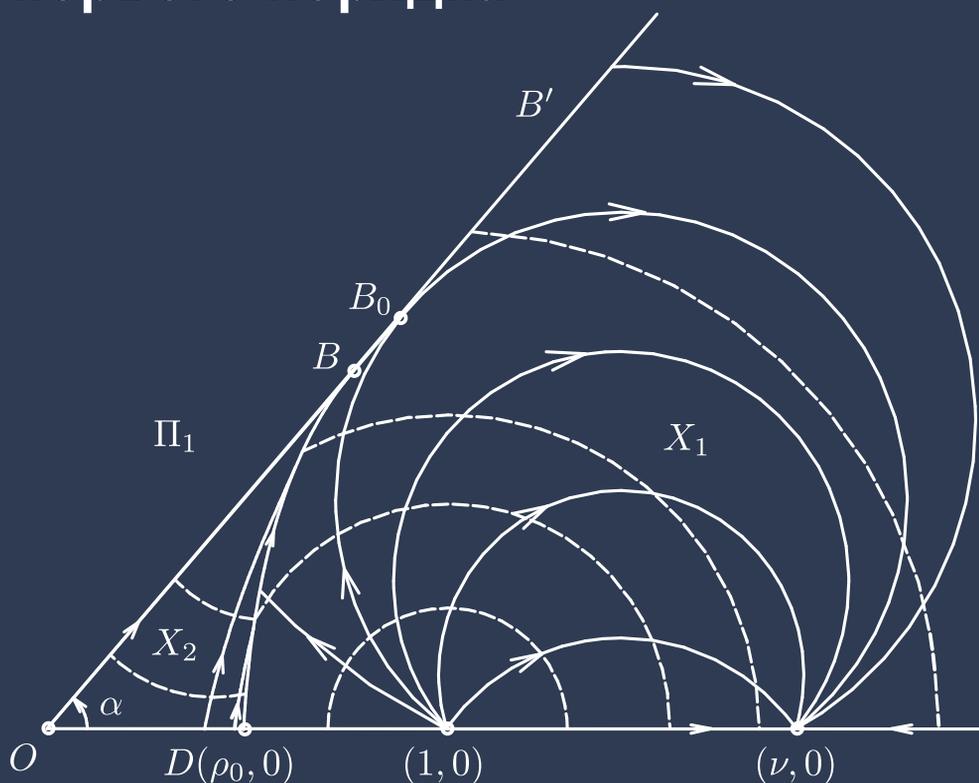


Арик Меликян

Приложения к задачам теории управления  
и дифференциальным играм

# Обобщенные характеристики уравнений в частных производных первого порядка



A.A. Melikyan

**Generalized Characteristics  
of First Order PDEs**

**Applications in Optimal Control  
and Differential Games**

1998

**Birkhäuser**

Boston • Basel • Berlin

А.А. Меликян

Обобщенные характеристики  
уравнений в частных производных  
первого порядка

Приложения к задачам теории управления  
и дифференциальным играм

Перевод с английского  
В.А. Корнеева, А.Е. Утемова

Под редакцией В.С. Пацко



Москва ♦ Ижевск

2014

УДК 517.95, 517.977  
ББК 22.161.6, 22.161.8  
М 47

**Меликян А.А.**

Обобщенные характеристики уравнений в частных производных первого порядка. Приложения к задачам теории управления и дифференциальным играм. — М.—Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2014. — 450 с.

Классический метод характеристик Коши для уравнений в частных производных первого порядка предполагает наличие гладкого решения таких уравнений. В то же время в математической физике, теории оптимального управления и теории дифференциальных игр широко используется понятие вязкостного (минимаксного) решения, охватывающее случай кусочно-гладкого решения. А.А.Меликян разработал метод обобщенных (сингулярных) характеристик, позволяющий исследовать, а в простых случаях даже находить вязкостное решение.

Настоящее издание содержит перевод книги А.А.Меликяна на эту тему, вышедшей на английском языке в 1998 г. В добавлении приведен перевод нескольких статей А.А.Меликяна, опубликованных на английском языке после 1998 г.

Для специалистов в области уравнений в частных производных, теории оптимального управления и теории дифференциальных игр, а также для студентов старших курсов учебных заведений и аспирантов.

