

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского
Уральского отделения Российской академии наук

На правах рукописи

Мунц Наталья Владимировна

Численный метод решения дифференциальных игр
быстродействия с линией жизни

1.2.2 — математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
кандидат физико-математических наук
С.С.Кумков

Екатеринбург — 2023

Содержание

Введение	5
Список обозначений	14
1 Дифференциальные игры быстрогодействия с линией жизни	15
1.1 Постановка задачи	15
1.2 Функция цены	17
1.3 Краевая задача уравнения ГЯ, минимаксное решение	31
1.4 Совпадение функции цены и минимаксного решения	37
1.4.1 Оценка гарантированного результата второго игрока . .	38
1.4.2 Оценка гарантированного результата первого игрока . .	44
1.5 Комментарий о классических дифференциальных играх быстрогодействия	49
1.6 Связь функций цены обычной задачи и задачи быстрогодействия с линией жизни	50
1.6.1 Постановка классической задачи быстрогодействия	50
1.6.2 Совпадение функций цены	51
2 Численная процедура построения функции цены	55
2.1 Численная схема	55
2.1.1 Дискретная схема	55
2.1.2 Вязкостное решение уравнения ГЯ	60
2.2 Сходимость численной схемы	61
2.3 Использование полилинейной интерполяции	69
2.4 Реализация численной процедуры	71
2.5 Основные типы данных	72
2.5.1 Описание точки в евклидовом пространстве	72
2.5.2 Описание значения функции цены	73
2.5.3 Описание терминального множества	73
2.5.4 Описание множества ограничений на управление	74
2.5.5 Описание динамики системы	74
2.5.6 Описание сетки	76
2.6 Алгоритм	77

2.7	Формат данных	78
2.8	Реализованные способы интерполяции	82
2.8.1	Базовая аппроксимация на основе локальных координат	82
2.8.2	Улучшенная аппроксимация на основе локальных координат	86
2.8.3	Базовый алгоритм полилинейной интерполяции	86
2.8.4	Улучшенный алгоритм полилинейной интерполяции	88
3	Визуализация функции цены	90
3.1	Marching Cubes	91
3.2	Алгоритм Лапласа и НС-алгоритм	94
3.2.1	Лапласовское сглаживание	96
3.2.2	НС-алгоритм	96
3.3	Комбинация Marching Cubes и НС-алгоритма	98
3.4	Визуализация двумерных поверхностей	100
4	Примеры	102
4.1	Машина Дубинса	102
4.2	Машина Дубинса с редуцированной динамикой	103
4.3	Машина Дубинса с круглым множеством $\mathcal{W}$	106
4.4	Игра «шофер-убийца», пример 1	107
4.5	Игра «шофер-убийца», пример 2	109
4.6	Игра «шофер-убийца» с машиной типа Ридса – Шеппа	111
4.7	Модифицированная игра «шофер-убийца» с машиной типа Ридса – Шеппа	113
4.8	Материальная точка	115
4.9	Материальная точка со смещенным целевым множеством	116
4.10	Модифицированная игра «изотропные ракеты»	118
	Заключение	120
	Литература	121
	Список иллюстраций	132
	Приложения	136

A.1	Минимаксные решения	136
A.2	Вязкостные решения	140
A.3	Существование обобщенного минимаксного решения для га- мильтониана (2.4) и его совпадение с вязкостным решением . .	141
A.3.1	Характеристические дифференциальные включения . . .	142
A.3.2	Допустимые многозначные отображения E	143
A.3.3	Определения верхних, нижних и минимаксных решений для допустимого многозначного отображения E	146
A.3.4	Теорема об эквивалентности	148
A.4	Выпуклый анализ	154
A.5	Информация о дифференцируемых многообразиях	156

Введение

Актуальность темы исследований и степень ее разработанности. Теория дифференциальных игр в настоящее время — развитая математическая дисциплина. Первые отчеты Р.Айзекса по дифференциальным играм относятся к 1951–1954 годам [56, 57, 58, 59]. В 1965 году была опубликована его книга «Differential Games» [60], переведенная на русский язык в 1967 году [1]. В нашей стране динамические задачи конфликтного управления рассматриваются с начала 60-х годов прошлого века. Первыми были работы Л.С.Понтрягина [22, 23] и Н.Н.Красовского [8, 9].

В 1967 году вышли две знаменитые статьи [24, 25] Л.С.Понтрягина о линейных дифференциальных играх. В 1968 году опубликована книга [10] Н.Н.Красовского по оптимальному управлению, в заключительной части которой был большой раздел, связанный с дифференциальными играми. В 1974 году вышла книга Н.Н.Красовского и А.И.Субботина «Позиционные дифференциальные игры» [12]. В ней, в частности, предложена позиционная формализация дифференциальных игр и доказана теорема об альтернативе, родственная теореме существования функции цены.

В эти же годы были опубликованы основополагающие работы [26, 27] Б.Н.Пшеничного о структуре дифференциальных игр.

Среди работ зарубежных авторов конца 60-х — начала 70-х годов прошлого века можно отметить работы L.D.Berkovitz [40], A.Blaquière [41], J.V.Breakwell [43, 64], W.H.Fleming [53, 54], G.Leitmann [63]. В этих работах рассматривались теоремы существования функции цены в подходящем классе стратегий и развивался теоретический метод решения дифференциальных игр при помощи построения сингулярных поверхностей, предложенный Р.Айзексом.

Более поздние результаты, относящиеся к 1980-м годам, связаны с истолкованием функции цены игры как обобщенного решения уравнения Гамильтона–Якоби (ГЯ), часто также называемого уравнением Гамильтона–Якоби–Беллмана–Айзекса. Теория, опирающаяся на понятие минимаксного решения, была создана А.И.Субботиным. Полученные результаты отражены в книгах [29, 73, 30]. Эквивалентное понятие вязкостного решения было введено в работах M.G.Crandall и P.L.Lions [49]. Связь функции оптимально-

го результата для задач управления и дифференциальных игр и вязкостного решения соответствующей краевой задачи для уравнения ГЯ интенсивно изучалась итальянскими математиками M.Bardi, I.Capuzzo-Dolcetta, M.Falcone, P.Soravia [35, 36].

Параллельно с развитием теории разрабатывались и численные методы. Опыт создания первых универсальных алгоритмов решения некоторых классов дифференциальных игр отражен в сборнике [2], опубликованном в 1984 г. в Екатеринбурге. Большую роль в создании алгоритмов и их обосновании сыграли работы Н.Л.Григоренко, М.С.Никольского, В.С.Пацко, Е.С.Половинкина, В.Н.Ушакова. Соответствующие результаты изложены в работах [31, 32, 4, 74, 21, 14]. Геометрический метод решения дифференциальных игр быстрого действия с двумерным фазовым вектором был предложен В.С.Пацко и В.Л.Туровой [17, 67, 69, 68].

За рубежом численные методы интенсивно разрабатывались с начала 1990-х годов. В этой области проводили исследования немецкие математики M.H.Breitner, H.J.Pesch [44]; французские — P.Cardaliaguet, M.Quincampoix, P.Saint-Pierre [45, 46, 47]; итальянские — M.Bardi, M.Falcone, P.Soravia [34, 35, 36].

Именно работы итальянских математиков послужили отправной точкой исследований, изложенных в диссертации. В их работах предложен сеточный метод приближенного построения функции цены дифференциальной игры быстрого действия как аппроксимации вязкостного решения соответствующей краевой задачи для уравнения ГЯ. Теоретически метод обосновывается в случае использования бесконечной сетки, покрывающей все пространство игры. Однако при практической реализации можно организовать хранение лишь конечной сетки, наброшенной на ограниченную область. При этом возникает проблема задания краевых условий на внешней границе сетки. Авторами метода было предложено положить их равными $+\infty$, то есть при численном решении реально рассматривается задача, в которой второй игрок выигрывает, если приводит систему на внешнюю границу области, покрытой сеткой. Подобные задачи были предложены Р.Айзексом в его книге [60, 1] и названы им играми с линией жизни. Позже такие игры исследовались Л.А.Петросяном [71, 19, 6, 20]. Однако автору неизвестны работы, в которых исчерпывающе рассматривались бы игры такого типа: Л.А.Петросян в

основном исследовал задачи, где игроки имели динамику простых движений. В книгах [12, 61] Н.Н. Красовского и А.И. Субботина такого рода задачи рассматриваются как задачи с фазовыми ограничениями: первый игрок не должен выводить систему за границу заданного множества.

Задачи, идеологически весьма близкие к играм с линией жизни, изучались уже упоминавшимися французскими математиками P. Cardaliaguet, M. Quincampoix и P. Saint-Pierre. Для случая управляемых систем, пользуясь теорией дифференциальных включений и теорией выживаемости, они рассматривали множества (ядра выживаемости), в которых управляющий субъект может бесконечно удерживать систему. В дифференциальных играх французские авторы рассматривали ситуации с двумя целевыми множествами: одно для первого, другое для второго игрока соответственно, к которым игроки старались привести систему, избегая при этом целевого множества противника. Другой вариант игры, который изучался в этих работах — игра с фазовыми ограничениями для первого игрока. В такой ситуации главной целью является изучение множеств выигрыша игроков, то есть множеств, из которых игрок может достичь целевого множества, не попав при этом в целевое множество противника (или не нарушив фазовые ограничения). Также в терминах теории выживаемости верхняя цена таких игр (гарантированный результат первого игрока) характеризуется как функция, чей надграфик является множеством выживаемости первого игрока. Ими были предложены сеточно-геометрические алгоритмы для аппроксимации ядер выживаемости и, следовательно, для аппроксимации верхней цены. Тем не менее, автору диссертации не удалось найти статьи этих авторов, в которых бы доказывалось существование функции цены для игр такого типа и/или ее совпадение с обобщенным решением соответствующей краевой задачи для уравнения ГЯ (хотя такая связь упоминается).

Важным этапом численных исследований является наглядное построение получаемых результатов. Программы для визуализации решений дифференциальных игр разрабатывались в Институте математики и механики УрО РАН с конца 1990-х годов при сотрудничестве рабочих групп Отдела динамических систем и сектора компьютерной визуализации под руководством В.Л.Авербуха. В 1997–2001 годах были разработаны [33] программы визуализации решений линейных дифференциальных игр с фиксированным мо-

ментом окончания (Д.А.Юртаев, А.И.Зенков) и для дифференциальных игр быстрогодействия с двумерным фазовым вектором (О.А.Пыхтеев). В это же время Е.В.Овечкиной и П.А.Васевым (сектор компьютерной визуализации ИММ УрО РАН) были предложены процедуры визуализации трехмерных множеств уровня скалярной функции трех переменных, заданной на регулярной параллелепипедальной сетке. Позже аналогичные процедуры были созданы Д.К.Михалевым в конце 2000-х годов [15]. Эти программы могли бы быть полезными в рамках численных исследований конкретных дифференциальных игр с линией жизни, поскольку автором диссертации предложена численная сеточная процедура приближенного построения функции цены игр такого класса. Однако эти программные продукты в настоящее время недоступны и не были найдены современные программы, им аналогичные, что вызвало необходимость самостоятельной разработки и реализации соответствующих процедур визуализации.

Целью работы является исследование теоретических вопросов, связанных с дифференциальными играми с линией жизни, как то: существование функции цены, существование непрерывного обобщенного решения краевой задачи для уравнения ГЯ, соответствующей этой дифференциальной игре, совпадение функции цены и обобщенного решения, связь функций цены классической дифференциальной игры быстрогодействия и дифференциальной игры быстрогодействия с линией жизни, а также разработка численного метода решения дифференциальных игр быстрогодействия с линией жизни и соответствующих алгоритмов и компьютерных программ (в том числе для визуализации функции цены).

Для достижения цели были решены следующие **задачи**:

1. обосновать существование функции цены дифференциальной игры оптимального быстрогодействия с линией жизни;
2. обосновать существование непрерывного обобщенного (минимаксного) решения краевой задачи для уравнения ГЯ, соответствующей дифференциальной игре оптимального быстрогодействия с линией жизни, и совпадение его с функцией цены такой игры;
3. характеризовать область совпадения функций цены дифференциальных игр оптимального быстрогодействия с линией жизни и без нее;

4. сформулировать численную схему построения непрерывной функции цены дифференциальной игры оптимального быстрогодействия с линией жизни;
5. доказать сходимость численной схемы к вязкостному решению соответствующей краевой задачи для уравнения ГЯ;
6. создать программную реализацию предложенной численной схемы;
7. провести тестирование работы созданной программы на модельных примерах.

Научная новизна. Для дифференциальных игр с линией жизни доказано существование функции цены, при определенных условиях существование непрерывного обобщенного минимаксного решения соответствующей краевой задачи и совпадение функции цены с минимаксным решением. Найдена связь функции цены дифференциальной игры быстрогодействия с линией жизни с функцией цены классической дифференциальной игры быстрогодействия.

Построен численный метод решения задачи быстрогодействия с линией жизни и доказана его сходимость для различных способов приближения к функции цены.

Результаты работы являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость работы. Разработанные автором программы построения функции цены дифференциальной игры с линией жизни в сочетании с имеющимися средствами научной визуализации являются удобным инструментом, существенно помогающим в изучении игр из этого класса. Представленные в работе модификации методов сглаживания поверхности посредством алгоритмов Лапласа и Marching Cubes и их модификаций также могут быть полезными в качестве инструмента при анализе функции цены дифференциальной игры, а также при визуализации результатов вычислений других сеточных методов и при визуализации воксельных трехмерных множеств.

Методология и методы диссертационного исследования. В качестве методов исследования использовались позиционная формализация дифференциальных игр, предложенная в свердловской школе по теории управления и дифференциальным играм, теории обобщенных решений уравнений

типа ГЯ (вязкостные и минимаксные решения). При создании численной схемы применялась идеология метода Эйлера решения задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений, кусочно-линейная и полилинейная аппроксимации функции, заданной на прямоугольной сетке, теория сжимающих отображений. Для разработки программной реализации численной схемы использовался язык C# для среды исполнения Microsoft .Net/.Net Core и библиотеки этих сред.

Положения, выносимые на защиту:

- 1) обоснование существования функции цены дифференциальной игры оптимального быстрогодействия с линией жизни;
- 2) обоснование существования непрерывного обобщенного (минимаксного) решения краевой задачи для уравнения ГЯ, соответствующей дифференциальной игре оптимального быстрогодействия с линией жизни, и совпадение его с функцией цены такой игры;
- 3) характеристика области совпадения функций цены дифференциальных игр оптимального быстрогодействия с линией жизни и без нее;
- 4) формулировка численной схемы построения непрерывной функции цены дифференциальной игры оптимального быстрогодействия с линией жизни, доказательство ее сходимости к вязкостному решению соответствующей краевой задачи для уравнения ГЯ и ее программная реализация;
- 5) программная реализация алгоритма Marching Cubes и НС-алгоритма и исследование качества визуализации при применении их к представлению результатов решения дифференциальных игр оптимального быстрогодействия с линией жизни.

Достоверность результатов диссертационной работы обеспечивается математической строгостью получения аналитических выражений, согласованностью полученных результатов с результатами, полученными другими авторами (аналитическими и численными методами).

Личный вклад автора. Основные результаты работы, а именно теоретическое обоснование существования функции цены дифференциальных игр быстрогодействия с линией жизни, существование обобщенных решений соответствующих краевых задач для уравнений ГЯ, их совпадение между собой, формулировка численной схемы и доказательство ее сходимости к обобщен-

ному решению, характеристика области совпадения функции цены игр с и без линии жизни получены автором лично. Компьютерная реализация предложенной численной схемы и проведение вычислений модельных задач были проведены автором лично. Формулирование цели, постановка задач диссертационной работы, выбор общих методик исследований выполнены совместно с научным руководителем.

Апробация результатов. Основные результаты, полученные в процессе исследования, докладывались автором и обсуждались на the 55th Israel Annual Conference on Aerospace Sciences IACAS'55, February 25–26, 2015, Tel Aviv, Haifa, Israel; the 17th International Symposium on Dynamic Games and Applications, July 12–15, 2016, Urbino, Italy; международной конференции по математической теории управления и механике, Суздаль, 7–11 июля 2017 года; the 11th ISDG Workshop, July 13–15, 2017, Warsaw, Poland; the 18th International Symposium on Dynamic Games and Applications, July 9–12, 2018, Grenoble, France; International Conference «Stability, Control, Differential Games» (SCDG2019) devoted to the 95th anniversary of Academician N.N.Krasovskii, September 16–20, 2019; the 60th Israel Annual Conference on Aerospace Sciences IACAS'60, March 4–5, 2020, Tel Aviv, Haifa, Israel; Workshop on Mathematical Modeling and Scientific Computing dedicated to the memory of Nikolai Botkin Technical University of Munich Munich, Germany, November 19–20, 2020; 47-й, 48-й, 49-й, 51-й международной молодежных школах-конференциях «Современные проблемы математики и ее приложений» (Екатеринбург, 2016, 2017, 2018, 2020 гг.); семинарах отдела динамических систем ИММ УрО РАН.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, списка обозначений, четырех глав, заключения, списка литературы, списка иллюстраций и приложений.

Главы диссертации имеют следующее содержание.

В первой главе формулируется дифференциальная игра быстрого действия с линией жизни, определяется ее функция цены, обосновывается существование функции цены. Затем рассматривается соответствующая краевая задача для уравнения ГЯ, с использованием результатов книг А.И.Субботина [73, 30] доказываемое существование минимаксного решения. Доказательство проводится дважды: 1) в предположении гладкости границы терми-

нального множества и динамического преимущества первого игрока вблизи этой границы; 2) в предположении гладкости линии жизни и динамического преимущества второго игрока вблизи нее. Далее обосновывается совпадение функции цены дифференциальной игры оптимального быстрогодействия с линией жизни и минимаксного решения соответствующей краевой задачи для уравнения ГЯ; это доказательство проводится при одновременном выполнении указанных ранее предположений. После того обсуждается связь функций цены задачи быстрогодействия с линией жизни и без нее (в случае совпадения динамик игр, ограничений на управление игроков и терминальных множеств). Приводится характеристика области, в которой гарантируется совпадение функций цены.

Вторая глава диссертации посвящена численной процедуре построения функции цены дифференциальной игры оптимального быстрогодействия с линией жизни. Приводится формулировка численной схемы, обоснование ее сходимости к вязкостному решению соответствующей краевой задачи для уравнения ГЯ, обсуждаются различные методы аппроксимации (кусочно-линейная, полилинейная) функции цены, заданной на сетке. Численная процедура реализована в виде программы для операционной системы Microsoft Windows на языке C# для среды исполнения Microsoft .NET версии 4.0 или более поздней.

Третья глава носит вспомогательный характер и содержит описание двух популярных алгоритмов — Marching cubes и HC-алгоритм — для сглаживания трехмерных «воксельных» поверхностей, которые естественным образом возникают при представлении множеств уровня скалярной функции трех переменных, определенной на регулярной параллелепипедальной сетке. Рассказывается об их программной реализации и об исследовании качества визуализации при их раздельном и совместном применении к результатам вычислений программы решения дифференциальных игр оптимального быстрогодействия с линией жизни. Предложены модификации алгоритма Marching Cubes для визуализации множеств уровня функции цены с трехмерным фазовым вектором и процедура восстановления графика разрывной функции двух переменных.

В **четвертой главе** приводятся результаты численного исследования ряда примеров. Результаты представлены в виде изображений графиков и мно-

жеств уровня функций цены, полученными с помощью алгоритмов из третьей главы диссертации. Проводится сравнение изображений с результатами, полученными другими авторами.

Автор благодарит Л.В. Камневу за внимательное чтение текста диссертации, ценные замечания и комментарии.

