

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

МОСКВА

УДК 62-50

© 2009 г. С. А. Ганебный, С. С. Кумков, В. С. Пацко

ЭКСТРЕМАЛЬНОЕ ПРИЦЕЛИВАНИЕ В ЗАДАЧАХ С НЕИЗВЕСТНЫМ УРОВНЕМ ДИНАМИЧЕСКОЙ ПОМЕХИ

Известный в теории дифференциальных игр метод экстремального прицеливания применен к задачам, в которых заранее не оговорен уровень динамической помехи. Рассматриваются задачи с линейной динамикой, фиксированным моментом окончания и геометрическим ограничением на полезное управление. Цель управления — привести систему на заданное терминальное множество в момент окончания. Предложен способ управления обратной связи, который обеспечивает успешное завершение, если помеха не превышает некоторый критический уровень. При этом “слабая” помеха парируется “слабым” полезным управлением. Сформулирована и доказана теорема о гарантии. Рассмотрен иллюстративный пример.

1. Введение. В теории антагонистических дифференциальных игр [1–5] хорошо разработаны методы решения задач, в которых по постановке оговорены геометрические ограничения управляющих воздействий обоих игроков. Однако во многих практических проблемах геометрическое ограничение налагается только на полезное управление (на управление первого игрока), в то время как наложение такого ограничения на динамическое воздействие помехи (на управление второго игрока) не является естественным. Кроме того, оптимальное управление обратной связи первого игрока, полученное в рамках стандартной формализации антагонистической дифференциальной игры, направлено на парирование наихудшего возмущения. В реальных же ситуациях динамическое возмущение, как правило, не действует наихудшим способом.

Желательно иметь способ управления по принципу обратной связи, который успешно работает в широком диапазоне помех. При этом, чем “слабее” или “менее оптимальна” помеха, тем “слабее” должно быть парирующее ее полезное управление. Цель статьи — предложить такой способ, опирающийся на сложившуюся теорию дифференциальных игр.

Рассматриваемая задача близка к интенсивно изучаемым в настоящее время задачам о подавлении управляемой системой внешнего ограниченного возмущения [6–9]. Главное отличие данной работы, помимо используемого математического аппарата, состоит в том, что в ней процесс управления рассматривается на конечном промежутке времени и полезное управление по постановке задачи стеснено геометрическим ограничением. Среди работ, использующих результаты теории дифференциальных игр и ориентированных на задачи с неизвестным уровнем помехи, отметим [10].

Центральное понятие, используемое в статье, — понятие стабильного моста [3, 5]. Так называется множество в пространстве *время* $\times$ *фазовый вектор*, в котором первый игрок, используя свое управление и дискриминируя противника, может удержать движение системы вплоть до момента окончания.

Рассмотрим семейство дифференциальных игр, где геометрическое ограничение управления второго игрока зависит от скалярного параметра. С каждым значением параметра свяжем также некоторое ограничение управления первого игрока и некоторый стабильный мост. Предполагаем, что семейство мостов упорядочено по включе-

нию с возрастанием параметра. Первый игрок гарантирует удержание фазового вектора в трубке стабильного моста при помощи своего управления, уровень которого соответствует рассматриваемой трубке, если управление второго игрока также удовлетворяет соответствующему ограничению. Семейство мостов позволяет сконструировать управление обратной связи первого игрока и описать гарантию, обеспечиваемую управлением.

Поясним, как это происходит. Пусть на управляемую систему действует возмущение, не превышающее некоторый уровень. Тогда движение системы будет пересекать мосты сконструированного семейства, пока не достигнет (сверху или снизу) границы моста, соответствующего реализовавшемуся уровню помехи. В дальнейшем движение будет идти в пределах этого моста. Таким образом, произойдет автоматическая подстройка (адаптация) уровня полезного управления под неизвестный заранее уровень помехи.

Изложенная идея задания упорядоченного семейства стабильных мостов является весьма общей. Ее конкретное воплощение связано с возможностью аналитического или численного построения стабильных мостов. В теории дифференциальных игр имеется значительное количество публикаций [11–21], посвященных алгоритмам численного конструирования максимальных стабильных мостов и множеств уровня функции цены. Разработанные методы можно использовать для построения указанного семейства стабильных мостов.

Рассматриваются задачи с линейной динамикой, фиксированным моментом окончания и выпуклым компактным терминальным множеством, на которое первый игрок пытается привести систему. Векторное полезное управление стеснено геометрическим ограничением в виде выпуклого компакта. Перечисленные особенности позволяют сконструировать упорядоченное семейство стабильных мостов и соответствующее адаптивное управление. А именно, в исследуемом случае достаточно построить заранее и хранить в памяти компьютера только два специальных максимальных стабильных моста. На их основе в процессе движения в текущий момент t вычисляется t -сечение подходящего стабильного моста из указанного семейства. Управляющее воздействие первого игрока вырабатывается при помощи экстремального прицеливания [3, 5, 22] на это сечение. Эффективность алгоритма обусловлена тем, что все t -сечения мостов рассматриваемого семейства выпуклые.

Формулируется и доказывается теорема о гарантии, обеспечиваемой первому игроку предлагаемым способом управления.

В настоящее время алгоритм численно реализован [23–25] для случая, когда терминальное множество определяется лишь двумя или тремя компонентами фазового вектора в момент окончания.

Статья завершается примером моделирования линеаризованной задачи о встрече двух слабоманеврирующих объектов. Описание динамики заимствовано из публикаций Шинара с соавт [26, 27].

Исследование примыкает к анализу случая скалярного полезного управления [24]. Имеется краткое изложение способа адаптивного управления при произвольном компактном ограничении полезного управления [28].

2. Постановка задачи. Рассмотрим линейную дифференциальную игру с фиксированным моментом окончания

$$\dot{z} = A(t)z + B(t)u + C(t)v, \quad z \in R^m, \quad t \in T, \quad u \in P \subset R^p, \quad v \in R^q \quad (2.1)$$

Здесь u и v – векторные управляющие воздействия первого и второго игроков, P – выпуклое компактное ограничение управления первого игрока, $T = [\vartheta_0, \vartheta]$ – промежуток игры. Условимся, что множество P содержит нуль пространства R^p . Матричнозначные функции A и C непрерывны по t . Матричнозначная функция B удовлетво-

ряет условию Липшица на промежутке T . Отсутствует какое-либо конкретное ограничение управления v .