**ISBN 978-5-4344-0198-2**

**ББК 22.161.6, 22.161.8**

© Карине Георгиевна Меликян, Заруи Ариковна Меликян,  
Артем Арикович Меликян, 2014

© Институт проблем механики им. А.Ю.Ишлинского РАН, 2014



---

---

## Об Арике Артаваздовиче Меликяне

Арик Артаваздович Меликян (1944–2009 гг.) — крупный ученый в области дифференциальных игр, оптимального управления и смежных разделов теории дифференциальных уравнений.

Арик Артаваздович родился 5 октября 1944 г. в Ереване. Его родители — Артавазд Михайлович и Шушаник Сантуровна — были преподавателями биологии в школе. В 1962 г. А.А. Меликян окончил школу с золотой медалью и поступил на факультет кибернетики Ереванского политехнического института. Прочувшись там один год, он в 1963 г. поступил в Московский физико-технический институт (МФТИ) на факультет аэромеханики и прикладной математики, который с отличием окончил в 1969 г. В том же году Арик Артаваздович поступил в аспирантуру МФТИ.

Будучи научным руководителем А.А. Меликяна, я предложил ему заняться исследованиями в области дифференциальных игр с неполной информацией. Арик Артаваздович быстро написал и успешно защитил весьма интересную кандидатскую диссертацию по этой теме.

По окончании аспирантуры он работал в Институте проблем механики АН СССР (в настоящее время Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук), с которым связана вся научная карьера А.А. Меликяна. Здесь Арик Артаваздович прошел путь от младшего научного сотрудника до заведующего лабораторией. В 1986 г. он защитил докторскую диссертацию на тему “Построение оптимальных движений в игровых задачах динамики”, в которой сочетались и взаимно обогащали друг друга математические методы классической механики и теории дифференциальных игр. В 1998 г. ему была присуждена Государственная премия Российской Федерации в области науки и техники. В 2003 г. А.А. Меликян был избран членом-корреспондентом Российской академии наук, а в 2009 г. — иностранным членом Национальной академии наук Республики Армения.

А.А. Меликян уделял большое внимание учебной работе по подготовке научной смены, был профессором МФТИ, читал оригинальные курсы по вариационному исчислению, оптимальному управлению и дифференциальным играм. Его ученики успешно работают в научных институтах многих стран.

Читателю предлагается книга А.А. Меликяна, посвященная методу обобщенных характеристик для уравнений в частных производных первого порядка. В основу книги положен материал монографии А.А. Меликяна “Generalized characteristics of first order PDEs. Applications in optimal control and differential games”<sup>\*</sup> и ряда журнальных публикаций, изданных за рубежом на английском языке. Я рад, что теперь эти работы будут опубликованы на русском языке.

---

<sup>\*</sup> *Melikyan, A.A. Generalized Characteristics of First Order PDEs: Applications in Optimal Control and Differential Games. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1998. xiv+310 pp.*

Обобщенные характеристики возникают в задачах теории управления и дифференциальных игр, когда недостаточно ограничиться классическими гладкими решениями уравнения Гамильтона – Якоби – Беллмана – Айзекса, а необходимо рассматривать также негладкие или даже разрывные решения и связанные с ними сингулярные многообразия, на которых происходят разрывы производной или значения решения. А.А. Меликян предложил и разработал метод сингулярных характеристик, позволяющий строить сингулярные многообразия, пользуясь классическим аппаратом теории дифференциальных уравнений. Этот метод дает возможность получать в явном виде синтез в задачах оптимального управления и дифференциальных игр и, кроме того, делать заключения о структуре и гладкости вязкостных решений уравнения Гамильтона – Якоби – Беллмана – Айзекса. При этом А.А. Меликян распространил свой метод на значительно более широкий класс уравнений в частных производных первого порядка. Оказалось, что метод сингулярных характеристик применим как для построения оптимальных решений в дифференциальных играх, так и для исследования распространения слабых разрывов в некоторых физических средах и для обработки визуальной информации.

