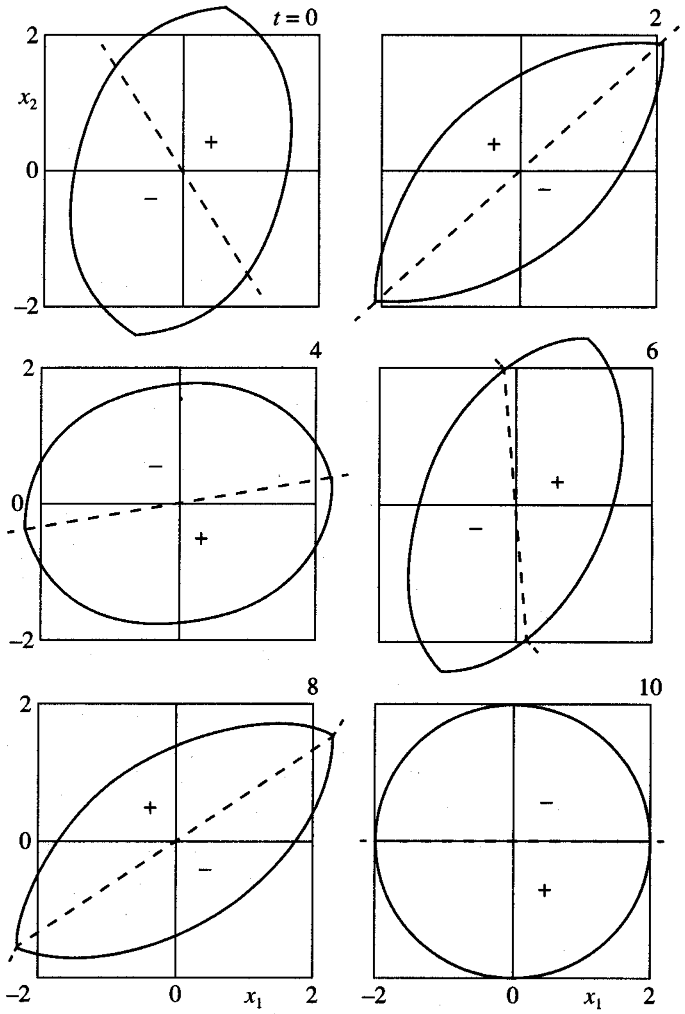
Для сравнения получаемых результатов дополнительно рассмотрим оптимальные способы управления (оптимальные стратегии) первого и второго игроков в антагонистической дифференциальной игре, где заранее оговорено ограничение $\mathfrak{Q}$ управления второго игрока. Примем

$$\mathfrak{Q} = 1.3Q_{\max}. \tag{8.2}$$

Ограничение управления первого игрока оставим прежним: $|u| \le 1$. Пусть $\varphi(\mathbf{x}) = 0.5|\mathbf{x}|$ – терминальная функция платы в такой игре. Оптимальные стратегии игроков можно задать [11, 12, 15] при помощи поверхностей переключения. Символом S_1 обозначим оптимальную стратегию первого игрока, символом S_2 – второго. Шаг дискретных схем управления при использовании стратегий S_1, S_2 положим равным 0.05.

При моделировании было взято два вида управления второго игрока. Первый – программное синусоидальное управление $\upsilon(t) = 1.3\sin(0.8\pi t)$. Второй – стратегия S_2, полученная из описанной выше антагонистической дифференциальной игры с оговоренным заранее ограничением (8.2). Таким образом, в обоих случаях максимальный уровень помехи превышает тот, что заложен в $Q_{\max}$.

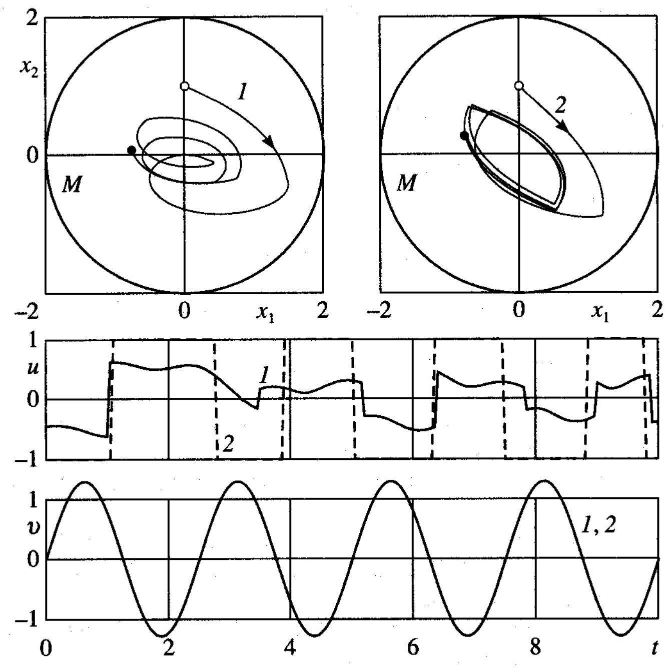
На фиг. 3 показаны результаты счета для случая синусоидальной помехи: фазовые траектории на плоскости $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, реализации управления $u(t)$, синусоидальная помеха $\upsilon(t)$.



