

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования «Уральский федеральный университет  
имени первого Президента России Б.Н. Ельцина»

На правах рукописи



Мунц Наталья Владимировна

**Численный метод решения  
дифференциальных игр быстрого действия  
с линией жизни**

1.2.2 Математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ

Автореферат  
диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Екатеринбург — 2023

Работа выполнена в отделе динамических систем Федерального государственного бюджетного учреждения науки Институт математики и механики имени Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук.

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук  
**Кумков Сергей Сергеевич**

Официальные оппоненты: **Григоренко Николай Леонтьевич**, доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова» (г. Москва), профессор кафедры Оптимального управления факультета Вычислительной математики и кибернетики

**Мазалов Владимир Викторович**, доктор физико-математических наук, профессор, ФГБУН ФИЦ Карельский научный центр РАН (г. Петрозаводск), директор Института прикладных математических исследований

**Осипов Сергей Иванович**, кандидат физико-математических наук, ФГАОУ ВО «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина» (г. Екатеринбург), доцент Департамента математики, механики и компьютерных наук

Защита состоится 14 июня 2023 г. в 14.00 на заседании диссертационного совета УрФУ 1.2.05.22 на базе ФГАОУ ВО «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина» по адресу: 620000, г. Екатеринбург, пр. Ленина, 51, к.248.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГАОУ ВО «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина», <https://dissovet2.urfu.ru/mod/data/view.php?id=12&rid=4644>.

Автореферат разослан «\_\_\_» мая 2023 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета,  
кандидат физ.-мат. наук



Д.А. Косолобов

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность и степень разработанности темы исследования.** Работа посвящена вопросам теоретического и численного исследования дифференциальных игр быстрого действия с линией жизни.

По всей видимости, задачи с линией жизни первым поставил Р. Айзекс в 1965 в книге «Differential Games»<sup>1</sup>, переведенной на русский язык в 1967 году<sup>2</sup>. В его формулировках под *линией жизни* понимается множество, при достижении которого второй игрок безусловно выигрывает. Значительный вклад в исследование игр с линией жизни сделал Л.А. Петросян<sup>3,4,5,6</sup>. Однако автору неизвестны работы, в которых исчерпывающе рассматривались бы игры такого типа: Л.А. Петросян в основном исследовал задачи, где игроки имели динамику простых движений.

Дифференциальные игры быстрого действия аналитически исследовались в книге Р. Айзекса. Его методика основана на разделении пространства игры сингулярными поверхностями на области, в которых функция цены регулярна и в классическом смысле удовлетворяет соответствующему уравнению Гамильтона – Якоби (ГЯ). Однако практическое применение этой методики наталкивается на существенные трудности, связанные с обнаружением и классификацией сингулярных поверхностей, особенно в случае размерности фазового вектора 3 или более. Численный геометрический метод построения функции цены игр быстрого действия с фазовым вектором размерности 2 был предложен В.С. Пацко и В.Л. Туровой<sup>7,8,9</sup>. Более универсальный сеточный алгоритм построения функции цены игр быстрого действия был обоснован ита-

<sup>1</sup> Isaacs R. Differential Games. John Wiley & Sons, New York, 1965. 384 p.

<sup>2</sup> Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 480 стр.

<sup>3</sup> Petrosjan L.A. A family of differential survival games in the space  $R^n$  // Soviet Math. Dokl., 1965, Vol. 161, No. 1, pp. 377–380.

<sup>4</sup> Петросян Л.А. Дисперсионные поверхности в одном семействе игр преследования // Доклады Академии наук Армянской ССР, 1966, Т. 43, № 4, С. 193–197.

<sup>5</sup> Дуткевич Ю.Г., Петросян Л.А. Игра с «линией жизни». Случай  $l$ -захвата // Вестник ЛГУ, сер. матем., мех. и астр., 1969, № 1, вып. 3, С. 31–38.

<sup>6</sup> Петросян Л.А. Дифференциальные игры преследования. Л.: Изд-во ЛГУ, 1977. 222 стр.

<sup>7</sup> Пацко В.С., Турова В.Л. Численное решение дифференциальных игр на плоскости. Препринт. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 1995. 78 стр.

<sup>8</sup> Patsko V.S., Turova V.L. Numerical solutions to the minimum-time problem for linear second-order conflict-controlled systems // Proceedings of the Seventh International Colloquium on Differential Equations, Plovdiv, Bulgaria, August 18–23, 1996, D. Bainov (ed.), De Gruyter, Berlin, 1997, pp. 329–338.

<sup>9</sup> Patsko V.S., Turova V.L. Level sets of the value function in differential games with the homicidal chauffeur dynamics // International Game Theory Review, 2001, Vol. 3, No. 1, pp. 67–112.

льянскими математиками М. Барди и М. Фальконе<sup>10,11</sup>. Он вычисляет функцию цены как вязкостное решение<sup>12,13</sup> соответствующего уравнения ГЯ. Однако данный метод обладает одним существенным недостатком с точки зрения его практического применения. А именно, корректность его работы обоснована в случае использования бесконечных сеток, покрывающих все игровое пространство  $\mathbb{R}^n$ , в то время как при компьютерной реализации можно использовать лишь конечные сетки. Это приводит к необходимости задавать краевые условия для функции цены на внешней границе сетки, где ее обычно полагают равной бесконечности (единице после замены Кружкова). Таким образом, компьютерная реализация метода Барди – Фальконе фактически решает задачу быстродействия, происходящую на открытом множестве, с линией жизни, совпадающей с внешней границей области, покрытой сеткой. Этот факт дополнительно стимулирует необходимость исследования таких задач.

**Цели и задачи диссертационной работы.** Исследование теоретических вопросов, связанных с дифференциальными играми с линией жизни: существование функции цены; существование непрерывного обобщенного решения краевой задачи для уравнения ГЯ, соответствующей этой дифференциальной игре; совпадение функции цены и обобщенного решения; связь функций цены классической дифференциальной игры быстродействия и дифференциальной игры быстродействия с линией жизни, а также разработка и обоснование численного метода решения дифференциальных игр быстродействия с линией жизни и соответствующих алгоритмов и компьютерных программ (в том числе для визуализации функции цены).

**Методология и методы исследования.** В качестве методов исследования использовались позиционная формализация дифференциальных игр, предложенная в свердловской школе по теории управления и дифференциальным играм, теории обобщенных решений уравнений типа ГЯ (вязкостные и минимаксные решения). При создании численной схемы применялась идеология метода Эйлера решения за-

---

<sup>10</sup> *Bardi M., Capuzzo-Dolcetta I.* Optimal Control and Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman Equations. Birkhäuser, Boston, 1997. 574 p.

<sup>11</sup> *Bardi M., Falcone M., Soravia P.* Numerical Methods for Pursuit-Evasion Games via Viscosity Solutions // Annals of the International Society of Dynamic Games, Vol. 6: Stochastic and Differential Games, edited by M. Bardi, T. Parthasarathy, and T.E.S. Raghavan (eds.), Birkhäuser, Boston, 1999, pp. 105–175.

<sup>12</sup> *Crandall M.G., Evans L.C., Lions P.-L.* Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations // Transactions of the American Mathematical Society, 1983, Vol. 277, No. 1, pp. 1–42.

<sup>13</sup> *Crandall M.G., Evans L.C., Lions P.-L.* Some properties of viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations // Transactions of the American Mathematical Society, 1984, Vol. 282, No. 2, pp. 487–502.

дач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений, кусочно-линейная и полилинейная аппроксимации функции, заданной на прямоугольной сетке, теория сжимающих отображений, методы сравнения для уравнений в частных производных. При разработке программной реализации алгоритма использовался язык C# для сред исполнения Microsoft .Net/.Net Core и библиотеки этих сред.

