

Российская академия наук
Отделение проблем машиностроения,
механики и процессов управления
Уральское отделение
Министерство образования и науки
Российской Федерации
Высшая аттестационная комиссия
Российской Федерации
Государственный ракетный центр
"КБ им. академика В.П. Макеева"
Научно-производственное объединение "Автоприбор"
Межрегиональный совет по науке и технологиям

НАУКА И ТЕХНОЛОГИИ

Том 2

Труды XXIV Российской школы

Москва
2004

УДК 629.113.01

В сборник трудов включены работы, представленные на XXIV Российскую школу по проблемам науки и технологий (22-24 июня 2004 года, г. Миасс), посвященную 80-летию со дня рождения академика В.П. Макеева.

Исследования авторов настоящих статей посвящены актуальным проблемам технологии производства, динамики и управления и экономики.

Редакционная коллегия

Анфилогов В.Н., Васильев В.В., Верзакова Г.А. (ответственный секретарь), Вяткин Г.П., Гуревич С.Ю., Дегтярь В.Г., Ершов Н.П. (главный редактор), Ершов П.Н. (заместитель главного редактора), Заноха В.И., Корман В.Х., Лашманов Г.П., Наговицин А.Ю., Немировский Ю.В., Рудин В.Н., Соколовский М.И., Стружанов В.В., Телегин А.И., Уфимцев С.А.

Ответственный редактор Дегтярь В.Г.

Ответственные за выпуск
Верзакова Г.А., Ершов П.Н.

Адрес редакции

456304, г. Миасс Челябинской обл., ул. Калинина, 37,
Межрегиональный совет по науке и технологиям,
тел. (35-135) 3-67-16
E-mail: msnt@mail.ru

Институт математики и механики УрО РАН (г.Екатеринбург)

ПОСТРОЕНИЕ И АНАЛИЗ МНОЖЕСТВ ПРОГНОЗА СТАБИЛИЗИРУЕМОГО ДВИЖЕНИЯ САМОЛЁТА В ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

Рассматривается вопрос о построении трёхмерного множества достижимости для нелинейной системы, описывающей поведение самолета в горизонтальной плоскости. Автопилот (управление обратной связи) стабилизирует движение вдоль некоторой трассы под действием ограниченной по модулю неизвестной помехи.

Предложен численный алгоритм пошагового построения множеств прогноза, аппроксимирующих сверху множества достижимости. Приведены результаты численного моделирования, характеризующие геометрию множеств прогноза.

Исследован вопрос о стабилизации размеров множества прогноза.

1. Постановка задачи. Пусть движение самолета в горизонтальной плоскости (рис. 1) описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= V \cos \varphi \\ \dot{y} &= V \sin \varphi \\ \dot{\varphi} &= u + \nu, \quad |u| \leq M, \quad |\nu| \leq W. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь x, y – координаты геометрического положения, V – величина скорости самолета, φ – угол направления вектора скорости, u – управление автопилота, ν – воздействие помехи.

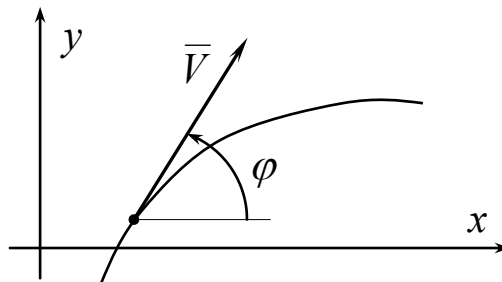


Рис. 1. Система координат.

Значения u и ν ограничены по модулю величинами M и W . Предполагаем, что $M > W$. Величина V считается постоянной.

Условимся, что движение самолёта вдоль некоторой трассы стабилизируется управлением обратной связи (автопилотом). Без ограничения общности полагаем, что ось x ориентирована по оси трассы. Тогда координата y имеет смысл бокового отклонения от оси трассы и координата φ – угол отклонения вектора скорости самолёта от направления трассы. Стабилизирующее управление u вырабатывается по принципу обратной связи по следующему закону:

$$u(y, \varphi) = R(k_1 y + k_2 \varphi), \quad R(z) = \begin{cases} z, & |z| \leq M, \\ M, & z > M, \\ -M, & z < -M. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь $k_1 < 0$, $k_2 < 0$ – параметры автопилота, выбираемые из условия устойчивости номинального движения по оси трассы.

Множеством достижимости $G(t)$ системы (1) с автопилотом (2) при заданном начальном множестве $G(t_0)$ назовём совокупность всех состояний $x(t)$, $y(t)$, $\varphi(t)$ в момент t , получаемых при переборе всех кусочно-непрерывных функций $\nu(\cdot)$ на промежутке $[t_0, t]$, не превышающих по модулю величины W .

Множество достижимости описывает состояния в трёхмерном фазовом пространстве, в которых может оказаться система за счёт действия помехи при оговоренном начальном множестве.

