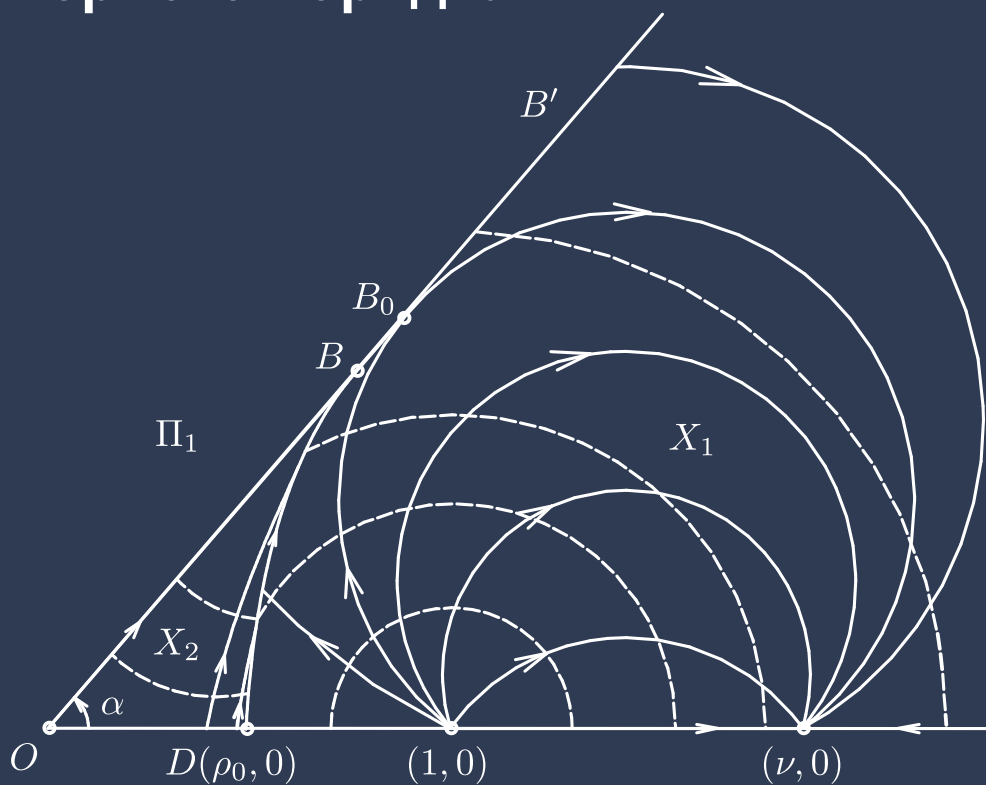


Арик Меликян

Приложения к задачам теории управления
и дифференциальным играм

Обобщенные характеристики уравнений в частных производных первого порядка



A.A. Melikyan

**Generalized Characteristics
of First Order PDEs**

**Applications in Optimal Control
and Differential Games**

1998

Birkhäuser

Boston • Basel • Berlin

А.А. Меликян

Обобщенные характеристики уравнений в частных производных первого порядка

Приложения к задачам теории управления
и дифференциальным играм

Перевод с английского
В.А. Корнеева, А.Е. Утемова

Под редакцией В.С. Пацко



Москва ♦ Ижевск

2014

УДК 517.95, 517.977
ББК 22.161.6, 22.161.8
М 47

Меликян А.А.

Обобщенные характеристики уравнений в частных производных первого порядка. Приложения к задачам теории управления и дифференциальным играм. — М.—Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2014. — 450 с.

Классический метод характеристик Коши для уравнений в частных производных первого порядка предполагает наличие гладкого решения таких уравнений. В то же время в математической физике, теории оптимального управления и теории дифференциальных игр широко используется понятие вязкостного (минимаксного) решения, охватывающее случай кусочно-гладкого решения. А.А.Меликян разработал метод обобщенных (сингулярных) характеристик, позволяющий исследовать, а в простых случаях даже находить вязкостное решение.

Настоящее издание содержит перевод книги А.А.Меликяна на эту тему, вышедшей на английском языке в 1998 г. В добавлении приведен перевод нескольких статей А.А.Меликяна, опубликованных на английском языке после 1998 г.