**Научная новизна.** Для дифференциальных игр с линией жизни при определенных условиях доказано существование функции цены, существование непрерывного обобщенного минимаксного решения соответствующей краевой задачи для уравнения ГЯ и совпадение функции цены с минимаксным решением. Найдена связь функции цены дифференциальной игры быстрогодействия с линией жизни с функцией цены классической дифференциальной игры быстрогодействия.

Построен численный метод решения задачи быстрогодействия с линией жизни и доказана его сходимости для различных способов аппроксимации приближенной функции цены.

Результаты работы являются новыми.

**Положения, выносимые на защиту:**

- 1) обоснование существования функции цены дифференциальной игры оптимального быстрогодействия с линией жизни;
- 2) обоснование существования непрерывного обобщенного (минимаксного) решения краевой задачи для уравнения ГЯ, соответствующей дифференциальной игре оптимального быстрогодействия с линией жизни, и совпадение его с функцией цены такой игры;
- 3) характеристика области совпадения функций цены дифференциальных игр оптимального быстрогодействия с линией жизни и без нее;
- 4) формулировка численной схемы построения непрерывной функции цены дифференциальной игры оптимального быстрогодействия с линией жизни, доказательство ее сходимости к вязкостному решению соответствующей краевой задачи для уравнения ГЯ и ее программная реализация;
- 5) программная реализация алгоритма Marching Cubes и NS-алгоритма и исследование качества визуализации при применении их к представлению результатов решения дифференциальных игр оптимального быстрогодействия с линией жизни.

**Теоретическая и практическая значимость работы.** Разработанные автором программы построения функции цены дифференциальной игры с линией жизни в сочетании с имеющимися средствами визуализации являются удобным инструментом, весьма помогающим в изучении игр из этого класса. Представленные в работе модификации методов сглаживания поверхности посредством алгоритмов Лапласа и Marching Cubes и их модификаций также могут быть полезными в каче-

стве инструмента при анализе функции цены дифференциальной игры, а также при визуализации результатов вычислений других сеточных методов и при визуализации воксельных трехмерных множеств.

**Достоверность полученных результатов.** Достоверность полученных результатов диссертационной работы обеспечивается математической строгостью получения аналитических выражений, согласованностью полученных результатов с результатами, полученными другими авторами (аналитическими и численными методами).

**Личный вклад автора.** Основные результаты работы, а именно теоретическое обоснование существования функции цены дифференциальных игр быстрого действия с линией жизни, существование обобщенных решений соответствующих краевых задач для уравнений ГЯ, их совпадение между собой, формулировка численной схемы и доказательство ее сходимости к обобщенному решению, характеристика области совпадения функции цены игр с и без линии жизни получены автором лично. Компьютерная реализация предложенной численной схемы и проведение вычислений модельных задач были проведены автором лично. Формулирование цели, постановка задач диссертационной работы, выбор общих методик исследований выполнены совместно с научным руководителем.

**Апробация работы.** Основные результаты, полученные в процессе исследования, докладывались автором и обсуждались на the 55th Israel Annual Conference on Aerospace Sciences IACAS'55, February 25–26, 2015, Tel Aviv, Haifa, Israel; the 17th International Symposium on Dynamic Games and Applications, July 12–15, 2016, Urbino, Italy; международной конференции по математической теории управления и механике, Суздаль, 7–11 июля 2017 года; the 11th ISDG Workshop, July 13–15, 2017, Warsaw, Poland; the 18th International Symposium on Dynamic Games and Applications, July 9–12, 2018, Grenoble, France; International Conference «Stability, Control, Differential Games» (SCDG2019) devoted to the 95th anniversary of Academician N.N.Krasovskii, September 16–20, 2019; the 60th Israel Annual Conference on Aerospace Sciences IACAS'60, March 4–5, 2020, Tel Aviv, Haifa, Israel; Workshop on Mathematical Modeling and Scientific Computing dedicated to the memory of Nikolai Botkin, Technical University of Munich Munich, Germany, November 19–20, 2020; 47-й, 48-й, 49-й, 51-й международной молодежных школах-конференциях «Современные проблемы математики и ее приложений» (Екатеринбург, 2016, 2017, 2018, 2020 гг.); семинаре кафедры оптимального управления ВМК МГУ; семинарах отдела динамических систем ИММ УрО РАН.

**Публикации.** Основные результаты исследования опубликованы в работах [1–14], в том числе 11 статей опубликованы в рецензируемых научных журналах и изданиях, определенных ВАК и Аттестационным

советом УрФУ и входящих в международные реферативные базы данных и системы цитирования.

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из введения, списка основных обозначений, четырех глав, списка литературы, списка иллюстраций и приложения. Диссертация подготовлена в системе ЛАТ<sub>E</sub>X. Общий объем диссертации составляет 157 страниц. Библиографический список включает 89 наименований, в том числе 13 публикаций автора по теме диссертации. Список иллюстраций включает 55 позиций. Исследование проведено при поддержке проекта 75-02-2023-935 Министерства науки и высшего образования РФ «Уральский математический центр».

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** дается краткий обзор литературы по дифференциальным играм, определяются цель и задачи работы, излагаются основные результаты диссертации.

В **первой главе** формулируется дифференциальная игра быстрого действия с линией жизни, определяется ее функция цены, обосновывается существование функции цены. Затем рассматривается соответствующая краевая задача для уравнения ГЯ, доказываются существование непрерывного минимаксного решения. Далее обосновывается совпадение функции цены дифференциальной игры оптимального быстрого действия с линией жизни и минимаксного решения соответствующей краевой задачи для уравнения ГЯ. Приводится характеристика области, в которой гарантируется совпадение функций цены игр с и без линии жизни (с одинаковыми динамиками, множествами ограничений на управления игроков и терминальными множествами).

Рассмотрим конфликтно-управляемую систему с динамикой

$$\dot{x} = f(x, p, q), \quad t \geq 0, \quad x(0) = x_0, \quad p \in P, \quad q \in Q, \quad (1)$$

где  $x \in \mathbb{R}^d$  — фазовый вектор системы;  $p$  и  $q$  — управления первого и второго игроков, соответственно. Ограничения  $P$  и  $Q$  на управления считаются компактными множествами в своих евклидовых пространствах. Задано компактное терминальное множество  $\mathcal{T}$  полной размерности и открытое множество  $\mathcal{W}$  такое, что  $\mathcal{T} \subset \mathcal{W}$  и граница  $\partial\mathcal{W}$  является ограниченной. Обозначим  $\mathcal{G} := \mathcal{W} \setminus \mathcal{T}$  и  $\mathcal{F} := \mathbb{R}^d \setminus \mathcal{W}$ . Множество  $\mathcal{T}$  является целевым; в множестве  $\mathcal{G}$  происходит игра; множество  $\partial\mathcal{F} = \partial\mathcal{W}$  — это линия жизни, при выходе системы на которую второй игрок безоговорочно выигрывает (см. рис. 1). Цель первого игрока, распоряжающегося управлением  $p$ , — привести систему из состояния  $x_0 \in \mathbb{R}^d$  на множество  $\mathcal{T}$  как можно скорее, удерживая при этом

траекторию вне множества  $\mathcal{F}$ ; цель второго игрока, распоряжающегося управлением  $q$ , — привести систему на множество  $\mathcal{F}$ , или, если это невозможно, удержать траекторию внутри множества  $\mathcal{G}$  навсегда, или, если и это невозможно, максимально отсрочить достижение системой множества  $\mathcal{T}$ . Если точка  $x_0$  принадлежит множеству  $\mathcal{T}$  или  $\mathcal{F}$ , то задача решается тривиально. Поэтому интерес представляет ситуация, когда  $x_0 \in \mathcal{G}$ .