Первый игрок пытается привести n выделенных компонент фазового вектора системы (2.1) в момент ϑ на терминальное множество M . Множество M предполагается выпуклым компактом в пространстве указанных n компонент фазового вектора z . Условимся, что множество M содержит некоторую окрестность начала координат этого пространства. Начало координат примем за центр множества M . Перевод n выделенных компонент вектора z как можно ближе к центру множества M соответствует интересам первого игрока.

Требуется предложить способ построения адаптивного управления для системы (2.1).

Перейдем к системе, правая часть которой не содержит фазовый вектор:

$$\dot{x} = D(t)u + E(t)v, \quad x \in R^n, \quad t \in T, \quad u \in P \subset R^p, \quad v \in R^q \quad (2.2)$$

Переход осуществляется (см. [3], с. 160, [5], с. 89–91) при помощи соотношений

$$x(t) = Z_{n,m}(\vartheta, t)z(t), \quad D(t) = Z_{n,m}(\vartheta, t)B(t), \quad E(t) = Z_{n,m}(\vartheta, t)C(t)$$

где $Z_{n,m}(\vartheta, t)$ – матрица, составленная из n строк фундаментальной матрицы Коши для системы $\dot{z} = A(t)z$, соответствующих тем компонентам вектора z , в пространстве которых определено множество M . Первый игрок пытается привести фазовый вектор системы (2.2) на множество M в момент окончания ϑ .

Дальнейшие выкладки будут сделаны для системы (2.2). Построенное управление $U(t, x)$ применяется к системе (2.1) в виде $U(t, Z_{n,m}(\vartheta, t)z)$.

3. Система стабильных мостов. В дальнейшем символ $S(t) = \{x \in R^n : (t, x) \in S\}$ означает сечение множества $S \subset T \times R^n$ в момент $t \in T$. Пусть $O(\varepsilon) = \{x \in R^n : |x| \leq \varepsilon\}$ – шар радиуса ε в пространстве R^n с центром в нуле.

Стабильные мосты. Рассмотрим на интервале $T = [\vartheta_0, \vartheta]$ антагонистическую дифференциальную игру с терминальным множеством M и геометрическими ограничениями $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ управлений игроков

$$\dot{x} = D(t)u + E(t)v, \quad x \in R^n, \quad t \in T, \quad u \in \mathcal{P}, \quad v \in \mathcal{Q} \quad (3.1)$$

Здесь матрицы $D(t), E(t)$ те же самые, что и в системе (2.2). Множества $M, \mathcal{P}, \mathcal{Q}$ предполагаются выпуклыми компактами. Они рассматриваются как параметры игры.

Ниже $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ будут обозначать измеримые функции времени со значениями в множествах $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$, соответственно. Движение системы (3.1) (и следовательно, системы (2.2)), выходящее из точки x_* в момент t_* в силу управлений $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$, обозначим через $x(\cdot; t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot))$.

Следуя Н.Н. Красовскому и А.И. Субботину [3, 5], определим понятия стабильного и максимального стабильного мостов.

Множество $W \subset T \times R^n$ назовем *стабильным мостом* для системы (3.1) при некоторых фиксированных множествах $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ и M , если $W(\vartheta) = M$ и выполнено следующее свойство стабильности: для любой позиции $(t_*, x_*) \in W$ и любого управления $v(\cdot)$ второго игрока первый игрок может подобрать свое управление $u(\cdot)$ так, что позиция $(t, x(t)) = (t, x(t; t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot)))$ остается в множестве W в любой момент $t \in (t_*, \vartheta]$.

Максимальное по включению множество $W \subset T \times R^n, W(\vartheta) = M$, обладающее свойством стабильности, называется *максимальным стабильным мостом*.

Максимальный стабильный мост является [3, 5] замкнутым множеством. Его t -сечения выпуклы ([5], с. 87) в силу линейности системы (3.1) и выпуклости множества $\mathcal{M}$.

Построение системы стабильных мостов.

1°. Выберем множество $Q_{\max} \subset R^q$, трактуемое как “максимальное” ограничение управления второго игрока, которое первый игрок согласен считать “разумным” при приведении системы (2.2) на множество M . Предполагаем, что множество $Q_{\max}$ содержит нуль своего пространства. Такое допущение не обременительно, поскольку при отсутствии возмущения задача наведения должна быть разрешима. Обозначим через W_{main} максимальный стабильный мост для системы (3.1), соответствующий параметрам $\mathcal{P} = P$, $\mathcal{Q} = Q_{\max}$, $\mathcal{M} = M$.

Дополнительно условимся, что множество $Q_{\max}$ выбрано так, что для некоторого $\varepsilon > 0$ при любом $t \in T$ выполнено вложение

$$O(\varepsilon) \subset W_{\text{main}}(t) \quad (3.2)$$

В дальнейшем число ε считаем зафиксированным.

Таким образом, W_{main} — замкнутая трубка в пространстве $T \times R^n$, обрывающаяся в момент ϑ на множестве M . Любые ее t -сечения $W_{\text{main}}(t)$ являются выпуклыми и содержат нуль пространства R^n вместе с некоторой окрестностью.

