Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б.Н. Ельцина»

Мунц Наталья Владимировна

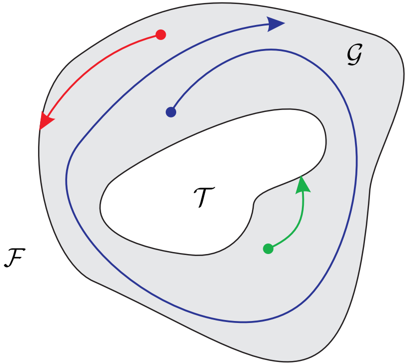
Численный метод решения дифференциальных игр быстродействия с линией жизни

1.2.2 Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

14 июня 2023 г.

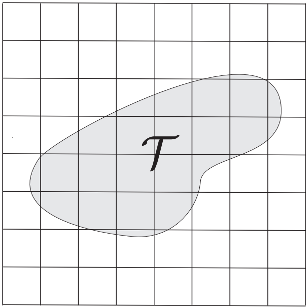
Игра быстродействия с линией жизни



Граница $\partial\mathcal{F}$ множества $\mathcal{F}$ является *линией жизни*, т.е. областью, где второй игрок безоговорочно выигрывает.
R.Isaacs “Differential Games”, 1965.

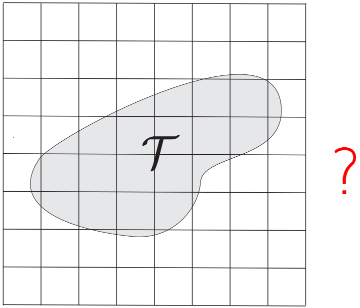
Алгоритм Барди-Фальконе

M.Bardi, M.Falcone, P.Soravia Numerical methods for pursuit-evasion games via viscosity solutions // Annals of the International Society of Dynamic Games, Vol. 6: Stochastic and Differential Games / M.Bardi, T.Parthasarathy, T.E.S.Raghavan (Eds.). — Boston: Birkhäuser. — 1999. — C. 105–175.



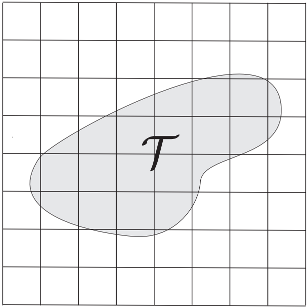
Алгоритм Барди-Фальконе

M.Bardi, M.Falcone, P.Soravia Numerical methods for pursuit-evasion games via viscosity solutions // Annals of the International Society of Dynamic Games, Vol. 6: Stochastic and Differential Games / M.Bardi, T.Parthasarathy, T.E.S.Raghavan (Eds.). — Boston: Birkhäuser. — 1999. — С. 105–175.



Алгоритм Барди-Фальконе

M.Bardi, M.Falcone, P.Soravia Numerical methods for pursuit-evasion games via viscosity solutions // Annals of the International Society of Dynamic Games, Vol. 6: Stochastic and Differential Games / M.Bardi, T.Parthasarathy, T.E.S.Raghavan (Eds.). — Boston: Birkhäuser. — 1999. — С. 105–175.



$$T = +\infty$$

Обзор

- **R.P.Isaacs.** Games of Pursuit, Paper P-257 — Santa Monica, California: RAND Corporation, 1951.
- **R.Isaacs** Differential Games — New York: John Wiley and Sons, 1965.
- **Р.Айзекс** Дифференциальные игры — М.: Мир, 1967. — 479 с.

Формулировка задач с линией жизни.

- **Ю.Г.Дуткевич, Л.А.Петросян** Игры с «линией жизни». Случай L-захвата // Вестник Ленинградского университета. Серия 1: Математика, механика, астрономия. — 1969. — Т. 19, № 4. — С. 12.

Игры с простыми движениями.

Обзор

Н.Н.Красовский, А.И.Субботин Позиционные дифференциальные игры — М.: Наука, 1974. — 455 с.

Замкнутые фазовые ограничения на первого игрока.

P.Cardaliaguet, M.Quincampoix, P.Saint-Pierre Set-valued numerical analysis for optimal control and differential games // Stochastic and Differential Games: Theory and Numerical Methods: Annals Intern. Soc. Dynamic Games. — Boston: Birkhäuser. — 1999 — T. 4. — C. 177–247.

Собственные целевые множества у каждого игрока.

Решается задача качества.

Цель работы

Целью работы является исследование теоретических вопросов, связанных с дифференциальными играми с линией жизни.

Для достижения цели были поставлены и решены следующие **задачи**:

1. обосновать существование функции цены дифференциальной игры быстродействия с линией жизни;
2. обосновать существование непрерывного обобщенного (минимаксного) решения краевой задачи для уравнения ГЯ, соответствующей дифференциальной игре быстродействия с линией жизни, и совпадение его с функцией цены такой игры;
3. характеризовать область совпадения функций цены дифференциальных игр быстродействия с линией жизни и без нее;

Цель работы

4. сформулировать численную схему построения непрерывной функции цены дифференциальной игры быстродействия с линией жизни;
5. доказать сходимость численной схемы к вязкостному решению соответствующей краевой задачи для уравнения ГЯ;
6. создать программную реализацию предложенной численной схемы;
7. провести тестирование созданной программы на модельных примерах.

Работа состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы, включающего публикации автора по теме диссертации. Имеются приложения, содержащие краткое изложение вспомогательного теоретического материала.

Глава 1

В первой главе

1. формулируется дифференциальная игра быстродействия с линией жизни, определяется ее функция цены, обосновывается существование функции цены;
2. рассматривается соответствующая краевая задача для уравнения ГЯ, доказывается существование минимаксного решения;
3. обосновывается совпадение функции цены дифференциальной игры быстродействия с линией жизни и минимаксного решения соответствующей краевой задачи для уравнения ГЯ;
4. обсуждается связь функций цены задачи быстродействия с линией жизни и без нее (в случае совпадения динамик игр, ограничений на управление игроков и терминальных множеств), приводится характеризация области, в которой гарантируется совпадение функций цены.

Задача быстродействия с линией жизни

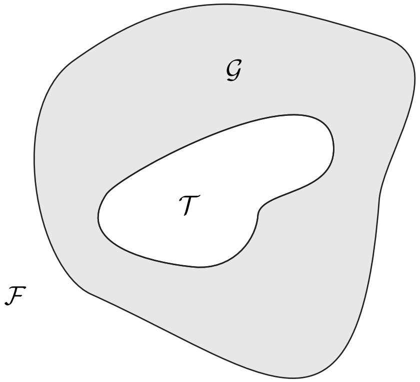
Рассмотрим систему с динамикой

$$\dot{x} = f(x, p, q), \qquad t \geqslant 0,\ p \in P,\ q \in Q,$$

где $x \in \mathbb{R}^d$ — фазовый вектор системы; p и q — управления первого и второго игрока соответственно. Ограничения P и Q считаются компактными множествами в своих евклидовых пространствах.