Список обозначений

$\mathbb{N}$	— множество натуральных чисел $1, 2, 3, \dots$
$\mathbb{R}^d$	— евклидово пространство размерности d
$\mathbf{0}$	— нуль-вектор соответствующего пространства
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	— скалярное произведение
$:=, =:$	— «равно по определению», определяемая величина находится со стороны двоеточия
$n_{\mathcal{P}}(x)$	— вектор внешней нормали единичной длины к множеству $\mathcal{P}$ в точке x , лежащей на его границе
$B_{\rho}(x), B(x, \rho)$	— замкнутый шар радиуса ρ с центром в точке x
B_{ρ}	— замкнутый шар радиуса ρ с центром в начале координат
$O_{\rho}(\alpha)$	— открытый шар с центром в точке α и радиусом ρ
O_{ρ}	— открытый шар с центром в начале координат и радиусом ρ
$+$	— в случае операндов-множеств алгебраическая сумма (сумма Минковского)
∂A	— граница множества A
$\text{cl } A$	— замыкание множества A
$\text{co } A$	— выпуклая оболочка множества A
$\text{int } A$	— внутренность множества A
$\text{dist}(a, A)$	— расстояние от точки a до замкнутого множества A
Df	— градиент функции f
$\text{epi } f$	— надграфик функции f
$\text{hypo } f$	— подграфик функции f
$\text{gr } f$	— график функции f
$\text{diam } \Delta$	— диаметр разбиения $\Delta = \{0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots\}$ положительной полуоси времени : $\text{diam } \Delta = \sup_{i \in \mathbb{N}} (t_{i+1} - t_i)$
$ a $	— в случае скалярной величины a — модуль a ; в случае векторной величины a — норма a

1 Дифференциальные игры быстрогодействия с линией жизни

1.1 Постановка задачи

Рассмотрим конфликтно-управляемую систему с динамикой

$$\dot{x} = f(x, p, q), \quad t \geq 0, \quad x(0) = x_0, \quad p \in P, \quad q \in Q, \quad (1.1)$$

где $x \in \mathbb{R}^d$ — фазовый вектор системы; p и q — управления первого и второго игроков, соответственно. Ограничения P и Q на управления считаются компактными множествами в своих евклидовых пространствах. Задано компактное терминальное множество $\mathcal{T}$ полной размерности и открытое множество $\mathcal{W}$ такое, что $\mathcal{T} \subset \mathcal{W}$ и граница $\partial\mathcal{W}$ является ограниченной. Обозначим $\mathcal{G} := \mathcal{W} \setminus \mathcal{T}$ и $\mathcal{F} := \mathbb{R}^d \setminus \mathcal{W}$. Множество $\mathcal{T}$ является целевым; в множестве $\mathcal{G}$ происходит игра; множество $\partial\mathcal{F} = \partial\mathcal{W}$ — это линия жизни, при выходе системы на которую второй игрок безоговорочно выигрывает (см. рис. 1.1).

Цель первого игрока, распоряжающегося управлением p , — привести систему из состояния $x_0 \in \mathbb{R}^d$ на множество $\mathcal{T}$ как можно скорее, удерживая при этом траекторию вне множества $\mathcal{F}$; цель второго игрока, распоряжающегося управлением q , — привести систему на множество $\mathcal{F}$, или, если это невозможно, удержать траекторию внутри множества $\mathcal{G}$ навсегда, или, если и это невозможно, максимально отсрочить достижение системой множества $\mathcal{T}$. Если точка x_0 принадлежит множеству $\mathcal{T}$ или $\mathcal{F}$, то задача решается тривиально. Поэтому интерес представляет ситуация, когда $x_0 \in \mathcal{G}$.

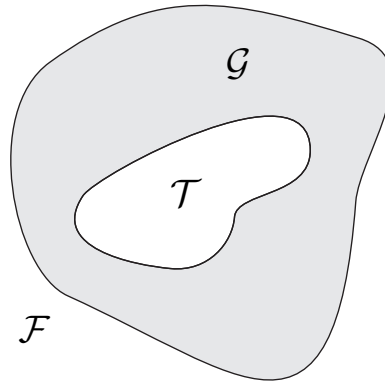


Рис. 1.1. Множества $\mathcal{T}$, $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$

Цели игроков в такой игре могут быть формализованы следующим образом. Пусть $x(\cdot; x_0)$ — это траектория системы, выпущенная из начальной точки x_0 . Для нее рассмотрим две величины:

$$\begin{aligned} t_* &= t_*(x(\cdot; x_0)) = \min\{t : x(t; x_0) \in \mathcal{T}\}, \\ t^* &= t^*(x(\cdot; x_0)) = \min\{t : x(t; x_0) \in \mathcal{F}\}, \end{aligned}$$

которые являются моментами времени, в которые траектория $x(\cdot; x_0)$ в первый раз попадает на множества $\mathcal{T}$ и $\mathcal{F}$, соответственно. Если траектория не приходит на множество $\mathcal{T}$ ($\mathcal{F}$), то значение t_* (t^*) положим равным $+\infty$. Результат игры на траектории $x(\cdot; x_0)$ определим следующим образом:

$$\tau(x(\cdot; x_0)) = \begin{cases} +\infty, & \text{если } t_* = +\infty \text{ или } t^* < t_*, \\ t_*, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (1.2)$$

Предполагается выполнение следующих условий:

С.1. Функция $f : \mathbb{R}^d \times P \times Q \mapsto \mathbb{R}^d$ является непрерывной по совокупности переменных и липшицевой по переменной x , то есть для всех $x^{(1)}, x^{(2)} \in \mathbb{R}^d$, $p \in P$, $q \in Q$

$$|f(x^{(1)}, p, q) - f(x^{(2)}, p, q)| \leq \lambda |x^{(1)} - x^{(2)}|; \quad (1.3)$$

также считается, что она удовлетворяет условию Айзекса (условию седловой точки в маленькой игре): для всех $s \in \mathbb{R}^d$ верно, что

$$\min_{p \in P} \max_{q \in Q} \langle s, f(x, p, q) \rangle = \max_{q \in Q} \min_{p \in P} \langle s, f(x, p, q) \rangle =: \mathcal{H}(x, s). \quad (1.4)$$

С.2. Границы $\partial\mathcal{T}$ и $\partial\mathcal{F}$ являются компактными, по крайней мере, дважды гладкими поверхностями, обладающими радиусом кривизны, ограниченным снизу некоторой константой $r > 0$ (см. Приложение А.5).

С.3. Граница $\partial\mathcal{T}$ множества $\mathcal{T}$ и функция f подчинены условию

$$\min_{p \in P} \max_{q \in Q} \langle n_{\mathcal{T}}(x), f(x, p, q) \rangle < 0$$

для любой точки $x \in \partial\mathcal{T}$. В терминах из книги Р.Айзекса [60], это условие означает, что граница $\partial\mathcal{T}$ — это *допустимая зона* для первого игрока: если система находится на границе терминального множества $\mathcal{T}$, то первый игрок может гарантировать заведение траектории внутрь этого множества.

С.4. Граница $\partial\mathcal{F}$ множества $\mathcal{F}$ и функция f подчинены условию

$$\min_{p \in P} \max_{q \in Q} \langle -n_{\mathcal{F}}(x), f(x, p, q) \rangle > 0$$

для любой точки $x \in \partial\mathcal{F}$. Это соотношение означает, что если система находится в любой точке с границы множества $\mathcal{F}$, то второй игрок может направить движение системы внутрь множества $\mathcal{F}$.

1.2 Функция цены

Введем функцию цены игры быстродействия с линией жизни сходно с тем, как это сделано в [12, 61] для классической игры оптимального быстродействия.

Обозначим $\mathcal{T}_\epsilon = \mathcal{T} + B_\epsilon$, $\mathcal{F}_\epsilon = \mathcal{F} + O_\epsilon$, $\mathcal{W}_\epsilon = \mathbb{R}^d \setminus \mathcal{F}_\epsilon$. Здесь и далее, B_ϵ — замкнутый шар радиуса ϵ с центром в начале координат, O_ϵ — открытый шар радиуса ϵ с центром в начале координат. Знак «+» для операндов-множеств означает алгебраическую сумму (сумму Минковского). Величина ϵ выбирается достаточно малой, чтобы множество $\mathcal{W}_\epsilon$ было непустым и выполнялось вложение $\mathcal{T}_\epsilon \subset \text{int } \mathcal{W}_\epsilon$. Здесь и далее $\text{int } A$ обозначает внутренность множества A . Плата для траектории $x(\cdot)$ системы определяется как

$$\tau_\epsilon(x(\cdot)) := \min \{t \in \mathbb{R}^+ : x(t) \in \mathcal{T}_\epsilon, \forall \vartheta \in [0, t) x(\vartheta) \in \mathcal{W}_\epsilon\}. \quad (1.5)$$

Если траектория никогда не попадает на множество $\mathcal{T}_\epsilon$ или достигает множества $\mathcal{F}_\epsilon$ раньше, чем $\mathcal{T}_\epsilon$, то $\tau_\epsilon(x(\cdot)) = +\infty$.

Определим движение системы в рамках позиционной формализации Н.Н. Красовского, как это сделано в [12, 61]. Пусть заданы стратегия обратной связи первого игрока $\mathcal{P} : \mathbb{R}^d \rightarrow P$ (произвольная функция, отображающая $\mathbb{R}^d$ в P) и разбиение $\Delta = \{0 = t_1 < t_2 < t_3 < \dots\}$ положительной полуоси времени. Обозначим за $\mathbb{X}(\bar{x}, \mathcal{P}, \Delta)$ множество (пучок) *пошаговых*

движений первого игрока, выпущенных из точки $\bar{x}$ при применении им стратегии $\mathcal{P}$ в дискретной схеме управления на разбиении Δ . Каждый элемент этого множества удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), \mathcal{P}(x(t_i)), q(t)), \quad t_i \leq t < t_{i+1}, \quad i \in \mathbb{N}, \quad (1.6)$$

и начальному условию $x(0) = \bar{x}$ при какой-то измеримой реализации управления второго игрока $q(\cdot) : [0, \infty) \rightarrow Q$. Элементами этого множества являются абсолютно-непрерывные функции $x(\cdot) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^d$. Определим диаметр разбиения Δ как

$$\text{diam } \Delta = \sup_{i \in \mathbb{N}} (t_{i+1} - t_i).$$

Возьмем последовательность точек $\bar{x}_l \rightarrow x_0$ при $l \rightarrow \infty$ (x_0 — начальное положение системы), последовательность разбиений Δ_l такую, что $\text{diam } \Delta_l \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$, и последовательность $x_l(\cdot) \in \mathbb{X}(\bar{x}_l, \mathcal{P}, \Delta_l)$ пошаговых движений из соответствующих пучков. Если последовательность $\{x_l(\cdot)\}$ равномерно сходится к некоторой функции $x_*(\cdot)$ при $l \rightarrow \infty$, то предельная функция $x_*(\cdot)$ называется *конструктивным движением*, выходящим из точки x_0 , порожденным стратегией $\mathcal{P}$ [12, стр. 33], [61, стр. 107], и считается траекторией системы. Пучок всех конструктивных движений, выпущенных из точки x_0 под действием стратегии $\mathcal{P}$ первого игрока обозначим $\mathbb{X}(x_0, \mathcal{P})$. Множество $\mathbb{X}(x_0, \mathcal{P})$ непусто и секвенциально компактно в $C([0, \infty); \mathbb{R}^d)$, то есть из любой последовательности $x_k(\cdot) \in \mathbb{X}(x_0, \mathcal{P})$, $k \in \mathbb{N}$, можно выделить сходящуюся подпоследовательность $x_{k_l}(\cdot)$, $l \in \mathbb{N}$, чей предел принадлежит множеству $\mathbb{X}(x_0, \mathcal{P})$. Здесь сходимость понимается в смысле компактно-открытой топологии [62, 75] (а не в смысле обычной метрики пространства C , поскольку промежутки времени неограничен).

Аналогично вводятся пучок $\mathbb{X}(\bar{x}, \mathcal{Q}, \Delta)$ пошаговых движений второго игрока, выпущенных из точки $\bar{x}$ при стратегии второго игрока $\mathcal{Q}$ в дискретной схеме управления с разбиением по времени Δ , и множество конструктивных движений $\mathbb{X}(x_0, \mathcal{Q})$, выходящих из точки x_0 , порожденное стратегией обратной связи $\mathcal{Q} : \mathbb{R}^d \rightarrow Q$ второго игрока (убегающего). Для любой стратегии $\mathcal{Q}$ множество $\mathbb{X}(x_0, \mathcal{Q})$ будет непустым и секвенциально-компактным в $C([0, \infty); \mathbb{R}^d)$ (в компактно-открытой топологии).

Гарантированный результат $T_1^0(x_0)$ первого игрока в точке x_0 опреде-

ляется как

$$\begin{aligned} T_1^\epsilon(x_0, \mathcal{P}, \Delta) &:= \sup \left\{ \tau_\epsilon(x(\cdot)) : x(\cdot) \in \mathbb{X}(x_0, \mathcal{P}, \Delta) \right\}, \\ T_1^\epsilon(x_0, \mathcal{P}) &:= \limsup_{\text{diam}(\Delta) \downarrow 0} T_1^\epsilon(x_0, \mathcal{P}, \Delta) = \sup \left\{ \tau_\epsilon(x(\cdot)) : x(\cdot) \in \mathbb{X}(x_0, \mathcal{P}) \right\}, \\ T_1^\epsilon(x_0) &:= \inf_{\mathcal{P} \in \mathbb{P}} T_1^\epsilon(x_0, \mathcal{P}), \quad T_1^0(x_0) := \lim_{\epsilon \downarrow 0} T_1^\epsilon(x_0). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Здесь и далее, $\mathbb{P}$ — это множество всех стратегий обратной связи первого игрока.

Аналогично определяется *гарантированный результат* $T_2^0(x_0)$ *второго игрока в точке* x_0 :

$$\begin{aligned} T_2^\epsilon(x_0, \mathcal{Q}, \Delta) &:= \inf \left\{ \tau_\epsilon(x(\cdot)) : x(\cdot) \in \mathbb{X}(x_0, \mathcal{Q}, \Delta) \right\}, \\ T_2^\epsilon(x_0, \mathcal{Q}) &:= \liminf_{\text{diam}(\Delta) \downarrow 0} T_2^\epsilon(x_0, \mathcal{Q}, \Delta) = \inf \left\{ \tau_\epsilon(x(\cdot)) : x(\cdot) \in \mathbb{X}(x_0, \mathcal{Q}) \right\}, \\ T_2^\epsilon(x_0) &:= \sup_{\mathcal{Q} \in \mathbb{Q}} T_2^\epsilon(x_0, \mathcal{Q}), \quad T_2^0(x_0) := \lim_{\epsilon \downarrow 0} T_2^\epsilon(x_0). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Здесь и далее, $\mathbb{Q}$ — это множество всех стратегий обратной связи второго игрока.

Существование гарантированных результатов игроков обуславливается существованием пределов в соотношениях (1.7) и (1.8). Существование пределов для рассматриваемой задачи будет доказано ниже.

Для произвольных стратегий $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ первого и второго игроков и любой траектории

$$x(\cdot) \in \mathbb{X}(x_0, \mathcal{P}) \cap \mathbb{X}(x_0, \mathcal{Q}).$$

справедливы неравенства

$$T_1^\epsilon(x_0, \mathcal{P}) \geq \tau_\epsilon(x(\cdot)) \geq T_2^\epsilon(x_0, \mathcal{Q}). \quad (1.9)$$

Поэтому $T_1^0(x_0) \geq T_2^0(x_0)$. Непустота пересечения пучков движений и соотношение гарантированных результатов доказаны в [12, 61, 73]. Также, из результатов книг [12, 61] следует

Теорема 1.1. *Пусть выполнено условие С.1. Для любой начальной позиции $x_0 \in \mathbb{R}^d$ и для любого достаточно малого $\epsilon > 0$ в дифференци-*

альной игре быстрогодействия (1.1), (1.5) с терминальным множеством $\mathcal{T}_\epsilon$ и фазовыми ограничениями $\mathcal{W}_\epsilon$ на первого игрока существует такой момент $\omega^\epsilon \in [0, +\infty]$, что выполняется равенство $T_1^\epsilon(x_0) = T_2^\epsilon(x_0) = \omega^\epsilon$.

Иными словами, результаты книг [12, 61] гарантируют существование функции цены в ϵ -игре (1.1), (1.5) с замкнутыми фазовыми ограничениями для первого игрока. Проблема игры (1.1), (1.2), фактически, заключается в том, что фазовые ограничения для первого игрока являются открытыми. Это доставляет дополнительные сложности в определении и доказательстве существования функции цены.

Используя Теорему 1.1, можно доказать, что верна

Теорема 1.2. *Пусть выполнены условия C.1–C.4. В дифференциальной игре быстрогодействия с линией жизни (1.1), (1.2) существует функция цены $T : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, то есть $T(x_0) := T_1^0(x_0) = T_2^0(x_0)$ для всех $x_0 \in \mathbb{R}^d$.*

Доказательство этой теоремы носит геометрический характер и привлекает базовые сведения о кривых и многообразиях из различных разделов геометрии.

Для доказательства теоремы ниже потребуется следующее

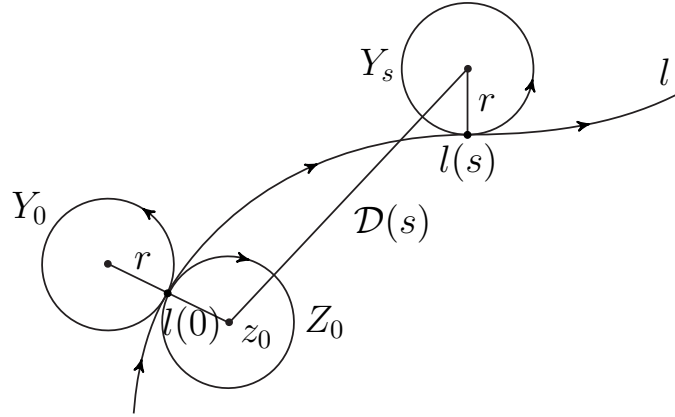
Предложение 1.1. [52, стр. 502, Proposition 5] *Пусть в двумерной плоскости дана гладкая кривая l с естественной параметризацией и радиусом кривизны, ограниченным снизу константой $r > 0$. Пусть Z_s и Y_s — окружности радиуса r , ориентированные против и по часовой стрелке соответственно, касающиеся кривой l в точке $l(s)$. Пусть также функция $\mathcal{D}(s)$ — расстояние между центрами окружностей Z_0 и Y_s . Тогда функция $\mathcal{D}(s)$ — монотонная неубывающая функция по s для $0 \leq s \leq \frac{\pi r}{2}$.*

(Здесь и далее в текущей главе символ l обозначает кривую.)

Это предложение говорит о том, что, поскольку наиболее крутой поворот у плоской гладкой кривой с радиусом кривизны ограниченным снизу величиной r может быть по дуге окружности радиуса r , то, стартуя из точки x_0 , такая кривая не может «быстро» попасть внутрь кругов Y_0 и Z_0 (см. рис 1.2).

Сформулируем и докажем несколько вспомогательных утверждений.

Предложение 1.2. *Существует такое число $\epsilon_0 > 0$, что условия C.3 и C.4 можно распространить с границ множеств $\partial\mathcal{T}$ и $\partial\mathcal{F}$ на границы множеств $\partial\mathcal{T}_\epsilon$ и $\partial\mathcal{F}_\epsilon$ для любого $0 < \epsilon < \epsilon_0$.*

Рис. 1.2. Окружности Z_0 , Y_0 , Y_s и функция $D(s)$

Перед доказательством данного предложения нужно сформулировать и доказать еще два вспомогательных предложения. Рассуждения во всех трех предложениях проводятся для множества $\mathcal{T}$. Для множества $\mathcal{F}$ доказательство аналогично.

Предложение 1.3. *Существует такое число $\epsilon_1 > 0$, что для любого $0 < \epsilon < \epsilon_1$ имеется взаимно однозначное соответствие точек x и x_ϵ множеств $\partial\mathcal{T}$ и $\partial\mathcal{T}_\epsilon$ через соотношение $x_\epsilon = x + \epsilon \cdot n_{\mathcal{T}}(x)$.*

Доказательство. Найдем такую величину $\epsilon_1 > 0$, чтобы для чисел $0 < \epsilon < \epsilon_1$ границы $\partial\mathcal{T}_\epsilon$ расширений $\mathcal{T}_\epsilon$ также были гладкими, чтобы можно было говорить о единственном векторе нормали. Основная проблема здесь — возможное пересечение друг с другом расширений разных участков $\partial\mathcal{T}$. Соответственно, нужно определить, что такое «близкие» и «далекие» участки гладкой поверхности с ограниченным снизу радиусом кривизны и оценить насколько близко могут подходить друг к другу «далекие» участки. Это позволит выбрать ϵ_1 так, чтобы расширения «далеких» участков не пересекались. Кроме того, нужно доказать, что расширения «близких» участков не пересекаются.