Цели игроков в такой игре могут быть формализованы следующим образом. Пусть  $x(\cdot; x_0)$  — это траектория системы, выпущенная из начальной точки  $x_0$ . Для нее рассмотрим две величины:

$$\begin{aligned} t_* &= t_*(x(\cdot; x_0)) = \min\{t : x(t; x_0) \in \mathcal{T}\}, \\ t^* &= t^*(x(\cdot; x_0)) = \min\{t : x(t; x_0) \in \mathcal{F}\}, \end{aligned}$$

которые являются моментами времени, в которые траектория  $x(\cdot; x_0)$  в первый раз попадает на множество  $\mathcal{T}$  и  $\mathcal{F}$ , соответственно. Если траектория не приходит на множество  $\mathcal{T}$  ( $\mathcal{F}$ ), то значение  $t_*$  ( $t^*$ ) положим равным  $+\infty$ . Результат игры на траектории  $x(\cdot; x_0)$  определим следующим образом:

$$\tau(x(\cdot; x_0)) = \begin{cases} +\infty, & \text{если } t_* = +\infty \text{ или } t^* < t_*, \\ t_*, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (2)$$

Предполагается выполнение следующих условий:

**С.1.** Функция  $f : \mathbb{R}^d \times P \times Q \mapsto \mathbb{R}^d$  является непрерывной по совокупности переменных и липшицевой по переменной  $x$ , то есть для всех

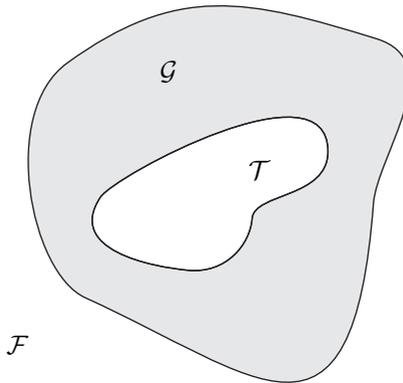


Рис. 1: множества  $\mathcal{T}$ ,  $\mathcal{F}$  и  $\mathcal{G}$

$$x^{(1)}, x^{(2)} \in \mathbb{R}^d, p \in P, q \in Q$$

$$|f(x^{(1)}, p, q) - f(x^{(2)}, p, q)| \leq \lambda |x^{(1)} - x^{(2)}|;$$

также считается, что она удовлетворяет условию Айзекса (условию седловой точки в маленькой игре): для всех  $s \in \mathbb{R}^d$  верно, что

$$\min_{p \in P} \max_{q \in Q} \langle s, f(x, p, q) \rangle = \max_{q \in Q} \min_{p \in P} \langle s, f(x, p, q) \rangle =: \mathcal{H}(x, s).$$

**С.2.** Границы  $\partial \mathcal{T}$  и  $\partial \mathcal{F}$  являются компактными, по крайней мере, дважды гладкими поверхностями, обладающими радиусом кривизны, ограниченным снизу некоторой константой  $r > 0$ .

**С.3.** Граница  $\partial \mathcal{T}$  множества  $\mathcal{T}$  и функция  $f$  подчинены условию

$$\min_{p \in P} \max_{q \in Q} \langle n_{\mathcal{T}}(x), f(x, p, q) \rangle < 0$$

для любой точки  $x \in \partial \mathcal{T}$ . В терминах из книги Р.Айзекса<sup>14</sup>, это условие означает, что граница  $\partial \mathcal{T}$  — это *допустимая зона* для первого игрока: если система находится на границе терминального множества  $\mathcal{T}$ , то первый игрок может гарантировать заведение траектории внутрь этого множества.

**С.4.** Граница  $\partial \mathcal{F}$  множества  $\mathcal{F}$  и функция  $f$  подчинены условию

$$\min_{p \in P} \max_{q \in Q} \langle -n_{\mathcal{F}}(x), f(x, p, q) \rangle > 0$$

для любой точки  $x \in \partial \mathcal{F}$ . Это соотношение означает, что если система находится в любой точке с границы множества  $\mathcal{F}$ , то второй игрок может направить движение системы внутрь множества  $\mathcal{F}$ .

Обозначим  $\mathcal{T}_\epsilon = \mathcal{T} + B_\epsilon$ ,  $\mathcal{F}_\epsilon = \mathcal{F} + O_\epsilon$ ,  $\mathcal{W}_\epsilon = \mathbb{R}^d \setminus \mathcal{F}_\epsilon$ . Здесь и далее,  $B_\epsilon$  — замкнутый шар радиуса  $\epsilon$  с центром в начале координат,  $O_\epsilon$  — открытый шар радиуса  $\epsilon$  с центром в начале координат. Знак «+» для операндов-множеств означает алгебраическую сумму (сумму Минковского). Величина  $\epsilon$  выбирается достаточно малой, чтобы множество  $\mathcal{W}_\epsilon$  было непустым и выполнялось вложение  $\mathcal{T}_\epsilon \subset \text{int } \mathcal{W}_\epsilon$ . Здесь и далее  $\text{int } A$  обозначает внутренность множества  $A$ . Плата для траектории  $x(\cdot)$  системы определяется как

$$\tau_\epsilon(x(\cdot)) := \min \{t \in \mathbb{R}^+ : x(t) \in \mathcal{T}_\epsilon, \forall \vartheta \in [0, t) x(\vartheta) \in \mathcal{W}_\epsilon\}.$$

<sup>14</sup> Isaacs R. Differential Games. John Wiley & Sons, New York, 1965.

Если траектория никогда не попадает на множество  $\mathcal{T}_\epsilon$  или достигает множества  $\mathcal{F}_\epsilon$  раньше, чем  $\mathcal{T}_\epsilon$ , то  $\tau_\epsilon(x(\cdot)) = +\infty$ . Через  $\mathbb{P}$  обозначим множество всех стратегий обратной связи первого игрока,  $\mathbb{Q}$  — это множество всех стратегий обратной связи второго игрока.

*Гарантированный результат*  $T_1^0(x_0)$  первого игрока в точке  $x_0$  определяется как

$$\begin{aligned} T_1^\epsilon(x_0, \mathcal{P}) &:= \sup \left\{ \tau_\epsilon(x(\cdot)) : x(\cdot) \in \mathbb{X}(x_0, \mathcal{P}) \right\}, \\ T_1^\epsilon(x_0) &:= \inf_{\mathcal{P} \in \mathbb{P}} T_1^\epsilon(x_0, \mathcal{P}), \quad T_1^0(x_0) := \lim_{\epsilon \downarrow 0} T_1^\epsilon(x_0). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $\mathbb{X}(x_0, \mathcal{P})$  — множество конструктивных движений<sup>15</sup>, выходящих из точки  $x_0$ , порожденное стратегией обратной связи  $\mathcal{P} : \mathbb{R}^d \rightarrow P$  первого игрока.

Аналогично определяется *гарантированный результат*  $T_2^0(x_0)$  второго игрока в точке  $x_0$ :

$$\begin{aligned} T_2^\epsilon(x_0, \mathcal{Q}) &:= \inf \left\{ \tau_\epsilon(x(\cdot)) : x(\cdot) \in \mathbb{X}(x_0, \mathcal{Q}) \right\}, \\ T_2^\epsilon(x_0) &:= \sup_{\mathcal{Q} \in \mathbb{Q}} T_2^\epsilon(x_0, \mathcal{Q}), \quad T_2^0(x_0) := \lim_{\epsilon \downarrow 0} T_2^\epsilon(x_0). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $\mathbb{X}(x_0, \mathcal{Q})$  — множество конструктивных движений, выходящих из точки  $x_0$ , порожденное стратегией обратной связи  $\mathcal{Q} : \mathbb{R}^d \rightarrow Q$  второго игрока.