Задача быстродействия с линией жизни

$\mathcal{T}$ – компактное терминальное множество, $\mathcal{W}$ — открытое множество такое, что $\mathcal{T} \subset \mathcal{W}$ и граница $\partial\mathcal{W}$ является ограниченной. Обозначим $\mathcal{G} := \mathcal{W} \setminus \mathcal{T}$ и $\mathcal{F} := \mathbb{R}^d \setminus \mathcal{W}$. На множестве $\mathcal{G}$ и происходит игра.



Задача быстродействия с линией жизни

C1. Функция $f : \mathbb{R}^d \times P \times Q \mapsto \mathbb{R}^d$ непрерывна по совокупности переменных, удовлетворяет условию Липшица по переменной x и условию Айзекса:

$$\min_{p\in P}\max_{q\in Q}\big\langle s, f(x,p,q)\big\rangle = \max_{q\in Q}\min_{p\in P}\big\langle s, f(x,p,q)\big\rangle \quad \forall s \in \mathbb{R}^d.$$

C2. Границы $\partial\mathcal{T}$ и $\partial\mathcal{F}$ являются компактными, по крайней мере, дважды гладкими поверхностями с радиусом кривизны, ограниченным снизу константой $r > 0$.

C3. Граница $\partial\mathcal{T}$ множества $\mathcal{T}$ и функция f подчинены следующему условию:

$$\min_{p\in P}\max_{q\in Q}\big\langle n_{\mathcal{T}}(x), f(x,p,q)\big\rangle < 0 \quad \forall x \in \partial\mathcal{T}$$

(динамическое преимущество первого игрока).

C4. Граница $\partial\mathcal{F}$ множества $\mathcal{F}$ и функция f подчинены следующему условию:

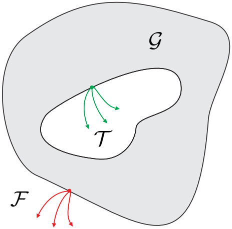
$$\min_{p\in P}\max_{q\in Q}\big\langle -n_{\mathcal{F}}(x), f(x,p,q)\big\rangle > 0 \quad \forall x \in \partial\mathcal{F}$$

(динамическое преимущество второго игрока).

Задача быстродействия с линией жизни

В терминах из книги Р.Айзекса, условие C3 означает, что граница $\partial\mathcal{T}$ — это *допустимая зона* для первого игрока: если система находится на границе терминального множества $\mathcal{T}$, то первый игрок может гарантировать заведение траектории внутрь этого множества.

Условие C4 означает, что если система находится в любой точке границы множества $\mathcal{F}$, то второй игрок может направить движение системы внутрь множества $\mathcal{F}$.



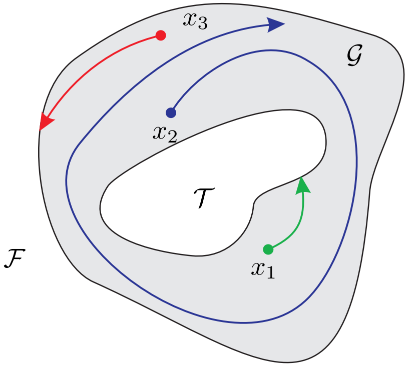
Плата в задаче быстродействия с линией жизни

Пусть $x(\cdot; x_0)$ — траектория системы, выпущенная из начальной точки x_0. Для траектории рассмотрим две величины

$$t_* = t_*\big(x(\cdot; x_0)\big) = \min\big\{t : x\big(t; x_0\big) \in \mathcal{T}\big\},$$
$$t^* = t^*\big(x(\cdot; x_0)\big) = \min\big\{t : x\big(t; x_0\big) \in \mathcal{F}\big\}.$$

Величина t_* (t^*) равна $+\infty$, если траектория $x(\cdot; x_0)$ никогда не приходит на множество $\mathcal{T}$ $(\mathcal{F})$.

Плата в задаче быстродействия с линией жизни



Результат игры определяется следующим образом:

$$\tau\big(x(\cdot;x_0)\big) = \begin{cases} +\infty, & \text{если } t_* = +\infty \text{ или } t^* < t_*, \\ t_*, & \text{если } t_* < t^*. \end{cases}$$

Позиционная формализация Н.Н. Красовского; стратегии обратной связи.

Функция цены

В статьях

- **N.V.Munts, S.S.Kumkov** Существование функции цены в игре быстродействия с линией жизни (Existence of value function in time-optimal game with life line) // Proceedings of the 47th International Youth School-conference “Modern Problems in Mathematics and its Applications”. Yekaterinburg, Russia, January 31 – February 6, 2016. — pp. 94–99.
- **N.V.Munts, S.S.Kumkov** Detailed Proof of Existence of Value Function in Time-Optimal Game With Lifeline // International Game Theory Review. — 2022. — Vol. 24, No. 4. — pp. 2250014–1–2250014-18.

с использованием результатов книг Н.Н. Красовского и А.И. Субботина была доказана

Теорема 1.2

Пусть выполнены условия С1–С4. В дифференциальной игре быстродействия с линией жизни существует функция цены $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Замена Кружкова

Некоторое неудобство для численного исследования дифференциальных игр представляет неограниченность значений функций платы и цены. Поэтому часто с помощью *замены Кружкова* от неограниченной функции платы переходят к ограниченной:

$$J\big(x(\cdot;x_0)\big) = \begin{cases} 1 - \exp\big(-\tau\big(x(\cdot;x_0)\big)\big), & \text{если } \tau < +\infty, \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

При этом функция цены также становится ограниченной, и ее значения лежат в диапазоне от нуля до единицы.

Краевая задача для уравнения ГЯ

Рассмотрим следующую краевую задачу для уравнения ГЯ, соответствующую игре быстродействия с линией жизни:

$$H\big(x, Du(x)\big) - u(x) = 0, \;\; x \in \mathcal{G},$$
$$u(x) = 0, \;\text{если}\; x \in \partial\mathcal{T}, \quad u(x) = 1, \;\text{если}\; x \in \partial\mathcal{F},$$

где

$$H(x, s) = \min_{p \in P} \max_{q \in Q} \big\langle s, f(x, p, q)\big\rangle + 1.$$

Существование минимаксного решения

Н.В.Мунц, С.С.Кумков О совпадении минимаксного решения и функции цены игры быстродействия с линией жизни // Труды Института математики и механики УрО РАН. — Екатеринбург: УрО РАН. — 2018. — Т. 24, № 2. — С. 200–214.

Предложение 1.5

Пусть выполнены условия C1, C2 и C4. Тогда существует функция $\underline{u}(x)$, непрерывная на $\partial\mathcal{G}$, которая является нижним минимаксным решением краевой задачи для уравнения ГЯ.