2°. Введем еще одну замкнутую трубку $W_{\text{add}} \subset T \times R^n$, каждое сечение $W_{\text{add}}(t)$ которой — множество достижимости системы (3.1) в момент t с начальным множеством $O(\varepsilon)$, взятым в момент ϑ_0 . Конструируя трубку W_{add} , предполагаем, что первый игрок отсутствует ($u = 0$), а управление второго игрока стеснено ограничением $Q_{\max}$. Нетрудно видеть, что W_{add} — максимальный стабильный мост для системы (3.1) при

$$\mathcal{P} = \{0\}, \quad \mathcal{Q} = Q_{\max}, \quad \mathcal{M} = W_{\text{add}}(\vartheta)$$

Для любого $t \in T$ сечение $W_{\text{add}}(t)$ является выпуклым и имеет место вложение

$$O(\varepsilon) \subset W_{\text{add}}(t) \quad (3.3)$$

3°. Рассмотрим семейство трубок $W_k \subset T \times R^n$ ($k \geq 0$), сечения $W_k(t)$ которых определяются соотношениями

$$W_k(t) = \begin{cases} kW_{\text{main}}(t), & 0 \leq k \leq 1 \\ W_{\text{main}}(t) + (k-1)W_{\text{add}}(t), & k > 1 \end{cases}$$

Множества $W_k(t)$ компактны и выпуклы. Для любых чисел $0 \leq k_1 < k_2 \leq 1 < k_3 < k_4$ в силу соотношений (3.2), (3.3) выполнены строгие вложения

$$W_{k_1}(t) \subset W_{k_2}(t) \subset W_{k_3}(t) \subset W_{k_4}(t)$$

Было показано [23]¹, что трубка W_k при $0 \leq k \leq 1$ является максимальным стабильным мостом для системы (3.1), соответствующим ограничению kP , налагаемому на управление первого игрока, ограничению $kQ_{\max}$, налагаемому на управление второго игрока, и терминальному множеству kM . При $k > 1$ множество W_k — стабильный мост (но, вообще говоря, не максимальный) для параметров

$$\mathcal{P} = P, \quad \mathcal{Q} = kQ_{\max}, \quad \mathcal{M} = M + (k-1)W_{\text{add}}(\vartheta)$$

¹См. также: Ганебный С.А., Кумков С.С., Пацко В.С., Пятко С.Г. Робастное управление в игровых задачах с линейной динамикой: Препринт. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2005.

Таким образом, имеем расширяющуюся систему стабильных мостов, в которой каждый больший мост соответствует большему ограничению, налагаемому на управление второго игрока. Эта система мостов порождается двумя мостами W_{main} и W_{add} при помощи операций алгебраического суммирования и умножения на неотрицательный числовой параметр.

Положим

$$P_k = \min\{k, 1\} \cdot P, \quad k \geq 0$$

Зададим функцию $V : T \times R^n \rightarrow R$ в виде

$$V(t, x) = \min\{k \geq 0 : (t, x) \in W_k\}$$

Соотношения (3.2) и (3.3) обеспечивают выполнение для функции $x \mapsto V(t, x)$ при каждом $t \in T$ условия Липшица с постоянной $\lambda = 1/\varepsilon$.

4. Адаптивное управление обратной связи. Построение адаптивного управления $(t, x) \mapsto U(t, x)$ выполняется следующим образом.

Зафиксируем число $\xi > 0$.

Рассмотрим произвольную позицию (t, x) . В случае $|x| > \xi$ находим положительное число k^* , определяющее мост W_{k^*} , сечение $W_{k^*}(t)$ которого отстоит от точки x на расстояние ξ . На границе множества $W_{k^*}(t)$ вычисляем точку x^* , ближайшую к x . Имеем $|x^* - x| = \xi$. Задаем вектор $u^* \in P_{k^*}$ из условия экстремума

$$(x^* - x)' D(t) u^* = \max\{(x^* - x)' D(t) u : u \in P_{k^*}\} \quad (4.1)$$

Полагаем $U(t, x) = u^*$. Если $|x| \leq \xi$, принимаем $U(t, x) = 0$.

В терминах функции V формирование управления U записывается следующим образом. В замкнутой ξ -окрестности точки x находим точку x^* минимума функции $V(t, \cdot)$. Полагаем $k^* = V(t, x^*)$. Управление $U(t, x)$ выбираем из множества P_{k^*} при помощи соотношения (4.1). Точку x^* будем называть точкой прицеливания.

Управление U применяем в дискретной схеме [3, 5, 22] с шагом $\Delta > 0$ по времени. Выбор управления производится в начальный момент очередного дискрета длины Δ . Управление держится постоянным до конца дискрета.

Таким образом, управление (стратегия) U формируется на основе широко известного в теории дифференциальных игр правила экстремального прицеливания [3, 5, 22]. В данной работе оно модернизировано для задачи, в которой априорно отсутствует геометрическое ограничение на управление второго игрока.

При использовании стратегии U происходит автоматическая подстройка уровня управления первого игрока под реализующийся уровень управления второго игрока (динамической помехи). Действительно, при “слабой” помехе движение идет внутрь системы стабильных мостов, и, соответственно, уменьшается текущий индекс k^* , определяющий мост прицеливания. Наоборот, при “сильной” помехе текущий индекс k^* увеличивается. Изменение этого индекса напрямую влияет на изменение текущего уровня ограничения на управление первого игрока, из которого в силу стратегии U выбирается экстремальное управление.

Приведем формулы для подсчета значения k^* в момент t при $|x| > \xi$. Обозначим через $\rho_{\text{main}}(l)$, $\rho_{\text{add}}(l)$ значения опорных функций сечений $W_{\text{main}}(t)$ и $W_{\text{add}}(t)$ на векторе $l \in R^n$.

Положим

$$\bar{k} = \max_{|l|=1} \frac{l'x - \xi}{\rho_{\text{main}}(l)}, \quad \bar{k} = 1 + \max_{|l|=1} \frac{l'x - \rho_{\text{main}}(l) - \xi}{\rho_{\text{add}}(l)}$$

Имеем

$$k^* = \begin{cases} \tilde{k}, & \tilde{k} \leq 1 \\ \bar{k}, & \tilde{k} > 1 \end{cases} \quad (4.2)$$

Доказательство соотношения (4.2). В самом деле, пусть $\tilde{k} \leq 1$. Тогда выполнены неравенства $\Gamma x \leq \tilde{k} \rho_{\text{main}}(l) + \xi, \quad \forall l, \quad |l| = 1$