Для специалистов в области уравнений в частных производных, теории оптимального управления и теории дифференциальных игр, а также для студентов старших курсов учебных заведений и аспирантов.

ISBN 978-5-4344-0198-2

ББК 22.161.6, 22.161.8

© Карине Георгиевна Меликян, Заруи Ариковна Меликян,
Артем Арикович Меликян, 2014

© Институт проблем механики им. А.Ю.Ишлинского РАН, 2014



Об Арике Артаваздовиче Меликяне

Арик Артаваздович Меликян (1944–2009 гг.) — крупный ученый в области дифференциальных игр, оптимального управления и смежных разделов теории дифференциальных уравнений.

Арик Артаваздович родился 5 октября 1944 г. в Ереване. Его родители — Артавазд Михайлович и Шушаник Сантуровна — были преподавателями биологии в школе. В 1962 г. А.А. Меликян окончил школу с золотой медалью и поступил на факультет кибернетики Ереванского политехнического института. Прочувшись там один год, он в 1963 г. поступил в Московский физико-технический институт (МФТИ) на факультет аэромеханики и прикладной математики, который с отличием окончил в 1969 г. В том же году Арик Артаваздович поступил в аспирантуру МФТИ.

Будучи научным руководителем А.А. Меликяна, я предложил ему заняться исследованиями в области дифференциальных игр с неполной информацией. Арик Артаваздович быстро написал и успешно защитил весьма интересную кандидатскую диссертацию по этой теме.

По окончании аспирантуры он работал в Институте проблем механики АН СССР (в настоящее время Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук), с которым связана вся научная карьера А.А. Меликяна. Здесь Арик Артаваздович прошел путь от младшего научного сотрудника до заведующего лабораторией. В 1986 г. он защитил докторскую диссертацию на тему “Построение оптимальных движений в игровых задачах динамики”, в которой сочетались и взаимно обогащали друг друга математические методы классической механики и теории дифференциальных игр. В 1998 г. ему была присуждена Государственная премия Российской Федерации в области науки и техники. В 2003 г. А.А. Меликян был избран членом-корреспондентом Российской академии наук, а в 2009 г. — иностранным членом Национальной академии наук Республики Армения.

А.А. Меликян уделял большое внимание учебной работе по подготовке научной смены, был профессором МФТИ, читал оригинальные курсы по вариационному исчислению, оптимальному управлению и дифференциальным играм. Его ученики успешно работают в научных институтах многих стран.

Читателю предлагается книга А.А. Меликяна, посвященная методу обобщенных характеристик для уравнений в частных производных первого порядка. В основу книги положен материал монографии А.А. Меликяна “Generalized characteristics of first order PDEs. Applications in optimal control and differential games”^{*} и ряда журнальных публикаций, изданных за рубежом на английском языке. Я рад, что теперь эти работы будут опубликованы на русском языке.

^{*} Melikyan, A.A. Generalized Characteristics of First Order PDEs: Applications in Optimal Control and Differential Games. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1998. xiv+310 pp.

Обобщенные характеристики возникают в задачах теории управления и дифференциальных игр, когда недостаточно ограничиться классическими гладкими решениями уравнения Гамильтона – Якоби – Беллмана – Айзекса, а необходимо рассматривать также негладкие или даже разрывные решения и связанные с ними сингулярные многообразия, на которых происходят разрывы производной или значения решения. А.А. Меликян предложил и разработал метод сингулярных характеристик, позволяющий строить сингулярные многообразия, пользуясь классическим аппаратом теории дифференциальных уравнений. Этот метод дает возможность получать в явном виде синтез в задачах оптимального управления и дифференциальных игр и, кроме того, делать заключения о структуре и гладкости вязкостных решений уравнения Гамильтона – Якоби – Беллмана – Айзекса. При этом А.А. Меликян распространил свой метод на значительно более широкий класс уравнений в частных производных первого порядка. Оказалось, что метод сингулярных характеристик применим как для построения оптимальных решений в дифференциальных играх, так и для исследования распространения слабых разрывов в некоторых физических средах и для обработки визуальной информации.