Предложение 1.6

Пусть выполнены условия C1, C2 и C3. Тогда существует функция $\overline{u}(x)$, непрерывная на $\partial\mathcal{G}$, которая является верхним минимаксным решением краевой задачи для уравнения ГЯ.

Следовательно, существует непрерывное минимаксное решение краевой задачи.

Совпадение минимаксного решения и цены

Теорема 1.3

Пусть выполнены условия C1–C4; это гарантирует существование и единственность минимаксного решения $u(\cdot) : \operatorname{cl} \mathcal{G} \to [0,1]$ *краевой задачи для уравнения ГЯ. Пусть* x_0 *— некоторая точка области* $\mathcal{G}$. *Пусть величина* θ *выбрана так, что* $\theta < -\ln\big(1 - u(x_0)\big)$. *Тогда существует нижнее минимаксное решение* $u_\natural$ *этой задачи, удовлетворяющее неравенству*

$$\theta < -\ln\big(1 - u_\natural(x_0)\big),$$

и такое число $\bar{\epsilon} > 0$, *что для любого* $\epsilon \in (0, \bar{\epsilon})$ *и для* $\alpha = \epsilon/7$ *выполнена оценка*

$$T_2^\epsilon(x_0, \mathcal{Q}_\alpha) \geqslant \theta.$$

Совпадение минимаксного решения и цены

Теорема 1.4

Пусть выполнены условия C1–C4; это гарантирует существование и единственность минимаксного решения $u(\cdot) : \mathrm{cl}\,\mathcal{G} \to [0,1]$ *краевой задачи для уравнения ГЯ. Пусть* x_0 *— такая точка множества* $\mathcal{G}$*, что верно неравенство* $u(x_0) < 1$*. Пусть величина* θ *выбрана так, что* $\theta > -\ln\big(1 - u(x_0)\big)$*. Тогда существует верхнее решение* $u^{\natural}$ *этой задачи, удовлетворяющее соотношению*

$$\theta > -\ln\big(1 - u^{\natural}(x_0)\big),$$

и число $\bar{\epsilon} > 0$ *такое, что для любого* $\epsilon \in (0, \bar{\epsilon})$ *и для* $\alpha = \epsilon/3$ *выполнена оценка*

$$T_1^{\epsilon}(x_0, \mathcal{P}_\alpha) \leqslant \theta.$$

Совпадение минимаксного решения и цены

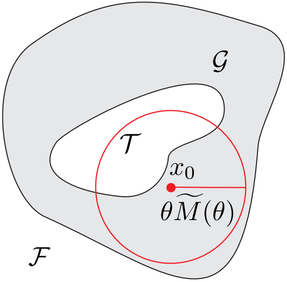
В итоге, при выполнении условий C1–C4 по предыдущим теоремам получаем, что функция цены дифференциальной игры с линией жизни совпадает с минимаксным решением соответствующей краевой задачи.

Н.В.Мунц, С.С.Кумков О совпадении минимаксного решения и функции цены игры быстродействия с линией жизни // Труды Института математики и механики УрО РАН. — Екатеринбург: УрО РАН. — 2018. — Т. 24, № 2. — С. 200–214.

Совпадение цен в играх с и без линии жизни

Теорема 1.5

Предположим, что выполнены условия C1–C4; k — константа из условия подлинейного роста функции f. Пусть функция цены $\widetilde{T}(x_0)$ ***классической игры быстродействия*** *в точке x_0 равняется θ. Пусть $\widetilde{M}(\theta) = k\big(1 + |x_0|\big)e^{k\theta}$. Тогда, если замкнутый шар $B\big(x_0, \theta\widetilde{M}(\theta)\big)$ вложен в $\mathcal{W}$, то значение функции цены $T(x_0)$* ***задачи быстродействия с линией жизни*** *в точке x_0 равняется θ.*



Совпадение цен в играх с и без линии жизни

Теорема 1.6

Предположим, что выполнены условия C1–C4; k — константа из условия подлинейного роста функции f. Пусть функция цены $T(x_0)$ игры ***быстродействия с линией жизни*** *в точке x_0 равняется θ. Пусть $\widetilde{M}(\theta) = k\bigl(1 + |x_0|\bigr)e^{k\theta}$. Тогда, если замкнутый шар $B\bigl(x_0, \theta\widetilde{M}(\theta)\bigr)$ вложен в $\mathcal{W}$, то значение функции цены* ***классической задачи быстродействия*** *в точке x_0 равняется θ.*

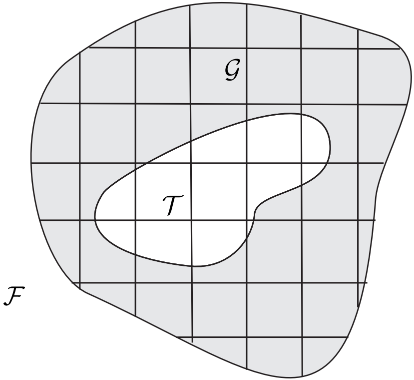
N.V.Munts, S.S.Kumkov Convergence of Numerical Method for Time-Optimal Differential Games with Lifeline // Annals of the International Society of Dynamic Games, Vol. 17, Games of Conflict, Evolutionary Games, Economic Games, and Games Involving Common Interest. — Basel: Birkhäuser. — 2020. — pp. 101–130.

Глава 2

Вторая глава диссертации посвящена численной процедуре построения функции цены дифференциальной игры быстродействия с линией жизни. Изложены формулировка численной схемы, обоснование ее сходимости к вязкостному решению соответствующей краевой задачи для уравнения ГЯ, обсуждаются различные методы аппроксимации (кусочно-линейная, полилинейная) функции цены, заданной на сетке. Также описывается программная реализация численной процедуры.

Алгоритм Барди-Фальконе

M.Bardi, M.Falcone, P.Soravia Numerical methods for pursuit-evasion games via viscosity solutions // Annals of the International Society of Dynamic Games, Vol. 6: Stochastic and Differential Games / M.Bardi, T.Parthasarathy, T.E.S.Raghavan (Eds.). — Boston: Birkhäuser. — 1999. — C. 105–175.



Численный метод

Заменим непрерывную динамику дискретной с шагом по времени $h > 0$:

$$x_n = x_{n-1} + hf(x_{n-1}, p_{n-1}, q_{n-1}), \; n = 1, \ldots, N, \quad x_0 \text{ задано},$$

где $p_n \in P$ и $q_n \in Q$.