А.А. Меликян был не только крупным ученым и замечательным преподавателем, но и прекрасным, отзывчивым, исключительно доброжелательным человеком, наделенным оптимизмом и чувством юмора. Его отличали удивительная доброта и многогранный талант: в молодости он был успешным спортсменом-легкоатлетом, играл на музыкальных инструментах, владел несколькими иностранными языками, параллельно с основным образованием обучался на факультете журналистики МГУ, брал интервью, писал рассказы, которые публиковались в “Литературной газете”.

В работе над данной книгой приняли участие коллеги, сотрудники, друзья и ученики Арика Артаваздовича: В.С. Пацко, И.М. Ананьевский, В.А. Корнеев, Н.В. Овакимян, А.И. Овсеевич, А.Е. Утемов, которые осуществили перевод английских текстов и научное редактирование. Большую помощь в подготовке издания оказали Д.А. Бедин, А.Г. Иванов, Л.В. Камнева, С.С. Кумков.

Академик Ф.Л. Черноусько

---

---

## Оглавление

Об Арике Артаваздовиче Меликяне . . . . .	7
Предисловие . . . . .	19
Введение . . . . .	23
ГЛАВА 1. Метод характеристик в гладких задачах . . . . .	29
1.1. Задача Коши для УЧП первого порядка . . . . .	29
1.1.1. Постановка задачи . . . . .	29
1.1.2. Уравнения характеристик . . . . .	30
1.1.3. Начальные условия . . . . .	31
1.1.4. Замечание о решении в малом . . . . .	33
1.1.5. Построение дважды дифференцируемого решения . . . . .	33
1.1.6. Нерегулярная характеристическая задача . . . . .	35
1.1.7. Пример на плоскости. Постановка задачи . . . . .	39
1.1.8. Построение решения . . . . .	40
1.2. Задача Коши для интегральных поверхностей . . . . .	41
1.2.1. Геометрическая постановка задачи 1.1 . . . . .	41
1.2.2. Обобщенная задача Коши . . . . .	42
1.2.3. Характеристическое поле на многообразии . . . . .	45
1.2.4. Построение базисного решения . . . . .	48
1.2.5. Выражение для $\lambda$ при малых $m$ . . . . .	50
1.2.6. Достаточные условия для задач 1.3, 1.4 . . . . .	50
1.2.7. Геометрия характеристического поля . . . . .	52
1.2.8. Характеристические точки многообразия $W$ . . . . .	53
1.2.9. Пример характеристической системы для случая $m = 1$ . . . . .	55
1.3. Задача Коши с подвижной границей . . . . .	56
1.3.1. Регулярная задача с подвижной границей . . . . .	56
1.3.2. Нерегулярная задача . . . . .	59
1.3.3. Скобки Якоби различных уровней . . . . .	60
1.3.4. Достаточное условие . . . . .	61
1.3.5. Классическая нерегулярная нехарактеристическая задача . . . . .	63
1.3.6. Иллюстративный пример . . . . .	72
Упражнения . . . . .	75
ГЛАВА 2. Обобщенные решения и сингулярные характеристики УЧП первого порядка . . . . .	77
2.1. Вязкостные решения и их сингулярные многообразия . . . . .	77
2.1.1. Определение вязкостного решения . . . . .	77