Это означает, что точка x отстоит от множества $\tilde{k} W_{\text{main}}(t) \subset W_{\text{main}}(t)$ на расстояние, не превосходящее ξ . Стало быть, искомое $k^* \leq 1$. В этом случае k^* – минимальный индекс $k \in [0, 1]$, для которого

$$\Gamma x \leq k \rho_{\text{main}}(l) + \xi, \quad \forall l, \quad |l| = 1$$

При фиксированном $l, |l| = 1$, минимальное значение $k(l)$ описывается формулой

$$k(l) = \frac{\Gamma x - \xi}{\rho_{\text{main}}(l)}$$

Отсюда

$$k^* = \max_{|l|=1} k(l) = \tilde{k}$$

Пусть теперь $\tilde{k} > 1$. Это означает, что точка x не принадлежит замкнутой ξ -окрестности множества $W_{\text{main}}(t)$. Стало быть, искомое $k^* > 1$. В этом случае k^* – минимальный индекс $k > 1$, для которого

$$\Gamma x \leq \rho_{\text{main}}(l) + (k-1)\rho_{\text{add}}(l) + \xi, \quad \forall l, \quad |l| = 1$$

Отсюда $k^* = \bar{k}$.

5. Теорема о гарантии. Приведем теорему, описывающую гарантию первого игрока при использовании предложенного способа адаптивного управления.

Положим

$$d = \max_{t \in [t_0, \theta]} \max_{u \in P} |D(t)u|$$

В качестве постоянной Липшица β отображения $t \mapsto D(t)$ возьмем максимум из постоянных Липшица функций $t \mapsto D_j(t)$, где $D_j(t)$ – столбец с номером j матрицы $D(t)$, $j = 1, \dots, p$.

Пусть κ – максимум по координатным отклонениям точек множества P от нуля:

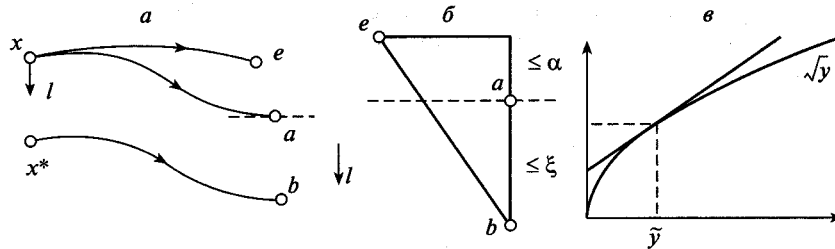
$$\kappa = \max_j \max_{u \in P} \{|u_j|\}$$

Теорема. Пусть $\xi > 0$ и U – адаптивная стратегия первого игрока, экстремально прицеливающая при заданном расстоянии ξ . Выберем произвольные $t_0 \in T$, $x_0 \in R^n$ и $\Delta > 0$. Предположим, что управление $v(\cdot)$ второго игрока на промежутке $[t_0, \theta]$ будет ограничено множеством $c^* Q_{\text{max}}$, $c^* \geq 0$. Обозначим

$$s^* = \max\{c^*, V(t_0, x_0)\}$$

Пусть $x(\cdot)$ – движение системы (2.2), выходящее в момент t_0 из точки x_0 , порожденное стратегией U в дискретной схеме с шагом Δ и управлением второго игрока $v(\cdot)$. Тогда реализация $u(t) = U(t, x(t))$ управления первого игрока подчиняется включению

$$u(t) \in \min\{s^* + E(t, t_0, \Delta, \xi), 1\} \cdot P, \quad t \in [t_0, \theta] \quad (5.1)$$



Фиг. 1

При этом значение $V(t, x(t))$ функции V удовлетворяет неравенству

$$V(t, x(t)) \leq s^* + E(t, t_0, \Delta, \xi) + \lambda \xi, \quad t \in [t_0, \Theta] \quad (5.2)$$

Здесь

$$E(t, t_0, \Delta, \xi) = \lambda \Delta (t - t_0) \left(p\beta\kappa + \frac{4d^2 + (p\beta\kappa\Delta)^2}{2\xi} \right) + 2\lambda d\Delta$$

Доказательство. Пусть $x^*(t)$ — точка прицеливания при текущей точке $x(t)$. Для получения оценок (5.1) и (5.2) достаточно доказать оценку

$$V(t, x^*(t)) \leq s^* + E(t, t_0, \Delta, \xi) \quad (5.3)$$

Включение (5.1) вытекает из оценки (5.3) при учете правила экстремального прицеливания для адаптивного управления и того, что зависимость $t \mapsto E(t, t_0, \Delta, \xi)$ — монотонно возрастающая. Неравенство (5.2) следует из липшицевости функции V по x и того, что точки $x(t)$ и $x^*(t)$ отстоят на расстояние, не большее ξ .

1) Пусть на некотором интервале $[t_*, t_* + \delta)$ действует постоянное управление u^* первого игрока, вырабатываемое в момент t_* из условия прицеливания. Тогда $x^*(t_*)$ — ближайшая к $x(t_*)$ точка множества $W_{k^*}(t_*)$. Имеем $|x^*(t_*) - x(t_*)| \leq \xi$. Единичный вектор прицеливания $l(t_*)$ направлен из точки $x(t_*)$ к точке $x^*(t_*)$ (фиг. 1, а).

Предположим, что помеха (управление второго игрока) не превышает уровень $k^*Q_{\max}$, соответствующий мосту W_{k^*} . Пусть $v(\cdot)$ — реализация помехи на $[t_*, t_* + \delta)$. Символом e обозначим положение в момент $t_* + \delta$ движения из точки $x(t_*)$ в силу постоянного управления u^* и помехи $v(\cdot)$. Из условия стабильности множества W_{k^*} подберем по $v(\cdot)$ измеримую функцию $u(\cdot)$ со значениями в множестве P_{k^*} так, чтобы соответствующее движение из точки $x^*(t_*)$ на промежутке $[t_*, t_* + \delta)$ шло по сечениям $W_{k^*}(t)$. Пусть b — положение этого движения в момент $t_* + \delta$.

Оценим расстояние $r(\delta)$ между точками e и b .

Рассмотрим вспомогательное движение из точки $x(t_*)$, представляющее собой копию движения в силу стабильности из точки $x^*(t_*)$. Обозначим через a положение этого движения в момент $t_* + \delta$.