Численный метод

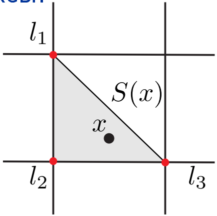
На $\mathbb{R}^d$ накидывается параллелепипедальная сетка $\mathcal{L}$, состоящая из узлов l_s, $s \in \mathbb{Z}$. В рассуждениях по всем направлениям взят одинаковый шаг k. Полностью дискретная функция цены:

$$\begin{cases} w(l_s) = \gamma \max\limits_{q \in Q} \min\limits_{p \in P} w_{loc}\big(z(l_s, p, q)\big) + 1 - \gamma, & \text{если } l_s \in \mathcal{L}_{\mathcal{G}}, \\ w(l_s) = 0, & \text{если } l_s \in \mathcal{L}_{\mathcal{T}}, \\ w(l_s) = 1, & \text{если } l_s \in \mathcal{L}_{\mathcal{F}}. \end{cases}$$

где w_{loc} – линейная аппроксимация между узлами, $\gamma = e^{-h}$, $z(x, a, b) = x + hf(x, a, b)$. Параллелепипедальные ячейки сетки $\mathcal{L}$ как-то разбиваются на симплексы.

$$x = \sum_{s=1}^{n+1} \lambda_s l_s,$$

$$w_{loc}(x) = \sum_{s=1}^{n+1} \lambda_s w(l_s).$$



Оператор F

Обозначим через $\mathcal{M}$ множество бесконечных векторов с индексами в $\mathbb{Z}$. Для любого бесконечного вектора $W = \{W_s\}$, $s \in \mathbb{Z}$, дискретный оператор $F : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ поэлементно определяется следующим образом:

$$F_s(W) = \begin{cases} \gamma \max\limits_{q \in Q} \min\limits_{p \in P} w_{loc}\big(z(l_s, p, q), W\big) + 1 - \gamma, & \text{если } l_s \in \mathcal{L}_{\mathcal{G}}, \\ 0, & \text{если } l_s \in \mathcal{L}_{\mathcal{T}}, \\ 1, & \text{если } l_s \in \mathcal{L}_{\mathcal{F}}. \end{cases}$$

Здесь $w_{loc} : \mathbb{R}^d \times \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ — это локальная реконструкция функции $w(\cdot)$, определённой с помощью вектора W.

Предложение об операторе F

N.V.Munts, S.S.Kumkov Numerical method for time-optimal differential games with life line // 55th Israel Annual Conference on Aerospace Sciences. — 2015. — Vol. 2. — pp. 1253–1266.

Предложение 2.1

Оператор $F : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ *имеет следующие свойства:*

1. $F : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_1$;
2. F *монотонно убывает по отношению к частичному порядку в* $\mathcal{M}$;
3. F *— сжимающее отображение по норме* $\|\cdot\|_\infty$.

Здесь $\mathcal{M}_1$ – множество тех векторов из $\mathcal{M}$, элементы m_s которых подчиняются неравенству $0 \leqslant m_s \leqslant 1$. Порядок на $\mathcal{M}$: $U \leqslant V \Leftrightarrow \forall s\ U_s \leqslant V_s$.

Предложение об операторе F

Как следствие из этого предложения имеем, что существует единственная неподвижная точка $\mathbf{W}$ этого оператора, которая определяет функцию $\mathbf{w}(\cdot)$ в $\mathbb{R}^d$, которая является функцией цены дискретизированной задачи. Эта функция зависит от шагов дискретизации по времени h и пространству k исходной задачи:

$$\begin{cases} \mathbf{w}(x) = \sum_m \lambda_m \mathbf{w}(l_m), & \text{если } x \notin \mathcal{L} \text{ и } x = \sum_m \lambda_m l_m, \\ \mathbf{w}(l_s) = \gamma \max\limits_{q \in Q} \min\limits_{p \in P} \mathbf{w}_{loc}\big(z(l_s, p, q)\big) + 1 - \gamma, & \text{если } l_s \in \mathcal{L}_{\mathcal{G}}, \\ \mathbf{w}(l_s) = 0, & \text{если } l_s \in \mathcal{L}_{\mathcal{T}}, \\ \mathbf{w}(l_s) = 1, & \text{если } l_s \in \mathcal{L}_{\mathcal{F}}. \end{cases}$$

Предложение о сходимости $\mathbf{w}_n(\cdot)$

Предложение 2.2

Рассмотрим допустимые последовательности вещественных чисел $h_n > 0$ и $k_n > 0$, и пусть $\{\mathbf{w}_n(\cdot)\}$ — соответствующая им последовательность приближенных решений при уменьшении шагов дискретизации. Обозначим

$$\overline{v}(x) := \limsup_{(y,n)\to(x,\infty)} \mathbf{w}_n(y), \quad \underline{v}(x) := \liminf_{(y,n)\to(x,\infty)} \mathbf{w}_n(y).$$

(Пределы понимаются в вязкостном смысле.) Функции $\overline{v}$ и $\underline{v}$ являются, соответственно, нижним и верхним обобщенным (вязкостным) решением краевой задачи с граничными условиями

$$\underline{v} \geqslant 0 \text{ на } \partial\mathcal{T}, \tag{1}$$

$$\overline{v} \leqslant 0 \text{ или } \overline{v} + H\big(x, D\overline{v}(x)\big) \leqslant 0 \text{ на } \partial\mathcal{T}, \tag{2}$$

$$\underline{v} \geqslant 1 \text{ или } \underline{v} + H\big(x, D\underline{v}(x)\big) \geqslant 0 \text{ на } \partial\mathcal{F}, \tag{3}$$

$$\overline{v} \leqslant 1 \text{ на } \partial\mathcal{F}. \tag{4}$$

Вторые неравенства (2) и (3) выполняются в вязкостном смысле.

Теорема сходимости

Теорема 2.1

Предположим, что выполняются условия C1–C4. Пусть v *— функция цены дифференциальной игры быстродействия с линией жизни. Тогда последовательность* $\{\mathbf{w}_n(\cdot)\}$ *поточечно сходится к функции* $v = \overline{v} = \underline{v}$ *при* $n \to \infty$*. При этом сходимость равномерная на любом компактном множестве* $\mathcal{K}$ *в* $\mathrm{cl}\,\mathcal{G}$*.*

N.V.Munts, S.S.Kumkov Convergence of Numerical Method for Time-Optimal Differential Games with Lifeline // Annals of the International Society of Dynamic Games, Vol. 17, Games of Conflict, Evolutionary Games, Economic Games, and Games Involving Common Interest. — Basel: Birkhäuser. — 2020. — pp. 101–130.

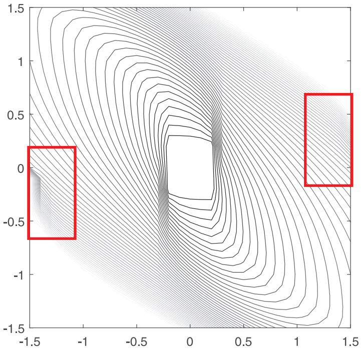
Полилинейная интерполяция

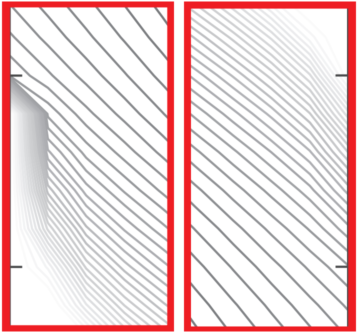
Доказана теорема, аналогичная Теореме 2.1, о сходимости численной схемы, в основе которой лежит не кусочно-линейная интерполяция функции, а полилинейная интерполяция в каждой ячейке сетки.