2.1.2.	Регулярные и сингулярные точки решения. Простейшая сингулярность . . . . .	79
2.1.3.	Необходимые условия простейшей сингулярности . . . . .	82
2.1.4.	Сингулярные характеристики: определение и классификация . . . . .	84
2.1.5.	Некоторые свойства задач с начальными и терминальными значениями . . . . .	85
2.2.	Рассеивающая поверхность . . . . .	86
2.2.1.	Основные условия . . . . .	86
2.2.2.	Линейные и нелинейные гамильтонианы . . . . .	87
2.3.	Сингулярные характеристики для эквивокальной поверхности . . . . .	90
2.3.1.	Четыре типа поверхностей, необходимые условия . . . . .	90
2.3.2.	Уравнения сингулярных характеристик . . . . .	92
2.3.3.	Некоторые свойства характеристической системы . . . . .	94
2.4.	Сингулярные характеристики для фокальной поверхности . . . . .	96
2.4.1.	Шесть типов поверхностей, необходимые условия . . . . .	96
2.4.2.	Фокальная поверхность — гиперплоскость . . . . .	99
2.4.3.	Несимметричная поверхность, коллинеарные поля . . . . .	102
2.4.4.	Вырожденные поверхности . . . . .	105
2.4.5.	Начальные условия и идентификация сингулярных поверхностей . . . . .	106
2.4.6.	Изменения для задач с терминальными значениями . . . . .	106
2.5.	Пример задачи с заданными начальными условиями . . . . .	107
2.5.1.	Постановка задачи . . . . .	107
2.5.2.	Случай 1), $a < b$ . . . . .	109
2.5.3.	Случай 2), $a = b$ . . . . .	111
2.5.4.	Случай 3), $a > b$ . . . . .	112
2.5.5.	Некоторые изменения для несимметричного случая . . . . .	114
2.5.6.	Заключительные замечания . . . . .	117
	<b>Упражнения</b> . . . . .	118
<b>ГЛАВА 3. УЧП первого порядка в вариационном исчислении, оптимальном управлении и дифференциальных играх</b> . . . . .		
3.1.	Уравнение Гамильтона – Якоби в вариационном исчислении . . . . .	119
3.1.1.	Формула первой вариации . . . . .	119
3.1.2.	Случай неоднородного лагранжиана . . . . .	122
3.1.3.	Вариационная задача о минимальной геодезической . . . . .	123
3.1.4.	Классический однородный лагранжиан . . . . .	125
3.2.	Уравнение Беллмана в оптимальном управлении . . . . .	126
3.2.1.	Задача с фиксированным временем . . . . .	126
3.2.2.	Задача быстрогодействия . . . . .	128
3.2.3.	Управления обратной связи . . . . .	131
3.3.	Уравнение Айзекса в дифференциальных играх . . . . .	131
3.3.1.	Игра с фиксированным моментом окончания. Функция цены . . . . .	131
3.3.2.	Игры преследования . . . . .	134
3.4.	Обобщенные решения уравнения Гамильтона – Якоби – Беллмана – Айзекса . . . . .	135

3.4.1.	Классические и вязкостные решения . . . . .	135
3.4.2.	Обобщенное основное уравнение, неравенства А.И. Субботина . . . . .	137
3.5.	Сингулярные траектории и сингулярные характеристики . . . . .	139
3.5.1.	Сингулярные поверхности и траектории: определение и классификация . . . . .	139
3.5.2.	Экивокальная поверхность . . . . .	142
3.5.3.	Сингулярные траектории и характеристики . . . . .	145
3.6.	Линейная игра преследования с эллиптическими вектограммами . . . . .	146
3.6.1.	Постановка задачи . . . . .	146
3.6.2.	Рассеивающая поверхность . . . . .	148
3.6.3.	Фокальная поверхность . . . . .	150
3.6.4.	Граница индифферентной зоны . . . . .	152
<b>Упражнения</b>	. . . . .	<b>153</b>
<b>ГЛАВА 4.</b>	<b>Дифференциальные игры с простыми движениями на многообразиях</b> . . . . .	<b>155</b>
4.1.	Постановка задачи . . . . .	155
4.1.1.	Игры с простыми движениями . . . . .	155
4.1.2.	Уравнения динамики . . . . .	156
4.1.3.	Функции платы для двух игр . . . . .	158
4.2.	Первичное решение . . . . .	158
4.2.1.	Свойства геодезической линии . . . . .	158
4.2.2.	Первичная и вторичная области . . . . .	159
4.3.	Необходимые условия оптимальности . . . . .	160
4.3.1.	Обобщенное основное уравнение, регулярные траектории . . . . .	160
4.3.2.	Сингулярная (особая) поверхность в первичной области . . . . .	162
4.3.3.	Анализ поверхности $\Gamma_0$ с использованием условий вязкостного решения . . . . .	166
4.4.	Две ветви экивокальной поверхности . . . . .	170
4.4.1.	Определение экивокальных поверхностей . . . . .	170
4.4.2.	Основной результат . . . . .	173
4.4.3.	Алгоритм построения . . . . .	175
4.5.	Игра преследования с препятствием . . . . .	176
4.5.1.	Постановки задачи . . . . .	176
4.5.2.	Плоская задача . . . . .	179
4.5.3.	Примеры . . . . .	181
<b>Упражнения</b>	. . . . .	<b>185</b>
<b>ГЛАВА 5.</b>	<b>Игры простого преследования и сближения на двумерном конусе</b> . . . . .	<b>187</b>
5.1.	Формулировка игры в различных системах координат . . . . .	187
5.1.1.	Динамика в декартовых и относительных переменных . . . . .	187
5.1.2.	Автомодельные переменные, комплексные координаты . . . . .	191
5.1.3.	Первичные решения . . . . .	193
5.2.	Анализ первичной области . . . . .	194