Пусть I — какой-либо конечный (замкнутый) отрезок числовой прямой. Для какой-либо спрямляемой кривой $l : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ обозначим через a_l левую границу отрезка I , а через b_l — правую. Определим следующие множества кривых:

- $A(\mathbb{R}^d)$ — множество всех непрерывных спрямляемых кривых $I \rightarrow \mathbb{R}^d$ (для разных кривых могут быть разные отрезки определения);

- $A(\partial\mathcal{T})$ — подмножество $A(\mathbb{R}^d)$, состоящее из тех кривых, которые целиком лежат в $\partial\mathcal{T}$, то есть множество непрерывных спрямляемых кривых $I \rightarrow \partial\mathcal{T}$;
- $\bar{A}(\partial\mathcal{T})$ — подмножество $A(\partial\mathcal{T})$, состоящее из плоских непрерывных спрямляемых кривых, которые целиком лежат в $\partial\mathcal{T}$.

Заметим, что в этих множествах имеются и кривые с естественной параметризацией.

Зафиксировав какой-либо набор $\mathcal{A}$ спрямляемых кривых в пространстве $\mathbb{R}^d$, для каждой пары точек $x, y \in \mathbb{R}^d$ определим множество $\mathcal{A}_{x,y}$ как множество всех кривых из набора $\mathcal{A}$, выходящих из точки x и приходящих в точку y :

$$\mathcal{A}_{x,y} = \{l \in \mathcal{A} : l(a_l) = x, l(b_l) = y\}.$$

Для набора $\mathcal{A}$ спрямляемых кривых обозначим через $L^{\mathcal{A}}(l)$ длину кривой l (в смысле евклидовой метрики пространства $\mathbb{R}^d$). Тогда при фиксированном наборе $\mathcal{A}$ расстояние между точками x и y можно определить как инфимум длин всех кривых, принадлежащих набору $\mathcal{A}$ и соединяющих эти точки:

$$d_L^{\mathcal{A}}(x, y) = \inf \{L^{\mathcal{A}}(l) : l \in \mathcal{A}_{x,y}\}.$$

Если множество $\mathcal{A}_{x,y}$ пусто, то есть если в наборе $\mathcal{A}$ нет ни одной кривой, соединяющей точки x и y , то положим $d_L^{\mathcal{A}}(x, y) = +\infty$. Такая функция действительно будет расстоянием (см., например, [3]).

Заметим, что $d_L^{A(\mathbb{R}^d)}(x, y)$ — это обычное евклидово расстояние между точками x и y , поскольку среди всех непрерывных спрямляемых кривых в пространстве $\mathbb{R}^d$ есть и отрезки прямых, соединяющие эти точки, и именно на них достигается инфимум евклидовой длины кривых.

Возьмем точку $x \in \partial\mathcal{T}$. Обозначим

$$B^1(x) = \left\{ y \in \partial\mathcal{T} : d_L^{\bar{A}(\partial\mathcal{T})}(x, y) \leq \frac{\pi r}{2} \right\}.$$

$B^1(x)$ можно считать частью поверхности $\partial\mathcal{T}$, «близкой» к точке x .

Докажем, что для всех $0 < \epsilon_r < r$ и $x_1 \in B^1(x)$, если $x_1 \neq x$, то

$$\bar{x}_1 := x_1 + \epsilon_r \cdot n_{\mathcal{T}}(x_1) \neq x + \epsilon_r \cdot n_{\mathcal{T}}(x) =: \bar{x}.$$

Докажем от противного: предположим, что $\bar{x}_1 = \bar{x}$. По определению множества $B^1(x)$ для точки x_1 существует плоская непрерывная спрямляемая кривая l с естественной параметризацией такая, что $l(0) = x$ и существует значение параметра $s \leq \frac{\pi r}{2}$, для которого $l(s) = x_1$. Следовательно, дальнейшие рассуждения можно проводить в некоторой плоскости, содержащей эту плоскую кривую. Обозначим центры окружностей радиуса r , касающихся кривой l в точках x и x_1 , как $y_x = x + r \cdot n_{\mathcal{T}}(x)$ и $y_{x_1} = x_1 + r \cdot n_{\mathcal{T}}(x_1)$ соответственно (см. рис. 1.3).

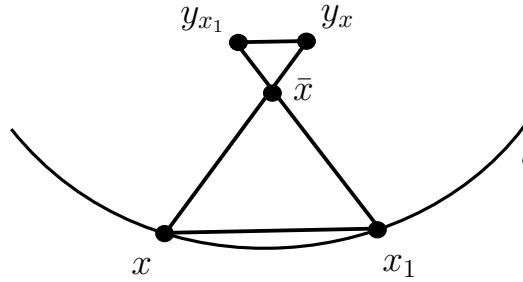


Рис. 1.3. Точки $x, x_1, \bar{x}, y_x, y_{x_1}$

Так как $\text{dist}(x, \bar{x}) \leq \epsilon_r$, а $\text{dist}(\bar{x}, y_{x_1}) \leq r - \epsilon_r$, то по правилу треугольника $\text{dist}(x, y_{x_1}) \leq r$. При этом равенство достигается только в том случае, если точка $\bar{x}$ лежит на отрезке $[x, y_{x_1}]$. Это возможно только, если $x = x_1$, а по условию это не так. Значит, если $\bar{x} = \bar{x}_1$, то $\text{dist}(x, y_{x_1}) < r$.

Теперь рассмотрим функцию $\mathcal{D}(\cdot)$ из Предложения 1.1, и пусть z_0 — центр окружности Z_0 , причем

$$\mathcal{D}(0) = \text{dist}(z_0, y_x) = \text{dist}(z_0, x) + \text{dist}(x, y_x) = 2r.$$

Но по правилу треугольника получаем, что

$$\mathcal{D}(s) = \text{dist}(z_0, y_{x_1}) \leq \text{dist}(z_0, x) + \text{dist}(x, y_{x_1}) < 2r.$$

Стало быть, получаем здесь противоречие с тем, что функция $\mathcal{D}(\cdot)$ является монотонной и неубывающей. Стало быть, начальное предположение $\bar{x} = \bar{x}_1$ не выполняется, а значит, $\bar{x} \neq \bar{x}_1$. Таким образом, показано, что для $0 < \epsilon_r < r$ ϵ_r -расширение участка $\partial\mathcal{T}$, «близкого» к точке x , не имеет самопересечений.

Рассмотрим множество

$$B^2(x) = \text{cl}(\partial\mathcal{T} \setminus B^1(x)) = \left\{ y \in \partial\mathcal{T} : d_L^{\bar{A}(\partial\mathcal{T})}(x, y) \geq \frac{\pi r}{2} \right\}$$

и покажем, что оно не пусто. Рассмотрим плоскую кривую l , полученную пересечением $\partial\mathcal{T}$ и какой-нибудь двумерной плоскости, проходящей через точку x и содержащую вектор нормали $n_{\mathcal{T}}(x)$. Поскольку граница $\partial\mathcal{T}$ компактна, то такая кривая замкнута. В работе [48, разд. 3.2, стр. 213–215, рис. А.7.] рассматривается множество терминальных точек всевозможных кривых с радиусом кривизны, ограниченным снизу величиной r , выпущенных из одной точки. Из результатов этой работы следует, что кратчайшей гладкой плоской кривой с радиусом кривизны, ограниченным снизу величиной r , выходящей из какой-то точки и возвращающейся туда, является окружность радиуса r , проходящая через эту точку. Стало быть, на этой кривой имеется точка y такая, что $d_L^{\bar{A}(\partial\mathcal{T})}(x, y) \geq \pi r$ (то есть отстоящая от x на евклидову длину полуокружности радиуса r в смысле расстояния по плоским кривым на поверхности $\partial\mathcal{T}$). Значит, множество $B^2(x)$ не пусто.

Множество $B^2(x)$ компактно, так как ограничено (будучи подмножеством ограниченного множества $\partial\mathcal{T}$) и замкнуто. При этом $x \notin B^2(x)$, так как $d_L^{\bar{A}(\partial\mathcal{T})}(x, x) = 0$.

Рассмотрим функцию $D(x) = \min \{|x - y| : y \in B^2(x)\}$. Функция $|x - y|$ непрерывна по y и строго положительна на множестве $B^2(x)$. Минимум этой функции берется по компактному множеству $B^2(x)$, поэтому он существует и строго больше нуля. Теперь возьмем минимум функции $D(x)$ по всем точкам x множества $\partial\mathcal{T}$: $D^* := \min \{D(x) : x \in \partial\mathcal{T}\}$. Этот минимум также достигается и тоже строго больше нуля, поскольку $\partial\mathcal{T}$ — тоже компакт (см. рис. 1.4). Если $0 < \epsilon_D < D^*/4$, то ϵ_D -расширение участка $\partial\mathcal{T}$, «далекого» от точки x , не дает самопересечений с ϵ_D -расширением точки x , то есть для любого $y \in B^2(x)$ получаем, что $y + \epsilon_D \cdot n_{\mathcal{T}}(y) \neq x + \epsilon_D \cdot n_{\mathcal{T}}(x)$.

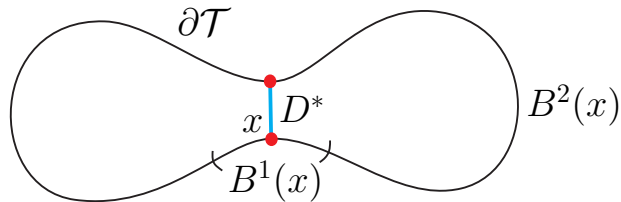


Рис. 1.4. Множества $\partial\mathcal{T}$, $B^1(x)$ и $B^2(x)$ и величина D^*

Выберем искомое ϵ_1 из условия $0 < \epsilon_1 < \min\{r/2, D^*/4\}$. Итак, для любого $0 < \epsilon < \epsilon_1$ и для любых точек $x, y \in \partial\mathcal{T}$ таких что $y \neq x$ получаем, что $x + \epsilon \cdot n_{\mathcal{T}}(x) \neq y + \epsilon \cdot n_{\mathcal{T}}(y)$ и искомое соответствие найдено. $\square$

Предложение 1.4. *Существуют число $\epsilon_2 > 0$ и равномерно непрерывная функция $n : \text{cl}(\mathcal{T}_{\epsilon_2} \setminus \mathcal{T}) \rightarrow \mathbb{R}^d$ такие, что для любого $0 < \epsilon \leq \epsilon_2$ значение функции n в точке $x \in \partial\mathcal{T}_\epsilon$ совпадает со значением функции внешней нормали к границе множества $\mathcal{T}_\epsilon$. Также число ϵ_2 достаточно мало, чтобы было выполнено равенство $\mathcal{T}_{\epsilon_2} \cap \mathcal{F}_{\epsilon_2} = \emptyset$.*

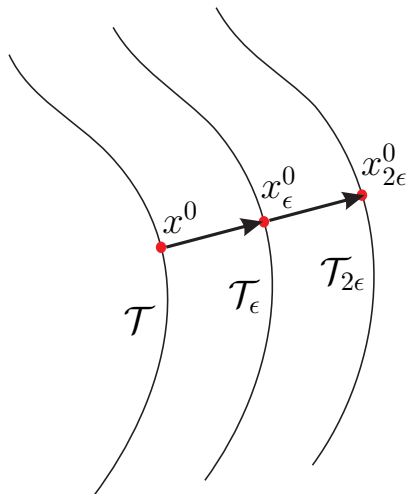
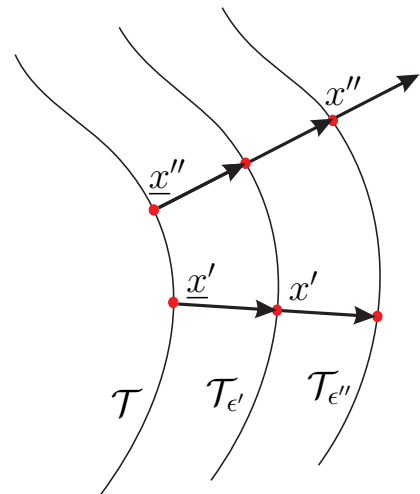
Доказательство. Напомним, что $\mathcal{T}_\epsilon = \{t + b : t \in \mathcal{T}, b \in B_\epsilon\}$, $\mathcal{T}_{2\epsilon} = \{t + b : t \in \mathcal{T}, b \in B_{2\epsilon}\}$, $B_\epsilon = \{b : |b| \leq \epsilon\}$ (см. рис. 1.5). Отметим, что по определению замкнутого шара B_ϵ , в нем, в том числе, содержится вектор $\epsilon \cdot n_{\mathcal{T}}(x_0)$.

Рассмотрим величины ϵ_1 и $\epsilon_1^{\mathcal{F}}$ из Предложения 1.3 для множеств $\mathcal{T}$ и $\mathcal{F}$ соответственно. В качестве ϵ_2 возьмем $\min\{\epsilon_1^{\mathcal{F}}, \epsilon_1\}/4$. (Такое определение ϵ_2 необходимо для того, чтобы области определения функций n для множества $\mathcal{T}$ и для множества $\mathcal{F}$ не пересекались). Пусть $0 < \epsilon \leq \epsilon_2$.

Рассмотрим некоторую точку $x^0 \in \partial\mathcal{T}$ и точку $x_\epsilon^0 = x^0 + \epsilon \cdot n_{\mathcal{T}}(x^0)$. Благодаря выбору величины ϵ_2 и по Предложению 1.3 получаем, что $x_\epsilon^0 \in \partial\mathcal{T}_\epsilon$. Из условия С.2 получаем, что существует область $\mathcal{Z}_k^{\mathcal{T}} \subset \mathbb{R}^{d-1}$ и точка $z \in \mathcal{Z}_k^{\mathcal{T}}$ такие, что $x_\epsilon^0 = \varsigma_k^{\mathcal{T}}(z) + \epsilon \cdot n_{\mathcal{T}}(\varsigma_k^{\mathcal{T}}(z)) =: \varsigma_k^{\mathcal{T}_\epsilon}(z)$ (см. Приложение А.5).

Таким образом получаем набор функций $\varsigma_k^{\mathcal{T}_\epsilon} : \mathcal{Z}_k^{\mathcal{T}} \subseteq \mathbb{R}^{d-1} \rightarrow \partial\mathcal{T}_\epsilon$, задающих атлас многообразия $\partial\mathcal{T}_\epsilon$.

Благодаря предположению о дважды гладкости функций $\varsigma_k^{\mathcal{T}}$, влекущему гладкость функции $n_{\mathcal{T}}$, получаем, что функции $\varsigma_k^{\mathcal{T}_\epsilon}$ являются гладкими. Следовательно, граница $\partial\mathcal{T}_\epsilon$ является гладкой и обладает непрерывной функцией $n_{\mathcal{T}_\epsilon}$ внешней нормали, определяющейся как соответствующим образом ориентированная функция гауссова нормального поля $\partial\mathcal{T}_\epsilon$.

Рис. 1.5. Множества $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}_\epsilon$ и $\mathcal{T}_{2\epsilon}$ Рис. 1.6. Точки x' , x'_- , x'' , x''_-

Рассмотрим точку $x_{2\epsilon}^0 = x^0 + 2\epsilon \cdot n_{\mathcal{T}}(x^0)$. По выбору величины ϵ_2 снова получаем, что $x_{2\epsilon}^0 \in \partial\mathcal{T}_{2\epsilon}$. Имеем, что

$$x_{2\epsilon}^0 = x^0 + 2\epsilon \cdot n_{\mathcal{T}}(x^0) = x_{2\epsilon}^0 = x^0 + \epsilon \cdot n_{\mathcal{T}}(x^0) + \epsilon \cdot n_{\mathcal{T}}(x^0) = x_{\epsilon}^0 + \epsilon \cdot n_{\mathcal{T}}(x^0),$$

откуда $|x_{2\epsilon}^0 - x_{\epsilon}^0| = |\epsilon \cdot n_{\mathcal{T}}(x^0)| = \epsilon$ и, стало быть, $x_{2\epsilon}^0 \in \partial(\mathcal{T}_{\epsilon} + B_{\epsilon})$. Последнее заключение верно, поскольку в силу выбора $\epsilon < \epsilon_1$ не может быть других точек $x'_{\epsilon} \in \partial(\mathcal{T}_{\epsilon})$ таких, что $|x_{2\epsilon}^0 - x'_{\epsilon}| < \epsilon$ (из-за того, что не может быть других точек $x' \in \partial\mathcal{T}$ таких, что $|x_{2\epsilon}^0 - x'| < 2\epsilon$).

Поэтому $x_{2\epsilon}^0 = x_{\epsilon}^0 + \epsilon \cdot n_{\mathcal{T}_{\epsilon}}(x_{\epsilon}^0)$. Тогда $n_{\mathcal{T}}(x^0) = n_{\mathcal{T}_{\epsilon}}(x_{\epsilon}^0)$ (см. рис. 1.5).

Итак, функция $n : \text{cl}(\mathcal{T}_{\epsilon_2} \setminus \mathcal{T}) \rightarrow \mathbb{R}^d$ определяется следующим образом. Для каждой точки $x' \in \text{cl}(\mathcal{T}_{\epsilon_2} \setminus \mathcal{T})$ единственным образом найдется такое число ϵ' , что $x' \in \partial\mathcal{T}_{\epsilon'}$. Пусть $n(x') = n_{\mathcal{T}_{\epsilon'}}(x') = n_{\mathcal{T}}(\underline{x})$, где точка $\underline{x} \in \partial\mathcal{T}$ соответствует точке x' в смысле, описанном выше: $x' = \underline{x} + \epsilon' \cdot n_{\mathcal{T}}(\underline{x})$. Точка $\underline{x}$ определяется единственным образом благодаря выбору ϵ_2 .

Покажем, что такая функция является непрерывной. Возьмем какую-нибудь точку $x' \in \text{cl}(\mathcal{T}_{\epsilon_2} \setminus \mathcal{T})$. Функция n непрерывна в точке x' , если для любой окрестности $O(n(x'))$ значения $n(x')$ найдется окрестность $O(x')$ точки x' в множестве определения функции $n(\cdot)$ (то есть в слое $\text{cl}(\mathcal{T}_{\epsilon_2} \setminus \mathcal{T})$) такая, что $n(O(x')) \subset O(n(x'))$.

Выберем и зафиксируем $\sigma > 0$. Возьмем $O(n(x'))$ — открытый шар радиуса σ в пространстве векторов вокруг вектора $n(x')$. Построим нужную окрестность точки x' .

Точка x' принадлежит границе какого-то расширения $\mathcal{T}_{\epsilon'}$, $0 \leq \epsilon' \leq \epsilon_2$, и пусть $\underline{x}'$ — точка с границы множества $\partial\mathcal{T}$, соответствующая точке x' .

Так как «обычная» функция нормали к границе непрерывна из-за гладкости границы множества $\mathcal{T}$ и на $\partial\mathcal{T}$ совпадает с $n(\cdot)$, то для выбранного σ можно подобрать $\underline{\delta} > 0$ такое, что $d_L^{A(\partial\mathcal{T})}(\underline{x}', \underline{x}'') < \underline{\delta} \Rightarrow |n(\underline{x}') - n(\underline{x}'')| < \sigma$. Обозначим $O_{\mathcal{T}}(\underline{x}') := \{\underline{x}'' \in \partial\mathcal{T} : d_L^{A(\partial\mathcal{T})}(\underline{x}', \underline{x}'') < \underline{\delta}\}$.

Рассмотрим множество $O(x') = \{\underline{x}'' + \epsilon n_{\mathcal{T}}(\underline{x}'') : \underline{x}'' \in O_{\mathcal{T}}(\underline{x}'), \epsilon \in [0, \epsilon_2]\}$. В рамках слоя $\text{cl}(\mathcal{T}_{\epsilon_2} \setminus \mathcal{T})$ множество $O(x')$ открыто. При этом выполняется вложение $n(O(x')) \subset O(n(x'))$. Тем самым показано, что функция $n(\cdot)$ непрерывна в любой точке $x' \in \text{cl}(\mathcal{T}_{\epsilon_2} \setminus \mathcal{T})$.