Работа посвящена разработке алгоритма численного построения оценки сверху множеств достижимости. Получаемые множества будем называть множествами прогноза.

2. Схема построения множеств прогноза. Динамика (1), (2) является нелинейной. Как следствие, множества достижимости $G(t)$ представляют собой невыпуклые множества, точное построение которых в трёхмерном фазовом пространстве – очень трудная задача.

Специфика рассматриваемой системы состоит в том, что геометрические координаты x , y не входят в правую часть первых двух уравнений. Кроме того, угловая координата φ изменяется в ограниченном диапазоне $(-\pi, \pi]$. Последнее позволяет [1–3] для представления множеств достижимости воспользоваться сеткой по угловой координате и набором соответствующих двумерных сечений на плоскости геометрических координат. При этом с целью упрощения и быстроты построений имеет смысл использовать выпуклые многоугольники для аппроксимации сверху множеств на плоскости x , y . Таким образом, будем рассматривать множества в трёхмерном пространстве x , y , φ с овыпукленными сечениями по координате φ . Будем обозначать такие множества символом $\mathbf{G}(t)$ и назовём их

множествами прогноза. Подчеркнём, что множества прогноза аппроксимируют сверху множества достижимости.

Идея построения множеств прогноза аналогична той, что предложена в работах [1, 2], посвященных задаче наблюдения за движением самолёта в горизонтальной плоскости в условиях неточных замеров. Подмена множества $G(t)$ множеством $\mathbf{G}(t)$ является весьма разумной: основные геометрические характеристики множеств $G(t)$ и $\mathbf{G}(t)$ практически совпадают при численных построениях, что показало исследование, проведённое в работе [3] для варианта с точечным начальным множеством в фазовом пространстве.

Как и $G(t)$, множества $\mathbf{G}(t)$ не являются выпуклыми, но в отличие от $G(t)$, имеют выпуклые сечения по оси φ , что позволяет разработать довольно простой алгоритм их численного построения.

Пусть Δt – шаг дискретных построений по оси времени, $t_{i+1} = t_i + \Delta t$, $i = 0, 1, 2, \dots$. По оси φ будем рассматривать интервал $(-\pi, \pi]$ и введём на нём сетку с шагом $\Delta\varphi$.

Множество прогноза $\mathbf{G}(t_i)$ в момент t_i задаём набором выпуклых многоугольников, каждый из которых соответствует определённому узлу сетки по φ . Для представления выпуклых многоугольников на плоскости x, y используем фиксированный набор нормалей.

Множество $\mathbf{G}(t_{i+1})$ строится на основе множества $\mathbf{G}(t_i)$. Для этого из каждой вершины каждого многоугольника, входящего в множество $\mathbf{G}(t_i)$, выпускаются три движения системы (1) в силу воздействий $\nu = 0, \pm W$. Движения доводятся до момента t_{i+1} . При интегрировании используется метод Рунге-Кутты 4-го порядка. Полученные точки группируем вокруг ближайших узлов сетки φ . Тем самым каждому узлу φ в момент t_{i+1} будет соответствовать конечное число точек на плоскости x, y . Строим их выпуклую оболочку. В итоге получаем множество $\mathbf{G}(t_{i+1})$ в виде набора выпуклых многоугольников в узлах сетки по координате φ .

При численной реализации описанного метода требуется некоторое согласование дискретов Δt и $\Delta\varphi$. А именно, считаем, что

$$\frac{(M - W)}{\Delta t} = \frac{\alpha}{\Delta\varphi}, \quad \alpha \geq 1,$$

где коэффициент α принимает значения из интервала [10, 20].

3. Результаты численного моделирования. При построении множеств прогноза использовались следующие числовые данные:

$$\begin{aligned}
 V &= 250 \text{ м/с}, \\
 M &= 0.008 \text{ с}^{-1}, \\
 W &= 0.0012 \text{ с}^{-1}, \\
 k_1 &= -0.0000112 \text{ (мс)}^{-1}, \\
 k_2 &= -0.0333333 \text{ с}^{-1}, \\
 \Delta t &= 3 \text{ с}, \\
 \Delta \varphi &= 0.0003927 .
 \end{aligned}$$

Количество нормалей при представлении выпуклых многоугольников бралось равным 20. Начальное множество в момент $t_0 = 0$ полагалось точкой в фазовом пространстве x, y, φ .