Н.В.Мунц, С.С.Кумков Полилинейные аппроксимации в сеточных методах нахождения обобщенного решения уравнения Гамильтона – Якоби // «Устойчивость, управление, дифференциальные игры» (SCDG2019): Материалы Международной конференции, посвященной 95-летию со дня рождения академика Н.Н. Красовского, (Екатеринбург, 16–20 сентября 2019 г.). — Екатеринбург: ИММ УрО РАН — 2019. — С. 231–235.

Использование такой «поправленной» численной схемы позволяет получить симметричные множества уровня функции цены, если задача имеет соответствующую симметрию.

Проблема кусочно-линейной интерполяции

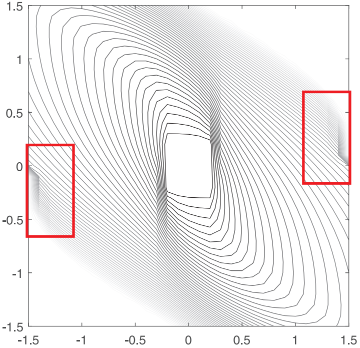


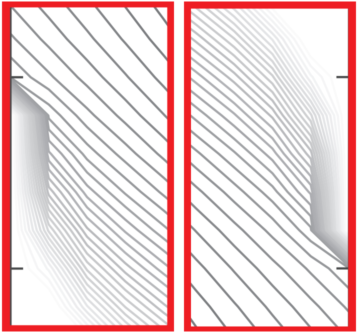


Численно полученные множества уровня функции цены некоторой задачи.

Не влияет на сходимость, но влияет на восприятие результатов.

Полилинейная интерполяция





Программная реализация

В решетке может быть только конечное число точек (если $\mathcal{G}$ — это ограниченное множество). Часть $\mathcal{L}_\mathcal{F}$ можно не хранить.

$$W^{(0)} = \big(w(l_s)\big), \quad w(l_s) = \begin{cases} 0, & \text{если } l_s \in \mathcal{L}_\mathcal{T}, \\ 1, & \text{если } l_s \in \mathcal{L}_\mathcal{G}. \end{cases}$$

$$W^{(0)} \xrightarrow{F} W^{(1)} \xrightarrow{F} W^{(2)} \xrightarrow{F} \ \dots \ \xrightarrow{F} W^{(n_{\text{it}})}$$

Алгоритм был реализован в виде компьютерной программы, написанной с использованием платформы .NET/.NET Core и языка C#. Была написана однопоточная версия программы, а затем средствами языка C# она была сделана многопоточной для ускорения вычислений на многоядерных процессорах (рост производительности почти линейный).

Программная реализация

- Процедура подразумевает итеративный пересчет значений в узлах сетки $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}$ при заданных шагах h по времени и k по пространству с выполнением заданного числа итераций. В результате вычислений в выходной файл записываются финальные значения функции цены в узлах сетки.

- Множество $\mathcal{G}$ может быть произвольной формы (задается как набор узлов сетки). **Эффективность структур данных!**

- Множества ограничений на управление задаются как сетки, накинутые на параллелепипед, круг, или на границу такого множества, или как одноточечное множество (при необходимости могут быть добавлены другие реализации).

Программная реализация

- В программу добавлены разные типы возможных динамик (простые движения, материальная точка, математический маятник, машина Дубинса, шофер-убийца и т.д.).
- Программа представляет собой консольную утилиту с большим количеством параметров. Для упрощения их задания используется конфигурационный xml-файл.
- Были разработаны программы подготовки трехмерных объектов, представляющих график (возможно, разрывный) функции двух переменных и воксельные множества уровня функции трех переменных. Особенность последней — сохранение симметрии визуализируемых множеств. (Глава 3)

Программная реализация

- **N.V.Munts** Numerical Study of Different Variants of Dubins' Car Model // Proceedings of the The 60th Israel Annual Conference on Aerospace Sciences, Tel-Aviv & Haifa, Israel, March 4–5, 2020. — 2020. — Vol. 2. — pp. 1006–1022.

- **N.V.Munts, S.S.Kumkov** Grid Method for Numerical Study of Time-Optimal Games with Lifeline // Proceedings of the Workshop on Mathematical Modeling and Scientific Computing: Focus on Complex Processes and Systems — dedicated to the memory of Nikolai Botkin, Munich, Germany, November 19–20, 2020. — 2020. — pp. 192–198.

Глава 4

В четвертой главе приводятся результаты численного исследования ряда примеров.

Чаще всего функция цены в задачах быстродействия разрывна.

Машина Дубинса 3D

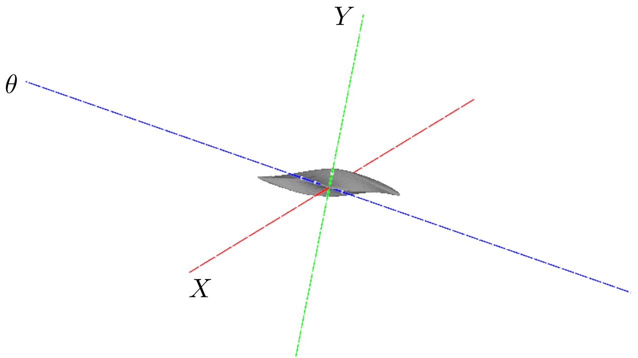
Машина Дубинса с трехмерной (нередуцированной) динамикой:

$$
\begin{aligned}
\dot{X} &= \cos\theta, \\
\dot{Y} &= \sin\theta, \\
\dot{\theta} &= p,
\end{aligned}
$$

где $p \in [-1, 1]$ — управление. Терминальное множество $\mathcal{T} = [-0.2, +0.2] \times [-0.2, +0.2] \times [-0.2, +0.2]$. Множество $\mathcal{W} = [-10.0, +12.5] \times [-12.0, +12.0] \times [-12.5, +12.5]$. Количество итераций $n = 150$, шаг по времени $h = 0.15$, шаг по пространству $k = 0.075$. Время вычисления составило 16 часов.

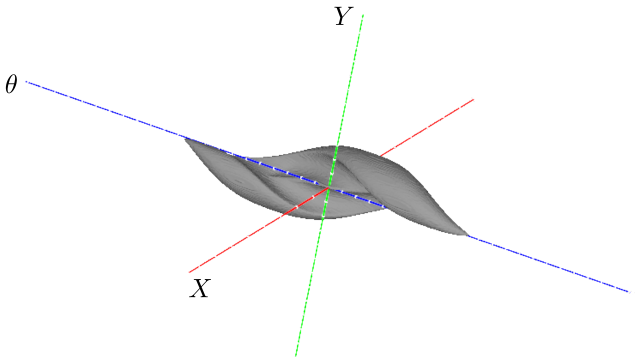
Задача управления.