Так как функция $n(\cdot)$ определена на компакте $\text{cl}(\mathcal{T}_{\epsilon_2} \setminus \mathcal{T})$ и непрерывна там, то она также является равномерно непрерывной на нем. $\square$

Доказательство Предложения 1.2. Следует заметить, что границы множеств $\partial\mathcal{T}$ и $\partial\mathcal{F}$ — гладкие и компактные множества, а функции из условий С.3 и С.4 — непрерывные. По теореме Вейерштрасса непрерывная функция, определенная на компакте, ограничена на нем и достигает своих верхних и нижних границ. Следовательно, выполнены два следующих неравенства:

$$\exists \underline{\eta} < 0 \ \forall x \in \partial\mathcal{T} \ \min_{p \in P} \max_{q \in Q} \langle n_{\mathcal{T}}(x), f(x, p, q) \rangle \leq \underline{\eta} < 0, \quad (1.10)$$

$$\exists \bar{\eta} > 0 \ \forall x \in \partial\mathcal{F} \ \min_{p \in P} \max_{q \in Q} \langle -n_{\mathcal{F}}(x), f(x, p, q) \rangle \geq \bar{\eta} > 0. \quad (1.11)$$

Докажем, что найдется такое $\epsilon_0 < \epsilon_2$ (где ϵ_2 определено в Предложении 1.4), что для любого числа $0 < \epsilon < \epsilon_0$ и для любой точки $x \in \text{cl}(\mathcal{T}_\epsilon \setminus \mathcal{T})$ будет выполнено неравенство

$$\min_{p \in P} \max_{q \in Q} \langle n(x), f(x, p, q) \rangle \leq \underline{\eta}/2 < 0, \quad (1.12)$$

где $n(x)$ — введенная в Предложении 1.4 функция, совпадающая с $n_{\mathcal{T}}(x)$ на $\partial\mathcal{T}$.

Обозначим

$$F(x) = \min_{p \in P} \max_{q \in Q} \langle n(x), f(x, p, q) \rangle.$$

Функция $F(x)$ непрерывна по x на $\text{cl}(\mathcal{T}_{\epsilon_2} \setminus \mathcal{T})$ в силу гладкости по x функции $n(x)$ и липшицевости по x функции $f(x, p, q)$; операции минимума и максимума сохраняют непрерывность. Поскольку функция $F(x)$ непрерывна на компакте, то она равномерно непрерывна на нем.

Для любой точки $x_0 \in \partial\mathcal{T}$ и любого $\sigma > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любой точки $x \in B(x_0, \delta) \cap \text{cl}(\mathcal{T}_{\epsilon_2} \setminus \mathcal{T})$ выполнено неравенство $|F(x_0) - F(x)| \leq \sigma$. В качестве σ возьмем число $|\underline{\eta}|/2$. Если $|x - x_0| \leq \delta$ для соответствующего δ , то будет выполнена следующая цепочка неравенств:

$$\frac{|\underline{\eta}|}{2} \geq |F(x_0) - F(x)| \geq |F(x_0)| - |F(x)| \geq |\underline{\eta}| - |F(x)|.$$

Последнее неравенство следует из $F(x_0) \leq \underline{\eta} \leq 0$. Отсюда следует, что $|F(x)| \geq |\underline{\eta}|/2$. После раскрытия модулей с учетом (1.10) получаем, что $F(x) \leq \underline{\eta}/2$.

В силу равномерной непрерывности функции $F(\cdot)$ величина δ выбирается только по числу σ , а значит, по δ можно подобрать $0 < \epsilon_0 < \min\{\delta, \epsilon_2\}$ так, что неравенство (1.12) будет выполнено для любого $\epsilon < \epsilon_0$ и для любой точки $x \in \text{cl}(\mathcal{T}_\epsilon \setminus \mathcal{T})$. $\square$

Теперь перейдем к доказательству теоремы о существовании функции цены.

Доказательство Теоремы 1.2. Рассмотрим гарантированные результаты первого и второго игроков в ϵ -игре при фиксированном ϵ в точке x_0 ($\epsilon < \epsilon_0$ из Предложения 1.2):

$$T_1^\epsilon(x_0) = \inf_{\mathcal{P} \in \mathbb{P}} T_1^\epsilon(x_0, \mathcal{P}), \quad T_2^\epsilon(x_0) = \sup_{\mathcal{Q} \in \mathbb{Q}} T_2^\epsilon(x_0, \mathcal{Q})$$

Докажем существование пределов

$$T_1^0(x_0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} T_1^\epsilon(x_0), \quad T_2^0(x_0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} T_2^\epsilon(x_0).$$

Благодаря Предложению 1.2 на границах $\partial\mathcal{T}_\epsilon$ и $\partial\mathcal{F}_\epsilon$ также выполнены условия С.3 и С.4 (с векторами нормалей к этим границам), которые постулируют динамические преимущества первого и второго игрока на соответствующих границах и поэтому в некоторой окрестности множеств $\mathcal{T}$ и $\mathcal{F}$. Из этих условий следует, что игрок на границе «своего» множества может завести систему внутрь этого множества.

Более того, движение, попав внутрь множества $\mathcal{T}_\epsilon$ ($\mathcal{F}_\epsilon$), попадет на границу множества $\mathcal{T}$ ($\mathcal{F}$) за конечное время, так как проекция скорости на внешнюю нормаль к множеству $\mathcal{T}$ ($\mathcal{F}$) может быть сделана строго меньше нуля по Предложению 1.2. К тому же, если нашлась такая стратегия первого игрока, что движение попадает на множество $\mathcal{T}_\epsilon$, то и при уменьшении ϵ до некоторого ϵ_1 есть стратегия, приводящая движение на новое множество $\mathcal{T}_{\epsilon_1}$. Аналогичное рассуждение подходит и для второго игрока вблизи множества $\mathcal{F}$.

Рассмотрим следующие случаи:

1 ϵ) Пусть $x_0 \in \mathcal{T}_\epsilon$. Тогда $T_1^\epsilon(x_0) = 0$. Иначе возможны два случая.

2 ϵ) Пусть $x_0 \notin \mathcal{T}_\epsilon$ и нашлась такая стратегия первого игрока $\mathcal{P} \in \mathbb{P}$, что для любого конструктивного движения $x(\cdot) \in \mathbb{X}(x_0, \mathcal{P})$ существует момент

времени $t^* \geq 0$ такой, что $x(t^*) \in \mathcal{T}_\epsilon$ и для любого момента $\theta \in [0, t^*)$ $x(\theta) \notin \mathcal{F}_\epsilon$. Тогда по формулам выше получаем, что $T_1^\epsilon(x_0) < +\infty$, поскольку $T_1^\epsilon(x_0, \mathcal{P})$ строго меньше бесконечности. Последнее следует из секвенциальной компактности пучка $\mathbb{X}(x_0, \mathcal{P})$ конструктивных движений первого игрока и того, что на всех движениях этого пучка результат строго меньше $+\infty$.

3 $_\epsilon$) Иначе выполняется один из следующих случаев:

- a $_\epsilon$) Пусть $x_0 \notin \mathcal{T}_\epsilon$ и для любой стратегии первого игрока $\mathcal{P} \in \mathbb{P}$ нашлось такое движение $x^*(\cdot) \in \mathbb{X}(x_0, \mathcal{P})$ и такой момент времени $t^* \geq 0$, что $x(t^*) \in \mathcal{F}_\epsilon$ и для любого момента $\theta \in [0, t^*)$ $x^*(\theta) \notin \mathcal{T}_\epsilon$. Тогда по формулам выше получаем, что $T_1^\epsilon(x_0) = +\infty$.
- b $_\epsilon$) Иначе $x_0 \notin \mathcal{T}_\epsilon$ и для любой стратегии первого игрока $\mathcal{P} \in \mathbb{P}$ нашлось такое движение $x^*(\cdot) \in \mathbb{X}(x_0, \mathcal{P})$, что для любого момента времени $t \geq 0$ выполнено $x^*(t) \notin \mathcal{F}_\epsilon$ и $x^*(t) \notin \mathcal{T}_\epsilon$. Тогда по формулам выше получаем, что $T_1^\epsilon(x_0) = +\infty$.

Теперь устремим $\epsilon \rightarrow 0$.

- 1) Если $x_0 \in \mathcal{T}$, то для любого выбора ϵ имеем $x_0 \in \mathcal{T}_\epsilon$ и $T_1^\epsilon(x_0) = 0$. Отсюда $T_1^0(x_0) = 0$.

Иначе, если $x_0 \notin \mathcal{T}$, то найдется такое $\bar{\epsilon}_1 < \epsilon_0$, что $x_0 \notin \mathcal{T}_{\bar{\epsilon}_1}$ и выполнится один из случаев ниже.

- 2) Пусть для любого $\epsilon \in (0, \bar{\epsilon}_1)$ выполнен случай 2 $_\epsilon$). Тогда $T_1^0(x_0) \leq +\infty$, так как значения $T_1^\epsilon(x_0)$ могут только возрастать. Действительно, пусть выбраны какие-то $0 < \epsilon'_2 < \epsilon'_1$. Тогда $\mathcal{T}_{\epsilon'_2} \subset \mathcal{T}_{\epsilon'_1}$ и для любой фиксированной стратегии $\mathcal{P}$ первого игрока имеем, что $T_1^{\epsilon'_1}(x_0, \mathcal{P}) \leq T_1^{\epsilon'_2}(x_0, \mathcal{P})$. Отсюда получаем, что и $T_1^{\epsilon'_1}(x_0) \leq T_1^{\epsilon'_2}(x_0)$, так как предыдущее неравенство выполнено для любой стратегии.
- 3) Иначе существует $\bar{\epsilon}_2 \in (0, \bar{\epsilon}_1)$ такое, что для любого $\epsilon \in (0, \bar{\epsilon}_2)$ случай 2 $_\epsilon$) не выполнен. Действительно, в силу Предложения 1.2, если $\bar{\epsilon}_2$ достаточно мало и первый игрок успешно завершает $\bar{\epsilon}_2$ -игру, то он успешно завершает и ϵ -игры для всех $\epsilon < \bar{\epsilon}_2$, и мы попадаем в рамки случая 2).

Поскольку не выполнен случай 2_ϵ), то выполняется случай 3_ϵ), откуда следует выполнение одного из двух следующих случаев:

- a) Пусть для некоторого $\epsilon \in (0, \bar{\epsilon}_2)$ выполняется a_ϵ). Тогда по Предложению 1.2 случай a_ϵ) выполняется для всех $\bar{\epsilon} \in (0, \epsilon)$. Отсюда $T_1^0(x_0) = +\infty$.
- b) Иначе для любого $\epsilon \in (0, \bar{\epsilon}_2)$ выполняется b_ϵ). Тогда $T_1^0(x_0) = +\infty$.

Таким образом, существует предел величины $T_1^\epsilon(x_0)$, конечный или бесконечный, при $\epsilon \rightarrow 0$.

По Теореме 1.1 в каждой ϵ -игре $T_1^\epsilon(x_0)$ и $T_2^\epsilon(x_0)$ совпадают, а значит, совпадают и их пределы при ϵ , стремящемся к 0. Отсюда получаем, что $T_1^0(x_0) = T_2^0(x_0) = T(x_0) \leq +\infty$. Этот общий предел является ε -седловой точкой T игры (1.1), (1.2). Термин *ε -седловая точка* понимается в том смысле, что каждый из игроков может указать свою стратегию, гарантирующую результат, сколь угодно близкий к значению T . $\square$

Некоторое неудобство для численного исследования игр (1.1), (1.2) представляет неограниченность значений функций платы и цены. Поэтому часто с помощью замены Кругжкова [13] от неограниченной функции платы переходят к ограниченной:

$$J(x(\cdot; x_0)) = \begin{cases} 1 - \exp(-\tau(x(\cdot; x_0))), & \text{если } \tau < +\infty, \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (1.13)$$

При этом функция цены также становится ограниченной, и ее значения лежат в диапазоне от нуля до единицы.

Гарантированный результат первого игрока (нижняя цена) и гарантированный результат второго игрока (верхняя цена) после замены Кругжкова для задачи быстрогодействия с линией жизни будут обозначаться как

$$\begin{aligned} v(x) &:= \inf_{p(\cdot) \in \mathbb{P}} \sup_{q(\cdot) \in \mathbb{Q}} J(x(\cdot; x_0)), \\ u(x) &:= \sup_{q(\cdot) \in \mathbb{Q}} \inf_{p(\cdot) \in \mathbb{P}} J(x(\cdot, x_0)). \end{aligned} \quad (1.14)$$

Записи $\inf \sup$ и $\sup \inf$ здесь понимаются в «жаргонном» смысле; имеются в

виду конструкции, аналогичные тем, которые введены в соотношениях (1.7) и (1.8).

1.3 Краевая задача уравнения ГЯ, минимаксное решение

Определения и утверждения из книг [30, 73], необходимые для дальнейшего изложения, можно найти в приложении А.1.

Рассмотрим следующую краевую задачу для уравнения ГЯ, соответствующую игре быстродействия (1.1), (1.13) с линией жизни:

$$H(x, Du(x)) - u(x) = 0, \quad x \in \mathcal{G}, \quad (1.15)$$

$$u(x) = 0, \text{ если } x \in \partial\mathcal{T}, \quad u(x) = 1, \text{ если } x \in \partial\mathcal{F}, \quad (1.16)$$

где

$$H(x, s) = \mathcal{H}(x, s) + 1, \quad (1.17)$$

Здесь функция $\mathcal{H}(x, s)$ — гамильтониан, определенный в (1.4).

Цель данного раздела — показать, что для такой задачи существует минимаксное решение.

Предложение 1.5. Пусть выполнены условия С.1, С.2 и С.4. Тогда существует функция $\underline{u}(x)$, которая является нижним минимаксным решением задачи (1.15), (1.16) в смысле Определения А.5 (приложение А.1, стр. 137).

Доказательство. Выберем и зафиксируем число $\varkappa > 0$ и отступим от множества $\mathcal{F}$ наружу (то есть внутрь множества $\mathcal{G}$) на величину $\varkappa$: $\mathcal{F}_\varkappa = \mathcal{F} + B_\varkappa$, $\mathcal{G}_\varkappa = \mathbb{R}^d \setminus (\mathcal{F}_\varkappa \cup \mathcal{T})$ — см. рис. 1.7. Величина $\varkappa$ предполагается достаточно малой, чтобы множество $\mathcal{G}_\varkappa$ было непусто и граница $\partial\mathcal{F}_\varkappa$ была гладкой.

Построим функцию $\underline{u} : \text{cl } \mathcal{G} \rightarrow [0, 1]$ следующим образом:

$$\underline{u}(x) := \begin{cases} 0, & x \in \mathcal{G}_\varkappa \cup \partial\mathcal{T}, \\ 1 - \frac{\text{dist}(x, \mathcal{F})}{\varkappa}, & x \in \mathcal{F}_\varkappa \setminus \text{int } \mathcal{F}, \end{cases} \quad (1.18)$$

где $\text{dist}(a, A)$ есть расстояние от точки a до замкнутого множества A .

Построенная функция непрерывна, а значит и полунепрерывна сверху, и для нее выполняются условия (jj) и (jjj) из Определения А.5 (приложение А.1,

стр. 137) нижнего решения для краевой задачи. Более того, в силу гладкости и ограниченности снизу радиуса кривизны границы $\mathcal{F}$ можно подобрать величину $\varkappa$ столь малой, чтобы на множестве $\mathcal{F}_\varkappa \setminus \text{int } \mathcal{F}$ функция $\underline{u}$ была гладкой (так же, как и на границе этого множества). Будем считать, что $\varkappa$ удовлетворяет этому условию.

Осталось показать, что сужение функции $\underline{u}$ на множество $\mathcal{G}$ является нижним решением уравнения (1.15). Для этого воспользуемся Определением А.3 (приложение А.1, стр. 136) и докажем неравенство

$$H(x, s) - \underline{u}(x) \geq 0, \quad \forall s \in D^+ \underline{u}(x). \quad (1.19)$$

Здесь $D^+ \underline{u}(x)$ — это супердифференциал функции $\underline{u}(\cdot)$ в точке x (Определение А.2, приложение А.1, стр. 136).

Рассмотрим три случая:

(i) Пусть $x \in \mathcal{G}_\varkappa$. Тогда $\underline{u}(x) = 0$, $D^+ \underline{u}(x) = \{\mathbf{0}\}$. Символ $\mathbf{0}$ обозначает нуль-вектор соответствующего пространства. Имеем

$$H(x, s) - \underline{u}(x) = \min_{p \in P} \max_{q \in Q} \langle \mathbf{0}, f(x, p, q) \rangle + 1 - 0 = 1 \geq 0.$$

(ii) Пусть $x \in \text{int } \mathcal{F}_\varkappa$. Найдется точка $x_0 \in \partial \mathcal{F}$ такая, что расстояние от точки x до множества $\mathcal{F}$ есть $\text{dist}(x, \mathcal{F}) = |x - x_0|$.

Тогда в силу гладкости границы множества $\mathcal{F}$ и функции $\underline{u}$ на множестве $\text{int } \mathcal{F}_\varkappa \setminus \mathcal{F}$ имеем, что

$$x - x_0 = n_{\mathcal{F}}(x_0) |x - x_0| = n_{\mathcal{F}}(x_0) \text{dist}(x, \mathcal{F}).$$

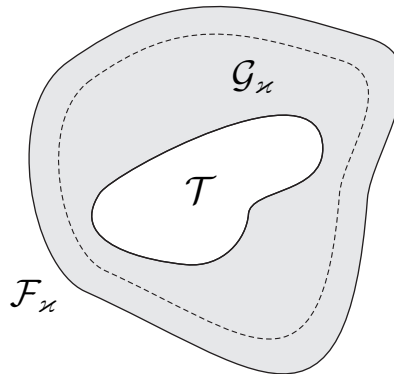


Рис. 1.7. Множества $\mathcal{T}$, $\mathcal{F}_\varkappa$ и $\mathcal{G}_\varkappa$ для построения нижнего решения. Внешняя сплошная линия — $\partial \mathcal{F}$, пунктирная линия — $\partial \mathcal{F}_\varkappa$.

В точке x имеем $\underline{u}(x) = 1 - \varkappa^{-1} \text{dist}(x, \mathcal{F})$, $D^+ \underline{u}(x) = \{\nabla \underline{u}(x)\}$ и

$$\nabla \underline{u}(x) = -(\varkappa \text{dist}(x, \mathcal{F}))^{-1} \cdot (x - x_0) = -\varkappa^{-1} n_{\mathcal{F}}(x_0).$$

Оценим выражение $H(x, s) - \underline{u}(x)$:

$$H(x, s) - \underline{u}(x) = \min_{p \in P} \max_{q \in Q} \langle \nabla \underline{u}(x), f(x, p, q) \rangle + 1 - 1 + \frac{\text{dist}(x, \mathcal{F})}{\varkappa} =$$

(добавим и вычтем $f(x_0, p, q)$)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\varkappa} \min_{p \in P} \max_{q \in Q} \langle -n_{\mathcal{F}}(x_0), f(x, p, q) + f(x_0, p, q) - f(x_0, p, q) \rangle + \frac{\text{dist}(x, \mathcal{F})}{\varkappa} = \\ &= \frac{1}{\varkappa} \min_{p \in P} \max_{q \in Q} \left\{ \langle -n_{\mathcal{F}}(x_0), f(x_0, p, q) \rangle - \langle n_{\mathcal{F}}(x_0), f(x, p, q) - f(x_0, p, q) \rangle \right\} + \\ &\quad + \frac{\text{dist}(x, \mathcal{F})}{\varkappa} \geq \\ &\geq \frac{1}{\varkappa} \min_{p \in P} \max_{q \in Q} \left\{ \langle -n_{\mathcal{F}}(x_0), f(x_0, p, q) \rangle - |n_{\mathcal{F}}(x_0)| \cdot |f(x, p, q) - f(x_0, p, q)| \right\} + \\ &\quad + \frac{\text{dist}(x, \mathcal{F})}{\varkappa} \geq \\ &\geq \frac{1}{\varkappa} \min_{p \in P} \max_{q \in Q} \langle -n_{\mathcal{F}}(x_0), f(x_0, p, q) \rangle - \frac{\lambda \varkappa}{\varkappa} + \frac{\text{dist}(x, \mathcal{F})}{\varkappa} = \\ &= \frac{1}{\varkappa} \left(\min_{p \in P} \max_{q \in Q} \langle -n_{\mathcal{F}}(x_0), f(x_0, p, q) \rangle + \text{dist}(x, \mathcal{F}) \right) - \lambda. \end{aligned}$$

Величина λ — константа из условия Липшица для функции f по переменной x из условия С.1 (из соотношения (1.3)).

