Доклады Академии наук СССР
1967. Том 174, № 6

УДК 517.91 *МАТЕМАТИКА*

Академик Л. ПОНТРЯГИН

О ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ. 1

В заметке ([2]) изложены некоторые результаты о линейных дифференциальных играх, выведенные из сложной нелинейной теории ([1]). После моего доклада 30 января этого года на конференции в Лос-Анжелосе профессор E. Polak (Беркли) сказал мне, что линейная задача, вероятно, решается гораздо проще непосредственно. Обдумав это замечание, я пришел к уверенности, что имеет место значительно более общий результат, чем доложенный мною в Лос-Анжелосе, который, однако, уже был намечен в ([2]). Этот более общий результат я формулировал в своих лекциях в Беркли, Провидансе и Монреале в начале февраля этого года. В настоящей заметке я излагаю этот результат в той самой формулировке, в которой он был изложен мною на упомянутых лекциях, и привожу его доказательство.

Пусть R — эвклидово векторное пространство размерности n; M — его векторное подпространство и L — векторное подпространство пространства R, являющееся ортогональным дополнением к подпространству M. Размерность пространства L обозначим через ν. Пусть, далее, P и Q — два многообразия, гомеоморфные сфере размерности $\nu - 1$.

В пространстве R рассмотрим линейную дифференциальную игру ([1]), оканчивающуюся на многообразии M и описываемую дифференциальным уравнением

$$dz/dt = Cz + U(u) - V(v). \tag{1}$$

Здесь z — вектор пространства R; C — постоянная квадратная матрица размерности n; $u \in P$ и $v \in Q$ — управляющие параметры; U и V — непрерывные векторные функции этих параметров. Параметр u соответствует преследующему объекту, а параметр v — убегающему объекту. Эту дифференциальную игру (1) мы изучим в предположении, что для нее выполнены следующие условия А и Б;

А. Через π обозначим операцию ортогонального проектирования из пространства R в подпространство L, и пусть τ — произвольное положительное число. Будем предполагать, что функция

$$\pi e^{\tau C} U(u) \tag{2}$$

дает гомеоморфное отображение многообразия P на некоторую выпуклую гиперповерхность в пространстве L; выпуклое тело, ограниченное в L этой поверхностью, обозначим через $\hat{u}(\tau)$. Границу тела $\hat{u}(\tau)$ будем считать принадлежащей к этому телу. Точно так же будем предполагать, что функция

$$\pi e^{\tau C} V(v) \tag{3}$$

дает гомеоморфное отображение многообразия Q на некоторую выпуклую гиперповерхность пространства L. Выпуклое тело, ограниченное этой поверхностью, обозначим через $\hat{v}(\tau)$. Это тело также будем считать замкнутым.

Б. Будем предполагать, что при любом $\tau > 0$ выпуклое тело $\hat{v}(\tau)$ может быть трансляцией (параллельным сдвигом) передвинуто внутрь выпуклого тела $\hat{u}(\tau)$.

Здесь и в дальнейшем выпуклым телом будем называть выпуклое замкнутое ограниченное ν-мерное подмножество пространства L. Для формулировки и доказательства результата введем некоторые операции над выпуклыми телами.

В. Пусть A и B — два выпуклых тела, α и β — два действительных числа. Совокупность всех векторов вида

$$z = \alpha x + \beta y, \quad \text{где } x \in A,\ y \in B, \tag{4}$$

очевидно, является выпуклым телом. Его мы обозначим через

$$\alpha A + \beta B. \tag{5}$$

Очевидно, что если вектор z принадлежит границе тела (5), то векторы x и y (см. (4)) принадлежат границам тел A и B. Если $A(\tau)$ — выпуклое тело, непрерывно зависящее от действительного параметра τ на отрезке $\tau_1 \leqslant \tau \leqslant \tau_2$, то, пользуясь операцией суммирования (5) и предельным переходом, можно определить операцию интегрирования:

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} A(r)\,dr, \tag{6}$$

причем результат ее есть выпуклое тело (6). Очевидно, что тело (6) состоит из тех и только тех векторов z, которые могут быть записаны в форме

$$z = \int_{\tau_1}^{\tau_2} x(r)\,dr, \quad \text{где } x(r) \in A(r), \tag{7}$$

причем $x(\tau)$ — функция подходящего класса. Если z принадлежит границе тела (6), то почти каждая точка $x(\tau)$ принадлежит границе тела $A(\tau)$, так что, не меняя интеграла (7), можно считать, что каждая точка $x(\tau)$ принадлежит границе тела $A(\tau)$.

Г. Пусть A и B — два такие выпуклые тела, что B трансляцией может быть переведено внутрь A. Очевидно, что совокупность всех векторов x, удовлетворяющих условию

$$x + B \subset A, \tag{8}$$

составляет выпуклое тело. Его мы обозначим через $A \overset{*}{-} B$. Эта операция «вычитания» совершенно отличается от обычной (см. В).