А.А. Меликян был не только крупным ученым и замечательным преподавателем, но и прекрасным, отзывчивым, исключительно доброжелательным человеком, наделенным оптимизмом и чувством юмора. Его отличали удивительная доброта и многогранный талант: в молодости он был успешным спортсменом-легкоатлетом, играл на музыкальных инструментах, владел несколькими иностранными языками, параллельно с основным образованием обучался на факультете журналистики МГУ, брал интервью, писал рассказы, которые публиковались в “Литературной газете”.

В работе над данной книгой приняли участие коллеги, сотрудники, друзья и ученики Арика Артаваздовича: В.С. Пацко, И.М. Ананьевский, В.А. Корнеев, Н.В. Овакимян, А.И. Овсеевич, А.Е. Утемов, которые осуществили перевод английских текстов и научное редактирование. Большую помощь в подготовке издания оказали Д.А. Бедин, А.Г. Иванов, Л.В. Камнева, С.С. Кумков.

Академик Ф.Л. Черноусько

Оглавление

Об Арике Артаваздовиче Меликяне	7
Предисловие	19
Введение	23
ГЛАВА 1. Метод характеристик в гладких задачах	29
1.1. Задача Коши для УЧП первого порядка	29
1.1.1. Постановка задачи	29
1.1.2. Уравнения характеристик	30
1.1.3. Начальные условия	31
1.1.4. Замечание о решении в малом	33
1.1.5. Построение дважды дифференцируемого решения	33
1.1.6. Нерегулярная характеристическая задача	35
1.1.7. Пример на плоскости. Постановка задачи	39
1.1.8. Построение решения	40
1.2. Задача Коши для интегральных поверхностей	41
1.2.1. Геометрическая постановка задачи 1.1	41
1.2.2. Обобщенная задача Коши	42
1.2.3. Характеристическое поле на многообразии	45
1.2.4. Построение базисного решения	48
1.2.5. Выражение для λ при малых m	50
1.2.6. Достаточные условия для задач 1.3, 1.4	50
1.2.7. Геометрия характеристического поля	52
1.2.8. Характеристические точки многообразия W	53
1.2.9. Пример характеристической системы для случая $m = 1$	55
1.3. Задача Коши с подвижной границей	56
1.3.1. Регулярная задача с подвижной границей	56
1.3.2. Нерегулярная задача	59
1.3.3. Скобки Якоби различных уровней	60
1.3.4. Достаточное условие	61
1.3.5. Классическая нерегулярная нехарактеристическая задача	63
1.3.6. Иллюстративный пример	72
Упражнения	75
ГЛАВА 2. Обобщенные решения и сингулярные характеристики УЧП	
первого порядка	77
2.1. Вязкостные решения и их сингулярные многообразия	77
2.1.1. Определение вязкостного решения	77

2.1.2.	Регулярные и сингулярные точки решения. Простейшая сингулярность	79
2.1.3.	Необходимые условия простейшей сингулярности	82
2.1.4.	Сингулярные характеристики: определение и классификация	84
2.1.5.	Некоторые свойства задач с начальными и терминальными значениями	85
2.2.	Рассеивающая поверхность	86
2.2.1.	Основные условия	86
2.2.2.	Линейные и нелинейные гамильтонианы	87
2.3.	Сингулярные характеристики для эквивокальной поверхности	90
2.3.1.	Четыре типа поверхностей, необходимые условия	90
2.3.2.	Уравнения сингулярных характеристик	92
2.3.3.	Некоторые свойства характеристической системы	94
2.4.	Сингулярные характеристики для фокальной поверхности	96
2.4.1.	Шесть типов поверхностей, необходимые условия	96
2.4.2.	Фокальная поверхность — гиперплоскость	99
2.4.3.	Несимметричная поверхность, коллинеарные поля	102
2.4.4.	Вырожденные поверхности	105
2.4.5.	Начальные условия и идентификация сингулярных поверхностей	106
2.4.6.	Изменения для задач с терминальными значениями	106
2.5.	Пример задачи с заданными начальными условиями	107
2.5.1.	Постановка задачи	107
2.5.2.	Случай 1), $a < b$	109
2.5.3.	Случай 2), $a = b$	111
2.5.4.	Случай 3), $a > b$	112
2.5.5.	Некоторые изменения для несимметричного случая	114
2.5.6.	Заключительные замечания	117
	Упражнения	118
ГЛАВА 3. УЧП первого порядка в вариационном исчислении, оптимальном управлении и дифференциальных играх		
3.1.	Уравнение Гамильтона – Якоби в вариационном исчислении	119
3.1.1.	Формула первой вариации	119
3.1.2.	Случай неоднородного лагранжиана	122
3.1.3.	Вариационная задача о минимальной геодезической	123
3.1.4.	Классический однородный лагранжиан	125
3.2.	Уравнение Беллмана в оптимальном управлении	126
3.2.1.	Задача с фиксированным временем	126
3.2.2.	Задача быстрогодействия	128
3.2.3.	Управления обратной связи	131
3.3.	Уравнение Айзекса в дифференциальных играх	131
3.3.1.	Игра с фиксированным моментом окончания. Функция цены	131
3.3.2.	Игры преследования	134
3.4.	Обобщенные решения уравнения Гамильтона – Якоби – Беллмана – Айзекса	135