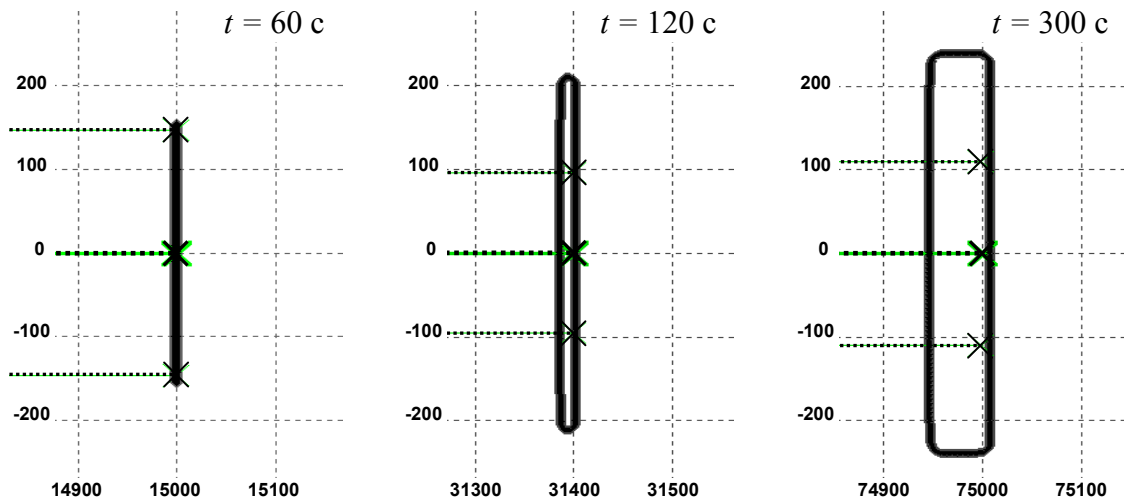
На рис. 2 показан вид множеств прогноза $\mathbf{G}(t)$ в проекции на плоскость геометрических координат x, y для трёх моментов времени $t = 60, 120, 300$ с. Множества изображены в одном масштабе. Показаны также траектории движения без возмущающего воздействия (средняя пунктирная линия) и траектории с постоянным возмущающим воздействием $v = \pm W$ (крайние пунктирные линии). На этих линиях крестиками отмечены положения системы в соответствующие моменты времени. Построения были выполнены для трёх вариантов начального состояния (x_0, y_0, φ_0) :

$$\text{а) } (0, 0, 0); \quad \text{б) } (0, 1000, 0); \quad \text{в) } (0, 0, 0.227).$$

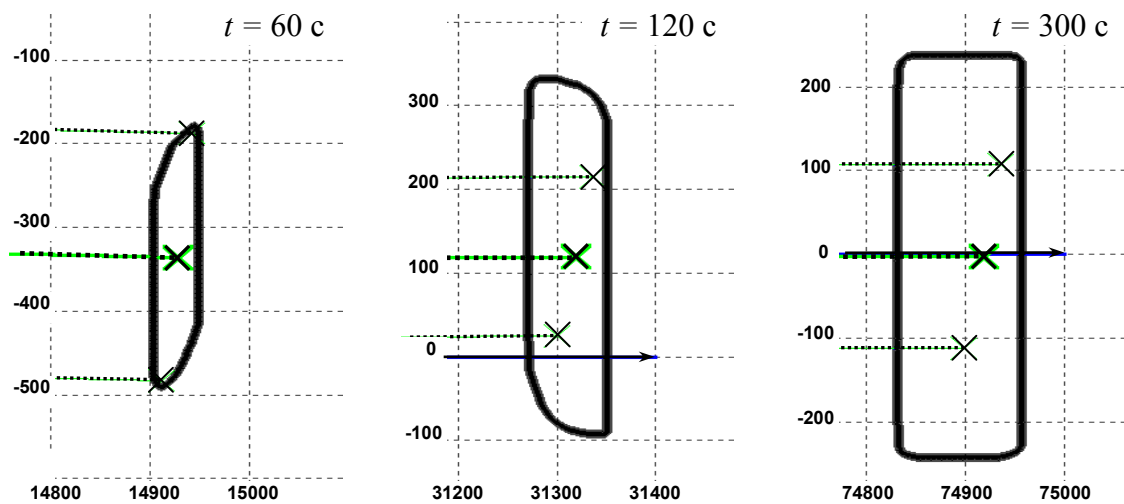
На рис. 2б, 2в сплошной линией со стрелкой показано невозмущенное движение вдоль трассы при нулевом начальном состоянии.

Видно, что для используемых числовых данных наблюдается стабилизация размера множеств прогноза по координате y , что является следствием устойчивости движения системы (1) по отношению к начальным отклонениям при нулевом возмущении $v = 0$. По координате x множество растёт неограниченно. Это объясняется тем, что по этой координате в систему не заложена стабилизация.