Машина Дубинса 3D



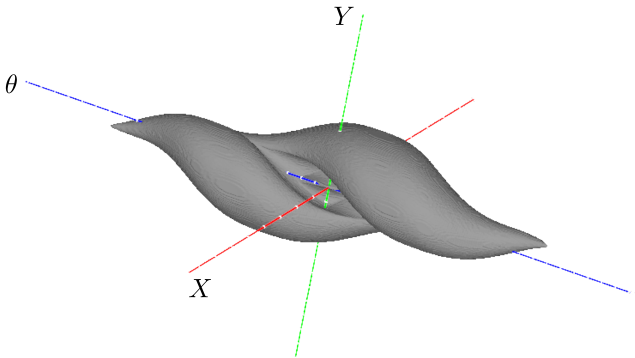
Множество достижимости к моменту времени $t = \pi$.

Машина Дубинса 3D



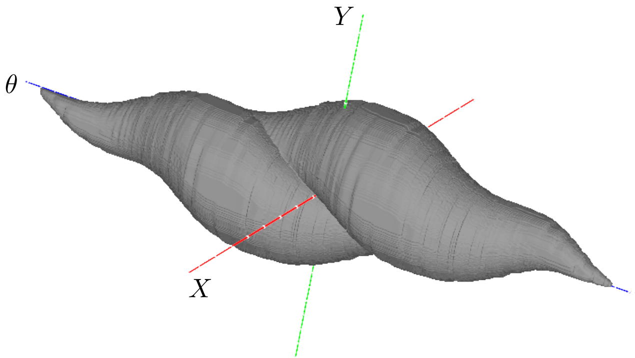
Множество достижимости к моменту времени $t = 2\pi$.

Машина Дубинса 3D



Множество достижимости к моменту времени $t = 3\pi$.

Машина Дубинса 3D



Множество достижимости к моменту времени $t = 4\pi$.

Игра «шофер-убийца» с машиной типа Ридса-Шеппа

В классической постановке задачи «шофер-убийца» рассматривался автомобиль Дубинса, линейная скорость которого всегда была направлена вперед и оставалась постоянной по величине. Другая модель автомобиля, изученная Дж.А.Ридсом и Л.А.Шеппом подразумевает возможность изменения величины линейной скорости в диапазоне $[-1, 1]$, то есть в этом случае автомобиль обладает задним ходом. Динамика следующая:

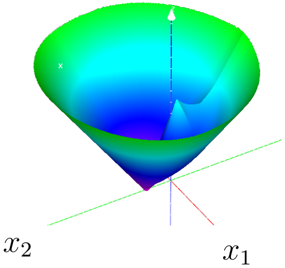
$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = f(x, p, q) = \begin{pmatrix} -x_2 \cdot p_1 + q_1 \\ x_1 \cdot p_1 - p_2 + q_2 \end{pmatrix}.$$

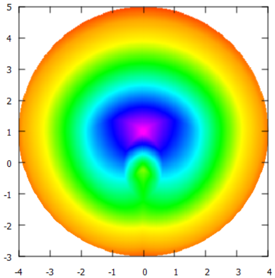
$p \in [-1, 1] \times [a, 1]$, $|q| \leqslant 0.3$, a — параметр задачи.

Игра «шофер-убийца» с машиной типа Ридса-Шеппа

Пример был посчитан с параметром $a = -0.6$. Множество $\mathcal{W}$ — круг радиуса 4. Шаг по пространству $k = 0.025$, шаг по времени $h = 0.075$, $p \in [-1, 1] \times [a, 1]$, $|q| \leqslant 0.3$, терминальное множество — круг с центром в точке $(0, 1)$ радиуса 0.2. Количество итераций $n = 150$. Время вычисления составило примерно 6 часов.

Игра «шофер-убийца» с машиной типа Ридса-Шеппа





Игра «шофер-убийца» с машиной Ридса – Шеппа, $a = -0.6$: слева — функция цены, справа — множества уровня.

Модифицированная игра «шофер-убийца» с машиной типа Ридса-Шеппа

В предыдущем примере функция цены получается непрерывной вблизи границы $\mathcal{T}$, но, тем не менее, на границе $\mathcal{F}$ есть разрыв. Модифицируем динамику из предыдущего примера следующим образом:

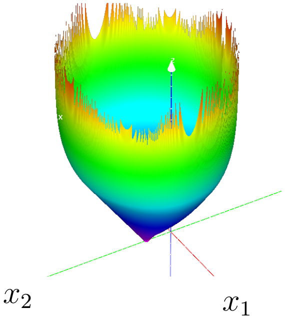
$$\widetilde{f}(x,p,q) = \alpha(x) f(x,p,q) + (1-\alpha(x))q.$$

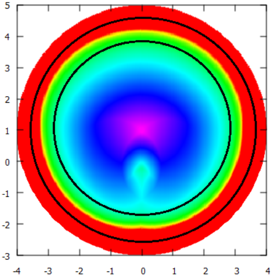
Здесь функция

$$\alpha(x) = \begin{cases} 1, & d(x) \leqslant R, \\ \big(R + l - d(x)\big)/l, & R < d(x) \leqslant R + l, \\ 0, & d(x) > R + l, \end{cases}$$

где $d(x) = \sqrt{x_1^2 + (x_2 - 1)^2}$ — расстояние от точки x до центра теримального множества, $R = 2.5$ — радиус окружности, внутри которой динамика остается немодифицированной, $l = 1$ — ширина переходного слоя.

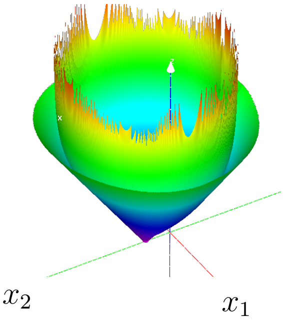
Модифицированная игра «шофер-убийца» с машиной типа Ридса-Шеппа





Модифицированная игра «шофер-убийца» с машиной Ридса – Шеппа, слева — график функции цены, справа — множества уровня с отмеченными на них границами переходного слоя.

Модифицированная игра «шофер-убийца» с машиной типа Ридса-Шеппа



Совмещенные графики функции цены обычной и модифицированной игр «шофер-убийца» с машиной Ридса – Шеппа.