Выделим три случая:

$$l(t_*)e > l(t_*)b, \quad l(t_*)b \geq l(t_*)e \geq l(t_*)a, \quad l(t_*)e < l(t_*)a$$

В первом из них имеем

$$r(\delta) = |e - b| \leq |e - a| \leq 2d\delta$$

В этой оценке учтено, что точки e , a порождены движениями с одним и тем же начальным состоянием и одним и тем же управлением $v(\cdot)$.

Во втором случае

$$r(\delta) \leq \sqrt{\xi^2 + (2d\delta)^2}$$

Для третьего случая запишем

$$\begin{aligned} l'(t_*)(a - e) &= l'(t_*) \left(\int_{t_*}^{t_*+\delta} D(t)u(t)dt - \int_{t_*}^{t_*+\delta} D(t)u^*dt \right) = I_1 + I_2 \\ I_1 &= l'(t_*) \int_{t_*}^{t_*+\delta} D(t_*)(u(t) - u^*)dt, \quad I_2 = l'(t_*) \int_{t_*}^{t_*+\delta} (D(t) - D(t_*))(u(t) - u^*)dt \end{aligned}$$

Так как вектор u^* выбран из условия экстремального прицеливания по вектору $l(t_*)$, то $I_1 \leq 0$, поэтому

$$l'(t_*)(a - e) \leq I_2$$

Имеем далее

$$I_2 = l'(t_*) \int_{t_*}^{t_*+\delta} \sum_{j=1}^p (D_j(t) - D_j(t_*))(u_j(t) - u_j^*)dt$$

Выражение справа оценивается сверху величиной $\alpha(\delta) = p\beta_k\delta^2$. В итоге

$$l'(t_*)(a - e) \leq \alpha(\delta)$$

Следовательно, расстояние $r(\delta)$ между точками e и b в третьем случае удовлетворяет неравенству (см. фиг. 1, б)

$$r(\delta) \leq \sqrt{(\xi + \alpha(\delta))^2 + (2d\delta)^2} \quad (5.4)$$

Сравнивая оценки для каждого из трех случаев, заключаем, что оценку (5.4) можно взять в качестве универсальной.

2) Подменим оценку (5.4) в виде квадратного корня более удобной линейной оценкой. А именно, при всех $\tilde{y} > 0$ и $y \geq 0$ справедлива (фиг. 1, в) оценка

$$\sqrt{y} \leq \sqrt{\tilde{y}} + \frac{1}{2\sqrt{\tilde{y}}}(y - \tilde{y}) \quad (5.5)$$

В рассматриваемом случае возьмем $\tilde{y} = \xi^2$. В силу оценок (5.4) и (5.5) получим оценку расстояния в момент $t_* + \delta$ от точки $x(t_* + \delta)$ до сечения $W_{k*}(t_* + \delta)$

$$r(\delta) \leq \xi + \frac{1}{2\xi}((\xi + \alpha(\delta))^2 + (2d\delta)^2 - \xi^2) = \xi + \delta^2\eta(\delta) \quad (5.6)$$

где

$$\eta(\delta) = p\beta_k + \frac{(p\beta_k\delta)^2}{2\xi} + \frac{2d^2}{\xi}$$

3) Вычислим минимум функции $V(t_* + \delta, \cdot)$ в шаре радиуса ξ с центром в точке $x(t_* + \delta) = e$. Пусть f — точка минимума.

Предположим, что точка $b \in W_{k*}(t_* + \delta)$, о которой говорилось в подразделе 1, расположена вне шара радиуса ξ с центром в точке e . Пусть h – точка на границе этого шара, принадлежащая отрезку be . Опираясь на оценку (5.6), заключаем, что

$$|h - b| = r(\delta) - \xi \leq \delta^2 \eta(\delta)$$

Имеем

$$V(t_* + \delta, f) \leq V(t_* + \delta, h) \leq V(t_* + \delta, b) + \lambda \delta^2 \eta(\delta) \leq V(t_*, x^*(t_*)) + \lambda \delta^2 \eta(\delta)$$

Здесь учтено, что

$$V(t_* + \delta, b) \leq V(t_*, x^*(t_*))$$

Пусть точка b лежит в шаре радиуса ξ с центром в точке e . Тогда

$$V(t_* + \delta, f) \leq V(t_* + \delta, b) \leq V(t_*, x^*(t_*))$$

Таким образом, приращение функции V для точки прицеливания оценивается неравенством

$$V(t_* + \delta, x^*(t_* + \delta)) \leq V(t_*, x^*(t_*)) + \lambda \delta^2 \eta(\delta) \quad (5.7)$$

4) Пусть t – произвольный момент из промежутка $[t_0, \vartheta]$. Для доказательства неравенства (5.3) оценим изменение функции $\tau \rightarrow V(\tau, x^*(\tau))$ на интервале $[t_0, t]$. Если $V(t, x^*(t)) \leq s^*$ в рассматриваемый момент t , то неравенство (5.3), очевидно, выполнено. Далее будем полагать, что $V(t, x^*(t)) > s^*$. Обозначим через $\tilde{t}$ момент последнего выхода точки $x^*(\tau)$ на промежутке $[t_0, t]$ на уровень s^* функции V .

При использовании первым игроком дискретной схемы управления выбор управляющего воздействия производится в начальный момент очередного дискрета длины Δ . Такие моменты называем дискретными. Предположим, что на $(\tilde{t}, t)$ есть хотя бы один дискретный момент. Ближайший справа к $\tilde{t}$ (ближайший слева к t) дискретный момент обозначим символом $\bar{t}$ (соответственно, $\hat{t}$).