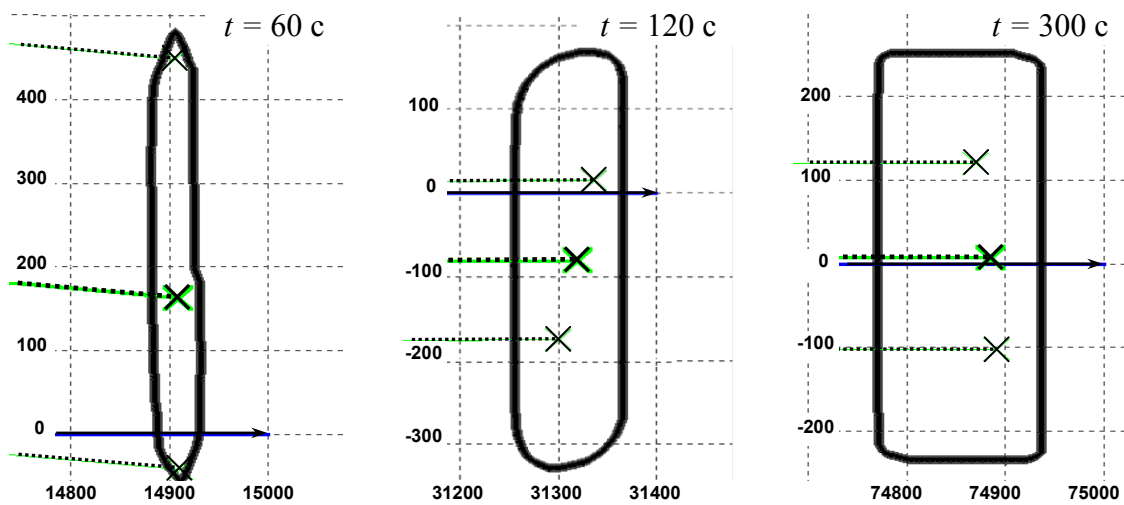
На рис. 3 изображены трёхмерные множества прогноза $\mathbf{G}(t)$ для моментов $t = 60, 90, 120, 300$ с. Начальное состояние было взято в виде точки $(x_0, y_0, \varphi_0) = (0, 0, 0.227)$.



а) Начальное состояние $(x_0, y_0, \varphi_0) = (0, 0, 0)$



б) Начальное состояние $(x_0, y_0, \varphi_0) = (0, 1000, 0)$



в) Начальное состояние $(x_0, y_0, \varphi_0) = (0, 0, 0.227)$

Рис 2. Движение множества $G(t)$ в проекции на плоскость x, y .

