Доклады Академии наук СССР
1967. Том 175, № 4

МАТЕМАТИКА

УДК 517.19

Академик Л. С. ПОНТРЯГИН

О ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ. 2

Здесь будут развиты соображения, изложенные в ([2]), как в направлении расширения класса рассматриваемых игр, так и в направлении улучшения результата.

Пусть R — векторное пространство произвольной размерности и

$$dz / dt = Cz + u - v \tag{1}$$

заданное в R векторное дифференциальное уравнение, так что $z \in R$; при этом C — квадратная матрица, а $u \in P$, $v \in Q$ — управляющие параметры, причем P и Q — замкнутые ограниченные выпуклые подмножества пространства R произвольной размерности. Далее, пусть M — замкнутое выпуклое подмножество пространства R, также произвольной размерности. Уравнением (1) и множеством M определена дифференциальная игра. При этом u — преследующий параметр, v — убегающий параметр и M — множество, на котором игра заканчивается ([1]).

Для формулировки и доказательства результата введем некоторые операции над выпуклыми множествами, в частности операцию альтернированного интегрирования выпуклых множеств. Все рассматриваемые в дальнейшем множества являются замкнутыми подмножествами пространства R.

А. Пусть A и B — два множества, а α и β — два действительных числа. Через

$$\alpha A + \beta B \tag{2}$$

обозначим совокупность всех векторов $\alpha x + \beta y$, где $x \in A$, $y \in B$. В случае $\alpha = \beta = 1$ формула (2) дает алгебраическую сумму множеств. В случае $\alpha = 1$, $\beta = -1$ формула (2) дает алгебраическую разность множеств. Если A и B — выпуклые множества, формула (2) дает выпуклые множества. Через

$$A \overset{*}{-} B \tag{3}$$

обозначим совокупность всех векторов x, удовлетворяющих условию $x + B \subset A$. Множество (3) может оказаться и пустым. Если A — выпуклое множество, то формула (3) определяет также выпуклое множество. Пусть A, U, V — выпуклые множества. Тогда имеют место следующие легко доказываемые соотношения:

$$(A \overset{*}{-} U) \overset{*}{-} V = A \overset{*}{-} (U + V), \tag{4}$$

$$(A + U) \overset{*}{-} V \supset (A \overset{*}{-} V) + U. \tag{5}$$

Б. Пусть A_0 — некоторое выпуклое множество, а

$$U_1, \ldots, U_n; \quad V_1, \ldots, V_n \tag{6}$$

две последовательности выпуклых множеств. Определим индуктивно множество A_{i+1}, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, положив

$$A_{i+1} = (A_i + U_{i+1}) \overset{*}{-} V_{i+1}. \tag{7}$$

Множество A_n естественно назвать альтернированной суммой последовательностей (6) с начальным значением A_0. Пусть

$$U = U_1 + \ldots + U_n; \quad V = V_1 + \ldots + V_n,$$

тогда из формул (4) и (5) следует

$$A_n \subset (A_0 + U) \overset{*}{-} V. \tag{8}$$

В. Пусть $A = A_0$ — некоторое выпуклое множество, а $U(\tau)$ и $V(\tau)$ — два ограниченных выпуклых множества, непрерывно зависящих от действительного параметра τ на отрезке $p \leqslant \tau \leqslant q$. Определим альтернированный интеграл функций $U(\tau)$ и $V(\tau)$:

$$B = \int\limits_{A,\, p}^{q} [U(\tau)\, d\tau \overset{*}{-} V(\tau)\, d\tau]. \tag{9}$$

Здесь A является начальным множеством интегрирования, p — начальным значением τ, а q — конечным значением. Сам интеграл (9) является выпуклым множеством. Для определения интеграла (9) разобьем интервал интегрирования на мелкие отрезки точками $r_0 = p$, $r_1, \ldots, r_n = q$, и пусть

$$U_i = \int\limits_{r_{i-1}}^{r_i} U(\tau)\, d\tau; \quad V_i = \int\limits_{r_{i-1}}^{r_i} V(\tau)\, d\tau \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{10}$$

Выписанные здесь интегралы от выпуклых множеств определяются естественным образом на основе операции сложения (2).