Далее доказывается следующая

**Теорема 1.** Пусть выполнены условия С.1–С.4. В дифференциальной игре быстрого действия с линией жизни (1), (2) существует функция цены  $T : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ , то есть  $T(x_0) := T_1^0(x_0) = T_2^0(x_0)$  для всех  $x_0 \in \mathbb{R}^d$ .

Доказательство данной теоремы существенно опирается на теоремы из книги Н.Н. Красовского и А.И. Субботина.

Затем показывается существование минимаксного решения. Используемое далее понятие минимаксного решения уравнения Гамильтона–Якоби и краевой задачи вводится, как в книге А.И. Субботина<sup>16</sup>.

Краевая задача для уравнения Гамильтона–Якоби, соответствующая задаче (1), (2) (после замены Кружкова) записывается следующим

<sup>15</sup>Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.

<sup>16</sup>Субботин А.И. Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка: перспективы динамической оптимизации. — М.; Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2003.

образом

$$H(x, Du(x)) - u(x) = 0, \quad x \in \mathcal{G}, \quad (5)$$

$$u(x) = 0 \text{ если } x \in \partial\mathcal{T}, \quad u(x) = 1 \text{ если } x \in \partial\mathcal{F}, \quad (6)$$

где

$$H(x, s) = \mathcal{H}(x, s) + 1.$$

Показывается, что у задачи (5), (6) существует минимаксное решение. Фактически, для существования минимаксного решения нужно доказать либо существование непрерывного на границе нижнего решения, либо непрерывного на границе верхнего решения. Первый факт был доказан с существенным использованием условия С.3. Во втором случае важным оказывается выполнения условия С.4.

Если условия С.3 и С.4 выполнены одновременно, то из этого следует непрерывность функции цены.

Далее доказывается совпадение функции цены дифференциальной игры быстрого действия с линией жизни с минимаксным решением соответствующей краевой задачи. Сначала доказывается, что для любой константы меньше, чем величина минимаксного решения (после замены Кружкова), гарантированный результат (4) может быть сделан не меньше, чем эта константа с помощью выбора стратегии  $\mathcal{Q}$  второго игрока. Затем доказывается, что для любой константы больше величины минимаксного решения (после замены Кружкова) гарантированный результат (3) может быть сделан не больше, чем эта константа, благодаря выбору стратегии  $\mathcal{P}$  первого игрока. Затем заключается, что гарантированные результаты сходятся к величине минимаксного решения, что вместе с их сходимостью к функции цены доказывает совпадение.

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия С.1–С.4; это гарантирует существование и единственность минимаксного решения  $u(\cdot) : \text{cl}\mathcal{G} \rightarrow [0, 1]$  для задачи (5), (6). Пусть  $x_0$  — некоторая точка области  $\mathcal{G}$ . Пусть величина  $\theta$  выбрана так, что  $\theta < -\ln(1 - u(x_0))$ . Тогда существует нижнее непрерывное на границе минимаксное решение  $u_{\natural}$  этой задачи, удовлетворяющее неравенству

$$\theta < \omega_{\natural} := -\ln(1 - u_{\natural}(x_0)),$$

и такое число  $\bar{\epsilon} > 0$ , что для любого  $\epsilon \in (0, \bar{\epsilon})$  и для  $\alpha(\epsilon) = \epsilon/7$  выполнена оценка

$$T_2^{\epsilon}(x_0, \mathcal{Q}_{\alpha(\epsilon)}) \geq \theta.$$

Здесь  $\mathcal{Q}_{\alpha(\epsilon)}$  — стратегия обратной связи второго игрока, а величина  $T_2^{\epsilon}(x_0, \mathcal{Q}_{\alpha(\epsilon)})$  задается соотношениями (4).

**Теорема 3.** Пусть выполнены условия С.1–С.4; это гарантирует существование и единственность минимаксного решения  $u(\cdot) : \text{cl } \mathcal{G} \rightarrow [0, 1]$  задачи (5), (6). Пусть  $x_0$  — такая точка множества  $\mathcal{G}$ , что верно неравенство  $u(x_0) < 1$ . Пусть величина  $\theta$  выбрана так, что  $\theta > -\ln(1 - u(x_0))$ . Тогда существует верхнее непрерывное на границе минимаксное решение  $u^\natural$  этой задачи, удовлетворяющее соотношению

$$\theta > \omega^\natural := -\ln(1 - u^\natural(x_0)),$$

и число  $\bar{\epsilon} > 0$  такое, что для любого  $\epsilon \in (0, \bar{\epsilon}]$  и для  $\alpha(\epsilon) = \epsilon/3$  выполнена оценка

$$T_1^\epsilon(x_0, \mathcal{P}_{\alpha(\epsilon)}) \leq \theta.$$

Здесь  $\mathcal{P}_{\alpha(\epsilon)}$  — стратегия обратной связи первого игрока, а величина  $T_1^\epsilon(x_0, \mathcal{P}_{\alpha(\epsilon)})$  задается равенством (3).

В итоге, из этих двух теорем следует совпадение функции цены с минимаксным решением. Так как эти две теоремы требуют одновременного выполнения условий С.3 и С.4, из этого следует, что совпадение доказано в предположении непрерывности функции цены и минимаксного решения. В дальнейшем планируется снять это ограничение, доказав теоремы в более слабых предположениях.

Связь между функцией цены дифференциальной игры быстрого действия с линией жизни и функцией цены классической дифференциальной игры отражена в следующей теореме:

**Теорема 4.** Пусть выполнены условия С.1–С.4;  $k$  — константа из условия подлинейного роста функции  $f$ :  $|f(x, p, q)| \leq k(1 + |x|)$  для любых  $x \in \mathbb{R}^d$ ,  $p \in P$  и  $q \in Q$ . Пусть функция цены  $\widetilde{T}(x_0)$  классической игры быстрого действия в точке  $x_0$  равняется  $\theta$ . Пусть  $\widetilde{M}(\theta) = k(1 + |x_0|)e^{k\theta}$ . Тогда, если замкнутый шар  $B(x_0, \theta\widetilde{M}(\theta))$  вложен в  $\mathcal{W}$ , то значение функции цены  $T(x_0)$  задачи быстрого действия с линией жизни в точке  $x_0$  равняется  $\theta$ .

Более того, выполняется и обратная теорема (так как функция цены игры быстрого действия с линией жизни всегда не меньше, чем функция цены классической задачи быстрого действия):

**Теорема 5.** Пусть выполнены условия С.1–С.4;  $k$  — константа из условия подлинейного роста функции  $f$ :  $|f(x, p, q)| \leq k(1 + |x|)$  для любых  $x \in \mathbb{R}^d$ ,  $p \in P$  и  $q \in Q$ . Пусть функция цены  $T(x_0)$  игры быстрого действия с линией жизни в точке  $x_0$  равняется  $\theta$ . Пусть  $\widetilde{M}(\theta) = k(1 + |x_0|)e^{k\theta}$ . Тогда, если замкнутый шар  $B(x_0, \theta\widetilde{M}(\theta))$  вложен в  $\mathcal{W}$ , то значение функции цены классической задачи быстрого действия в точке  $x_0$  равняется  $\theta$ .

Последняя теорема позволяет оценить размер области  $\mathcal{G}$ , в которой надо вычислять функцию цены игры с линией жизни, чтобы по-

лучить ее совпадение с функцией цены классической игры быстрогодействия в желаемой области.