Теорема. *Пусть z_0 — произвольная точка пространства R, не принадлежащая M, и $\tau > 0$. Положим*

$$\eta(\tau) = \pi e^{\tau C} z_0; \tag{9}$$

$$\hat{w}(\tau) = \hat{u}(\tau) - \hat{v}(\tau); \quad \hat{W}(\tau) = \int_0^{\tau} \hat{w}(r)\,dr \tag{10}$$

(см. А, Б, В, Г).

При малых значениях τ точка $-\eta(\tau)$, очевидно, не принадлежит выпуклому телу $\hat{W}(\tau)$. Если при некоторых значениях τ имеет место включение

$$-\eta(\tau) \in \hat{W}(\tau) \tag{11}$$

и τ_0 — минимальное значение τ, при котором имеет место включение (11), то, исходя из состояния z_0, игра может быть закончена и притом за время, не превосходящее числа

$$T(z_0) = \tau_0. \tag{12}$$

При доказательстве этой теоремы управление u будет конструироваться с учетом управления v, так чтобы по возможности уменьшить время окончания игры. При построении управления $u(t_1)$ в момент времени t_1 мы будем использовать значение $z(t_1)$ в тот же момент времени и управление $v(t)$ на отрезке $t_1 \leqslant t \leqslant t_1 + \varepsilon$, где ε — произвольно малое положительное число. В задаче преследования такая постановка вопроса вполне допустима; она возникает в случае, если преследующий объект гонится не за самим убегающим объектом, а за тем местом, где убегающий объект находился ε секунд назад. Для решения задачи в обычной постановке вопроса следует произвести предельный переход при $\varepsilon \to 0$.

Доказательство. Будем считать, что управление $v(t)$ задано на отрезке $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon$, и пусть $u(t)$ — пока произвольное управление, заданное на том же отрезке. Подставляя эти управления в уравнение (1), найдем его решение $z(t)$ на отрезке $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon$ при начальном условии $z(0) = z_0$. Число $T(z(\varepsilon))$ (см. (12)) является функционалом от функции $u(t)$. Ниже мы выберем функцию $u(t)$ таким образом, чтобы число $T(z(\varepsilon))$ получило минимальное значение, и докажем, что

$$T(z_0) - T(z(\varepsilon)) \geqslant \varepsilon. \tag{13}$$

Легко видеть, что при произвольном $\tau \geqslant \varepsilon$ имеет место включение

$$\hat{w}(r) \subset \hat{u}(r) - \pi e^{rC} V(v(\tau - r)), \quad \text{где } \tau - \varepsilon \leqslant r \leqslant \tau. \tag{14}$$

Интегрируя это включение по r в пределах $\tau - \varepsilon \leqslant r \leqslant \tau$ и прибавляя к полученному соотношению выпуклое тело $\hat{W}(\tau - \varepsilon)$, получаем

$$\hat{W}(\tau) \subset \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau} [\hat{u}(r) - \pi e^{rC} V(v(\tau - r))]\, dr + \hat{W}(\tau - \varepsilon). \tag{15}$$

По условию, при $\tau = \tau_0$ левая часть этого включения содержит точку $-\eta(\tau_0)$, следовательно, и правая часть ее содержит. Пусть

$$\tau_1 \leqslant \tau_0 \tag{16}$$

минимальное значение τ, при котором точка $-\eta(\tau)$ содержится в правой части включения (15). Тогда существует такое управление $u(t)$ (см. B), $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon$, что точка

$$-\left\{\pi e^{\tau_1 C} z_0 + \int_{\tau_1-\varepsilon}^{\tau_1} \pi e^{rC} [U(u(\tau_1 - r)) - V(v(\tau_1 - r))]\, dr\right\} = -\pi e^{(\tau_1-\varepsilon)C} z_1, \tag{17}$$

где

$$z_1 = e^{\varepsilon C} z_0 + \int_0^{\varepsilon} e^{sC} [U(u(\varepsilon - s)) - V(v(\varepsilon - s))]\, ds, \tag{18}$$

принадлежит телу $\hat{W}(\tau_1 - \varepsilon)$, а это значит, что

$$T(z_1) \leqslant \tau_1 - \varepsilon \leqslant \tau_0 - \varepsilon. \tag{19}$$

Так как $z_1 = z(\varepsilon)$ (см. (18)), то неравенство (13) доказано.

Замечание. Нет надобности предполагать, что Q есть многообразие. Пусть Q — произвольное компактное множество такое, что при произвольном положительном τ множество $\pi e^{\tau C} V(Q)$ может быть трансляцией переведено внутрь выпуклого тела $\hat{u}(\tau)$. Определим тогда выпуклое тело $\hat{w}(\tau)$ как совокупность всех таких векторов x, что

$$x + \pi e^{\tau C} V(Q) \subset \hat{u}(\tau).$$

Тогда имеет место приведенная выше теорема, причем доказательство ее полностью сохраняется.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
6 IV 1967

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. С. Понтрягин, УМН, 21, в. 4 (130) (1966). [2] Е. Ф. Мищенко, Л. С. Понтрягин, ДАН, 174, № 1 (1967).