В силу условия С.4 по $\bar{\eta}$ из неравенства (1.11) можно подобрать такую величину $\varkappa$, что

$$\frac{1}{\varkappa} \left(\min_{p \in P} \max_{q \in Q} \langle -n_{\mathcal{F}}(x_0), f(x_0, p, q) \rangle + \text{dist}(x, \mathcal{F}) \right) - \lambda \geq 0.$$

Из выполнения данного неравенства следует выполнение желаемого соотношения (1.19) при $x \in \text{int } \mathcal{F}_{\varkappa}$.

(iii) Пусть $x \in \partial \mathcal{F}_{\varkappa}$. Нужно подобрать такой вектор $s \in \mathbb{R}^d$, что для любого $g \in \mathbb{R}^d$ выполняется неравенство $\langle s, g \rangle - d^+ \underline{u}(x; g) \geq 0$. Рассмотрим различные производные по направлению $d^+ \underline{u}(x; g)$. Так как функция $\underline{u}$ составлена из

двух линейных функций, то, в зависимости от направления, либо $d^+ \underline{u}(x; g) = 0$, либо $d^+ \underline{u}(x; g) = \alpha > 0$. Выберем ненулевой вектор $s \in \mathbb{R}^d$ (для нулевого вектора неравенство не выполняется). Из соотношений выше получаем, что вектор s должен удовлетворять неравенству $\langle s, g \rangle \geq d^+ \underline{u}(x; g) \geq 0$. Если в качестве вектора g выбрать вектор $-s$, то $\langle s, g \rangle < 0$, следовательно, такого вектора s не существует, и $D^+ \underline{u}(x) = \emptyset$.

Таким образом, выполнение неравенства из Определения А.3 показано для всех точек из множества $\mathcal{G}$. Откуда следует, что функция $\underline{u}$ — нижнее решение уравнения (1.15). Так как функция $\underline{u}$ удовлетворяет граничному условию и непрерывна на $\partial \mathcal{G}$, то она является нижним решением задачи (1.15), (1.16) в смысле Определения А.5 (приложение А.1, стр. 137). $\square$

Итак, при выполнении условия С.4 для задачи (1.15), (1.16) существует нижнее минимаксное решение в смысле Определения А.5, и выполнены предпосылки Теоремы А.1 (приложение А.1, стр. 137). Следовательно, при этих условиях для задачи (1.15), (1.16) существует единственное минимаксное решение в смысле Определения А.6, совпадающее с минимальным верхним решением.

Теперь проверим выполнение предпосылок Теоремы А.2, в которой требуется существование верхнего решения задачи (1.15), (1.16) в смысле Определения А.4' (приложение А.1, стр. 138), то есть с дополнительным условием непрерывности верхнего решения на границе $\partial \mathcal{G}$.

Заметим, что для существования минимаксного решения уже не обязательно проверять выполнение Теоремы А.2. Тем не менее, в дальнейшем для Теоремы А.3 нам потребуется существование непрерывного верхнего решения; покажем это.

Предложение 1.6. *Пусть выполнены условия С.1, С.2 и С.3. Тогда существует функция $\bar{u}(x)$, которая является верхним минимаксным решением задачи (1.15), (1.16) в смысле Определения А.4' (приложение А.1, стр. 138).*

Доказательство. Как и при построении нижнего решения, отступим от множества $\mathcal{T}$ наружу (то есть внутрь множества $\mathcal{G}$) на некоторое небольшое расстояние $\varkappa > 0$, получив множества $\mathcal{T}_\varkappa := \mathcal{T} + B_\varkappa$, $\mathcal{G}_\varkappa = \mathbb{R}^d \setminus (\mathcal{F} \cup \mathcal{T}_\varkappa)$ — см. рис. 1.8.

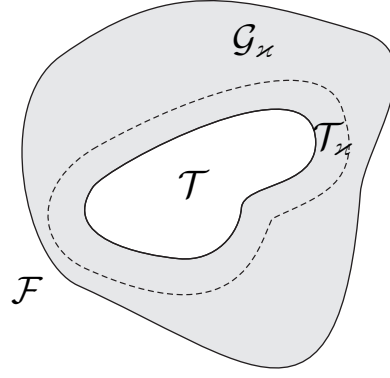


Рис. 1.8. Множества $\mathcal{T}$, $\mathcal{G}_\kappa$ и $\mathcal{F}$ для построения верхнего решения. Внутренняя сплошная линия — $\partial\mathcal{T}$, пунктирная линия — $\partial\mathcal{T}_\kappa$

Определим функцию $\bar{u} : \text{cl } \mathcal{G} \mapsto [0, 1]$ так:

$$\bar{u}(x) := \begin{cases} 1, & x \in \mathcal{G}_\kappa \cup \partial\mathcal{F}, \\ \frac{\text{dist}(x, \mathcal{T})}{\kappa}, & x \in \mathcal{T}_\kappa \setminus \text{int } \mathcal{T}. \end{cases}$$

Функция $\bar{u}$ является ограниченной, непрерывной на границе $\mathcal{G}$ и для нее выполняется граничное условие. В силу гладкости границы множества $\mathcal{G}$ можно подобрать достаточно малое κ , чтобы функция $\bar{u}$ была гладкой на множестве $\mathcal{T}_\kappa \setminus \text{int } \mathcal{T}$ и чтобы граница $\partial\mathcal{T}_\kappa$ множества $\mathcal{T}_\kappa$ была гладкой. Считаем, что это сделано.

Проверим, что $\bar{u}$ — верхнее решение задачи (1.15). По Определению А.3 (приложение А.1, стр. 136) функция $\bar{u}(x)$ — верхнее решение, если имеет место следующее неравенство

$$H(x, s) - \bar{u}(x) \leq 0, \quad \forall x \in \mathcal{G}, \quad \forall s \in D^- \bar{u}(x). \quad (1.20)$$

Здесь символ $D^- \bar{u}(x)$ — это субдифференциал функции $\bar{u}(\cdot)$ в точке x (Определение А.2, приложение А.1, стр. 136).

Рассмотрим три случая:

(i) Пусть $x \in \mathcal{G}_\kappa$. Тогда $\bar{u}(x) = 1$, $D^- \bar{u}(x) = \{\mathbf{0}\}$.

$$H(x, s) - \bar{u}(x) = \min_{p \in P} \max_{q \in Q} \langle \mathbf{0}, f(x, p, q) \rangle + 1 - 1 = 0 \leq 0.$$

(ii) Пусть $x \in \text{int } \mathcal{T}_\kappa$. Тогда в данной точке $\bar{u}(x) = \kappa^{-1} \text{dist}(x, \mathcal{T})$; пусть кратчайшее расстояние от x до $\mathcal{T}$ достигается в точке $x_0 \in \partial\mathcal{T}$, то есть

$\text{dist}(x, \mathcal{T}) = |x - x_0|$. Тогда

$$D^- \bar{u}(x) = \{\nabla \bar{u}(x)\}, \quad \nabla \bar{u}(x) = (\varkappa \text{dist}(x, \mathcal{T}))^{-1} \cdot (x - x_0) = \varkappa^{-1} n_{\mathcal{T}}(x_0).$$

Оценим выражение $H(x, s) - \bar{u}(x)$:

$$H(x, s) - \bar{u}(x) = \min_{p \in P} \max_{q \in Q} \langle \nabla \bar{u}(x), f(x, p, q) \rangle + 1 - \frac{\text{dist}(x, \mathcal{T})}{\varkappa} =$$

(добавим и вычтем $f(x_0, p, q)$)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\varkappa} \min_{p \in P} \max_{q \in Q} \langle n_{\mathcal{T}}(x_0), f(x, p, q) + f(x_0, p, q) - f(x_0, p, q) \rangle + 1 - \frac{\text{dist}(x, \mathcal{T})}{\varkappa} \leq \\ &\leq \frac{1}{\varkappa} \min_{p \in P} \max_{q \in Q} \left\{ \langle n_{\mathcal{T}}(x_0), f(x_0, p, q) \rangle + \right. \\ &\quad \left. + \langle n_{\mathcal{T}}(x_0), f(x, p, q) - f(x_0, p, q) \rangle \right\} + 1 - \frac{\text{dist}(x, \mathcal{T})}{\varkappa} \leq \\ &\leq \frac{1}{\varkappa} \min_{p \in P} \max_{q \in Q} \left\{ \langle n_{\mathcal{T}}(x_0), f(x_0, p, q) \rangle + \right. \\ &\quad \left. + |n_{\mathcal{T}}(x_0)| \cdot |f(x, p, q) - f(x_0, p, q)| \right\} + 1 - \frac{\text{dist}(x, \mathcal{T})}{\varkappa} \leq \\ &\leq \frac{1}{\varkappa} \min_{p \in P} \max_{q \in Q} \langle n_{\mathcal{T}}(x_0), f(x_0, p, q) \rangle + \frac{\lambda \varkappa}{\varkappa} + 1 - \frac{\text{dist}(x, \mathcal{T})}{\varkappa} = \\ &= \frac{1}{\varkappa} \left(\min_{p \in P} \max_{q \in Q} \langle n_{\mathcal{T}}(x_0), f(x_0, p, q) \rangle - \text{dist}(x, \mathcal{T}) \right) + \lambda + 1. \end{aligned}$$

Тогда в силу условия С.3 по $\underline{\eta}$ из неравенства (1.10) можно подобрать такое число $\varkappa$, что

$$\frac{1}{\varkappa} \left(\min_{p \in P} \max_{q \in Q} \langle n_{\mathcal{T}}(x_0), f(x_0, p, q) \rangle - \text{dist}(x, \mathcal{T}) \right) + \lambda + 1 \leq 0.$$

Из выполнения данного неравенства следует выполнение желаемого соотношения (1.20) при $x \in \text{int } \mathcal{T}_{\varkappa}$.

(iii) Пусть $x \in \partial \mathcal{T}_{\varkappa}$. Нужно подобрать такой вектор $s \in \mathbb{R}^d$, что для любого $g \in \mathbb{R}^d$ выполняется неравенство $\langle s, g \rangle - d^- \bar{u}(x; g) \leq 0$. Рассмотрим различные производные по направлению $d^- \bar{u}(x; g)$. Так как функция $\bar{u}$ составлена из двух линейных функций, то, в зависимости от направления, либо $d^- \bar{u}(x; g) = 0$, либо $d^- \bar{u}(x; g) = \alpha < 0$. Выберем ненулевой вектор $s \in \mathbb{R}^d$ (для нулевого

вектора неравенство не выполняется). Из соотношений выше получаем, что вектор s должен удовлетворять неравенству $\langle s, g \rangle \leq d^- \bar{u}(x; g) \leq 0$. Если в качестве вектора g выбрать вектор s , то $\langle s, g \rangle > 0$, следовательно, такого вектора s не существует, и $D^- \bar{u}(x) = \emptyset$.

Таким образом, выполнение неравенства из Определения А.3 показано для всех точек из множества $\mathcal{G}$, откуда следует, что функция $\bar{u}$ — верхнее решение уравнения (1.15). Так как функция $\bar{u}$ удовлетворяет граничному условию и условию непрерывности на $\partial \mathcal{G}$, то она также является и верхним решением задачи (1.15), (1.16) в смысле Определения А.4'. $\square$

Итак, если $\partial \mathcal{T}$ — допустимая зона (выполнено условие С.3), то для задачи (1.15), (1.16) существует верхнее решение в смысле Определения А.4' и выполняется Теорема А.2. Значит, в этом предположении для задачи (1.15), (1.16) существует минимаксное решение.

Таким образом, можно утверждать, что при выполнении свойств С.3 и С.4 для задачи (1.15), (1.16) существует единственное и непрерывное минимаксное решение по Теореме А.3. Интерес представляет доказательство существования минимаксного решения задачи (1.15), (1.16) в каких-либо более слабых предположениях.

1.4 Совпадение функции цены и минимаксного решения

В книгах [73, 30] совпадение функции цены классической задачи быстрогодействия и минимаксного решения краевой задачи для соответствующего уравнения Гамильтона–Якоби доказывается следующим образом. Сначала доказывается, что для любой константы, большей величины минимаксного решения (после замены Кружкова), гарантированный результат первого игрока может быть сделан меньше, чем эта константа благодаря выбору стратегии $\mathcal{P}$ первого игрока и разбиения Δ дискретной схемы управления; об этом говорит Теорема 19.6 в параграфе § 19.6 книги [30]. Затем доказывается, что для любой константы, меньшей чем величина минимаксного решения (после замены Кружкова), гарантированный результат второго игрока может быть сделан больше, чем эта константа с помощью выбора стратегии $\mathcal{Q}$ второго

игрока и разбиения Δ дискретной схемы управления; об этом говорит Теорема 19.8 в параграфе § 19.8 книги [30]. Затем заключается, что гарантированные результаты сходятся к величине минимаксного решения, что вместе с их сходимостью к функции цены доказывает совпадение функции цены и минимаксного решения.

Теоремы 19.6 и 19.8 не являются абсолютно симметричными. В то время как Теорема 19.6 использует понятие минимаксного решения, в Теореме 19.8 используется нижнее минимаксное решение. Эта несимметричность объясняется различными целями игроков. В классической ситуации цель первого игрока — привести траекторию системы на целевое множество, а цель второго игрока — уклонить движение от ϵ -окрестности этого множества.

Используем подобный подход для доказательства совпадения функции цены и минимаксного решения краевой задачи для игры быстрогодействия с линией жизни. Необходимо отметить, что в Теореме 1.4 вместо минимаксного решения используется верхнее минимаксное решение, так как первый игрок стремится не только привести систему на целевое множество $\mathcal{T}$, но и избежать ϵ -окрестности множества $\mathcal{F}$.

Сначала докажем теорему об оценке гарантированного результата второго игрока для задачи быстрогодействия с линией жизни.

1.4.1 Оценка гарантированного результата второго игрока

Пусть $u : \text{cl}\mathcal{G} \mapsto [0, 1]$ — минимаксное решение (по Определению А.6; приложение А.1, стр. 137) в задаче (1.15), (1.16) и $u_{\natural}$ — нижнее решение (в смысле Определения А.5, см. там же) этой же задачи. Введем следующее преобразование функции $u_{\natural}$ [30, § 19.7, стр.273]:

$$u_{\natural}^{\alpha}(x) := \max_{y \in \text{cl}\mathcal{G}} \{u_{\natural}(y) - w_{\alpha}(x, y)\},$$

где

$$w_{\alpha}(x, y) := \frac{(\alpha^{2/\nu} + |x - y|^2)^{\nu}}{\alpha}, \quad (1.21)$$

$$\nu := (2 + 2\lambda)^{-1}, \quad 0 < \alpha < \min \{1/3, [\lambda(1 + \lambda)]^{-1}\},$$

и λ — коэффициент из условия Липшица (1.3).

Выберем точку

$$y_\alpha(x) \in \operatorname{Arg} \max_{y \in \operatorname{cl} \mathcal{G}} [u_\natural(y) - w_\alpha(x, y)].$$

Определим стратегию обратной связи $\mathcal{Q}_\alpha : \operatorname{cl} \mathcal{G} \mapsto Q$ второго игрока равенством

$$\mathcal{Q}_\alpha(x) = q_0(x, s_\alpha(x)), \quad (1.22)$$

где q_0 — это экстремальная предстратегия, определенная равенством

$$q_0(x, s) \in \operatorname{Arg} \max_{q \in Q} \left[\min_{p \in P} \langle s, f(x, p, q) \rangle \right],$$

а вектор $s_\alpha(x)$ задается соотношением

$$s_\alpha(x) := -(D_x w_\alpha)(x, y_\alpha(x)) = (D_y w_\alpha)(x, y_\alpha(x)).$$

Теорема 1.3. Пусть выполнены условия С.1–С.4; это гарантирует существование и единственность минимаксного решения $u(\cdot) : \operatorname{cl} \mathcal{G} \rightarrow [0, 1]$ для задачи (1.15), (1.16) в смысле Определения А.6. Пусть x_0 — некоторая точка области $\mathcal{G}$. Пусть величина θ выбрана так, что $\theta < -\ln(1 - u(x_0))$. Тогда существует нижнее минимаксное решение $u_\natural$ этой задачи (в смысле Определения А.5), удовлетворяющее неравенству

$$\theta < \omega_\natural := -\ln(1 - u_\natural(x_0)), \quad (1.23)$$

и такое число $\bar{\epsilon} > 0$, что для любого $\epsilon \in (0, \bar{\epsilon})$ и для $\alpha(\epsilon) = \epsilon/7$ выполнена оценка

$$T_2^\epsilon(x_0, \mathcal{Q}_{\alpha(\epsilon)}) \geq \theta. \quad (1.24)$$

Здесь $\mathcal{Q}_{\alpha(\epsilon)}$ — стратегия обратной связи второго игрока, определенная (1.22), а величина $T_2^\epsilon(x_0, \mathcal{Q}_{\alpha(\epsilon)})$ задается соотношениями (1.8).

Доказательство. В силу Предложения 1.5 требуемое нижнее решение $u_\natural$ можно выбрать следующим образом. Минимаксное решение существует благодаря выполнению условия С.4, из чего следует существование последовательности непрерывных на границе множества $\mathcal{G}$ нижних решений, сходящихся к минимаксному. Среди элементов этой последовательности можно

выбрать такое нижнее решение, что будет выполнено неравенство (1.23).

Пусть $\bar{\epsilon} \leq \min \{\epsilon_0, \epsilon_*/2, 1, 7[\lambda(1 + \lambda)]^{-1}\}$, где $\epsilon_* := \text{dist}(x_0, \partial\mathcal{G})$, а ϵ_0 выбирается из Предложения 1.2. Выберем произвольную величину $0 < \epsilon < \bar{\epsilon}$ и положим $\alpha(\epsilon) = \epsilon/7$. Пусть также $\mathbb{X}(x_0, \mathcal{Q}_{\alpha(\epsilon)})$ — пучок конструктивных движений второго игрока, отвечающий стратегии $\mathcal{Q}_{\alpha(\epsilon)}$.

Как говорилось выше, в изучаемой игре имеется три типа траекторий. Соответственно, при рассмотрении траекторий системы из пучков движений $\mathbb{X}(x_0, \mathcal{Q}_{\alpha(\epsilon)})$, $0 < \epsilon \leq \bar{\epsilon}$, могут возникнуть три случая:

(I) Для любого $0 < \epsilon \leq \bar{\epsilon}$ (и, соответственно, $\alpha(\epsilon) = \epsilon/7$) и для всех траекторий $x(\cdot) \in \mathbb{X}(x_0, \mathcal{Q}_{\alpha(\epsilon)})$ имеем:

(I.1) либо движение $x(\cdot)$ достигает множества $\mathcal{F}_\epsilon$ до момента θ , уклоняясь при этом от множества $\mathcal{T}_\epsilon$, то есть найдется момент времени $t_* \in [0, \theta]$ такой, что $\text{dist}(x(t_*), \mathcal{F}) < \epsilon$ и $\text{dist}(x(t), \mathcal{T}) > \epsilon$ для любого $t \leq t_*$;

(I.2) либо движение $x(\cdot)$ до момента θ не приходит ни на $\mathcal{T}_\epsilon$, ни на $\mathcal{F}_\epsilon$, то есть выполняются неравенства $\text{dist}(x(t), \mathcal{F}) \geq \epsilon$ и $\text{dist}(x(t), \mathcal{T}) > \epsilon$ при всех $t \leq \theta$.

(II) Наоборот, существует последовательность $\{\epsilon_n\} \rightarrow 0$, $\epsilon_n \in (0, \bar{\epsilon}]$, такая, что для любого ϵ_n найдется движение $x_n^*(\cdot) \in \mathbb{X}(x_0, \mathcal{Q}_{\alpha(\epsilon_n)})$, которое до момента θ приходит на множество $\mathcal{T}_{\epsilon_n}$, уклоняясь от множества $\mathcal{F}_{\epsilon_n}$, то есть найдутся траектория $x_n^*(\cdot) \in \mathbb{X}(x_0, \mathcal{Q}_{\alpha(\epsilon_n)})$ и момент $t_n^* < \theta$, для которых имеем $\text{dist}(x_n^*(t_n^*), \mathcal{T}) \leq \epsilon_n$ и $\text{dist}(x_n^*(t), \mathcal{F}) \geq \epsilon_n$ для всех $0 \leq t < t_n^*$.