3.4.1.	Классические и вязкостные решения	135
3.4.2.	Обобщенное основное уравнение, неравенства А.И. Субботина	137
3.5.	Сингулярные траектории и сингулярные характеристики	139
3.5.1.	Сингулярные поверхности и траектории: определение и классификация	139
3.5.2.	Эквивокальная поверхность	142
3.5.3.	Сингулярные траектории и характеристики	145
3.6.	Линейная игра преследования с эллиптическими вектограммами	146
3.6.1.	Постановка задачи	146
3.6.2.	Рассеивающая поверхность	148
3.6.3.	Фокальная поверхность	150
3.6.4.	Граница индифферентной зоны	152
Упражнения	153
ГЛАВА 4. Дифференциальные игры с простыми движениями на многообразиях		
4.1.	Постановка задачи	155
4.1.1.	Игры с простыми движениями	155
4.1.2.	Уравнения динамики	156
4.1.3.	Функции платы для двух игр	158
4.2.	Первичное решение	158
4.2.1.	Свойства геодезической линии	158
4.2.2.	Первичная и вторичная области	159
4.3.	Необходимые условия оптимальности	160
4.3.1.	Обобщенное основное уравнение, регулярные траектории	160
4.3.2.	Сингулярная (особая) поверхность в первичной области	162
4.3.3.	Анализ поверхности Γ_0 с использованием условий вязкостного решения	166
4.4.	Две ветви эквивокальной поверхности	170
4.4.1.	Определение эквивокальных поверхностей	170
4.4.2.	Основной результат	173
4.4.3.	Алгоритм построения	175
4.5.	Игра преследования с препятствием	176
4.5.1.	Постановки задачи	176
4.5.2.	Плоская задача	179
4.5.3.	Примеры	181
Упражнения	185
ГЛАВА 5. Игры простого преследования и сближения на двумерном конусе		
5.1.	Формулировка игры в различных системах координат	187
5.1.1.	Динамика в декартовых и относительных переменных	187
5.1.2.	Автомодельные переменные, комплексные координаты	191
5.1.3.	Первичные решения	193
5.2.	Анализ первичной области	194