**Вторая глава** диссертации посвящена численной процедуре построения функции цены дифференциальной игры оптимального быстрогодействия с линией жизни. Приводится формулировка численной схемы, обоснование ее сходимости к вязкостному решению соответствующей краевой задачи для уравнения ГЯ, обсуждаются различные методы аппроксимации (кусочно-линейная, полилинейная) функции цены, заданной на сетке. Численная процедура реализована в виде программы на языке C# для среды исполнения Microsoft .Net/.NetCore версии 4.0 или более поздней.

На основе численного метода М. Барди и М. Фальконе<sup>17</sup> строится численный метод решения дифференциальной игры быстрогодействия с линией жизни. Данный численный метод представляет собой итерационный процесс, который строит функцию цены как обобщенное решение соответствующей краевой задачи для уравнения Гамильтона – Якоби.

Рассмотрим равномерную прямоугольную сетку  $\mathcal{L}$ , покрывающую  $\mathbb{R}^d$ . Для нумерации узлов сетки будет применяться линейная нумерация. Будем обозначать символами  $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$ ,  $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}$ ,  $\mathcal{L}_{\mathcal{T}}$  совокупности узлов сетки, попадающие в соответствующие множества,  $h$  — шаг по времени,  $k$  — шаг по пространству,  $\mathcal{M}$  — множество бесконечных матриц (матриц, элементы которых имеют индексами целые числа из  $\mathbb{Z}$ ). Рассмотрим характеристику функции цены для игры быстрогодействия с линией жизни и дискретизированным фазовым пространством:

$$w(l_\nu) = \begin{cases} \gamma \max_{q \in Q} \min_{p \in P} w_{loc}(z(l_\nu, p, q), W) + 1 - \gamma, & \text{если } l_\nu \in \mathcal{L}_{\mathcal{G}}, \\ 0, & \text{если } l_\nu \in \mathcal{L}_{\mathcal{T}}, \\ 1, & \text{если } l_\nu \in \mathcal{L}_{\mathcal{F}}. \end{cases} \quad (7)$$

Здесь  $l_\nu$  — узел сетки  $\mathcal{L}$ ,  $z(x, p, q) = x + hf(x, p, q)$ ,  $\gamma = e^{-h}$ ,  $w_{loc} : \mathbb{R}^d \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  — кусочно-линейная аппроксимация функции  $w$  на основе локальных координат точки  $x$ :

$$w_{loc}(x, W) = \sum_{s=1}^{d+1} \lambda_s w(l_s),$$

где  $W = (w(l_\nu))_{\nu \in \mathbb{Z}}$  — бесконечный вектор со значениями функции  $w(l_\nu)$  на узлах  $l_\nu$  сетки  $\mathcal{L}$ ,  $\lambda_s(x)$  — барицентрические (локальные) координаты

<sup>17</sup> M. Bardi, M. Falcone, P. Soravia. Numerical methods for pursuit-evasion games via viscosity solutions // Annals of the International Society of Dynamic Games, Vol. 6: Stochastic and Differential Games, pages 105–175. Birkhäuser, Boston, 1999.

точки  $x$  на узлах  $l_s \in \mathcal{L}$ :

$$x = \sum_{s=1}^{d+1} \lambda_s(x) l_s(x), \quad \lambda_s \geq 0, \quad \sum_{s=1}^{d+1} \lambda_s(x) = 1.$$

В разложении участвуют те узлы  $l_s$ , которые являются вершинами симплекса  $S(x)$ , содержащей точку  $x$  (предполагается, что вместе с введением сетки  $\mathcal{L}$  было выбрано и разбиение пространства на симплексы с вершинами в узлах этой сетки).

Первое соотношение в (7) — это совокупность метода Эйлера и дискретного принципа динамического программирования, второе — это решение задачи на границе  $\mathcal{T}$ , третье — решение задачи на границе  $\mathcal{F}$  (значение 1 появляется после замены Кружкова вместо  $+\infty$ ).

Из этой характеристики видно, что при задании функции  $w(\cdot)$  при практической реализации метода необходимо хранить только значения на узлах из части сетки  $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}$ , попадающих в множество  $\mathcal{G}$ . Если множество  $\mathcal{G}$  ограничено, то часть  $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}$  содержит лишь конечное число узлов и может быть представлена в компьютере.

Любая бесконечная матрица  $W$  определяет функцию  $F_s : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  пересчета значения в узле  $l_s$ :

$$F_s(W) = \begin{cases} \gamma \max_{q \in Q} \min_{p \in P} w_{loc}(z(l_s, p, q), W) + 1 - \gamma, & \text{если } l_s \in \mathcal{L}_{\mathcal{G}}, \\ 0, & \text{если } l_s \in \mathcal{L}_{\mathcal{T}}, \\ 1, & \text{если } l_s \in \mathcal{L}_{\mathcal{F}}. \end{cases}$$

Применение функции  $F_s$  ко всем узлам решетки определяет оператор пересчета  $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ .

Далее доказывается

**Предложение 1.** Оператор  $F$  имеет единственную неподвижную точку  $\mathbf{W}$ , которая определяет функцию  $\mathbf{w}(\cdot)$ :

$$\begin{cases} \mathbf{w}(x) = \sum_m \lambda_m \mathbf{w}(l_m), & \text{если } x \notin \mathcal{L} \text{ и } x = \sum_m \lambda_m l_m, \\ \mathbf{w}(l_s) = \gamma \max_{q \in Q} \min_{p \in P} \mathbf{w}_{loc}(z(l_s, p, q), \mathbf{W}) + 1 - \gamma, & \text{если } l_s \in \mathcal{L}_{\mathcal{G}}, \\ \mathbf{w}(l_s) = 0, & \text{если } l_s \in \mathcal{L}_{\mathcal{T}}, \\ \mathbf{w}(l_s) = 1, & \text{если } l_s \in \mathcal{L}_{\mathcal{F}}. \end{cases} \quad (8)$$

Для формулировки и обоснования теоремы сходимости численного метода сформулировано и доказано вспомогательное

**Предложение 2.** Рассмотрим допустимые последовательности вещественных чисел  $h_n > 0$  и  $k_n > 0$  (то есть,  $h_n \rightarrow 0$  и  $h_n/k_n \rightarrow 0$

при  $n \rightarrow \infty$ ), и пусть  $\{\mathbf{w}_n(\cdot)\}$  — соответствующая им последовательность решений (8). Обозначим

$$\bar{v}(x) \equiv \limsup_{(y,n) \rightarrow (x,\infty)} \mathbf{w}_n(y), \quad \underline{v}(x) \equiv \liminf_{(y,n) \rightarrow (x,\infty)} \mathbf{w}_n(y).$$

Функции  $\bar{v}$  и  $\underline{v}$  являются, соответственно, нижним и верхним вязкостным решением уравнения (5) с граничными условиями

$$\begin{aligned} \underline{v} &\geq 0 \text{ на } \partial\mathcal{T}, \\ \bar{v} &\leq 0 \text{ или } \bar{v} + H(x, D\bar{v}(x)) \leq 0 \text{ на } \partial\mathcal{T}, \\ \underline{v} &\geq 1 \text{ или } \underline{v} + H(x, D\underline{v}(x)) \geq 0 \text{ на } \partial\mathcal{F}, \\ \bar{v} &\leq 1 \text{ на } \partial\mathcal{F}. \end{aligned}$$

в вязкостном смысле (то есть неравенства, связанные с гамильтонианом, проверяются с привлечением тестовых дважды гладких функций).