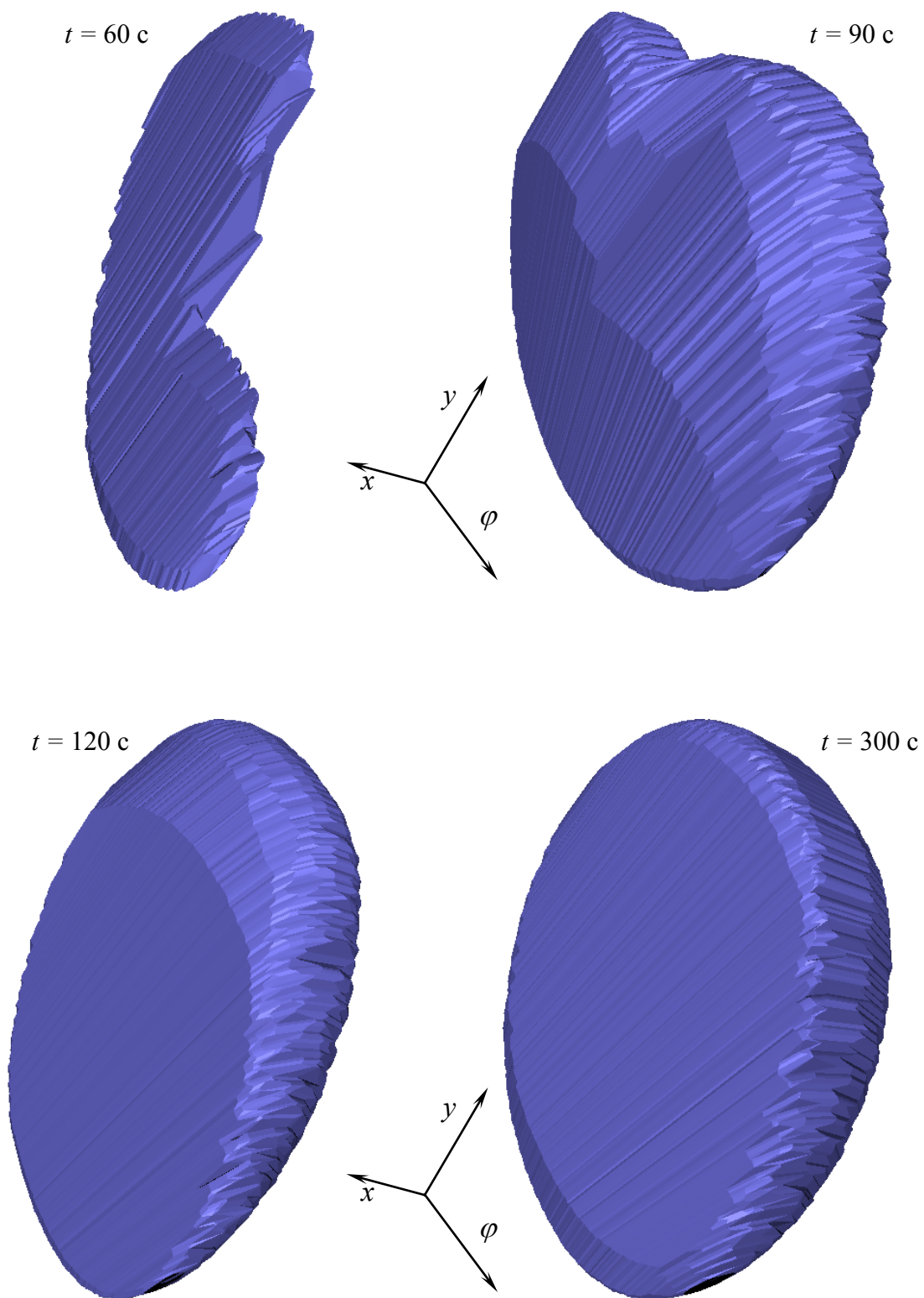


Рис 3. Трёхмерное множество прогноза $\mathbf{G}(t)$ для различных моментов t , начальное состояние $(x_0, y_0, \varphi_0) = (0, 0, 0)$.

4. Исследование стабилизации множества прогноза. Для исследования влияния уровня возмущения W на размеры множества прогноза $\mathbf{G}(t)$ было проведено моделирование с начальным состоянием $(x_0, y_0, \varphi_0) = (0, 0, 0)$ и уровнем возмущения в диапазоне 5–70% от M , т.е. $0.05M \leq W \leq 0.70M$.

На рис. 4 показаны графики размаха множества $\mathbf{G}(t)$ по координате y для моментов $t = 300$ с и $t = 600$ с. При уровнях помехи до 45% графики практически совпадают и имеют место почти линейная зависимость размера по y от уровня помехи, а для $W > 0.45M$ графики расходятся. При этом размер на момент $t = 600$ с существенно превышает размер на момент $t = 300$ с, что свидетельствует о потере свойства стабилизации. Похожая картина имеет место и для координаты φ (рис. 5).

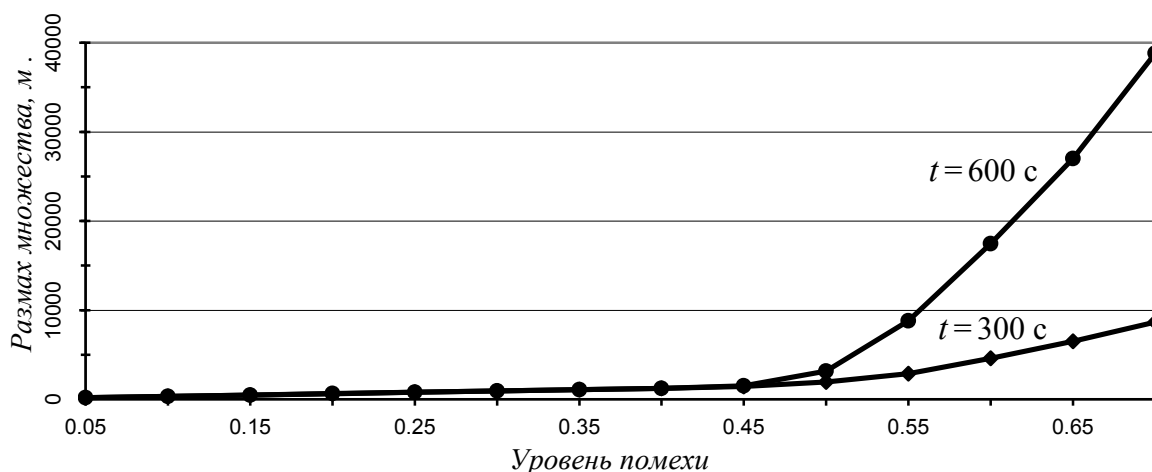


Рис. 4. Размах множества $\mathbf{G}(t)$ по координате y .