5.2.1.	Необходимые условия оптимальности	194
5.2.2.	Построение множества B , параметрический анализ	196
5.2.3.	Построение эквивокальной поверхности	200
5.3.	Исследование вторичной области	201
5.3.1.	Игра преследования	201
5.3.2.	Критический конус при $\nu = 1 - \sin \alpha$	205
5.3.3.	Игра сближения	207
5.3.4.	Случай $\nu = 1$	210
5.3.5.	Об алгоритме синтеза и компьютерном моделировании	212
Упражнения		215
ГЛАВА 6. Гладкие решения УЧП с негладким гамильтонианом		217
6.1.	Сингулярные траектории в оптимальном управлении. Анализ на основе программного и синтезирующего подходов	217
6.1.1.	Введение	217
6.1.2.	Сингулярная дуга в задаче оптимального управления, программный подход	219
6.1.3.	Линейная задача	219
6.1.4.	Два набора переменных	221
6.1.5.	Необходимые условия в инвариантной форме	222
6.1.6.	Сингулярная универсальная поверхность в общей задаче	223
6.2.	Уравнения в частных производных первого порядка	225
6.2.1.	Необходимые условия для сингулярной гиперплоскости	225
6.2.2.	Вспомогательная теорема	227
6.2.3.	Необходимые условия в инвариантной форме	229
6.2.4.	Сингулярные характеристики для универсальной поверхности	230
6.2.5.	Приложения к задаче управления	231
6.2.6.	Пример	234
6.3.	Второй порядок сингулярности	237
6.3.1.	Два оптимальных фазовых портрета. Условие Коппа – Мойера	237
6.3.2.	Инвариантная форма условий второго порядка	239
6.3.3.	Сингулярные характеристики для синтеза S2	240
Упражнения		242
ГЛАВА 7. Ударные волны в решениях УЧП первого порядка		243
7.1.	Сингулярные характеристики в задачах на плоскости	243
7.1.1.	Двумерная задача	243
7.1.2.	Уравнения для фокальной линии	244
7.1.3.	Уравнения для эквивокальной линии	246
7.1.4.	Сингулярные характеристики двумерного уравнения Гамильтона – Якоби	247
7.2.	Ударные волны, порожденные граничными условиями	250
7.2.1.	Начальные условия	250
7.2.2.	Овыщукление функции $g(p)$	251
7.2.3.	Исследование второй производной	256

7.3.	Основные результаты для количества волн	258
7.3.1.	Упрощенные выражения скобок Якоби	258
7.3.2.	Случай простых отрезков	259
7.3.3.	Вторичные волны	264
7.3.4.	Решение в случае непростого отрезка	265
7.3.5.	Теорема С.Н. Кружкова	267
7.3.6.	Пример	268
7.3.7.	Некоторые обобщения на многомерный случай	269
7.4.	Другие приложения метода сингулярных характеристик	271
7.4.1.	Сингулярные характеристики в законах сохранения	271
7.4.2.	Об одном классе систем уравнений в частных производных первого порядка	272
Упражнения	275
ГЛАВА 8. Сингулярные поверхности негладких решений вариационных задач с функционалом, задаваемым многомерным интегралом		
8.1.	Задача вариационного исчисления с многомерным интегралом	277
8.1.1.	Негладкое решение УЧП второго порядка	277
8.1.2.	Формула первой вариации	278
8.1.3.	Необходимые условия для сингулярной поверхности	281
8.2.	Построение сингулярной поверхности	285
8.2.1.	Уравнения сингулярных характеристик	285
8.2.2.	Начальные условия	286
8.3.	Квадратичный лагранжиан	289
8.3.1.	Вырожденные необходимые условия	289
8.3.2.	Сингулярные характеристики	290
8.3.3.	Возмущенная задача	293
8.3.4.	Начальные условия	294
8.4.	Пример	295
8.4.1.	Постановка задачи	295
8.4.2.	Разложения Тейлора	297
8.4.3.	Частные случаи	299
Упражнения	301
Приложение	303
1.	Теорема о неявной функции	303
2.	Скобки Якоби	304
3.	Инвариантность скобок Якоби	305
4.	Выпрямление поля	308
5.	Преобразование к простой задаче	310
Литература	312
Сокращения	318
Предметный указатель	319