В случае (I) стратегия $\mathcal{Q}_{\alpha(\epsilon)}$ второго игрока либо уклоняет любое конструктивное движение системы от некоторой окрестности терминального множества до момента θ , либо приводит движение на множество $\mathcal{F}_\epsilon$ до момента θ , уклоняясь при этом от множества $\mathcal{T}_\epsilon$. Поэтому для любого $0 < \epsilon \leq \bar{\epsilon}$ и для любого $x(\cdot) \in \mathbb{X}(x_0, \mathcal{Q}_{\alpha(\epsilon)})$ имеем, что $\tau_\epsilon(x(\cdot)) \geq \theta$, а значит, и $T_2^\epsilon(x_0, \mathcal{Q}_{\alpha(\epsilon)}) \geq \theta$.

Покажем теперь, что случай (II) приводит к противоречию, которое будет достигнуто с использованием некоторой оценки на изменение функции $u_{\mathfrak{H}}^\alpha$ вдоль движений $x_n^*(\cdot)$ системы из имеющейся последовательности и непрерывности этой функции на границе множества $\mathcal{T}$.

Опираясь на предположение случая (II), рассмотрим последовательность $\{\epsilon_n\} \rightarrow 0$, $\epsilon_n \in (0, \bar{\epsilon}]$, последовательность $\{\alpha_n : \alpha_n = \alpha(\epsilon_n) = \epsilon_n/7\}$, функциональную последовательность $\{x_n^*(\cdot) : x_n^*(\cdot) \in \mathbb{X}(x_0, \mathcal{Q}_{\alpha_n})\}$ и последователь-

ность моментов времени

$$\{t_n^* \in [0, \theta] : \text{dist}(x_n^*(t_n^*), \mathcal{T}) \leq \epsilon_n, \text{dist}(x_n^*(t), \mathcal{F}) \geq \epsilon_n, t \in [0, t_n^*]\}.$$

По определению конструктивных движений, для каждой траектории $x_n^*(\cdot)$ из пучка движений $\mathbb{X}(x_0, \mathcal{Q}_{\alpha_n})$ найдется последовательность пошаговых движений $x_{n,k}(\cdot) \in \mathbb{X}(\bar{x}_{n,k}, \mathcal{Q}_{\alpha_n}, \Delta_{n,k})$ такая, что

$$\bar{x}_{n,k} \rightarrow x_0, \quad \text{diam } \Delta_{n,k} \rightarrow 0, \quad \|x_{n,k}(\cdot) - x_n^*(\cdot)\|_{C[0, \theta]} \rightarrow 0$$

при $k \rightarrow \infty$.

По последовательности ϵ_n выберем из каждой последовательности $\{x_{n,k}(\cdot)\}$ такое движение $x_n(\cdot) \in \mathbb{X}(\bar{x}_n, \mathcal{Q}_{\alpha_n}, \Delta_n) =: \mathbb{X}_n^{\alpha_n}$, что

$$\|x_n(\cdot) - x_n^*(\cdot)\|_{C[0, \theta]} < \epsilon_n.$$

Пусть $\Delta_n = \{t_i\}$.

Поскольку для конструктивного движения $x_n^*(\cdot)$ ($x_n^*(0) = x_0$), выполнены неравенства

$$\text{dist}(x_0, \mathcal{T}) > 2\epsilon_n, \quad \text{dist}(x_n^*(t), \mathcal{F}) \geq \epsilon_n, \quad t \in [0, t_n^*]; \quad \text{dist}(x_n^*(t_n^*), \mathcal{T}) \leq \epsilon_n,$$

то можно выбрать пошаговое движение $x_n(\cdot)$, приближающее траекторию $x_n^*(\cdot)$, и натуральное k_n так, что выполнены условия

$$\begin{aligned} & \text{dist}(x_n(t_i), \partial\mathcal{F}) \geq \epsilon_n/2 \Rightarrow \\ & \Rightarrow \text{dist}(x_n(t_i), \partial\mathcal{G}) \geq \epsilon_n/2 = 7\alpha_n/2 > 3\alpha_n, \quad i = 1, \dots, k_n; \\ & \text{dist}(x_n(t_{k_n+1}), \mathcal{T}) < 2\epsilon_n, \quad t_{k_n+1} \in [0, \theta]. \end{aligned}$$

Так как $\epsilon_n \rightarrow 0$, то $\bar{x}_n \rightarrow x_0$, $\delta_n := \text{diam } \Delta_n \rightarrow 0$.

Можно доказать соотношение об изменении функции $u_{\natural}^{\alpha_n}$ вдоль движения $x_n(\cdot) \in \mathbb{X}_n^{\alpha_n}$, аналогичное соотношению из доказательства теоремы 19.6 [30, § 19.6, стр. 269–272]:

$$u_{\natural}^{\alpha_n}(x_n(\tau)) \geq 1 - [1 - u_{\natural}^{\alpha_n}(x_n(t_i))]e^{\tau-t_i} - (\tau - t_i)e^{\tau-t_i}h(\delta_n). \quad (1.25)$$

Здесь $\tau \in [t_i, t_{i+1}] \cap [0, \theta]$, $\text{dist}(x_n(t_i), \mathcal{G}) > 3\alpha_n$, $h(\delta_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Далее будем использовать обозначение $\bar{t}_n := t_{k_n+1}$. Суммируя (1.25) по всем отрезкам $[t_i, t_{i+1}]$ от $i = 1$ до $i = k_n$, получим

$$\begin{aligned} u_{\natural}^{\alpha_n}(x_n(\bar{t}_n)) &\geq 1 - [1 - u_{\natural}^{\alpha_n}(x_0)]e^{\bar{t}_n} - \bar{t}_n e^{\bar{t}_n} h(\delta_n) \geq \\ &\geq 1 - e^{\bar{t}_n - \omega_{\natural}} - e^{\bar{t}_n} \alpha_n - \bar{t}_n e^{\bar{t}_n} h(\delta_n). \end{aligned} \quad (1.26)$$

На основе числовых последовательностей $\{\alpha_n\}$ и $\{\bar{t}_n\}$ и функциональных последовательностей $\{u_{\natural}^{\alpha_n}(\cdot)\}$ и $\{x_n(\cdot)\}$ получаем следующую числовую последовательность:

$$\left\{ u_{\natural}^{\alpha_n}(x_n(\bar{t}_n)) \right\}, \text{ где } u_{\natural}^{\alpha_n}(x) := \max_{y \in \text{cl } \mathcal{G}} \{u_{\natural}(y) - w_{\alpha_n}(x, y)\}. \quad (1.27)$$

Так же, как и в рассуждениях в разделе 19.5 книги [30, § 19.5, стр. 268], можно показать, что максимум в (1.27) достигается в такой точке $y_{\alpha_n}(x)$, что $|y_{\alpha_n}(x) - x| \leq 2\alpha_n$.

Докажем это. В дальнейшем скобки у y_{α_n} с x внутри будут опущены. Очевидно, что

$$u_{\natural}^{\alpha_n}(x) \geq u_{\natural}(x) - w_{\alpha_n}(x, x) \geq -\alpha_n.$$

Тогда $w_{\alpha_n}(x, y_{\alpha_n}) = u_{\natural}(y_{\alpha_n}) - u_{\natural}^{\alpha_n}(x) \leq 1 + \alpha_n$. Отсюда

$$\begin{aligned} \left[\alpha_n^{2/\nu} + |x - y_{\alpha_n}(x)|^2 \right]^{\nu} &\leq (1 + \alpha_n) \alpha_n, \\ |x - y_{\alpha_n}(x)|^2 &\leq [(1 + \alpha_n) \alpha_n]^{1/\nu} - \alpha_n^{2/\nu} \leq [(1 + \alpha_n) \alpha_n]^{1/\nu} \leq 2\alpha_n^2 < 4\alpha_n^2. \end{aligned}$$

Поэтому $y_{\alpha_n}(x) \in O_{2\alpha_n}(x)$. Здесь и далее, символ $O_{\rho}(x)$ обозначает открытый шар с центром в точке x и радиусом ρ . Отсюда следует, что

$$u_{\natural}^{\alpha_n}(x) = \max_{y \in O_{2\alpha_n}(x)} \{u_{\natural}(y) - w_{\alpha_n}(x, y)\}.$$

Последовательность $\{\bar{t}_n\}$ ограничена, поэтому в ней можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{\bar{t}_{n_k}\} \rightarrow \bar{t}$. Чтобы не загромождать запись двойными индексами, положим, что сама последовательность $\{\bar{t}_n\}$ сходится. Поскольку для всех n верно неравенство $\bar{t}_n < \theta$, то $\bar{t} \leq \theta$.

Рассмотрим теперь последовательность $\{x_n(\cdot)\}$ на интервале $[0, \bar{t}]$. Эле-

менты этой последовательности — решения дифференциального включения, поэтому $\{x_n(\cdot)\}$ является последовательностью, равномерно ограниченной и равномерно непрерывной на $[0, \bar{t}]$. Следовательно, можно применить теорему Арцела – Асколи [7] и выделить равномерно сходящуюся подпоследовательность; пусть сходящейся последовательностью является сама последовательность $\{x_n(\cdot)\}$. Обозначим ее предел через $\bar{x}(\cdot)$.

В силу равномерной сходимости $x_n(\cdot) \Rightarrow \bar{x}(\cdot)$, имеем, что предельная функция $\bar{x}(\cdot)$ непрерывна и, как следствие, $x_n(\bar{t}_n) \rightarrow \bar{x}(\bar{t})$ при $n \rightarrow \infty$. Поскольку $\text{dist}(x_n(\bar{t}_n), \mathcal{T}) < 2\epsilon_n$, а $\epsilon_n \rightarrow 0$, то получаем, что $\bar{x}(\bar{t}) \in \partial\mathcal{T}$ и $u_{\natural}(\bar{x}(\bar{t})) = 0$ по определению нижнего решения (оно удовлетворяет граничному условию на $\partial\mathcal{T}$).

Покажем теперь, что $\{u_{\natural}^{\alpha_n}(x_n(\bar{t}_n))\} \rightarrow u_{\natural}(\bar{x}(\bar{t}))$:

$$\begin{aligned} & \left| u_{\natural}^{\alpha_n}(x_n(\bar{t}_n)) - u_{\natural}(\bar{x}(\bar{t})) \right| = \\ &= \left| \max_{y \in O_{2\alpha_n}(x_n(\bar{t}_n))} \left\{ u_{\natural}(y) - w_{\alpha_n}(x_n(\bar{t}_n), y) \right\} - u_{\natural}(\bar{x}(\bar{t})) \right| = \\ &= \left| u_{\natural}(y_{\alpha_n}(x_n(\bar{t}_n))) - w_{\alpha_n}(x_n(\bar{t}_n), y_{\alpha_n}(x_n(\bar{t}_n))) - u_{\natural}(\bar{x}(\bar{t})) \right| \leq \\ &\leq \left| u_{\natural}(y_{\alpha_n}(x_n(\bar{t}_n))) - u_{\natural}(\bar{x}(\bar{t})) \right| + \left| w_{\alpha_n}(x_n(\bar{t}_n), y_{\alpha_n}(x_n(\bar{t}_n))) \right|. \quad (1.28) \end{aligned}$$

Рассмотрим по отдельности первый и второй модули в последней строке (1.28). Имеем $y_{\alpha_n}(x_n(\bar{t}_n)) \in O_{2\alpha_n}(x_n(\bar{t}_n))$, последовательности $x_n(\bar{t}_n) \rightarrow \bar{x}(\bar{t})$ и $\alpha_n \rightarrow 0$, следовательно, $y_{\alpha_n}(x_n(\bar{t}_n)) \rightarrow \bar{x}(\bar{t})$. Поскольку $\bar{x}(\bar{t}) \in \partial\mathcal{T}$, а функция $u_{\natural}(\cdot)$, будучи нижним решением, непрерывна на границе $\mathcal{T}$, то числовая последовательность $u_{\natural}(y_{\alpha_n}(x_n(\bar{t}_n)))$ сходится к $u_{\natural}(\bar{x}(\bar{t}))$ и первый модуль стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Теперь обратимся ко второму модулю. Поскольку верны неравенства

$$\text{dist}(x_n(\bar{t}_n), \mathcal{T}) \leq 2\epsilon_n = 14\alpha_n \quad \text{и} \quad |x_n(\bar{t}_n) - y_{\alpha_n}(x_n(\bar{t}_n))| \leq 2\alpha_n,$$

то $\text{dist}(y_{\alpha_n}(x_n(\bar{t}_n)), \mathcal{T}) \leq 16\alpha_n$. Пусть

$$\Psi_{\alpha_n} := \max_{z \in \text{cl}(\mathcal{T}_{16\alpha_n} \cap \mathcal{G})} u_{\natural}(z) =: u_{\natural}(z_{\alpha_n}). \quad (1.29)$$

В равенстве (1.29) максимум достигается в силу того, что функция $u_{\natural}(\cdot)$ полунепрерывна сверху и максимум ищется на компактном множестве. Имеем ограниченную последовательность $\{z_{\alpha_n}\}$, где z_{α_n} определяется в (1.29). Из нее можно выделить подпоследовательность, сходящуюся, очевидно, к точке границы $\mathcal{T}$ при $n \rightarrow \infty$. Пусть сама последовательность $\{z_{\alpha_n}\}$ сходится. В силу непрерывности функции $u_{\natural}(\cdot)$ на границе множества $\mathcal{T}$ получаем, что $\Psi_{\alpha_n} = u_{\natural}(z_{\alpha_n}) \rightarrow 0$.

Тогда

$$\begin{aligned} 0 \leq w_{\alpha_n}(x_n(\bar{t}_n), y_{\alpha_n}(x_n(\bar{t}_n))) &= \\ &= u_{\natural}(y_{\alpha_n}(x_n(\bar{t}_n))) - u_{\natural}^{\alpha_n}(x_n(\bar{t}_n)) \leq \Psi_{\alpha_n} + \alpha_n \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Стало быть, оба слагаемых в правой части в последней строке выражения (1.28) идут к нулю с ростом n , а значит, идет к нулю и левая. Следовательно, получаем, что $u_{\natural}^{\alpha_n}(x_n(\bar{t}_n)) \rightarrow u_{\natural}(\bar{x}(\bar{t}))$.

С учетом этого перейдем в (1.26) к пределу по $n \rightarrow \infty$ (тогда $\alpha_n \rightarrow 0$ и $\delta_n \rightarrow 0$) и получим

$$0 = u_{\natural}(\bar{x}(\bar{t})) \geq 1 - e^{\bar{t} - \omega_{\natural}} > 0,$$

противоречие. Следовательно, случай (II) невозможен. Теорема доказана. $\square$

1.4.2 Оценка гарантированного результата первого игрока

Теперь сформулируем и докажем теорему об оценке гарантированного результата первого игрока в задаче быстрогодействия с линией жизни.

Пусть $u^{\natural}$ — верхнее минимаксное решение задачи (1.15), (1.16) в смысле Определения А.4'. Введем следующее преобразование функции $u^{\natural}$ [30, §19.5, стр. 267]:

$$u_{\alpha}^{\natural}(x) := \min_{y \in \text{cl } \mathcal{G}} \{u^{\natural}(y) + w_{\alpha}(x, y)\}.$$

Функция $w_{\alpha}(x, y)$ определяется равенством (1.21).

Определим стратегию обратной связи $\mathcal{P}_{\alpha} : \text{cl } \mathcal{G} \mapsto P$ первого игрока равенством

$$\mathcal{P}_{\alpha}(x) = p_0(x, s^{\alpha}(x)). \quad (1.30)$$

Здесь функция p_0 — это экстремальная предстратегия, определенная соотно-

шением

$$p_0(x, s) \in \operatorname{Arg} \min_{p \in P} \left[\max_{q \in Q} \langle s, f(x, p, q) \rangle \right],$$

а вектор $s^\alpha(x)$ задается как

$$s^\alpha(x) := (D_x w_\alpha)(x, y^\alpha(x)) = -(D_y w_\alpha)(x, y^\alpha(x)),$$

где

$$y^\alpha(x) \in \operatorname{Arg} \min_{y \in \operatorname{cl} \mathcal{G}} [u^\natural(y) + w_\alpha(x, y)].$$

(Индексы α сделаны верхними, чтобы отличать эти величины от используемых в определении (1.22) стратегии второго игрока.)

Теорема 1.4. Пусть выполнены условия С.1–С.4; это гарантирует существование и единственность минимаксного решения $u(\cdot) : \operatorname{cl} \mathcal{G} \rightarrow [0, 1]$ задачи (1.15), (1.16) в смысле Определения А.6'. Пусть x_0 — такая точка множества $\mathcal{G}$, что верно неравенство $u(x_0) < 1$. Пусть величина θ выбрана так, что $\theta > -\ln(1 - u(x_0))$. Тогда существует верхнее решение $u^\natural$ этой задачи (в смысле Определения А.4'), удовлетворяющее соотношению

$$\theta > \omega^\natural := -\ln(1 - u^\natural(x_0)), \quad (1.31)$$

и число $\bar{\epsilon} > 0$ такое, что для любого $\epsilon \in (0, \bar{\epsilon}]$ и для $\alpha(\epsilon) = \epsilon/3$ выполнена оценка

$$T_1^\epsilon(x_0, \mathcal{P}_{\alpha(\epsilon)}) \leq \theta. \quad (1.32)$$

Здесь $\mathcal{P}_{\alpha(\epsilon)}$ — стратегия обратной связи первого игрока, определенная (1.30), а величина $T_1^\epsilon(x_0, \mathcal{P}_{\alpha(\epsilon)})$ задается равенством (1.7).

Доказательство. В силу Предложения 1.6 верхнее решение $u^\natural$ можно выбрать следующим образом. Минимаксное решение существует благодаря выполнению условия С.3, откуда следует существование последовательности верхних решений, непрерывных на границе $\mathcal{G}$ и сходящихся к минимаксному решению. Среди элементов этой последовательности можно выбрать верхнее решение так, что выполняется неравенство (1.31).

Выберем $0 < \epsilon_1 < \epsilon_0$ (ϵ_0 выбирается по Предложению 1.2) так, чтобы для

любого $0 < \epsilon < \epsilon_1$ было выполнено неравенство

$$e^\theta \cdot \epsilon/3 < e^{\theta - \omega^\sharp} - 1. \quad (1.33)$$

Положим $\bar{\epsilon} \leq \min \{ \epsilon_1, \epsilon_*/2, 1, 3[\lambda(1 + \lambda)]^{-1} \}$, где $\epsilon_* := \text{dist}(x_0, \partial\mathcal{G})$.

Пусть также $\alpha(\epsilon) = \epsilon/3$ и $\mathbb{X}(x_0, \mathcal{P}_{\alpha(\epsilon)})$ — пучок конструктивных движений, отвечающих стратегии $\mathcal{P}_{\alpha(\epsilon)}$.

Рассмотрим следующие случаи:

(I) Для всех $0 < \epsilon \leq \bar{\epsilon}$ любая траектория $x(\cdot) \in \mathbb{X}(x_0, \mathcal{P}_{\alpha(\epsilon)})$ приходит на множество $\mathcal{T}_\epsilon$ до момента θ , уклоняясь при этом от множества $\mathcal{F}_\epsilon$, то есть имеем, что для любой траектории $x(\cdot) \in \mathbb{X}(x_0, \mathcal{P}_{\alpha(\epsilon)})$ найдется момент $t_* \in [0, \theta]$ такой, что $\text{dist}(x(t_*), \mathcal{T}) \leq \epsilon$ и выполнено неравенство $\text{dist}(x(t), \mathcal{F}) \geq \epsilon$ при $t \leq t_*$.

(II) Наоборот, существует такая последовательность $\{\epsilon_n\} \rightarrow 0$, $\epsilon_n \in (0, \bar{\epsilon}]$, что для любого числа ϵ_n найдется траектория $x_n^*(\cdot) \in \mathbb{X}(x_0, \mathcal{P}_{\alpha(\epsilon_n)})$ такая, что

(II.1) либо она приходит на множество $\mathcal{F}_{\epsilon_n}$ до момента θ , уклоняясь при этом от множества $\mathcal{T}_{\epsilon_n}$, то есть найдется момент $t_n^* \in [0, \theta]$ такой, что $\text{dist}(x_n^*(t_n^*), \mathcal{F}) < \epsilon_n$ и выполнено неравенство $\text{dist}(x_n^*(t), \mathcal{T}) > \epsilon_n$ при $t \leq t_n^*$;

(II.2) либо она до момента θ не приходит ни на $\mathcal{T}_{\epsilon_n}$, ни на $\mathcal{F}_{\epsilon_n}$, то есть выполняются неравенства $\text{dist}(x_n^*(t), \mathcal{T}) > \epsilon_n$ и $\text{dist}(x_n^*(t), \mathcal{F}) \geq \epsilon_n$ при всех $t \leq \theta$.