На основе этой леммы доказывается

**Теорема 6.** Предположим, что выполняются условия С.1–С.4. Пусть  $v$  — функция цены игры (1), (2) после замены Кружкова. Тогда последовательность  $\mathbf{w}_n$  сходится к функции  $v = \bar{v} = \underline{v}$  при  $n \rightarrow \infty$  равномерно на любом компактном множестве  $\mathcal{K}$  в  $\text{cl}\mathcal{G}$ .

При использовании компьютерной реализации численной схемы, описанной выше, для симметричных задач получались несимметричные результаты. Это привело к необходимости использования других методов аппроксимации функции между узлами решетки, например, *полилинейной интерполяции*. Сходимость схемы также доказана и для использования полилинейной интерполяции.

При создании компьютерной реализации важной является разработка структуры данных, хранящей сетку. Неразумно делать ее на основе многомерного массива, поскольку, во-первых, априори неизвестна размерность фазового пространства и, как следствие, массива, а во-вторых, при форме множества  $\mathcal{G}$ , существенно отличающейся от многомерного параллелепипеда, происходит избыточное хранение ненужных ячеек, не связанных с узлами сетки  $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}$ .

Вычислительная программа была реализована на языке C# для среды выполнения .Net 4.0 под операционную систему Microsoft Windows. Однако следует отметить, что в течение последних лет (после того, как программа была написана) фирма Microsoft выпустила кроссплатформенную версию .NetCore этой среды, а так как программа использует только стандартные возможности языка и среды, то она может быть запущена и под другими операционными системами, для которых имеется реализация .NetCore — Linux, MacOS.

В случае запуска на многоядерных процессорах с общей памятью (Intel i3, i5, i7) с использованием стандартных средств .Net/.NetCore может быть проведено распараллеливание процесса пересчета значений в узлах сетки, показывающее почти линейный рост производительности.

Вычислительная процедура подразумевает итеративный пересчет значений функции в узлах сетки  $\mathcal{L}_G$  при заданных шагах  $h$  по времени и  $k$  по пространству либо с выполнением заданного количества итераций, либо до достижения итерации, когда новые значения функции в узлах отличаются от предыдущих не более, чем на указанную величину. В результате вычислений в выходной файл записываются финальные значения функции в узлах сетки.

Далее описываются основные типы данных и их формат, используемые методы интерполяции и алгоритм их использования, приводится псевдокод процедуры аппроксимации функции цены.

**Третья глава** носит технический характер и посвящена методам визуализации функции цены дифференциальной игры, полученной при помощи предложенных численных процедур. В случае двумерного фазового вектора визуализация результатов вычислений производилась в форме графика функции цены, который является в этой ситуации поверхностью, погруженной в трехмерное пространство, а также в виде двумерных множеств уровня. Восстановление графика по отдельным точкам производилось с помощью собственного алгоритма, так как существующие системы научной визуализации (например, MatLab и GNU Plot) используют алгоритмы, нацеленные на визуализацию непрерывных поверхностей, поэтому при их использовании соединяются края разрыва, что затрудняет анализ результата. Графики, восстановленные с помощью собственного алгоритма, визуализировались в системе MeshLab.

В случае трехмерного фазового вектора сам по себе график функции цены погружен в четырехмерное пространство и непосредственно не может быть отображен. В этом случае разумно визуализировать результаты при помощи набора множеств уровня функции цены, то есть множеств  $\mathbb{L}_c$  точек пространства игры, в которых значение функции не превосходит заданной величины  $c$ . Простейший подход — отобразить облако узлов сетки  $\mathcal{L}_G$ , обладающих соответствующим значением. Однако при этом невозможно наглядно представить трехмерную структуру множества.

Другой подход основывается на телесном представлении множества уровня: на каждый узел сетки  $\mathcal{L}_G$ , принадлежащий визуализируемому множеству, «надевается» «кирпичик» — прямоугольный трехмерный параллелепипед со сторонами, равными шагам сетки по соответствующим координатам (в дальнейшем, при описании алгоритма, для

простоты будем считать, что это куб). Недостаток такого метода заключается в том, что у полученного множества имеется много маленьких граней, составляющих существенные (прямые) углы между собой. Даже после визуального затенения по Фонгу остаются существенные перепады освещенности. Это требует дополнительных усилий по сглаживанию поверхности.

Для сглаживания трехмерных поверхностей использовались, совместно и по отдельности, алгоритмы Marching Cubes<sup>18</sup> и лапласовского сглаживания<sup>19</sup>. Алгоритм Marching Cubes был улучшен автором для сохранения симметричности поверхности, если такая присутствовала.

**Четвертая глава** содержит результаты численного исследования ряда примеров.

Вычисления при подготовке примеров производились в параллельном режиме на персональном компьютере с четырехядерным процессором Intel Core i7-2600К с частотой 3.70 ГГц и 12 Гб оперативной памяти. Все временные параметры счета приведены для этого компьютера. В примерах все поверхности трехмерных множеств уровня построены с помощью последовательного применения симметричного алгоритма Marching Cubes и НС-алгоритма (вариант лапласовского алгоритма) и визуализированы с помощью системы MeshLab. В задачах с двумерным фазовым вектором графики функции цены визуализированы в программе MeshLab, а множества уровня данных двумерных поверхностей сформированы с помощью программы GNU Plot.

Следует отметить, что функции цены в большинстве из приведенных примеров являются разрывными. То есть применение описанной численной процедуры для их решения не обосновано. Однако фактически получаемые результаты имеют хорошее совпадение с результатами работы других алгоритмов, предложенными другими авторами.

В рамках диссертации предложенным численным методом проведено исследование ряда задач. Среди них, в частности, — классическая задача управления «машина Дубинса». Эта модель простейшим образом описывает движение автомобиля (корабля, летательного аппарата) на плоскости с постоянной по величине линейной скоростью и ограниченным радиусом разворота. Фактически, данная задача — это задача управления, но она была заменена дифференциальной игрой с фиктивным управлением второго игрока, ограниченным одноточечным

---

<sup>18</sup> *William E.L., Harvey E.C.* Marching Cubes: A high resolution 3D surface construction algorithm. Computer Graphics, Vol. 21, Nr. 4, July 1987

<sup>19</sup> *Vollmer J., Mencl R., Muller H.* Improved Laplacian Smoothing of Noisy Surface Meshes. Computer Graphics Forum, Blackwell Publishers Ltd and the Eurographics Association, 1999.

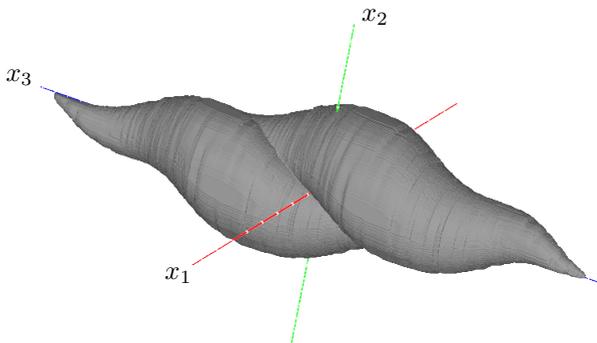


Рис. 2: Машина Дубинса,  $\mathbb{L}_c$ ,  $c = 4\pi$

множеством (для уменьшения перебора). Динамика такой системы записывается следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = f(x, p, q) = \begin{pmatrix} \cos x_3 \\ \sin x_3 \\ p \end{pmatrix},$$

где  $x_1$ ,  $x_2$  — геометрические координаты автомобиля,  $x_3$  — угол между положительным направлением оси  $x_1$  и направлением движения автомобиля,  $p \in [-1, 1]$  — управляющее воздействие, мгновенная угловая скорость поворота направления движения. Терминальное множество  $\mathcal{T}$  — куб с центром в начале координат и сторонами длиной 0.4. Множество  $\mathcal{W}$  — прямоугольный параллелепипед с центром в начале координат и сторонами длиной 22.5, 24 и 25. Число итераций  $n = 150$ , шаг по времени  $h = 0.15$ , шаг по пространству  $k = 0.075$ . Результаты вычислений — множество уровня  $\mathbb{L}_c$  функции цены для  $c = 4\pi$  — приведены на рис. 2. К данным результатам были применены алгоритмы Marching Cubes и НС-алгоритм для сглаживания полученной трехмерной поверхности, изображения были сделаны в системе MeshLab. Время вычисления составило 16 часов.