ДОБАВЛЕНИЕ

Избранные статьи	323
Некоторые свойства уравнения Беллмана – Айзекса для игр на поверхностях вращения	325
1. Уравнение Гамильтона – Якоби – Беллмана – Айзекса для игры сближения-уклонения	325
2. Игры на поверхностях вращения	326
3. Игра на конусе	327
4. Игра на гиперболоиде	328
5. Геометрические свойства многообразия B	329
6. Фокальная точка	329
7. Край многообразия B	331
8. Вычисление C	332
9. Структура цены игры	333
Литература	333
Геометрия оптимальных траекторий в окрестности фокальных особых поверхностей в дифференциальных играх	335
1. Введение	335
2. Общее описание фокальной поверхности	336
3. Сингулярная поверхность — гиперплоскость	337
4. Поверхность в общем случае. Коллинеарные поля	340
5. Система двух УЧП для фокального многообразия в общем случае	342
6. Импульсная дифференциальная игра, возникающая в области финансов	345
6.1. Предшествующая работа	345
6.2. Применение теории предыдущего раздела	346
6.3. Эквивалентное скалярное УЧП второго порядка	347
7. 3D-дифференциальная игра с гладким гамильтонианом	348
Литература	349
Задачи с начальными и терминальными условиями для уравнения Гамильтона – Якоби	351
1. Введение	351
2. Вязкостные решения и краевые условия	352
3. Задачи с начальными и терминальными значениями в оптимальном управлении	353
3.1. Нестационарная система и задача вариационного исчисления	354
3.2. Стационарная система и задача вариационного исчисления	355
3.3. Задача вариационного исчисления с однородным лагранжианом	356
3.4. Замечание по терминологии	358
4. Примеры	359
4.1. Управление автомобилем	359
4.2. Двумерная дифференциальная игра	361
4.3. Скалярное уравнение эйконала	366
5. Заключение	367
Литература	367

Геометрия игр преследования-убегания на двумерных многообразиях	369
1. Введение	370
2. Пространство игры и динамика	371
3. Первичное решение	372
4. Неединственность геодезических. Многообразия Γ и B	373
5. Примеры многообразий Γ и B	375
6. Вторичная область. Экивокальные поверхности	384
7. Подобласть произвольного управления убегающего	386
8. Выводы	389
Литература	390

Простейшие особенности и обобщенные характеристики для уравнения Гамильтона–Якоби с гамильтонианом в виде максимума вогнутых функций	393
1. Введение	393
2. Простейшие особенности и сингулярные характеристики	395
2.1. Предположения о сингулярностях коразмерности 1	395
2.2. Классические характеристики	396
2.2.1. Свойство n -монотонности функций H_i	398
2.2.2. Условие равномерной n -монотонности	399
2.3. Метод сингулярных характеристик	399
2.3.1. Условия продолжения	401
3. Возможные типы сингулярностей	402
3.1. Восходящие сингулярности	403
3.1.1. Восходящая рассеивающая поверхность	404
3.1.2. Восходящая экивокальная поверхность	404
3.1.3. Восходящая фокальная поверхность	407
3.2. Нисходящие сингулярности	407
3.2.1. Нисходящая рассеивающая поверхность	408
3.2.2. Нисходящая экивокальная поверхность	409
3.2.3. Нисходящая фокальная поверхность	410
3.3. Неособые поверхности переключения	410
3.3.1. Неособая рассеивающая поверхность	411
3.3.2. Неособая экивокальная поверхность	411
3.3.3. Универсальная поверхность	411
4. Пример	413
4.1. Универсальная поверхность	414
4.2. Неособая экивокальная поверхность	415
4.3. Восходящая экивокальная поверхность	415
Литература	417

Краевые сингулярности и характеристики уравнения Гамильтона–Якоби	419
1. Введение	419
1.1. Классические характеристики	420
1.2. Начальная полоса	420
1.3. Условие регулярности	421

2.	Нерегулярная задача и граничные условия на M	422
2.1.	Начальная полоса для нерегулярной нехарактеристической задачи	423
3.	Метод сингулярных характеристик	424
3.1.	Эквивокальные сингулярные характеристики в дифференциальных играх	425
3.2.	Граничные сингулярные характеристики	427
3.3.	Сингулярность более высокого порядка	428
4.	Сравнение граничных условий на M и M_0^+	428
5.	Достаточные условия существования и единственности	430
5.1.	Формулировка простой задачи	431
5.2.	Формулировка теоремы	432
6.	Примеры	433
6.1.	Одномерный иллюстративный пример	433
6.2.	Дифференциальная игра с фазовыми ограничениями	434
6.3.	Граничные характеристики в игровой задаче о брахистохроне	437
7.	Выводы	440
	Литература	440
Универсальные поверхности и гладкие решения уравнений Беллмана		443
1.	Введение	443
2.	Гладкая функция Беллмана в окрестности универсальной поверхности	444
3.	Достаточные условия существования универсальной поверхности	447
	Литература	449