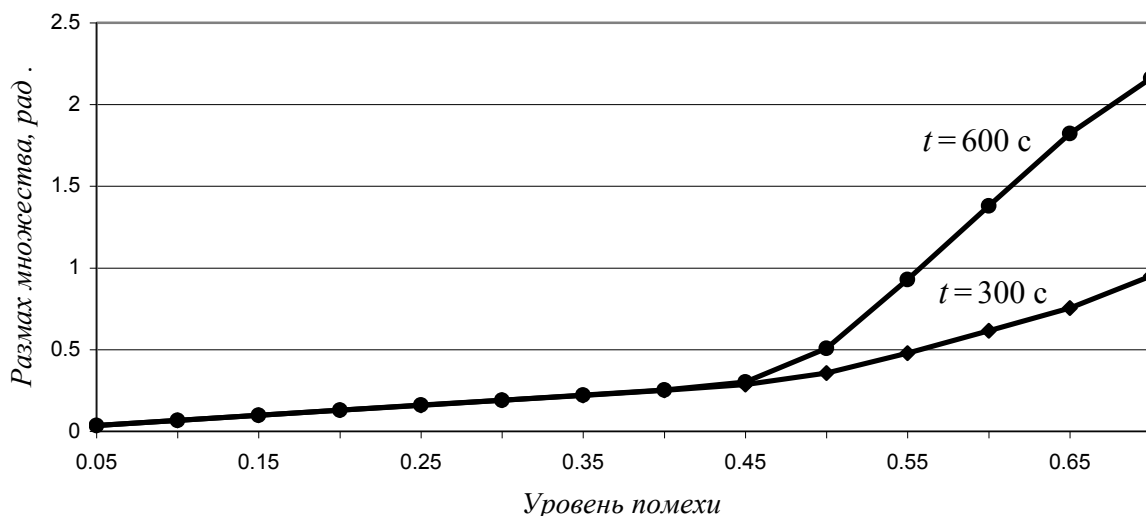


Рис. 5. Размах множества $\mathbf{G}(t)$ по координате φ .

По координате x нет совпадения графиков для моментов $t = 300$ с и $t = 600$ с даже при малых уровнях помехи (рис. 6). Это объясняется тем, что стабилизация по координате x не заложена в систему (1). Однако существенное расхождение графиков также начинается лишь с уровня $W \approx 0.45M$.

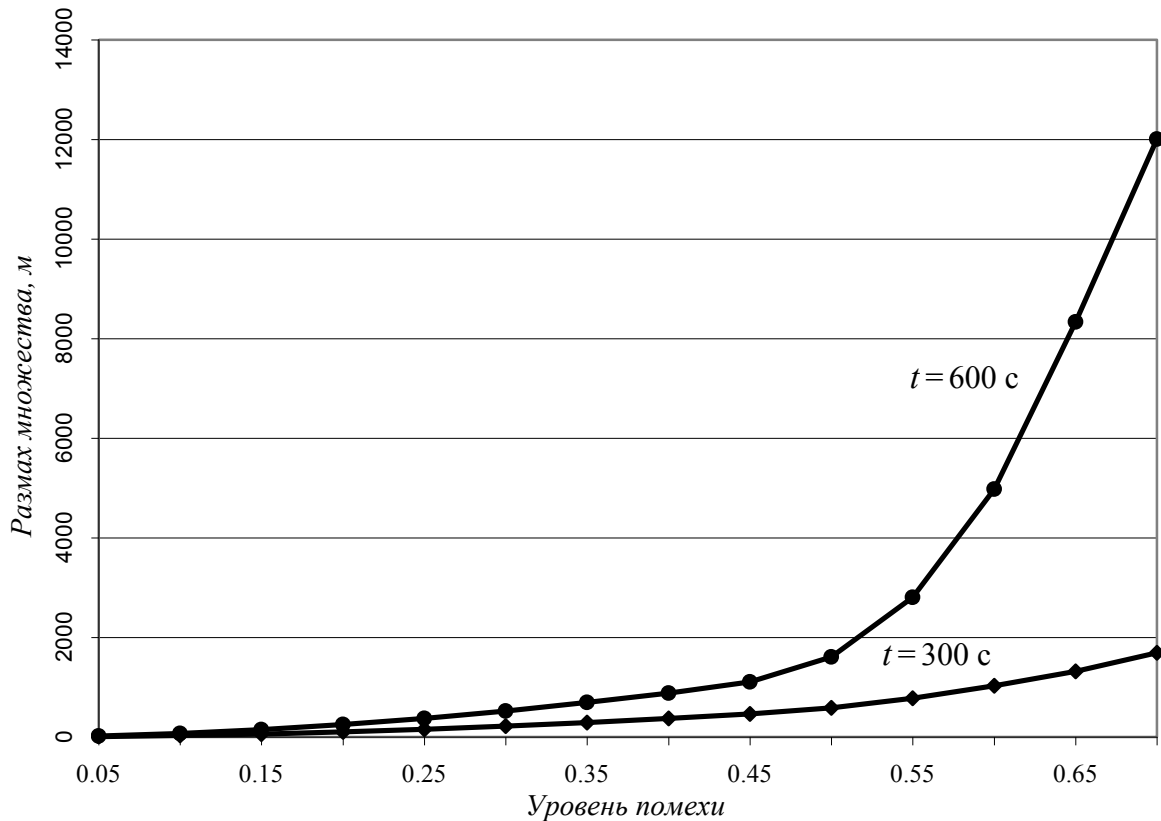


Рис. 6. Размах множества $\mathbf{G}(t)$ по координате x .