Также была исследована модифицированная игра «шофер-убийца» с преследователем, имеющим динамику типа машины Ридса–Шеппа. В классической постановке задачи «шофер-убийца» рассматривался автомобиль Дубинса, линейная скорость которого всегда была направлена вперед и оставалась постоянной по величине. Другая модель автомобиля, изученная Дж.А.Ридсом и Л.А.Шеппом<sup>20</sup>, подразумевает воз-

<sup>20</sup>Reeds, J.A. Optimal paths for a car that goes both forwards and backwards / J.A.Reeds, L.A.Shepp. — Pac. J. Math. Vol. 145, No. 2. 1990. — pp.367–393.

возможность изменения величины линейной скорости в диапазоне  $[-1, 1]$ , то есть в этом случае автомобиль обладает задним ходом. Следующий пример обладает динамикой такого типа:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = f(x, p, q) = \begin{pmatrix} -x_2 \cdot p_1 + q_1 \\ x_1 \cdot p_1 - p_2 + q_2 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Здесь первый игрок управляет величинами  $p_1$  и  $p_2$ , а второй —  $q_1$  и  $q_2$ . Управление  $p_1$  определяет угловую скорость вращения направления движения автомобиля, а управление  $p_2$  отвечает за мгновенное значение линейной величины его скорости. В частности, из-за мгновенного изменения значения управления  $p_2$  с положительного на отрицательное автомобиль может мгновенно менять направление движения, что, конечно, является математической идеализацией. Управление  $p_2$  меняется в пределах от  $a$  до  $1$ ,  $a$  является параметром задачи. Если  $a = 1$ , то получаемая модель является автомобилем Дубинса. Если  $a = -1$ , то модель является автомобилем Ридса–Шеппа.

Пример был посчитан с параметром  $a = -0.6$  (см. рис. 3). Множество  $\mathcal{W}$  — круг радиуса 4. Шаг по пространству  $k = 0.025$ , шаг по времени  $h = 0.075$ ,  $p \in [-1, 1] \times [a, 1]$ ,  $|q| \leq 0.3$ , терминальное множество — круг с центром в точке  $(0, 1)$  радиуса 0.2. Количество итераций  $n = 150$ . Время вычисления составило примерно 6 часов.

В предыдущем примере функция цены получается непрерывной вблизи границы  $\mathcal{T}$ , но, тем не менее, на границе  $\mathcal{F}$  есть разрыв. Модифицируем динамику (9) из предыдущего примера следующим образом:

$$\tilde{f}(x, p, q) = \alpha(x)f(x, p, q) + (1 - \alpha(x))q. \quad (10)$$

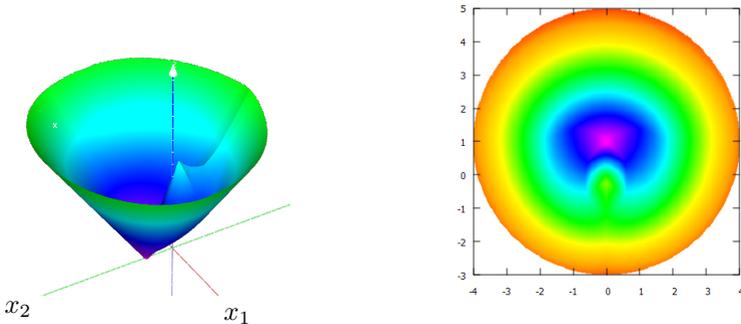


Рис. 3: Игра «шофер-убийца» с машиной Ридса–Шеппа,  $a = -0.6$ : слева — функция цены, справа — множества уровня

Здесь функция

$$\alpha(x) = \begin{cases} 1, & d(x) \leq R, \\ (R + l - d(x))/l, & R < d(x) \leq R + l, \\ 0, & d(x) > R + l, \end{cases}$$

где  $d(x) = \sqrt{x_1^2 + (x_2 - 1)^2}$  — расстояние от точки  $x$  до центра терминального множества,  $R = 2.5$  — радиус окружности, внутри которой динамика остается немодифицированной,  $l = 1$  — ширина переходного слоя.

При таком задании динамики получаем, что в круге радиуса 2.5 с центром в точке  $(0, 1)$  динамика остается той же, что и в предыдущей задаче, а на слое шириной 1 происходит непрерывный переход от динамики  $\dot{x} = f(x, p, q)$  к динамике  $\dot{x} = q$ . Тем самым, вне круга радиуса 3.5 с центром в точке  $(0, 1)$  у второго игрока имеется динамическое преимущество, из-за чего на границе  $\partial\mathcal{F}$  множества  $\mathcal{F}$  выполняется условие С.4 и, как следствие, функция цены вблизи границы множества  $\mathcal{F}$  становится непрерывной и ее значение там равно  $+\infty$ .

На рис. 4 изображен график функции цены модифицированной задачи. При визуализации использовались разные параметры непрерывности функции: слева — 0.1, справа — 10. На рис. 5 справа изображены множества уровня функции цены, слева черным цветом отмечены границы переходного слоя. Рисунок 6 совмещает график модифицированной функции цены и график обычной функции для игры с машиной Ридса — Шепша.

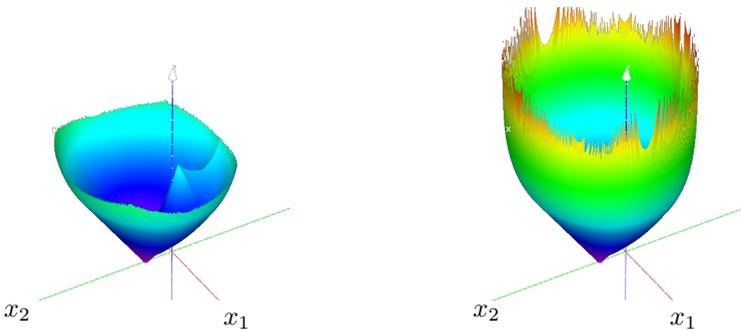


Рис. 4: Модифицированная игра «шофер-убийца» с машиной Ридса — Шепша, слева — функция цены с параметром визуализации 0.1, справа — с параметром визуализации 10

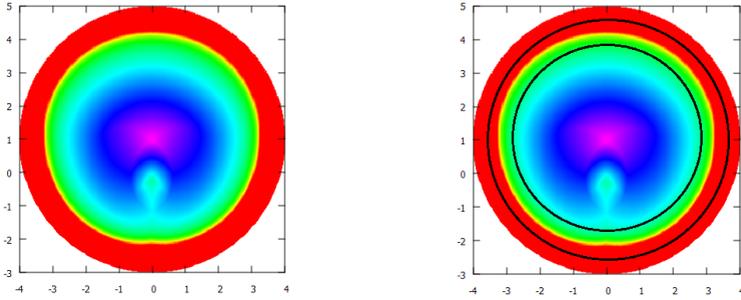


Рис. 5: Модифицированная игра «шофер-убийца» с машиной Ридса–Шепша, слева — множества уровневая функции цены, справа — множества уровня с отмеченными на них границами переходного слоя

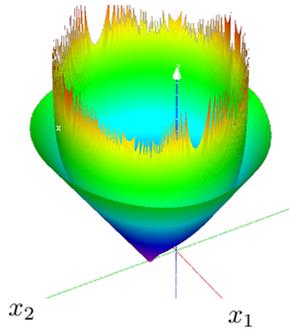


Рис. 6: Совмещенные графики функции цены обычной и модифицированной игр «шофер-убийца» с машиной Ридса–Шепша

Из рассмотрения рисунка 6 складывается впечатление, что в некоторой части имеется совпадение графиков функций цены модифицированной задачи с динамикой (9) и классической задачи с динамикой (10). Совпадение в круге радиуса 2.5 с центром в точке  $(0, 1)$  (то есть на множестве совпадения динамик) было подтверждено сравнением результатов численного счета для этих задач.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данном исследовании были выполнены следующие задачи.