Основные положения, выносимые на защиту

1. обоснование существования функции цены дифференциальной игры оптимального быстродействия с линией жизни;
2. обоснование существования непрерывного обобщенного (минимаксного) решения краевой задачи для уравнения ГЯ, соответствующей дифференциальной игре оптимального быстродействия с линией жизни, и совпадение его с функцией цены такой игры;
3. характеризация области совпадения функций цены дифференциальных игр оптимального быстродействия с линией жизни и без нее;

Основные положения, выносимые на защиту

4. формулировка численной схемы построения непрерывной функции цены дифференциальной игры оптимального быстродействия с линией жизни, доказательство ее сходимости к вязкостному решению соответствующей краевой задачи для уравнения ГЯ и ее программная реализация;
5. программная реализация алгоритма Marching Cubes и алгоритма Лапласа и исследование качества визуализации при применении их к представлению результатов решения дифференциальных игр оптимального быстродействия с линией жизни.

Апробация работы

Основные результаты, полученные в процессе исследования, докладывались автором и обсуждались на

1. the 55th Israel Annual Conference on Aerospace Sciences IACAS'55, February 25–26, 2015, Tel Aviv, Haifa, Israel;
2. the 17th International Symposium on Dynamic Games and Applications, July 12–15, 2016, Urbino, Italy;
3. международной конференции по математической теории управления и механике, Суздаль, 7–11 июля 2017 года;
4. the 11th ISDG Workshop, July 13–15, 2017, Warsaw, Poland;
5. the 18th International Symposium on Dynamic Games and Applications, July 9–12, 2018, Grenoble, France;
6. International Conference «Stability, Control, Differential Games» (SCDG2019) devoted to the 95th anniversary of Academician N.N.Krasovskii, September 16–20, 2019;
7. the 60th Israel Annual Conference on Aerospace Sciences IACAS'60, March 4–5, 2020, Tel Aviv, Haifa, Israel;
8. Workshop on Mathematical Modeling and Scientific Computing dedicated to the memory of Nikolai Botkin Technical University of Munich Munich, Germany, November 19–20, 2020;
9. 47-й, 48-й, 49-й, 51-й международных молодежных школах-конференциях «Современные проблемы математики и ее приложений» (Екатеринбург, 2016, 2017, 2018, 2020 гг.);
10. семинаре кафедры оптимального управления ВМК МГУ;
11. семинарах отдела динамических систем ИММ УрО РАН.

Публикации автора по теме диссертации

- *Munts, N.V.* Numerical method for time-optimal differential games with life line / N.V.Munts, S.S.Kumkov // 55th Israel Annual Conference on Aerospace Sciences. —2015. — Vol. 2. — pp. 1253–1266. (Scopus)
- *Munts, N.V.* Существование функции цены в игре быстродействия с линией жизни (Existence of value function in time-optimal game with life line) / N.V.Munts, S.S.Kumkov // Proceedings of the 47th International Youth School-conference “Modern Problems in Mathematics and its Applications”. Yekaterinburg, Russia, January 31 – February 6, 2016. — pp. 94–99. (Scopus)
- *Мунц, Н.В.* О совпадении минимаксного решения и функции цены игры быстродействия с линией жизни / Н.В.Мунц, С.С.Кумков // Труды Института математики и механики УрО РАН. — Екатеринбург: УрО РАН. — 2018. — Т. 24, № 2. — С. 200–214. (ВАК)
- *Мунц, Н.В.* Численный метод решения дифференциальных игр быстродействия с линией жизни / Н.В.Мунц, С.С.Кумков // Математическая Теория Игр и ее Приложения. — 2018. — Т. 10, № 3. — С. 48–75. (ВАК)
- *Munts, N.V.* On Time-Optimal Problems with Lifeline / N.V.Munts, S.S.Kumkov // Dynamic Games and Applications. — 2019. — Vol. 9, No. 3. — pp. 751-770. (Scopus)
- *Munts, N.V.* On the Coincidence of the Minimax Solution and the Value Function in a Time-Optimal Game with a Lifeline / N.V.Munts, S.S.Kumkov // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. — 2019. — Vol. 305. — pp. 125–139. (Scopus)

Публикации автора по теме диссертации

- *Munts, N.V.* A Numerical Method for Solving Time-Optimal Differential Games with a Lifeline / N.V.Munts, S.S.Kumkov // Automation and Remote Control. — 2020. — Vol. 81. — pp. 1545–1561. (Scopus)
- *Munts, N.V.* Numerical Study of Different Variants of Dubins' Car Model / N.V.Munts // Proceedings of the The 60th Israel Annual Conference on Aerospace Sciences, Tel-Aviv & Haifa, Israel, March 4–5, 2020. —2020. — Vol. 2. — pp. 1006–1022. (Scopus)
- *Munts, N.V.* Convergence of Numerical Method for Time-Optimal Differential Games with Lifeline / N.V.Munts, S.S.Kumkov // Annals of the International Society of Dynamic Games, Vol. 17, Games of Conflict, Evolutionary Games, Economic Games, and Games Involving Common Interest. — Basel: Birkhäuser. — 2020. — pp. 101–130. (Scopus)
- *Munts, N.V.* Grid Method for Numerical Study of Time-Optimal Games with Lifeline / N.V.Munts, S.S.Kumkov // Proceedings of the Workshop on Mathematical Modeling and Scientific Computing: Focus on Complex Processes and Systems — dedicated to the memory of Nikolai Botkin, Munich, Germany, November 19–20, 2020. — 2020. — pp. 192–198. (Scopus)
- *Munts, N.V.* Detailed Proof of Existence of Value Function in Time-Optimal Game With Lifeline / N.V.Munts, S.S.Kumkov // International Game Theory Review. — 2022. — Vol. 24, No. 4. — P. 2250014-1–2250014-18. (Scopus)

Благодарности

Исследование проведено при поддержке проекта 75-02-2023-935 Министерства науки и высшего образования РФ «Уральский математический центр».

Автор глубоко благодарен научному руководителю Кумкову Сергею Сергеевичу за постоянное внимание к работе.

Автор благодарит Камневу Людмилу Валерьевну за внимательное чтение текста диссертации, ценные замечания и комментарии.

Мазалов В.В. Замечание 1

Вопрос:
В Главе 1 обобщенные решения краевой задачи для уравнения Гамильтона–Якоби рассматриваются как минимаксные в формализации А.И. Субботина. В Главе 2 те же обобщенные решения рассматриваются как вязкостные в формализации M.G. Crandall и P.L. Lions. Нигде не объясняется переход от одной формализации к другой, что вызывает некоторое недопонимание у читателя.

Ответ:
У А.И. Субботина установлено, что минимаксные решения и вязкостные решения — это эквивалентные понятия, поэтому такое использование правомочно. В Главе 1 было удобнее использовать минимаксный подход для доказательства совпадения функции цены и обобщенного решения, а в Главе 2 было удобнее пользоваться вязкостными решениями, как это было сделано у M.Bardi, M.Falcone, P.Soravia.

Мазалов В.В. Замечание 2

Вопрос:
В Главе 1 значительная часть доказательства теоремы о существовании функции цены дифференциальной игры быстродействия с линией жизни носит геометрический характер (предложения 1.2 – 1.4), в то время как формализация Н.Н. Красовского и А.И. Субботина, использующаяся в диссертации, имеет алгебраический характер. Чем объясняется использование таких подходов?