На промежутке $[\bar{t}, \hat{t}]$ идут полные дискреты. Их количество равно $(\hat{t} - \bar{t})/\Delta$. Получаем при учете неравенства (5.7) оценку

$$V(\hat{t}, x^*(\hat{t})) \leq V(\bar{t}, x^*(\bar{t})) + \lambda (\hat{t} - \bar{t}) \Delta \eta(\Delta) \quad (5.8)$$

На $[\hat{t}, t]$, снова при учете неравенства (5.7), имеем оценку

$$V(t, x^*(t)) \leq V(\hat{t}, x^*(\hat{t})) + \lambda (t - \hat{t})^2 \eta(t - \hat{t}) \leq V(\hat{t}, x^*(\hat{t})) + \lambda (t - \hat{t}) \Delta \eta(\Delta) \quad (5.9)$$

Осталось оценить приращение $V(\tau, x^*(\tau))$ на интервале $[\tilde{t}, \bar{t}]$.

В момент $\tilde{t}$ имеем $V(\tilde{t}, x^*(\tilde{t})) = s^*$. По условию теоремы уровень помехи $\nu(\cdot)$ не больше $s^* \leq s^*$. По функции $\nu(\cdot)$ находим управление $u_{st}(\cdot)$ такое, что движение $x_{st}(\cdot)$ в силу $u_{st}(\cdot)$, $\nu(\cdot)$ из начальной точки $x^*(\tilde{t})$ идет на $[\tilde{t}, \bar{t}]$ по мосту W_{s*} . Получаем $V(\bar{t}, x_{st}(\bar{t})) \leq s^*$.

Расхождение двух движений имеет вид равенства

$$x(\bar{t}) - x_{st}(\bar{t}) = x(\tilde{t}) - x^*(\tilde{t}) + \int_{\tilde{t}}^{\bar{t}} D(\tau)(u(\tau) - u_{st}(\tau)) d\tau$$

модуль интеграла в котором не превышает $2d(\bar{t} - \tilde{t})$

Следовательно,

$$|x(\bar{t}) - x_{st}(\bar{t})| \leq |x(\bar{t}) - x^*(\bar{t})| + 2d(\bar{t} - \tilde{t}) \leq \xi + 2d(\bar{t} - \tilde{t}) \quad (5.10)$$

Пусть точка $x_{st}(\bar{t})$ лежит вне шара радиуса ξ с центром в точке $x(\bar{t})$. Рассмотрим точку h на границе шара, принадлежащую отрезку, содержащему точки $x(\bar{t})$ и $x_{st}(\bar{t})$. Учитывая неравенство (5.10), получим

$$V(\bar{t}, x^*(\bar{t})) \leq V(\bar{t}, h) \leq V(\bar{t}, x_{st}(\bar{t})) + 2\lambda d(\bar{t} - \tilde{t}) \leq s^* + 2\lambda d\Delta$$

Пусть точка $x_{st}(\tilde{t})$ принадлежит шару радиуса ξ с центром в точке $x(\bar{t})$. Тогда

$$V(\bar{t}, x^*(\bar{t})) \leq V(\bar{t}, x_{st}(\bar{t})) \leq s^*$$

Таким образом, всегда справедлива оценка

$$V(\bar{t}, x^*(\bar{t})) \leq s^* + 2\lambda d\Delta \quad (5.11)$$

Собирая оценки (5.8), (5.9), (5.11), получаем

$$V(t, x^*(t)) \leq s^* + 2\lambda d\Delta + \lambda(t - \bar{t})\Delta\eta(\Delta)$$

Учитывая, что

$$E(t, t_0, \Delta, \xi) = \lambda(t - t_0)\Delta\eta(\Delta) + 2\lambda d\Delta$$

приходим к оценке (5.3).

Пусть теперь на промежутке $(\bar{t}, t)$ нет дискретных моментов. Тогда для момента t справедлива оценка

$$V(t, x^*(t)) \leq s^* + 2\lambda d\Delta$$

аналогичная оценке (5.11). Оценка (5.3), очевидно, выполнена.

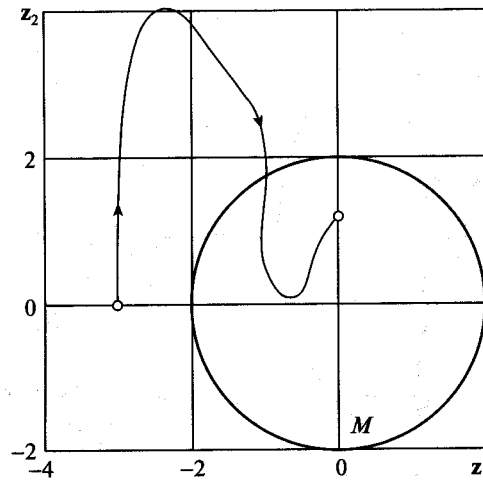
6. Пример. Пусть движение двух объектов на плоскости описывается соотношениями

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= F, \quad \dot{F} = (u - F)/\tau; \quad \ddot{y} = v \\ t &\in [0, \vartheta], \quad x, y \in R^2, \quad u \in P, \quad v \in R^2 \end{aligned} \quad (6.1)$$

Здесь x — вектор положения первого игрока, y — вектор положения второго игрока, τ — постоянная времени, характеризующая инерционность обработки управления u первого игрока. Оговорено геометрическое ограничение P , налагаемое на управление u . Оно же задает и максимальные возможности ускорения F (в начальный момент $t_0 = 0$ полагаем $F(0) = 0$). Управление v второго игрока непосредственно определяет его ускорение. Какое-либо геометрическое ограничение на управление v не налагается.

Система (6.1) заимствована из публикаций Шинара с соавт. [26, 27]. Она возникает в результате линеаризации нелинейной системы в пространственной задаче воздушного перехвата и последующего проектирования динамики на плоскость, ортогональную направлению номинальной линии визирования. В качестве фиксированного момента окончания ϑ принимается момент встречи на номинальных курсах. В процессе наведения применяются лишь корректирующие управления, в силу чего объекты являются слабоманеврирующими.

Система (6.1) исследовалась [26, 27] как антагонистическая дифференциальная игра с эллиптическими ограничениями P, Q , налагаемыми на управления игроков. Параметры эллипсов зависят от геометрии номинальных движений в задаче перехвата. Первый игрок старается уменьшить промах $|x(\vartheta) - y(\vartheta)|$, интересы второго игрока противоположны. В указанных работах детально исследована структура множеств



Фиг. 2

уровня функции цены в дифференциальной игре с динамикой (6.1) при разных вариантах эллиптических ограничений P, Q . Были представлены [29] трехмерные изображения множеств уровня.