Случай (I) является очевидным, так как мы немедленно получаем неравенство (1.32).

Рассмотрим случай (II.2).

Возьмем любое конструктивное движение $x^*(\cdot) \in \{x_n^*(\cdot)\}$ и соответствующее ему $\epsilon = \epsilon_n$ из формулировки случая (II). По определению конструктивных движений, для этой траектории $x^*(\cdot) \in \mathbb{X}(x_0, \mathcal{P}_\alpha)$ найдутся последовательность точек $\bar{x}_n \rightarrow x_0$ и последовательность разбиений $\{\Delta_n\}$ положительной полуоси времени такие, что $\delta_n = \text{diam } \Delta_n \rightarrow 0$ и существует последовательность

$$\{x_n(\cdot) \in \mathbb{X}(\bar{x}_n, \mathcal{P}_\alpha, \Delta_n) =: \mathbb{X}_n^\alpha\} \rightrightarrows x^*(\cdot).$$

Выберем такое ограничение δ' на диаметр разбиения δ_n , что при $\delta_n < \delta'$

выполнено неравенство

$$\|x(\cdot) - x^*(\cdot)\|_{C[0,\theta]} < \epsilon - \min \left\{ \text{dist}(x^*(t), \mathcal{T}_\epsilon) : t \in [0, \theta] \right\}, \quad (1.34)$$

где $x(\cdot) \in \mathbb{X}(\bar{x}_n, \mathcal{P}_\alpha, \Delta_n) =: \mathbb{X}_n^\alpha$ — пошаговое движение из множества пошаговых движений с диаметром разбиения δ_n . Возьмем некоторое пошаговое движение $x(\cdot) \in \mathbb{X}_n^\alpha$ при условии $\delta_n < \delta'$, удовлетворяющее неравенству (1.34).

В силу выполнения случая (II.2) и (1.34) для движения $x(\cdot)$ верно, что для любых $t_i \in \Delta_n$, $t_i < \theta$, выполнено неравенство $\text{dist}(x(t_i), \mathcal{T}) > \epsilon$.

Напомним, что

$$u_\alpha^\natural(x) = \min_{y \in \text{cl } \mathcal{G}} \{u^\natural(y) + w(x, y)\},$$

для траектории $x(\cdot) \in \mathbb{X}_n^\alpha$ и любого $\tau \in [t_i, t_{i+1}] \cap [0, \theta]$ выполнено

$$u_\alpha^\natural(x(\tau)) \leq 1 - \left[1 - u_\alpha^\natural(x(t_i))\right] e^{\tau - t_i} + (\tau - t_i) e^{\tau - t_i} h(\delta_n), \quad (1.35)$$

(это неравенство доказано в [30, § 19.6, стр. 270–272] при условиях $3\alpha \leq \epsilon$ и $\text{dist}(x(t_i), \mathcal{T}) > \epsilon$) и

$$u_\alpha^\natural(x_0) \leq u^\natural(x_0) + \alpha = 1 - e^{-\omega^\natural} + \alpha.$$

Здесь $h(\delta_n)$ зависит только от δ_n и $h(\delta_n) \rightarrow 0$ при $\delta_n \rightarrow 0$.

Следовательно, в силу (1.33) найдется $\delta'' < \delta'$ такое, что для любого $\delta_n < \delta''$ будет выполнено неравенство

$$e^\theta [\epsilon/3 + \theta h(\delta_n)] < e^{\theta - \omega^\natural} - 1. \quad (1.36)$$

Из оценки (1.35) и неравенства (1.36) можно получить

$$\begin{aligned} u_\alpha^\natural(x(\theta)) &\leq 1 - [1 - u_\alpha^\natural(x_0)] e^\theta + \theta e^\theta h(\delta_n) \leq \\ &\leq 1 - e^{\theta - \omega^\natural} + e^\theta \alpha + e^\theta \theta h(\delta_n) < 0. \end{aligned}$$

Таким образом, в случае (II.2) приходим к неравенству $u_\alpha^\natural(x(\theta)) < 0$. С другой стороны, из определения $u_\alpha^\natural$ получаем, что $u_\alpha^\natural(x(\theta)) > 0$, значит, получено противоречие, из которого следует, что случай (II.2) невозможен.

Рассмотрим теперь случай (II.1) и перейдем от конструктивных движений

к пошаговым, как это было сделано в Теореме 1.3. В целом, аналогично доказательству Теоремы 1.3 будет получено противоречие, основанное на оценке изменения функции $u_\alpha^\natural$ вдоль движения системы и непрерывности этой функции на границе множества $\mathcal{F}$.

Опираясь на предположение случая (II.1), рассмотрим последовательность $\{\epsilon_n\} \rightarrow 0$, $\epsilon_n \in (0, \bar{\epsilon}]$, и последовательность $\{\alpha_n : \alpha_n = \alpha(\epsilon_n) = \epsilon_n/3\}$, функциональную последовательность $\{x_n^*(\cdot) : x_n^*(\cdot) \in \mathbb{X}(x_0, \mathcal{P}_{\alpha_n})\}$ и набор моментов времени $\{t_n^*\}$.

По последовательностям $\{x_n^*(\cdot)\}$ и $\{t_n^*\}$ строим последовательности пошаговых движений $\{x_n(\cdot) \in \mathbb{X}(\bar{x}_n, \mathcal{P}_{\alpha_n}, \Delta_n)\}$, $\bar{x}_n \rightarrow x_0$, $\text{diam } \Delta_n \rightarrow 0$, и набор моментов времени $\{\bar{t}_n\}$, $\bar{t}_n \in [0, \theta]$ таких, что выполнены неравенства $\text{dist}(x_n(\bar{t}_n), \mathcal{F}) < \epsilon_n$ и $\text{dist}(x_n(t), \mathcal{T}) > \epsilon_n$ при $t \leq \bar{t}_n$.

Для доказательства в случае (II.1) снова используем рекуррентные оценки (1.35) и получаем, что

$$\begin{aligned} u_{\alpha_n}^\natural(x_n(\bar{t}_n)) &\leq 1 - [1 - u_{\alpha_n}^\natural(x_0)]e^{\bar{t}_n} + \bar{t}_n e^{\bar{t}_n} h(\delta_n) \leq \\ &\leq 1 - e^{\bar{t}_n - \omega^\natural} + e^{\bar{t}_n} \alpha_n + e^{\bar{t}_n} \bar{t}_n h(\delta_n), \end{aligned} \quad (1.37)$$

где момент $\bar{t}_n \in \Delta_n$ таков, что $\bar{t}_n < \theta$, $\text{dist}(x_n(\bar{t}_{n-1}), \mathcal{F}) \geq \epsilon_n$, а $\text{dist}(x_n(\bar{t}_n), \mathcal{F}) < \epsilon_n$.

Аналогично доказательству Теоремы 1.3 строим сходящиеся последовательности (пусть это сами последовательности $\{x_n(\cdot)\}$, $\{\bar{t}_n\}$)

$$\begin{aligned} \{x_n(\cdot) : x_n(\cdot) \in \mathbb{X}_n^{\alpha_n}\} &\Rightarrow \bar{x}(\cdot), \\ \{\bar{t}_n : \text{dist}(x_n(\bar{t}_n), \mathcal{F}) < \epsilon_n\} &\rightarrow \bar{t}, \end{aligned}$$

причем $\bar{x}(\bar{t}) \in \partial\mathcal{F}$. По построенным последовательностям получаем

$$\left\{ u_{\alpha_n}^\natural(x_n(\bar{t}_n)) \right\}, \text{ где } u_{\alpha_n}^\natural(x) := \min_{y \in \text{cl } \mathcal{G}} \{ u^\natural(y) + w_{\alpha_n}(x, y) \}.$$

Доказательство сходимости $\left\{ u_{\alpha_n}^\natural(x_n(\bar{t}_n)) \right\} \rightarrow u^\natural(\bar{x}(\bar{t}))$ может быть проведено аналогично доказательству из Теоремы 1.3 для $\alpha_n(\epsilon) = \epsilon/3$.

В (1.37) переходим к пределу по $n \rightarrow \infty$. Получаем

$$1 = u^\natural(\bar{x}(\bar{t})) \leq 1 - e^{\bar{t} - \omega^\natural} < 1$$

и приходим к противоречию. Теорема доказана. $\square$

Таким образом, доказано, что гарантированный результат первого игрока задачи (1.1), (1.13) может быть сделан сколь угодно близким сверху к минимаксному решению задачи (1.15), (1.16) в смысле Определения А.6', а гарантированный результат второго игрока — сколь угодно близким снизу к минимаксному решению в смысле Определения А.6. При условиях С.1–С.4 в силу Теоремы А.3 минимаксное решение задачи (1.15), (1.16) в смысле обоих определений единственно и непрерывно. Кроме того, при условиях С.1–С.4 гарантированные результаты обоих игроков совпадают друг с другом и, как следствие, с непрерывным минимаксным решением, откуда вытекает совпадение минимаксного решения и функции цены игры (1.1), (1.13).

1.5 Комментарий о классических дифференциальных играх быстрогодействия

Как упоминалось ранее, в книгах [73, 30] для классической задачи быстрогодействия сформулированы Теоремы 19.6 и 19.8, которые сравнивают гарантированные результаты игроков с минимаксным решением краевой задачи соответствующего уравнения Гамильтона–Якоби. Формулировки и доказательства этих теорем не являются симметричными из-за того, что целью первого игрока является приведение траектории на замкнутое терминальное множество, а целью второго — уклонение от замкнутого множества. Дополнение до терминального множества может рассматриваться как открытое фазовое ограничение для второго игрока, в то же время у первого игрока нет фазовых ограничений.

В диссертации Теоремы 1.3 и 1.4 для дифференциальной игры быстрогодействия с линией жизни являются аналогами Теорем 19.8 и 19.6. Отметим, что в игре с линией жизни первый игрок также должен уклоняться от замкнутого множества, т.е. имеет открытое фазовое ограничение. Это усложнило соответствующие теоремы тем, что учет незамкнутости фазовых ограничений в Теореме 19.8 (для второго игрока) надо было перенести в формулировку и доказательство Теоремы 1.4 (для первого игрока). Поскольку доказательство Теоремы 19.8 в книгах [73, 30] опущено, то доказательство Теоремы 19.8 было самостоятельно сделано автором. Идеи этого доказательства использованы в

доказательствах Теорем 1.3 и 1.4.

1.6 Связь функций цены обычной задачи и задачи быстродействия с линией жизни

1.6.1 Постановка классической задачи быстродействия

Рассмотрим классическую задачу быстродействия с динамикой (1.1), геометрическими ограничениями на управления P и Q и терминальным множеством $\mathcal{T}$. Результат такой игры на траектории $x(\cdot; x_0)$ вычисляется при помощи функционала платы

$$\tilde{\tau}(x(\cdot; x_0)) = \begin{cases} \min\{t : x(t; x_0) \in \mathcal{T}\}, \\ +\infty, & \text{если } \forall t \ x(t; x_0) \notin \mathcal{T}. \end{cases}$$

Введем гарантированные результаты игроков и функцию цены, как это описано в [73, 30]. Для траектории $x(\cdot)$ определим функционал

$$\tilde{\tau}_\varepsilon(x(\cdot)) := \min \{t \in \mathbb{R}^+ : x(t) \in \mathcal{T}_\varepsilon\},$$

где $\mathcal{T}_\varepsilon$ — ε -окрестность терминального множества $\mathcal{T}$: $\mathcal{T}_\varepsilon := \mathcal{T} + B_\varepsilon$.

Гарантированный результат $\tilde{T}_1^0(x_0)$ первого игрока в точке x_0 определяется как

$$\begin{aligned} \tilde{T}_1^\varepsilon(x_0, \mathcal{P}) &:= \sup \left\{ \tilde{\tau}_\varepsilon(x(\cdot)) : x(\cdot) \in \mathbb{X}(x_0, \mathcal{P}) \right\}, & \tilde{T}_1^\varepsilon(x_0) &:= \inf_{\mathcal{P} \in \mathbb{P}} \tilde{T}_1^\varepsilon(x_0, \mathcal{P}), \\ \tilde{T}_1^0(x_0) &:= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \tilde{T}_1^\varepsilon(x_0). \end{aligned}$$

Аналогично определяется гарантированный результат $\tilde{T}_2^0(x_0)$ второго игрока в точке x_0 :

$$\begin{aligned} \tilde{T}_2^\varepsilon(x_0, \mathcal{Q}) &:= \inf \left\{ \tilde{\tau}_\varepsilon(x(\cdot)) : x(\cdot) \in \mathbb{X}(x_0, \mathcal{Q}) \right\}, & \tilde{T}_2^\varepsilon(x_0) &:= \sup_{\mathcal{Q} \in \mathbb{Q}} \tilde{T}_2^\varepsilon(x_0, \mathcal{Q}), \\ \tilde{T}_2^0(x_0) &:= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \tilde{T}_2^\varepsilon(x_0). \end{aligned}$$

В разделах 1.3 и 1.4 было показано, что при выполнении условий С.1–С.4

функция цены является непрерывной. Из-за этого нет необходимости выбирать последовательность точек $\bar{x}_l$ из некоторой окрестности x_0 , как это было сделано в разделе 1.2, так как значение функции цены меняется непрерывным образом.

Известно, что при сделанных ранее предположениях цена $\tilde{T}$ в классической дифференциальной игре быстродействия существует, так что справедливо равенство

$$\tilde{T}(x_0) := \tilde{T}_1^0(x_0) = \tilde{T}_2^0(x_0).$$

Доказательство этого факта содержится в книгах [12, 61].

1.6.2 Совпадение функций цены

Рассмотрим классическую задачу быстродействия и задачу быстродействия с линией жизни с одинаковыми динамиками и множествами $P, Q, \mathcal{T}$. Считаем, что выполнено условие С.3, то есть что вся граница терминального множества $\mathcal{T}$ является допустимой зоной первого игрока. Выберем точку $x_0 \in \mathcal{G}$. Пусть значение функции цены классической задачи быстродействия $\tilde{T}(x_0) = \theta$.

По условию С.1 функция f является непрерывной и удовлетворяет условию подлинейного роста, то есть существует число $k > 0$ такое, что для любых $x \in \mathbb{R}^d$, $p \in P$ и $q \in Q$ выполнено неравенство $|f(x, p, q)| \leq k(1 + |x|)$. Это следует из условия С.1 глобальной липшицевости функции f .

Рассмотрим функцию

$$M(x) := \max_{p \in P, q \in Q} |f(x, p, q)|,$$

которая предоставляет верхнюю оценку на величину возможных скоростей системы в точке x . Функция M является непрерывной и удовлетворяет условию подлинейного роста с той же константой k . Максимум достигается, так как множества P и Q — компакты.

Выберем измеримые реализации $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ управлений первого и второго игроков, определенные на полуоси $t \geq 0$. Они порождают движение $x(\cdot) = x(\cdot; x_0, u(\cdot), v(\cdot))$ системы, выходящее из начальной точки x_0 . Для это-

го движения рассмотрим следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned}
 M(x(t)) &\leq |k(1 + |x(t)|)| = k \left(1 + \left| x_0 + \int_0^t f(x(\tau), u(\tau), v(\tau)) d\tau \right| \right) \leq \\
 &\leq k \left(1 + |x_0| + \left| \int_0^t f(x(\tau), u(\tau), v(\tau)) d\tau \right| \right) \leq \\
 &\leq k \left(1 + |x_0| + \int_0^t |f(x(\tau), u(\tau), v(\tau))| d\tau \right) \leq k \left(1 + |x_0| + \int_0^t M(x(\tau)) d\tau \right).
 \end{aligned}$$

Таким образом, мы попадаем под условия классической леммы [55]:

Лемма (Гронуолла). Пусть функция $g : [t_0, \alpha) \rightarrow \mathbb{R}_+$, $\alpha < +\infty$, $g(t) \in C[t_0, \alpha)$. Пусть $a \geq 0$, $b(t) \in C[t_0, \alpha)$, $b(t) \geq 0$ такие, что выполнено неравенство

$$g(t) \leq a + \int_{t_0}^t b(\tau) g(\tau) d\tau.$$

Тогда

$$g(t) \leq a \cdot \exp \left(\int_{t_0}^t b(\tau) d\tau \right).$$

В качестве функции g берем функцию $t \mapsto M(x(t))$, определенную при $t \in [0, \theta)$. В качестве константы a рассматриваем $k + k|x_0|$, функция $b(t) \equiv k$. Тогда получаем, что

$$\begin{aligned}
 M(x(t)) &= \max_{p \in P, q \in Q} |f(x(t), p, q)| \leq k(1 + |x_0|) \exp \left(\int_0^t k dt \right) = \\
 &= k(1 + |x_0|) e^{kt} \leq k(1 + |x_0|) e^{k\theta} \text{ при } t \leq \theta.
 \end{aligned}$$

Выберем функцию $\widetilde{M}(\theta) := k(1 + |x_0|) e^{k\theta}$. Пусть $B(x_0, \theta \widetilde{M}(\theta))$ — замкнутый шар радиуса $\theta \widetilde{M}(\theta)$ с центром в точке x_0 .

Сначала рассмотрим классическую задачу быстрогодействия. Обозначим символом $\mathcal{P}^*$ оптимальную стратегию первого игрока. Тогда для любого конструктивного движения $x(\cdot) \in \mathbb{X}(x_0, \mathcal{P}^*)$ выполнено соотношение

$\{x(t) : t \in [0, \theta]\} \subset B(x_0, \theta \widetilde{M}(\theta))$ и выполнено неравенство $\tilde{\tau}(x(\cdot)) \leq \theta$.

Рассмотрим теперь игру быстрогодействия с линией жизни, и напомним, что гарантированные результаты первого и второго игрока в точке x_0 — это $T_1^0(x_0)$ и $T_2^0(x_0)$, соответственно. В качестве множества игры $\mathcal{G}$ возьмем такое множество, что на его внешней границе выполняется условие С.4 и $B(x_0, \theta \widetilde{M}(\theta)) \subset \mathcal{W}$. Тогда в игре с линией жизни эта же стратегия $\mathcal{P}^*$ гарантирует тот же результат для первого игрока, то есть под действием стратегии $\mathcal{P}^*$ для любого конструктивного движения $x(\cdot)$ из пучка $\mathbb{X}(x_0, \mathcal{P}^*)$ и для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ выполняется неравенство $\tau_\varepsilon(x(\cdot)) \leq \theta$ (это неравенство выполнено, так как все эти траектории принадлежат множеству $\mathcal{G}$, поэтому у второго игрока не появляется преимущество), следовательно, $T_1^\varepsilon(x_0, \mathcal{P}^*) \leq \theta$ и $T_1^\varepsilon(x_0) \leq \theta$, а устремляя ε к нулю получаем, что $T_1^0(x_0) \leq \theta$. Здесь и ниже величина ε_0 выбирается из Предложения 1.2.