1. Обосновано существование функции цены дифференциальной игры оптимального быстрогодействия с линией жизни.

2. Доказано существование непрерывного обобщенного (минимаксного) решения краевой задачи для уравнения ГЯ, соответствующей дифференциальной игре оптимального быстрогодействия с линией жизни, и совпадение его с функцией цены такой игры.
3. Доказаны теоремы о характеристизации области совпадения функций цены дифференциальных игр оптимального быстрогодействия с линией жизни и без нее.
4. Сформулирована численная схема построения непрерывной функции цены дифференциальной игры оптимального быстрогодействия с линией жизни, доказана ее сходимости к вязкостному решению соответствующей краевой задачи для уравнения ГЯ и создана ее программная реализация.
5. Для сглаживания поверхностей при их визуализации создана программная реализация алгоритма Marching Cubes и HC-алгоритма и проведено исследование качества визуализации при применении их к представлению результатов решения дифференциальных игр оптимального быстрогодействия с линией жизни.

**Перспективы дальнейшей разработки темы.** Фактически, в данном исследовании рассматривается непрерывная функция цены, что не очень характерно для дифференциальных игр быстрогодействия. В дальнейшем планируется отказаться от условий С.3 и С.4 динамического преимущества игроков вблизи границ соответствующих множеств и обобщить результаты на случай разрывной функции цены.

Автор глубоко благодарен научному руководителю к.ф.-м.н. Кумкову Сергею Сергеевичу за постоянное внимание к работе. Автор благодарит Л.В. Камневу за внимательное чтение текста диссертации, ценные замечания и комментарии.

## **Статьи, опубликованные в рецензируемых научных журналах и изданиях, определенных ВАК и Аттестационным советом УрФУ**

- [1] *Munts, N.V.* Numerical method for time-optimal differential games with life line / N.V.Munts, S.S.Kumkov // 55th Israel Annual Conference on Aerospace Sciences. — 2015. — Vol. 2. — pp. 1253–1266. (Scopus) 0.875/0.750 п.л.

- [2] *Munts, N.V.* Существование функции цены в игре быстрогодействия с линией жизни (Existence of value function in time-optimal game with life line) / N.V.Munts, S.S.Kumkov // Proceedings of the 47th International Youth School-conference “Modern Problems in Mathematics and its Applications”. Yekaterinburg, Russia, January 31 – February 6, 2016. — pp. 94–99. 0.375/0.250 п.л. <http://ceur-ws.org/Vol-1662/opt6.pdf> (Scopus)
- [3] *Мунц, Н.В.* О совпадении минимаксного решения и функции цены игры быстрогодействия с линией жизни / Н.В.Мунц, С.С.Кумков // Труды Института математики и механики УрО РАН. — Екатеринбург: УрО РАН. — 2018. — Т. 24, № 2. — С. 200–214. 0.938/0.813 п.л.
- [4] *Мунц, Н.В.* Численный метод решения дифференциальных игр быстрогодействия с линией жизни / Н.В.Мунц, С.С.Кумков // Математическая Теория Игр и ее Приложения. — 2018. — Т. 10, № 3. — С. 48–75. 1.75/1.625 п.л.
- [5] *Munts, N.V.* On Time-Optimal Problems with Lifeline / N.V.Munts, S.S.Kumkov // Dynamic Games and Applications. — 2019. — Vol. 9, No. 3. — pp. 751–770. (Scopus) 1.250/1.125 п.л.
- [6] *Munts, N.V.* On the Coincidence of the Minimax Solution and the Value Function in a Time-Optimal Game with a Lifeline / N.V.Munts, S.S.Kumkov // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. — 2019. — Vol. 305. — pp. 125–139. (Scopus) 0.938/0.813 п.л.
- [7] *Munts, N.V.* A Numerical Method for Solving Time-Optimal Differential Games with a Lifeline / N.V.Munts, S.S.Kumkov // Automation and Remote Control. — 2020. — Vol. 81. — pp. 1545–1561. (Scopus) 1.063/0.938 п.л.
- [8] *Munts, N.V.* Numerical Study of Different Variants of Dubins’ Car Model / N.V.Munts // Proceedings of the The 60th Israel Annual Conference on Aerospace Sciences, Tel-Aviv & Haifa, Israel, March 4–5, 2020. — 2020. — Vol. 2. — pp. 1006–1022. (Scopus) 1.063/1.063 п.л.
- [9] *Munts, N.V.* Convergence of Numerical Method for Time-Optimal Differential Games with Lifeline / N.V.Munts, S.S.Kumkov // Annals of the International Society of Dynamic Games, Vol. 17, Games of Conflict, Evolutionary Games, Economic Games, and Games Involving Common Interest. — Basel: Birkhäuser. — 2020. — pp. 101–130. (Scopus) 1.875/1.75 п.л.

- [10] *Munts, N.V.* Grid Method for Numerical Study of Time-Optimal Games with Lifeline / N.V.Munts, S.S.Kumkov // Proceedings of the Workshop on Mathematical Modeling and Scientific Computing: Focus on Complex Processes and Systems — dedicated to the memory of Nikolai Botkin, Munich, Germany, November 19–20, 2020. — 2020. — pp. 192–198. (Scopus) 0.438/0.313 п.л.
- [11] *Munts, N.V.* Detailed Proof of Existence of Value Function in Time-Optimal Game With Lifeline / N.V.Munts, S.S.Kumkov // International Game Theory Review. — 2022. — Vol. 24, No. 4. — 2250014, 18 стр. (Scopus) 1.125/0.978 п.л.

### **Прочие публикации автора по теме диссертации**

- [12] *Муни, Н.В.* Численный метод решения дифференциальных игр быстрогодействия с линией жизни / Н.В.Муниц, С.С.Кумков // Международная конференция по математической теории управления и механике, Суздаль, 07–11 июля 2017 г. — С. 101. 0.063/0.050 п.л.
- [13] *Муни, Н.В.* Полилинейные аппроксимации в сеточных методах нахождения обобщенного решения уравнения Гамильтона–Якоби / Н.В.Муниц, С.С.Кумков // «Устойчивость, управление, дифференциальные игры» (SCDG2019): Материалы Международной конференции, посвященной 95-летию со дня рождения академика Н.Н. Красовского, (Екатеринбург, 16–20 сентября 2019 г.). — Екатеринбург: ИММ УрО РАН — 2019. — С. 231–235. 0.313/0.275 п.л.
- [14] *Муни, Н.В.* Численное исследование задач управления и дифференциальных игр, включающих динамику «машина Дубинса» / Н.В.Муниц, С.С.Кумков // Современные проблемы математики и ее приложений, Международная (51-я Всероссийская) молодежная школа-конференция 3–7 февраля 2020 г., г. Екатеринбург. — 2020. С. 57. 0.032/0.028 п.л.