С целью объяснения значительного роста размеров множества прогноза при уровне возмущения более 45% был поставлен вопрос о способе формирования “наихудшего” воздействия помехи по принципу обратной связи, т.е. такого способа, который максимально “разбалтывает” систему (1) по координатам y, φ . С помощью численного моделирования был найден следующий закон формирования помехи по принципу обратной связи, который, вероятно, близок к наихудшему:

$$v^*(y, \varphi) = \begin{cases} +W, & \varphi \geq 0, \\ -W, & \varphi < 0. \end{cases}$$

На рис. 7 для уровня помехи $W = 0.45M$ показаны фазовые траектории на плоскости y, φ трёх движений, выходящих из начальных точек a, b, c на оси y . Управление u вырабатывалось по закону (2): в наклонной полосе, отмеченной штриховыми линиями, имеем $u(y, \varphi) = k_1 y + k_2 \varphi$,

слева от этой полосы $u(y, \varphi) = +M$, справа $u(y, \varphi) = -M$. Помеха v формировалась по закону $v^*(y, \varphi)$.

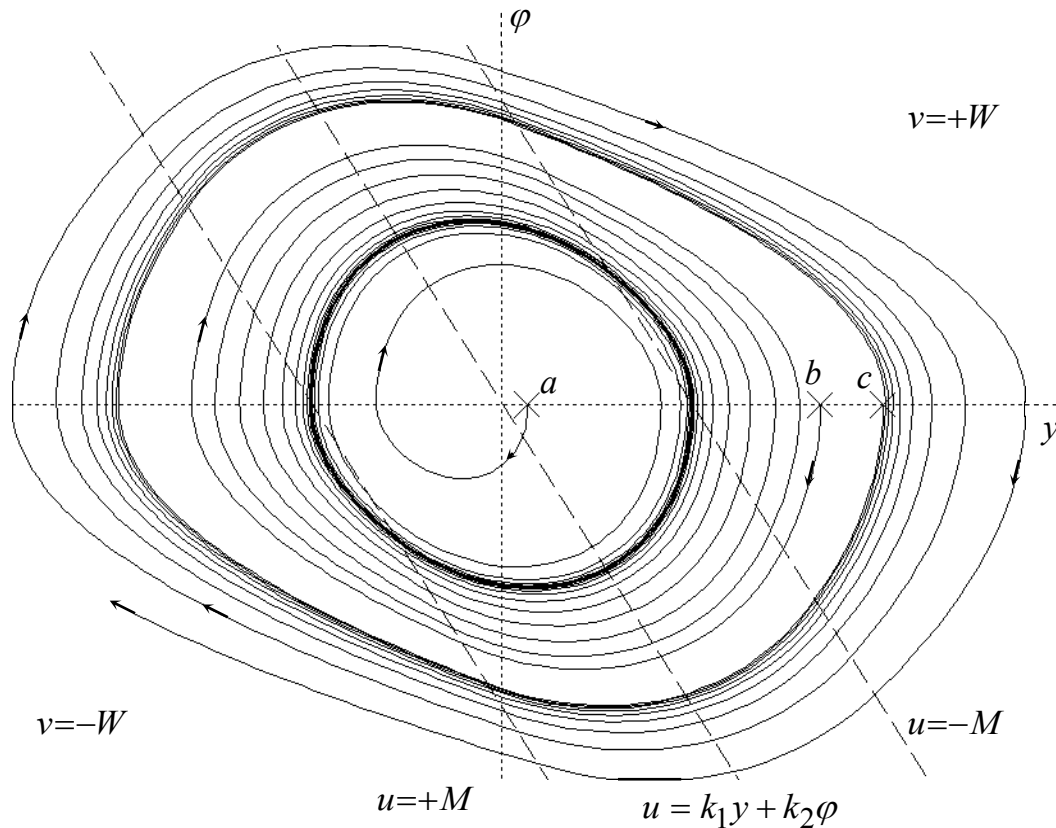


Рис. 7. Устойчивый и неустойчивый предельные циклы, $W=0.45M$.

Видно, что траектории, выходящие из точек a и b , “наматываются” изнутри и снаружи на некоторый предельный цикл. Этот предельный цикл является устойчивым.

Траектория, выходящая из точки c , “разматывается” с нарастающей скоростью и уходит в бесконечность. Начальные витки этой траектории практически идут по второму предельному циклу с его внешней стороны. Экспериментально проверено, что движения, начинающиеся с внутренней стороны этого цикла, медленно отходят от него и в дальнейшем (с ростом времени) наматываются снаружи на первый предельный цикл. Таким образом, второй предельный цикл является неустойчивым.

Моделирование с различными уровнями W показало, что два предельных цикла (устойчивый и неустойчивый) имеют место при значениях W , не превышающих величины $W \approx 0.46M$. При небольших значениях W устойчивый предельный цикл находится в малой окрестности начала координат плоскости y, φ . Наоборот, неустойчивый предельный цикл расположен очень далеко от начала координат. С увеличением W устойчивый

предельный цикл удаляется от начала координат, а неустойчивый приближается к нему.