Ответ:
Для доказательства существования функции цены я переходила к ε-играм. Каждая ε-игра сводилась к играм с фазовыми ограничениями на первого игрока, поэтому в ε-игре существует функция цены. Затем нужно было показать, что при $\varepsilon \to 0$ есть сходимость последовательностей гарантированных результатов. Но монотонность такой последовательности неочевидна, поэтому для доказательства сходимости этих последовательностей пришлось доказать, что условия C3 и C4 выполняются на некотором ε-расширении множеств $\mathcal{T}$ и $\mathcal{F}$. Поскольку условия динамического преимущества содержат понятие нормали к поверхности, которая является геометрическим объектом, то и доказательство также носит геометрический характер.

Мазалов В.В. Замечание 3

Вопрос: Нет анализа сложности предложенных алгоритмов.

Ответ:
Тут можно рассмотреть два аспекта. Первый – это алгоритмическая сложность реализации компьютерной процедуры, она составляет $n \cdot log(n)$ для одной итерации (цикл по n, внутри которого происходит бинарный поиск по отсортированному лексикографически массиву длинны n). Другой аспект – это скорость сходимости численной схемы. В рамках данной работы этот вопрос не освещается, но у M.Bardi, M.Falcone, P.Soravia есть соответствующая теорема о скорости сходимости их численной схемы, которая, скорее всего, подойдет и для представленного численного метода.

Григоренко Н.Л. Замечание 1

Вопрос: Условия C3, C4 динамического преимущества игроков на границах соответствующих множеств, наложенные на динамику игры, вообще говоря, являются достаточно нетипичными для большинства классических игр и задач управления. Как отмечается в тексте диссертации, выполнение этих условий приводит к непрерывности функции цены. При этом примеры в Главе 4, в основном, соответствуют играм с разрывной функцией цены, то есть играм, в которых эти условия не выполняются, и корректность применения алгоритма к которым не обоснована. Пример 4.7, в котором условия все-таки выполняются, выглядит несколько искусственным. Для хорошей демонстрации возможностей алгоритма было бы разумно подобрать хорошие примеры, удовлетворяющие всем условиям, накладываемым на изучаемую задачу.
С другой стороны, хорошее совпадение результатов работы предложенного алгоритма с результатами других авторов в случае разрывной функции цены игры обнадеживает и обещает возможность обоснования корректности работы алгоритма и в общем случае.

Ответ:
Действительно, примеры, в которых эти условия выполнены на границах соответствующих множеств, либо очень простые, либо выглядят искусственно, как пример 4.7 из текста диссертации. Тем не менее, такие примеры существуют, и, возможно, подход с введением модифицированных динамик с переходными слоями вблизи границ множеств поможет доказать соответствующие теоремы в том случае, когда условия C3, C4 не выполняются.

Григоренко Н.Л. Замечание 2

Вопрос: Проводить более тонкие оценки множества достижимости системы в теоремах о совпадении функции цены классической игры и игры с линией жизни для получения более хороших оценок множеств совпадения этих функций.

Ответ:
Действительно, данные оценки, связанные с леммой Гронуолла, являются экспоненциальными, из-за чего они достаточно грубые, но зато они универсальные: нет уверенности, что для любого вида динамики удастся подобрать более точные оценки. Наверняка для каких-то конкретных динамик можно подобрать более точные оценки, но такие динамики не рассматривались в данной работе.

Григоренко Н.Л. Замечание 3

Вопрос: Значительная часть работы посвящена программным реализациям тех или иных алгоритмов (авторская вычислительная процедура, алгоритмы восстановления визуализируемых трехмерных объектов). Однако в тексте диссертации не приводится информация о государственной регистрации программ, реализующих разработанные автором алгоритмы.

Ответ:
Текущие версии программ еще могут быть модифицированы и улучшены. Сейчас, при добавлении в компьютерную реализацию численного метода новой реализации одного из интерфейсов, нужно перекомпилировать проект библиотеки классов. Хотелось бы сделать так, чтобы можно было подложить файл библиотеки, содержащий соответствующую реализацию интерфейса, непосредственно в папку с исполняемым файлом. После этого можно будет зарегистрировать программы.

Григоренко Н.Л. Замечание 4

Вопрос: Встречаются опечатки. Например, на стр. 109 (седьмая строчка сверху) в первом уравнении системы пропущен знак минус у первого слагаемого первой строки и у второго слагаемого индекс P должен быть заменен на индекс E.

Ответ:
Да, опечатки встречаются в тексте, но подавляющее их большинство содержится в Главе 4, так как она в последнее время претерпевала большое количество изменений: какие-то примеры удалялись, какие-то добавлялись, какие-то пересчитывались на менее грубой сетке, из-за чего вычитка пострадала. Но основная масса опечаток сосредоточена в главе с примерами, и сейчас подготовлен pdf-файл диссертации с исправленными опечатками.

Осипов С.И. Замечание 1

Вопрос: Досадная краткость описания программной реализации предложенной численной процедуры и задач, решенных в процессе написания программы, в частности, предпринятых оптимизаций производительности предложенной вычислительной программы.

Ответ:
Действительно, в работе больше уделено места теоретическим вопросам, а непосредственно компьютерной реализации — меньше. Если говорить о проблемах, которые нужно было решать в процессе написания программ, то можно привести такой пример. Частая операция — поиск ячейки сетки, которой принадлежит точка. Если бы сетка $\mathcal{L}$ всегда была прямоугольная, то поиск ячейки бы занимал константное время. Но из-за того, что сетка может быть произвольной формы, пришлось пользоваться бинарным поиском по лексикографически отсортированному массиву ячеек сетки, вследствие чего итоговая алгоритмическая сложность одной итерации алгоритма получилась $n \cdot log(n)$.

Осипов С.И. Замечание 2

Вопрос: Отсутствие государственной регистрации программ, реализующих численную процедуру и процедуры визуализации.

Ответ:
Текущие версии программ еще могут быть модифицированы и улучшены. Сейчас, при добавлении в компьютерную реализацию численного метода новой реализации одного из интерфейсов, нужно перекомпилировать проект библиотеки классов. Хотелось бы сделать так, чтобы можно было подложить файл библиотеки, содержащий соответствующую реализацию интерфейса, непосредственно в папку с исполняемым файлом. После этого можно будет зарегистрировать программы.

Осипов С.И. Замечание 3

Вопрос: Отсутствие оценки трудоемкости реализации программного кода в условных человеко-годах, например, согласно Брукс, Ф. «Мифический человеко-месяц, или Как создаются программные системы.» — СПб.: Питер, 2021. — 368 с.

Ответ:
Трудоемкость примерно можно оценить от двух до четырех человеко-месяцев.