В данной статье отказываемся от априорного задания геометрического ограничения на управление второго игрока.

Исходные данные для системы (6.1) возьмем в виде

$$\vartheta = 10\text{с}, \quad \tau = 1\text{с}, \quad P = \left\{ u \in R^2 : \frac{u_1^2}{0.87^2} + \frac{u_2^2}{1.3^2} \leq 1 \right\}$$

Радиус терминального круга M в разностных координатах $z = x - y$ примем равным 2 м.

Для построения адаптивного управления требуется задать множество $Q_{\max}$, трактуемое как предполагаемое (ориентировочное) ограничение на управление второго игрока. Выберем его в виде

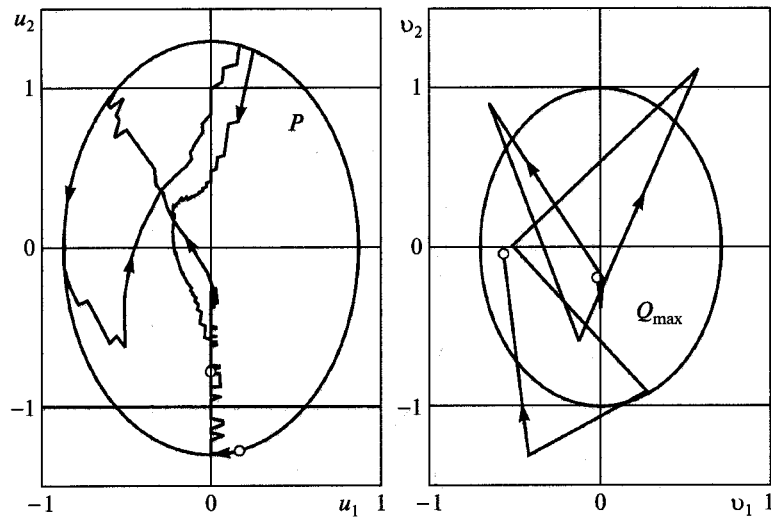
$$Q_{\max} = \left\{ v \in R^2 : \frac{v_1^2}{0.71^2} + \frac{v_2^2}{1.0^2} \leq 1 \right\}$$

Зададим, наконец, параметр $\xi = 0.01$ м в процедуре экстремального прицеливания и шаг $\Delta = 0.01$ с дискретной схемы управления.

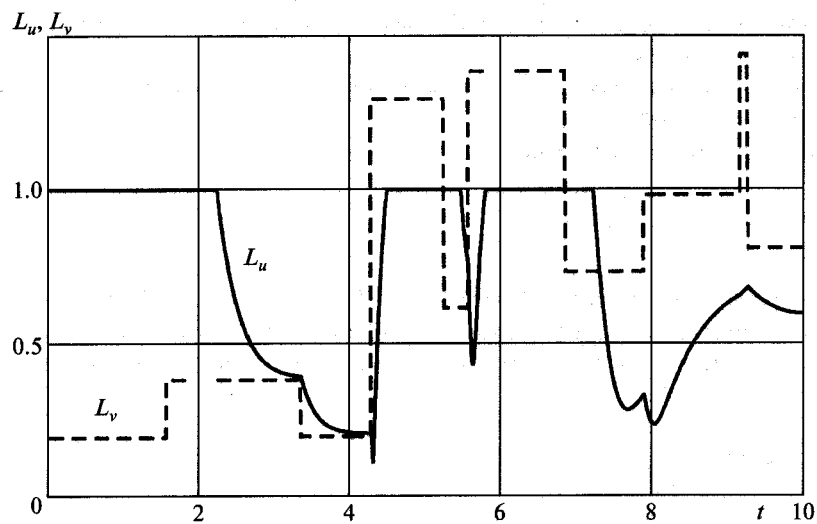
Начальный фазовый вектор в разностных координатах:

$$z_0 = x_0 - y_0 = (-3\text{ м}, 0\text{ м}), \quad \dot{z}_0 = \dot{x}_0 - \dot{y}_0 = (0\text{ м/с}, 2\text{ м/с}), \quad F_0 = 0$$

При моделировании управление второго игрока строилось как кусочно-постоянная функция, векторные значения которой лежат в эллипсе $1.5Q_{\max}$ и остаются постоянными на случайных промежутках времени длиной не более 3 с. Процедура случайного выбора управления u следующая. Сначала с датчика равномерного распределения считывается угол в диапазоне $[0, 2\pi)$. Затем равномерно выбирается точка на радиус-векторе, соединяющем начало координат и границу эллипса в направлении заданного угла. Результаты моделирования приведены на фиг. 2–4.



Фиг. 3



Фиг. 4

Фазовая траектория в разностных координатах z_1, z_2 показана на фиг. 2. Начальная и конечная точки обозначены кружками. Изображен также терминальный круг M .

На фиг. 3 представлены годографы реализаций адаптивного управления и помехи. Годограф управления u лежит в эллипсе P . Годограф помехи v на некоторых промежутках времени выходит за эллипс $Q_{\max}$.

Графики уровней L_u, L_v реализаций векторного управления u относительно эллипса P (сплошная кривая) и векторной помехи v относительно эллипса $Q_{\max}$ (штриховая кривая) показаны на фиг. 4. Выбор управления u на границе эллипса P отвечает значе-

нию $L_u = 1$. Видны три интервала максимального уровня управления u : один в начале процесса, когда отрабатывается начальное отклонение, два других — в середине процесса, когда помеха существенно превосходит уровень $L_v = 1$, соответствующий ограничению $Q_{\max}$. Вне этих трех интервалов уровень полезного управления u существенно меньше максимального.

Возвращаясь к фиг. 2, отметим, что несмотря на то, что реализовавшаяся помеха превзошла планируемый уровень $Q_{\max}$, промах в конце процесса сближения небольшой.

Авторы благодарят Л.В. Камневу за замечания.