5.2.1.	Необходимые условия оптимальности . . . . .	194
5.2.2.	Построение множества $B$ , параметрический анализ . . . . .	196
5.2.3.	Построение эквивокальной поверхности . . . . .	200
5.3.	Исследование вторичной области . . . . .	201
5.3.1.	Игра преследования . . . . .	201
5.3.2.	Критический конус при $\nu = 1 - \sin \alpha$ . . . . .	205
5.3.3.	Игра сближения . . . . .	207
5.3.4.	Случай $\nu = 1$ . . . . .	210
5.3.5.	Об алгоритме синтеза и компьютерном моделировании . . . . .	212
<b>Упражнения</b> . . . . .		215
<b>ГЛАВА 6. Гладкие решения УЧП с негладким гамильтонианом</b> . . . . .		217
6.1.	Сингулярные траектории в оптимальном управлении. Анализ на основе программного и синтезирующего подходов . . . . .	217
6.1.1.	Введение . . . . .	217
6.1.2.	Сингулярная дуга в задаче оптимального управления, программный подход . . . . .	219
6.1.3.	Линейная задача . . . . .	219
6.1.4.	Два набора переменных . . . . .	221
6.1.5.	Необходимые условия в инвариантной форме . . . . .	222
6.1.6.	Сингулярная универсальная поверхность в общей задаче . . . . .	223
6.2.	Уравнения в частных производных первого порядка . . . . .	225
6.2.1.	Необходимые условия для сингулярной гиперплоскости . . . . .	225
6.2.2.	Вспомогательная теорема . . . . .	227
6.2.3.	Необходимые условия в инвариантной форме . . . . .	229
6.2.4.	Сингулярные характеристики для универсальной поверхности . . . . .	230
6.2.5.	Приложения к задаче управления . . . . .	231
6.2.6.	Пример . . . . .	234
6.3.	Второй порядок сингулярности . . . . .	237
6.3.1.	Два оптимальных фазовых портрета. Условие Коппа – Мойера . . . . .	237
6.3.2.	Инвариантная форма условий второго порядка . . . . .	239
6.3.3.	Сингулярные характеристики для синтеза $S_2$ . . . . .	240
<b>Упражнения</b> . . . . .		242
<b>ГЛАВА 7. Ударные волны в решениях УЧП первого порядка</b> . . . . .		243
7.1.	Сингулярные характеристики в задачах на плоскости . . . . .	243
7.1.1.	Двумерная задача . . . . .	243
7.1.2.	Уравнения для фокальной линии . . . . .	244
7.1.3.	Уравнения для эквивокальной линии . . . . .	246
7.1.4.	Сингулярные характеристики двумерного уравнения Гамильтона – Якоби . . . . .	247
7.2.	Ударные волны, порожденные граничными условиями . . . . .	250
7.2.1.	Начальные условия . . . . .	250
7.2.2.	Овыщукление функции $g(p)$ . . . . .	251
7.2.3.	Исследование второй производной . . . . .	256