Исходя из последовательностей (10) и начального множества A_0, построим альтернированную сумму A_n (см. Б). Предел этой альтернированной суммы при безграничном измельчении отрезка $p \leqslant \tau \leqslant q$ и является интегралом (9). Пусть теперь функции $U(\tau)$ и $V(\tau)$ определены на отрезке $p \leqslant \tau \leqslant r$, причем $r > q$, тогда имеет место включение

$$\int\limits_{A,\, p}^{r} [U(\tau)\, d\tau \overset{*}{-} V(\tau)\, d\tau] \subset \Big(B + \int\limits_{q}^{r} U(\tau)\, d\tau\Big) \overset{*}{-} \int\limits_{q}^{r} V(\tau)\, d\tau \tag{11}$$

(см. (8), (9)).

Теорема. *Положим $A = -M$ (см. (1)) и составим альтернированный интеграл*

$$W(\tau) = \int\limits_{A,\, 0}^{\tau} [e^{rC} P\, dr \overset{*}{-} e^{rC} Q\, dr] \quad (\tau \geqslant 0). \tag{12}$$

Пусть, далее, z_0 — произвольная точка пространства R, не входящая в M; положим $\eta(\tau) = e^{\tau C} z_0$. Если при некотором значении $\tau > 0$ точка $-\eta(\tau)$ принадлежит выпуклому множеству $W(\tau)$, то обозначим через τ_0 минимальное значение τ, для которого эта принадлежность осуществляется. Оказывается тогда, что игра (1), начинающаяся в точке z_0, может быть закончена за время, не превосходящее числа

$$T(z_0) = \tau_0. \tag{13}$$

При доказательстве этой теоремы управление u будет конструироваться с учетом управления v, так чтобы по возможности сократить время игры. При построении управления $u(t)$ в момент времени t мы будем использовать значение $z(t)$ в тот же момент времени и управление $v(s)$ на отрезке $t \leqslant s \leqslant t + \varepsilon$, где ε — произвольно малое положительное число (см. [2]).

Доказательство. Будем считать, что управление $v(t)$ задано на отрезке $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon$, и пусть $u(t)$ — пока произвольное управление, заданное на том же отрезке. Подставляя эти управления в уравнение (1), найдем его решение $z(t)$ на отрезке $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon$ при начальном условии $z(0) = z_0$. Число $T(z(\varepsilon))$ (см. (13)) является функционалом от функции

$u(t)$. Ниже мы выберем функцию $u(t)$ таким образом, чтобы число $T(z(\varepsilon))$ получило минимальное значение, и докажем, что

$$T(z_0) - T(z(\varepsilon)) \geqslant \varepsilon. \tag{14}$$

Из (11) следует, что при произвольном $\tau \geqslant \varepsilon$ имеет место включение

$$W(\tau) \subset \left(W(\tau-\varepsilon) + \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau} e^{rC} P\, dr\right) \underline{*} \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau} e^{rC} Q\, dr \subset$$

$$\subset W(\tau-\varepsilon) + \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau} e^{rC} P\, dr - \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau} e^{rC} v(\tau - r)\, dr = D(\tau). \tag{15}$$

Следует заметить, что последний член формулы (15) определен для всех значений $\tau > \varepsilon$, так как функция $v(\tau - r)$ определена на всем отрезке интегрирования $\tau - \varepsilon \leqslant r \leqslant \tau$, ибо ее аргумент на этом отрезке интегрирования меняется на отрезке $[0, \varepsilon]$, а функция $v(t)$ и задана на этом отрезке. Согласно предположению, точка $-\eta(\tau)$ принадлежит левой части включения (15) при $\tau = \tau_0$. Пусть $\tau_1 \leqslant \tau_0$ — то минимальное значение τ, для которого точка $-\eta(\tau)$ принадлежит последней части включения, именно множеству $D(\tau)$. Тогда существует такая функция $u(t) \in P$, $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon$, что точка $-e^{(\tau_1-\varepsilon)C} z_1$ принадлежит множеству $W(\tau_1 - \varepsilon)$ при условии, что

$$z_1 = e^{\varepsilon C} z_0 + \int_0^{\varepsilon} e^{sC} (u(\varepsilon - s) - v(\varepsilon - s))\, ds. \tag{16}$$

Так как, очевидно, $z_1 = z(\varepsilon)$, то утверждение доказано.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
3 V 1967

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. С. Понтрягин, УМН, 21, в. 4 (130) (1966). [2] Л. С. Понтрягин, ДАН, 174, № 6 (1967).