При значении $W \approx 0.46M$ два предельных цикла “слипаются” и с дальнейшим увеличением W пропадают. Система (1) становится неустойчивой: движение из любой начальной точки разматывается и уходит в бесконечность.

Рис. 8 сделан для $W = 0.47M$. Траектория начинается в точке a . На начальном этапе она разматывается сравнительно быстро, переходит в область, где при $W \approx 0.46M$ происходит совпадение устойчивого и неустойчивого циклов, с малой скоростью разматывается до выхода из неё, затем вновь разматывается быстро.

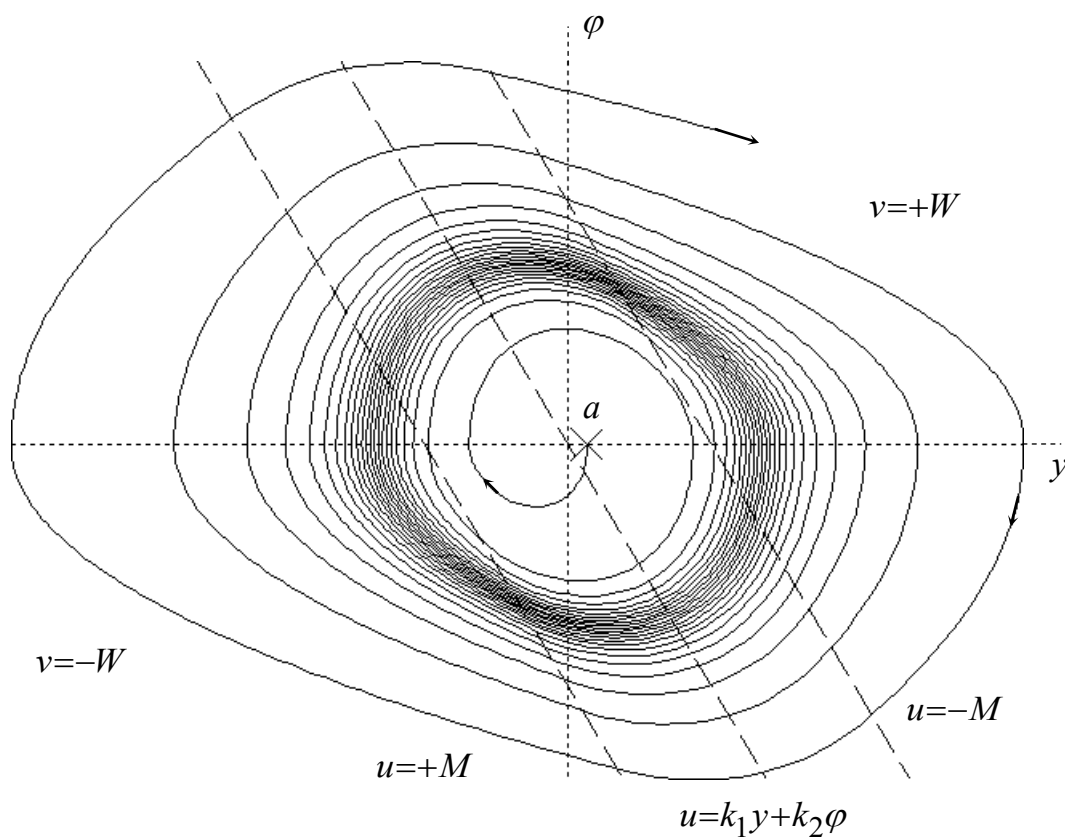


Рис. 8. Траектория при уровне возмущения $W=0.47M$.

Описанное поведение движений, когда помеха v задаётся в виде управления обратной связи $v^*(y, \varphi)$, объясняет потерю стабилизации размеров множества $\mathbf{G}(t)$ по координатам y, φ при значениях $W > 0.46M$.

На практике значения W не превышают уровень 10–15% от величины M . Проведённое моделирование показывает, что в этом случае имеет место стабилизация размеров множества прогноза по координатам y, φ .

Разработанный алгоритм построения множеств $\mathbf{G}(t)$ может быть применён для обзорного прогнозирования движения воздушных судов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 03-01-00415, № 04-01-96099)

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пацко В.С., Пятко С.Г., Кумков С.И., Федотов А.А.* Оценивание траекторного движения воздушного судна на основе информационных множеств / Научные доклады. Академия гражданской авиации, С-Петербург; ИММ УрО РАН, Екатеринбург; 1999, 68 с.
2. *Кумков С.И., Пацко В.С., Пятко С.Г., Федотов А.А.* Информационные множества в задаче наблюдения за движением самолета // Труды института математики и механики. Том 6, № 1–2, С. 413–434. Екатеринбург: УрО РАН, 2000.
3. *Кумков С.И., Пацко В.С., Пятко С.Г., Решетов В.М., Федотов А.А.* Информационные множества в задаче наблюдения за движением самолёта в горизонтальной плоскости // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2003, № 4, С. 51–61.