7.3.	Основные результаты для количества волн . . . . .	258
7.3.1.	Упрощенные выражения скобок Якоби . . . . .	258
7.3.2.	Случай простых отрезков . . . . .	259
7.3.3.	Вторичные волны . . . . .	264
7.3.4.	Решение в случае непростого отрезка . . . . .	265
7.3.5.	Теорема С.Н. Кружкова . . . . .	267
7.3.6.	Пример . . . . .	268
7.3.7.	Некоторые обобщения на многомерный случай . . . . .	269
7.4.	Другие приложения метода сингулярных характеристик . . . . .	271
7.4.1.	Сингулярные характеристики в законах сохранения . . . . .	271
7.4.2.	Об одном классе систем уравнений в частных производных первого порядка . . . . .	272
<b>Упражнения</b>	. . . . .	<b>275</b>
<b>ГЛАВА 8. Сингулярные поверхности негладких решений вариационных задач с функционалом, задаваемым многомерным интегралом</b>	. . . . .	<b>277</b>
8.1.	Задача вариационного исчисления с многомерным интегралом . . . . .	277
8.1.1.	Негладкое решение УЧП второго порядка . . . . .	277
8.1.2.	Формула первой вариации . . . . .	278
8.1.3.	Необходимые условия для сингулярной поверхности . . . . .	281
8.2.	Построение сингулярной поверхности . . . . .	285
8.2.1.	Уравнения сингулярных характеристик . . . . .	285
8.2.2.	Начальные условия . . . . .	286
8.3.	Квадратичный лагранжиан . . . . .	289
8.3.1.	Вырожденные необходимые условия . . . . .	289
8.3.2.	Сингулярные характеристики . . . . .	290
8.3.3.	Возмущенная задача . . . . .	293
8.3.4.	Начальные условия . . . . .	294
8.4.	Пример . . . . .	295
8.4.1.	Постановка задачи . . . . .	295
8.4.2.	Разложения Тейлора . . . . .	297
8.4.3.	Частные случаи . . . . .	299
<b>Упражнения</b>	. . . . .	<b>301</b>
<b>Приложение</b>	. . . . .	<b>303</b>
1.	Теорема о неявной функции . . . . .	303
2.	Скобки Якоби . . . . .	304
3.	Инвариантность скобок Якоби . . . . .	305
4.	Выпрямление поля . . . . .	308
5.	Преобразование к простой задаче . . . . .	310
<b>Литература</b>	. . . . .	<b>312</b>
<b>Сокращения</b>	. . . . .	<b>318</b>
<b>Предметный указатель</b>	. . . . .	<b>319</b>

**ДОБАВЛЕНИЕ**

<b>Избранные статьи</b> . . . . .	323
<b>Некоторые свойства уравнения Беллмана – Айзекса для игр на поверхностях вращения</b> . . . . .	325
1. Уравнение Гамильтона – Якоби – Беллмана – Айзекса для игры сближения-уклонения . . . . .	325
2. Игры на поверхностях вращения . . . . .	326
3. Игра на конусе . . . . .	327
4. Игра на гиперболоиде . . . . .	328
5. Геометрические свойства многообразия $B$ . . . . .	329
6. Фокальная точка . . . . .	329
7. Край многообразия $B$ . . . . .	331
8. Вычисление $C$ . . . . .	332
9. Структура цены игры . . . . .	333
Литература . . . . .	333
<b>Геометрия оптимальных траекторий в окрестности фокальных особых поверхностей в дифференциальных играх</b> . . . . .	335
1. Введение . . . . .	335
2. Общее описание фокальной поверхности . . . . .	336
3. Сингулярная поверхность — гиперплоскость . . . . .	337
4. Поверхность в общем случае. Коллинеарные поля . . . . .	340
5. Система двух УЧП для фокального многообразия в общем случае . . . . .	342
6. Импульсная дифференциальная игра, возникающая в области финансов . . . . .	345
6.1. Предшествующая работа . . . . .	345
6.2. Применение теории предыдущего раздела . . . . .	346
6.3. Эквивалентное скалярное УЧП второго порядка . . . . .	347
7. 3D-дифференциальная игра с гладким гамильтонианом . . . . .	348
Литература . . . . .	349
<b>Задачи с начальными и терминальными условиями для уравнения Гамильтона – Якоби</b> . . . . .	351
1. Введение . . . . .	351
2. Вязкостные решения и краевые условия . . . . .	352
3. Задачи с начальными и терминальными значениями в оптимальном управлении . . . . .	353
3.1. Нестационарная система и задача вариационного исчисления . . . . .	354
3.2. Стационарная система и задача вариационного исчисления . . . . .	355
3.3. Задача вариационного исчисления с однородным лагранжианом . . . . .	356
3.4. Замечание по терминологии . . . . .	358
4. Примеры . . . . .	359
4.1. Управление автомобилем . . . . .	359
4.2. Двумерная дифференциальная игра . . . . .	361
4.3. Скалярное уравнение эйконала . . . . .	366
5. Заключение . . . . .	367
Литература . . . . .	367