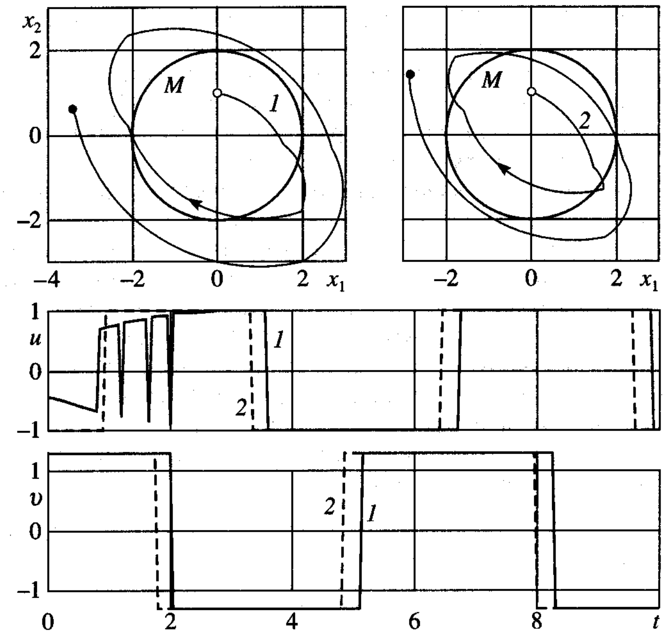
Фиг. 2

Цифрой *1* обозначены кривые, соответствующие робастному управлению $\tilde{U}$, цифрой *2* – кривые, полученные при помощи стратегии S_1. Максимальное значение управления $u(t)$ при способе $\tilde{U}$ лишь немного превышает уровень 0.5, при способе S_1 реализуются значения $u(t) = \pm 1$. Положение фазовой точки в момент окончания $\vartheta = 10$ при способе $\tilde{U}$ несколько лучше, чем при способе S_1. Какого-либо противоречия здесь нет: рассматриваемое синусоидальное возмущение не является оптимальным с точки зрения второго игрока.

Результаты моделирования для помехи, формируемой по принципу обратной связи при помощи стратегии S_2, показаны на фиг. 4. Видно, что получаемые результаты намного хуже, чем в случае синусоидальной помехи. При этом способ управления S_1 пер-


2
x_2
0
M
1
2
−2
0
x_1
2
−2
0
x_1
2
1
u
0
−1
1
2
1
v
0
−1
1, 2
0
2
4
6
8
t

Фиг. 3


x_2
2
0
−2
M
1
2
−4
−2
0
2
x_1
−2
0
2
x_1
1
u
0
−1
1
2
1
v
0
−1
2
1
0
2
4
6
8
t

Фиг. 4

вого игрока, ориентированный на ограничение (8.2), приводит к лучшему результату по сравнению с робастным управлением $\tilde{U}$.

Авторы благодарят Л.В. Камневу за замечания.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (06-01-00414, 04-01-96099).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Isaacs R.* Differential Games. N.Y.: Wiley, 1965 = *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 480 с.
2. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
3. *Bardi M., Capuzzo-Dolcetta I.* Optimal Control and Viscosity Solutions of Hamilton–Jacobi–Bellman Equations. Boston: Birkhauser, 1997. 570 p.
4. *Krasovskii N.N., Subbotin A.I.* Game-Theoretical Control Problems. N. Y., etc.: Springer, 1988. 518 p.
5. Future directions in control theory. A mathematical perspective // Report of the Panel on Future Directions in Control Theory / Ed. W.H. Fleming. SIAM Reports on Issues in the Mathematical Sciences. Philadelphia: SIAM, 1988. 98 p.
6. *Basar T., Bernhard P.* H^∞-Optimal Control and Related Minimax Design Problems. A Dynamic Game Approach. Boston: Birkhauser, 1991. 224 p.
7. *Барабанов А. Е.* Синтез минимаксных регуляторов. СПб.: Изд-во СПб. ун-та, 1996. 224 с.
8. *Соколов В.Ф.* Робастное управление в l_1-постановке: верификация модели и оценивание весов возмущений // Автоматика и телемеханика. 2003. № 11. С. 138–151.
9. *Dahleh M.A., Pearson J.B.* L^1-optimal compensators for continuous-time systems / / IEEE Trans. Automat. Control. 1987. V. 32, № 10. P. 889–895.
10. *Turetsky V., Glizer V.Y.* Robust state-feedback controllability of linear systems to a hyperplane in a class of bounded controls // J. Optimiz. Theory and Appl. 2004. V. 123. № 3. P. 639–667.
11. *Боткин Н.Д., Пацко В.С.* Позиционное управление в линейной дифференциальной игре // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1983. № 4. С. 78–85.
12. *Пацко В.С.* Поверхности переключения в линейных дифференциальных играх с фиксированным моментом окончания // ПММ. 2004. Т. 68. Вып. 4. С. 653–666.
13. *Исакова Е.А., Логунова Г.В., Пацко В. С.* Построение стабильных мостов в линейной дифференциальной игре с фиксированным моментом окончания // Алгоритмы и программы решения линейных дифференциальных игр / Под ред. А.И. Субботина и В.С. Пацко. Свердловск: Ин-т мат. и мех. УНЦ АН СССР, 1984. С. 127–158.
14. *Kumkov S.S., Patsko V.S.* Construction of singular surfaces in linear differential games // Annals Intern. Soc. of Dynamic Games. V. 6: Advances in Dynamic Games and Applications / Eds. E. Altman and O. Pourtallier. Boston: Birkhauser, 2001. P. 185–202.
15. *Зарх М.А.* Универсальная стратегия второго игрока в линейной дифференциальной игре / / ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 3. С. 395–400.

Екатеринбург
e-mail: patsko@imm.uran.ru

Поступила в редакцию
7.III.2006