Работа выполнена в рамках программы Президиума РАН “Математическая теория управления” при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (09-01-00436, 07-01-96085) и Фонда содействия отечественной науке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Isaacs R. Differential Games. N. Y.: Wiley, 1965 = Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 479 с.
2. Понтрягин Л.С. О линейных дифференциальных играх, 2 // Докл. АН СССР. 1967. Т. 175. № 4. С. 764–766.
3. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
4. Bardi M., Capuzzo-Dolcetta I. Optimal Control and Viscosity Solutions of Hamilton–Jacobi–Bellman Equations. Boston: Birkhauser, 1997. 570 p.
5. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. Game-Theoretical Control Problems. N.Y., etc.: Springer, 1988. 518 p.
6. Поляк Б.Т., Шербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002. 303 с.
7. Барабанов А.Е. Синтез минимаксных регуляторов. СПб.: Изд-во СПб. ун-та, 1996. 224 с.
8. Sokolov V.F. Suboptimal robust synthesis for MIMO plant under coprime factor perturbations // Systems and Control Letters. 2008. V. 57. № 4. P. 348–355.
9. Dahleh M.A., Pearson J.B. L^1 -optimal compensators for continuous-time systems // IEEE Trans. Automat. Control. 1987. V. 32. № 10. P. 889–895.
10. Turetsky V., Glizer V.Y. Robust state-feedback controllability of linear systems to a hyperplane in a class of bounded controls // J. Optimiz. Theory and Appl. 2004. V. 123. № 3. P. 639–667.
11. Ушаков В.Н. К задаче построения стабильных мостов в дифференциальной игре сближения-уклонения // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1980. № 4. С. 29–36.
12. Алгоритмы и программы решения линейных дифференциальных игр / Под ред. А.И. Субботина и В.С. Пацко. Свердловск: Ин-т мат. и мех. УНЦ АН СССР, 1984. 295 с.
13. Зарх М.А., Пацко В.С. Численное решение дифференциальной игры наведения третьего порядка // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1987. № 6. С. 162–169.
14. Тарасьев А.М., Ушаков В.Н., Хрипунов А.П. О построении множеств позиционного поглощения в игровых задачах управления // Тр. Ин-та мат. и мех. УрО РАН. Екатеринбург: УрО РАН, 1992. Т. 1. С. 160–177.
15. Боткин Н.Д., Рязанцева Е.А. Алгоритмы построения множеств разрешимости в линейной дифференциальной игре высокой размерности // Тр. Ин-та мат. и мех. УрО РАН. Екатеринбург: УрО РАН, 1992. Т. 2. С. 128–134.
16. Зарх М.А., Иванов А.Г. Построение функции цены в линейной дифференциальной игре с фиксированным моментом окончания // Тр. Ин-та мат. и мех. УрО РАН. Екатеринбург: УрО РАН, 1992. Т. 2. С. 140–155.

17. Григоренко Н.Л., Киселев Ю.Н., Лагунова Н.В., Силин Д.Б., Тринько Н.Г. Методы решения дифференциальных игр // Математическое моделирование. М.: Изд-во МГУ, 1993. Т. 1. С. 296–316.
18. Ushakov V.N. Construction of solutions in differential games of pursuit-evasion // Lecture Notes in Nonlinear Analysis: Differential Inclusions and Optimal Control. Torun: Nicholas Copernicus University, 1998. V. 2. P. 269–281.
19. Cardaliaguet P., Quincampoix M., Saint-Pierre P. Set-valued numerical analysis for optimal control and differential games // Annals Intern. Soc. of Dynamic Games. V. 4: Stochastic and Differential Games: Theory and Numerical Methods / Eds. M. Bardi et al. Boston: Birkhauser, 1999. P. 177–247.
20. Половинкин Е.С., Иванов Г.Е., Балашов М.В., Константинов Р.В., Хорев А.В. Алгоритмы численного решения линейных дифференциальных игр // Матем. сб. 2001. Т. 192. № 10. С. 95–122.
21. Falcone M. Numerical methods for differential games based on partial differential equations // Intern. Game Theory Rev. 2006. V. 8. № 2. P. 231–272.
22. Красовский Н. Н. Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 518 с.
23. Ganebny S.A., Kumkov S.S., Patsko V.S., Pyatko S.G. Constructing robust control in differential games: application to aircraft control during landing // Annals Intern. Soc. of Dynamic Games. V. 9: Advances in Dynamic Games and Applications / Eds. S. Jorgensen et al. Boston: Birkhauser, 2007. P. 69–92.
24. Ганебный С.А., Кумков С.С., Пацко В.С. Построение управления в задачах с неизвестным уровнем динамической помехи // ПИММ. 2006. Т. 70. Вып. 5. С. 753–770.
25. Иванов А. Г., Ушаков А. В. Использование максимальных стабильных мостов для построения адаптивного управления в трехмерных линейных системах // Тр. 39-й Всеросс. молод. конф. Проблемы теоретической и прикладной математики. Екатеринбург: УрО РАН, 2008. С. 250–254.
26. Shinar J., Medinah M., Biton M. Singular surfaces in a linear pursuit-evasion game with elliptical vectograms // J. Optimiz. Theory and Appl. 1984. V. 43. № 3. P. 431–456.
27. Shinar J., Zarkh M. Pursuit of a faster evader – a linear game with elliptical vectograms // Proc. 7th Intern. Symp. on Dynamic Games. Yokosuka: Japan, 1996. P. 855–868.
28. Ganebny S.A., Kumkov S.S., Patsko V.S. Feedback control in problems with unknown level of dynamic disturbance // Proc. 14th Intern. Workshop on Dynamics and Control: Advances in Mechanics: Dynamics and Control / Eds. F.L. Chernousko et al. Moscow: Nauka, 2008. P. 125–132.
29. Kumkov S. S., Patsko V. S., Shinar J. On level sets with “narrow” throats in linear differential games // Intern. Game Theory Rev. 2005. V. 7. № 3. P. 285–311.

Екатеринбург
e-mail: patsko@imm.uran.ru

Поступила в редакцию
23.XII.2008