<b>Геометрия игр преследования-убегания на двумерных многообразиях</b>	369
1. Введение . . . . .	370
2. Пространство игры и динамика . . . . .	371
3. Первичное решение . . . . .	372
4. Неединственность геодезических. Многообразия $\Gamma$ и $B$ . . . . .	373
5. Примеры многообразий $\Gamma$ и $B$ . . . . .	375
6. Вторичная область. Экивокальные поверхности . . . . .	384
7. Подобласть произвольного управления убегающего . . . . .	386
8. Выводы . . . . .	389
Литература . . . . .	390

<b>Простейшие особенности и обобщенные характеристики для уравнения Гамильтона–Якоби с гамильтонианом в виде максимума вогнутых функций</b>	393
1. Введение . . . . .	393
2. Простейшие особенности и сингулярные характеристики . . . . .	395
2.1. Предположения о сингулярностях коразмерности 1 . . . . .	395
2.2. Классические характеристики . . . . .	396
2.2.1. Свойство $n$ -монотонности функций $H_i$ . . . . .	398
2.2.2. Условие равномерной $n$ -монотонности . . . . .	399
2.3. Метод сингулярных характеристик . . . . .	399
2.3.1. Условия продолжения . . . . .	401
3. Возможные типы сингулярностей . . . . .	402
3.1. Восходящие сингулярности . . . . .	403
3.1.1. Восходящая рассеивающая поверхность . . . . .	404
3.1.2. Восходящая экивокальная поверхность . . . . .	404
3.1.3. Восходящая фокальная поверхность . . . . .	407
3.2. Нисходящие сингулярности . . . . .	407
3.2.1. Нисходящая рассеивающая поверхность . . . . .	408
3.2.2. Нисходящая экивокальная поверхность . . . . .	409
3.2.3. Нисходящая фокальная поверхность . . . . .	410
3.3. Неособые поверхности переключения . . . . .	410
3.3.1. Неособая рассеивающая поверхность . . . . .	411
3.3.2. Неособая экивокальная поверхность . . . . .	411
3.3.3. Универсальная поверхность . . . . .	411
4. Пример . . . . .	413
4.1. Универсальная поверхность . . . . .	414
4.2. Неособая экивокальная поверхность . . . . .	415
4.3. Восходящая экивокальная поверхность . . . . .	415
Литература . . . . .	417

<b>Краевые сингулярности и характеристики уравнения Гамильтона–Якоби</b>	419
1. Введение . . . . .	419
1.1. Классические характеристики . . . . .	420
1.2. Начальная полоса . . . . .	420
1.3. Условие регулярности . . . . .	421

2.	Нерегулярная задача и граничные условия на $M$ . . . . .	422
2.1.	Начальная полоса для нерегулярной нехарактеристической задачи . . . . .	423
3.	Метод сингулярных характеристик . . . . .	424
3.1.	Эквивокальные сингулярные характеристики в дифференциальных играх . . . . .	425
3.2.	Граничные сингулярные характеристики . . . . .	427
3.3.	Сингулярность более высокого порядка . . . . .	428
4.	Сравнение граничных условий на $M$ и $M_0^+$ . . . . .	428
5.	Достаточные условия существования и единственности . . . . .	430
5.1.	Формулировка простой задачи . . . . .	431
5.2.	Формулировка теоремы . . . . .	432
6.	Примеры . . . . .	433
6.1.	Одномерный иллюстративный пример . . . . .	433
6.2.	Дифференциальная игра с фазовыми ограничениями . . . . .	434
6.3.	Граничные характеристики в игровой задаче о брахистохроне . . . . .	437
7.	Выводы . . . . .	440
	Литература . . . . .	440
<b>Универсальные поверхности и гладкие решения уравнений Беллмана</b>		<b>443</b>
1.	Введение . . . . .	443
2.	Гладкая функция Беллмана в окрестности универсальной поверхности . . . . .	444
3.	Достаточные условия существования универсальной поверхности . . . . .	447
	Литература . . . . .	449