Проведем аналогичные рассуждения с точки зрения второго игрока. В классической задаче быстрогодействия для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая стратегия $\mathcal{Q}_\varepsilon$ и число $\delta = \delta(\varepsilon) \in (0, \varepsilon)$, что для любого конструктивного движения $x(\cdot) \in \mathbb{X}(x_0, \mathcal{Q}_\varepsilon)$ выполнено неравенство $\tilde{\tau}_\delta(x(\cdot)) \geq \theta - \varepsilon$. Кроме того,

$$\{x(t) : t \in [0, \theta - \varepsilon]\} \subset B(x_0, (\theta - \varepsilon) \widetilde{M}(\theta - \varepsilon)) \subset B(x_0, \theta \widetilde{M}(\theta)).$$

Перейдем к игре с линией жизни. Выберем множества $\mathcal{G}$ и $\mathcal{W}$ так, что $B(x_0, \theta \widetilde{M}(\theta)) \subset \mathcal{W}$ и на внешней границе множества $\mathcal{G}$ выполнено условие С.4. Тогда для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ все конструктивные движения $x(\cdot) \in \mathbb{X}(x_0, \mathcal{Q}_\varepsilon)$ лежат внутри множества $\mathcal{W}$, следовательно, для любого $x(\cdot) \in \mathbb{X}(x_0, \mathcal{Q}_\varepsilon)$ неравенство $\tau_\delta(x(\cdot)) \geq \theta - \varepsilon$ выполнено для задачи быстрогодействия с линией жизни, а значит $T_2^\delta(x_0, \mathcal{Q}_\varepsilon) \geq \theta - \varepsilon$. Отсюда получаем, что $T_2^\delta(x_0) \geq \theta - \varepsilon$. Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем $\delta \rightarrow 0$ и $T_2^0(x_0) \geq \theta$. Итак, $T_2^0(x_0) \geq \theta \geq T_1^0(x_0)$. Также для задачи быстрогодействия с линией жизни выполнено неравенство (1.9), откуда следует

$$T_2^0(x_0) = \theta = T_1^0(x_0).$$

Итак, если в качестве множества $\mathcal{G}$ выбирать такое множество, что $B(x_0, \theta \widetilde{M}(\theta)) \subset \mathcal{W}$, то функция цены классической задачи быстрогодействия совпадает с функцией цены задачи быстрогодействия с линией жизни в точ-

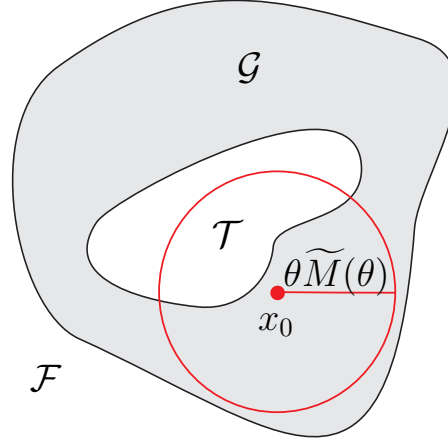


Рис. 1.9. Иллюстрация к Теореме 1.6

ке x_0 . Получаем, что доказана следующая

Теорема 1.5. *Предположим, что выполнены условия C.1–C.4; k — константа из условия подлинейного роста функции $f: |f(x, p, q)| \leq k(1 + |x|)$ для любых $x \in \mathbb{R}^d$, $p \in P$ и $q \in Q$. Пусть функция цены $\widetilde{T}(x_0)$ классической игры быстрогодействия в точке x_0 равняется θ . Пусть $\widetilde{M}(\theta) = k(1 + |x_0|)e^{k\theta}$. Тогда, если замкнутый шар $B(x_0, \theta \widetilde{M}(\theta))$ вложен в $\mathcal{W}$ (см. рис. 1.9), то значение функции цены $T(x_0)$ задачи быстрогодействия с линией жизни в точке x_0 равняется θ .*

Более того, выполняется и обратная теорема (так как функция цены игры быстрогодействия с линией жизни всегда не меньше, чем функция цены классической задачи быстрогодействия):

Теорема 1.6. *Предположим, что выполнены условия C.1–C.4; k — константа из условия подлинейного роста функции $f: |f(x, p, q)| \leq k(1 + |x|)$ для любых $x \in \mathbb{R}^d$, $p \in P$ и $q \in Q$. Пусть функция цены $T(x_0)$ игры быстрогодействия с линией жизни в точке x_0 равняется θ . Пусть $\widetilde{M}(\theta) = k(1 + |x_0|)e^{k\theta}$. Тогда, если замкнутый шар $B(x_0, \theta \widetilde{M}(\theta))$ вложен в $\mathcal{W}$ (см. рис. 1.9), то значение функции цены классической задачи быстрогодействия в точке x_0 равняется θ .*

2 Численная процедура построения функции цены

2.1 Численная схема

В целом, построение численной схемы и обоснование ее сходимости проводятся аналогично тому, как в статье [36] строится и обосновывается численная схема для классической задачи быстрогодействия. При этом функция цены игры строится как обобщенное (вязкостное) решение соответствующей краевой задачи для уравнения ГЯ. Несмотря на то, что рассматриваемая численная схема, в целом, повторяет предложенную в [36], требуется аккуратное доказательство ее сходимости при применении к рассматриваемой краевой задаче, отличной от той, которая исследуется в [36].

2.1.1 Дискретная схема

Заменим непрерывную динамику (1.1) дискретной по времени динамикой с шагом $h > 0$:

$$x_n = x_{n-1} + hf(x_{n-1}, p_{n-1}, q_{n-1}), \quad n = 1, \dots, N, \quad x_0 \text{ задано,}$$

где $p_n \in P$ и $q_n \in Q$.

На основе принципа динамического программирования можно получить следующее представление для $w_h(\cdot)$ — функции цены задачи, дискретной по времени:

$$w_h(x) = \begin{cases} \gamma \max_{q \in Q} \min_{p \in P} w_h(z(x, p, q)) + 1 - \gamma, & \text{если } x \in \mathcal{G}, \\ 0, & \text{если } x \in \mathcal{T}, \\ 1, & \text{если } x \in \mathcal{F}. \end{cases}$$

Здесь $\gamma = e^{-h}$, $z(x, p, q) = x + hf(x, p, q)$.

Затем проведем дискретизацию по пространству с шагом k . Накинем на пространство $\mathbb{R}^d$ сетку $\mathcal{L}$ с шагом k , состоящую из узлов $l_{i_1, \dots, i_n} = (x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$, $i_1, \dots, i_n \in \mathbb{Z}$, $x_{i_j} = ki_j$. (В принципе, шаги сетки по разным координатным направлениям могут быть различными, но это не меняет идеи построения

численной схемы.) Ниже для узлов решетки $\mathcal{L}$ в основном будет использоваться линейная индексация l_ν , $\nu \in \mathbb{Z}$. Символ $\mathcal{L}_{\mathcal{T}}$ обозначает множество тех узлов решетки $\mathcal{L}$, которые попадают в множество $\mathcal{T}$, символ $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}$ — множество узлов, попавших в множество $\mathcal{G}$, а $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$ — множество узлов, попавших в множество $\mathcal{F}$. В теоретических построениях сетка предполагается бесконечной.

Для любой точки $x \in \mathbb{R}^d$ можно найти симплекс $S(x)$ с вершинами $\{l_s(x)\}$ из одной ячейки сетки $\mathcal{L}$ такой, что точка x принадлежит симплексу $S(x)$. Предполагается, что вместе с введением сетки $\mathcal{L}$ мы выбрали и разбиение пространства на симплексы с вершинами в узлах этой сетки. Далее можно получить *барицентрические (локальные) координаты* $\lambda_s(x)$ точки x относительно вершин $l_s(x)$ симплекса $S(x)$:

$$x = \sum_{s=1}^{d+1} \lambda_s(x) l_s(x), \quad \lambda_s(x) \geq 0, \quad \sum_{s=1}^{d+1} \lambda_s(x) = 1.$$

Иногда аргументы коэффициентов λ и вершин l будут опускаться, если из контекста ясно, для какой точки строятся локальные координаты.

Заменим функцию $w_h(\cdot)$ новой функцией $w(\cdot)$, значения $w(l_\nu)$ которой на узлах l_ν сетки $\mathcal{L}$ заданы и формируют бесконечный вектор $W = (w(l_\nu))_{\nu \in \mathbb{Z}}$. Значение $w(x)$ в какой-то точке x , которая не является узлом решетки, восстанавливается с помощью кусочно-линейной аппроксимации на основе локальных координат точки x :

$$w_{loc}(x, W) = \sum_{s=1}^{d+1} \lambda_s w(l_s). \quad (2.1)$$

Тем самым получена следующая характеристика функции цены полностью дискретизированной задачи:

$$w(l_\nu) = \begin{cases} \gamma \max_{q \in Q} \min_{p \in P} w_{loc}(z(l_\nu, p, q), W) + 1 - \gamma, & \text{если } l_\nu \in \mathcal{L}_{\mathcal{G}}, \\ 0, & \text{если } l_\nu \in \mathcal{L}_{\mathcal{T}}, \\ 1, & \text{если } l_\nu \in \mathcal{L}_{\mathcal{F}}. \end{cases}$$

Данная характеристика имеет рекурсивный характер: значение $w(l_\nu)$ в узле l_ν зависит от значения локальной реконструкции w_{loc} , которое, в свою очередь,

зависит от значений функции $w(\cdot)$ в узлах сетки, в том числе, возможно, в узле l_ν . Такой вид получаемых соотношений характерен для применения принципа динамического программирования. В дальнейшем на основе этой формулы будет предложен итерационный численный метод построения вектора W и функции w . Кроме того, из этой характеристики видно, что при задании функции $w(\cdot)$ при практической реализации метода необходимо хранить только значения на узлах из части сетки $\mathcal{L}_G$, попадающих в множество $\mathcal{G}$. Если множество $\mathcal{G}$ ограничено, то часть $\mathcal{L}_G$ содержит лишь конечное число узлов и может быть представлена в компьютере.

Для выбранной сетки $\mathcal{L} = \{l_\nu\}_{\nu \in \mathbb{Z}}$ обозначим через $\mathcal{M}$ множество всех бесконечных векторов $W = (w(l_\nu))_{\nu \in \mathbb{Z}}$. Обозначим через $\mathcal{M}_1$ те векторы в $\mathcal{M}$, элементы $w(l_\nu)$ которых подчиняются неравенству $0 \leq w(l_\nu) \leq 1$. С использованием вектора $W = (w(l_\nu))_{\nu \in \mathbb{Z}}$ для каждого $s \in \mathbb{Z}$ определим оператор $F_s : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$F_s(W) = \begin{cases} \gamma \max_{q \in Q} \min_{p \in P} w_{loc}(z(l_s, p, q), W) + 1 - \gamma, & \text{если } l_s \in \mathcal{L}_G, \\ 0, & \text{если } l_s \in \mathcal{L}_T, \\ 1, & \text{если } l_s \in \mathcal{L}_F. \end{cases}$$

Здесь $w_{loc} : \mathbb{R}^d \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ — это локальная реконструкция (2.1) функции $w(\cdot)$, определенной с помощью вектора W . Совокупность значений операторов F_s по всем индексам s (по всем узлам l_s) определяет оператор $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$.

В множестве $\mathcal{M}$ можно ввести частичный порядок поэлементного сравнения: $W_1 \leq W_2 \Leftrightarrow \forall \nu \in \mathbb{Z} \ w_1(l_\nu) \leq w_2(l_\nu)$. Также в этом множестве разумно ввести норму $|W|_\infty = \sup \{|w(l_\nu)| : \nu \in \mathbb{Z}\}$.

Докажем предложение об операторе F , аналогичное [36, стр. 124–125, Proposition 2.1].

Предложение 2.1. *Оператор $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ имеет следующие свойства:*

1. $F(\mathcal{M}_1) \subseteq \mathcal{M}_1$;
2. F — монотонный по отношению к частичному порядку в $\mathcal{M}$;
3. F — сжимающее отображение в $\mathcal{M}_1$ по норме $|\cdot|_\infty$.

Доказательство. В основном, доказательство повторяет аналогичное в [36, pp.124–125].

1. Пусть $W \in \mathcal{M}_1$ и $l_s \in \mathcal{L}_G$.

$$F_s(W) = \gamma \max_{q \in Q} \min_{p \in P} \sum_{m=1}^{d+1} \lambda_m(z(l_s, p, q)) W_m(z(l_s, p, q)) + 1 - \gamma.$$

Здесь $W_m(z)$ — это элемент вектора W , соответствующий узлу, который является m -й вершиной симплекса $S(z(l_s, p, q))$.

Поскольку $\lambda_m(z(l_s, p, q)) \geq 0$, $\sum \lambda_m(z(l_s, p, q)) = 1$ и $0 \leq W_m \leq 1$, то

$$0 \leq F_s(W) \leq \gamma \max_{q \in Q} \min_{p \in P} \sum_{m=1}^{d+1} \lambda_m(z(l_s, p, q)) + 1 - \gamma = \gamma + 1 - \gamma = 1.$$

Если $l_s \notin \mathcal{L}_G$, то $F_s(W) = 0$ или $F_s(W) = 1$, то получаем, что $F : \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_1$.

2. Пусть $U, V \in \mathcal{M}$ и $U \geq V$. Если $l_s \in \mathcal{L}_G$, тогда

$$\begin{aligned} F_s(V) - F_s(U) &= \gamma \max_{q \in Q} \min_{p \in P} \sum_{m=1}^{d+1} \lambda_m(z(l_s, p, q)) V_m(z(l_s, p, q)) - \\ &\quad - \gamma \max_{q \in Q} \min_{p \in P} \sum_{m=1}^{d+1} \lambda_m(z(l_s, p, q)) U_m(z(l_s, p, q)). \end{aligned}$$

Возьмем управление $\bar{p}(q)$ первого игрока, доставляющее минимум в выражении для $F_s(U)$ для фиксированного q . Тогда первое слагаемое в выражении увеличится, так как $\bar{p}(q)$ не обязательно доставляет минимум для $F_s(V)$, а второе слагаемое не изменится. Получим

$$\begin{aligned} &\gamma \max_{q \in Q} \min_{p \in P} \sum_{m=1}^{d+1} \lambda_m(z(l_s, p, q)) V_m(z(l_s, p, q)) - \\ &\quad - \gamma \max_{q \in Q} \min_{p \in P} \sum_{m=1}^{d+1} \lambda_m(z(l_s, p, q)) U_m(z(l_s, p, q)) \leq \\ &\quad \leq \gamma \max_{q \in Q} \sum_{m=1}^{d+1} \lambda_m(z(l_s, \bar{p}(q), q)) V_m(z(l_s, \bar{p}(q), q)) - \end{aligned}$$

$$- \gamma \max_{q \in Q} \sum_{m=1}^{d+1} \lambda_m(z(l_s, \bar{p}(q), q)) U_m(z(l_s, \bar{p}(q), q)).$$

Теперь возьмем управление $\bar{q}$ второго игрока, доставляющее максимум в выражении для уменьшаемого, то есть

$$\bar{q} \in \text{Arg max}_{q \in Q} \left[\gamma \sum_{m=1}^{d+1} \lambda_m(z(l_s, \bar{p}(q), q)) V_m(z(l_s, \bar{p}(q), q)) \right].$$

Отсюда

$$\begin{aligned} & \gamma \max_{q \in Q} \sum_{m=1}^{d+1} \lambda_m(z(l_s, \bar{p}(q), q)) V_m(z(l_s, \bar{p}(q), q)) - \\ & - \gamma \max_{q \in Q} \sum_{m=1}^{d+1} \lambda_m(z(l_s, \bar{p}(q), q)) U_m(z(l_s, \bar{p}(q), q)) \leq \\ & \leq \gamma \sum_{m=1}^{d+1} \lambda_m(z(l_s, \bar{p}(\bar{q}), \bar{q})) (V_m(z(l_s, \bar{p}(\bar{q}), \bar{q})) - U_m(z(l_s, \bar{p}(\bar{q}), \bar{q}))) \leq 0. \end{aligned}$$

Если $l_s \in \mathcal{L}_{\mathcal{T}}$ или $l_s \in \mathcal{L}_{\mathcal{F}}$, то $F_s(V) - F_s(U) = 0$, поэтому F — монотонный оператор.

3. Пусть $U, V \in \mathcal{M}_1$. Если $l_s \in \mathcal{L}_{\mathcal{G}}$, тогда

$$\begin{aligned} |F_s(V) - F_s(U)| & \leq \gamma \sum_{m=1}^{d+1} \lambda_m(z(l_s, \bar{p}(\bar{q}), \bar{q})) \times \\ & \times |V_m(z(l_s, \bar{p}(\bar{q}), \bar{q})) - U_m(z(l_s, \bar{p}(\bar{q}), \bar{q}))| \leq \\ & \leq \gamma \max_m |V_m(z(l_s, \bar{p}(\bar{q}), \bar{q})) - U_m(z(l_s, \bar{p}(\bar{q}), \bar{q}))| \times \\ & \times \sum_{m=1}^{d+1} \lambda_m(z(l_s, \bar{p}(\bar{q}), \bar{q})) \leq \gamma |V - U|_{\infty}. \end{aligned}$$

Это выполнено для любого $s \in \mathbb{Z}$.

Если $l_s \in \mathcal{L}_{\mathcal{T}}$ или $l_s \in \mathcal{L}_{\mathcal{F}}$, тогда $F_s(V) - F_s(U) = 0$. Отсюда следует, что F — сжимающее отображение, так как $\gamma = e^{-h} < 1$.

□

Как следствие из этого предложения имеем, что существует единственная неподвижная точка $\mathbf{W}$ оператора F , которая определяет функцию $\mathbf{w}(\cdot)$ в $\mathbb{R}^d$. Эта функция зависит от шагов дискретизации по времени h и пространству k исходной задачи:

$$\mathbf{w}(x) = \begin{cases} \sum_m \lambda_m \mathbf{w}(l_m), & \text{если } x \notin \mathcal{L} \text{ и } x = \sum_m \lambda_m l_m, \\ \gamma \max_{q \in Q} \min_{p \in P} \mathbf{w}_{loc}(z(l_s, p, q), \mathbf{W}) + 1 - \gamma, & \text{если } l_s \in \mathcal{L}_{\mathcal{G}}, \\ 0, & \text{если } l_s \in \mathcal{L}_{\mathcal{T}}, \\ 1, & \text{если } l_s \in \mathcal{L}_{\mathcal{F}}. \end{cases} \quad (2.2)$$

2.1.2 Вязкостное решение уравнения ГЯ

Рассмотрим следующую краевую задачу для уравнения ГЯ

$$z + H(x, Dz) = 0, \quad x \in \mathcal{G} \quad (2.3)$$

с краевыми условиями

$$\begin{aligned} z(x) &= 0 \text{ при } x \in \partial\mathcal{T}, \\ z(x) &= 1 \text{ при } x \in \partial\mathcal{F}. \end{aligned}$$

Здесь символ Dz обозначает градиент функции z . Функция H называется *гамильтонианом* и в случае динамики (1.1) определяется как

$$H(x, p) = \max_{p \in P} \min_{q \in Q} \langle -f(x, p, q) \cdot p \rangle - 1, \quad x \in \mathcal{G}, \quad p \in \mathbb{R}^d. \quad (2.4)$$

Определения вязкостных решений приведены в приложении А.2. Доказательство того, что минимаксное решение краевой задачи с данным гамильтонианом существует и совпадает с вязкостным решением, приведено в приложении А.3.

Определение 2.1. [36] Рассмотрим две последовательности вещественных чисел $h_n > 0$ и $k_n > 0$ (шаги дискретизации по времени и пространству). Будем называть их допустимыми, если $h_n \rightarrow 0$ и $k_n/h_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Рассмотрим допустимые последовательности вещественных чисел $h_n > 0$, $k_n > 0$ и последовательность решений $\{\mathbf{w}_n(\cdot)\}$ задачи (2.2), им соответствующую.

Доказательство последующих фактов опирается на понятие *слабого предела в вязкостном смысле*, введенное в [38]. Верхний и нижний слабые пределы функциональной последовательности $\{\mathbf{w}_n(\cdot)\}$ в вязкостном смысле определяются как

$$\begin{aligned} \limsup_{(y,n) \rightarrow (x,\infty)} \mathbf{w}_n(y) &:= \lim_{\delta \rightarrow 0+} \sup \{ \mathbf{w}_n(y) : |x - y| \leq \delta, n \geq 1/\delta \}, \\ \liminf_{(y,n) \rightarrow (x,\infty)} \mathbf{w}_n(y) &:= \lim_{\delta \rightarrow 0+} \inf \{ \mathbf{w}_n(y) : |x - y| \leq \delta, n \geq 1/\delta \}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Для существования таких пределов нужно, чтобы последовательность $\mathbf{w}_n$ была равномерно локально ограничена [35, стр. 288, Definition 1.4]. Отличие слабых пределов от поточечных заключается в том, что рассматриваются значения функций $\mathbf{w}_n$ в окрестности точки x , в которой определяется предельная функция.

Определение 2.2. Для некоторой области Ω полунепрерывная сверху функция $\bar{v} : \text{cl } \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет на границе Ω неравенству $\bar{v} + H(x, D\bar{v}) \leq 0$ в вязкостном смысле, если $\forall \varphi \in C^1(\text{cl } \Omega)$ и точки $x \in \partial\Omega$, в которой разность $\bar{v} - \varphi$ достигает локального максимума, выполняется неравенство $\bar{v}(x) + H(x, D\varphi(x)) \leq 0$.

Определение 2.3. Для некоторой области Ω полунепрерывная снизу функция $\underline{v} : \text{cl } \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет на границе Ω неравенству $\underline{v} + H(x, D\underline{v}) \geq 0$ в вязкостном смысле, если $\forall \varphi \in C^1(\text{cl } \Omega)$ и точки $x \in \partial\Omega$, в которой разность $\underline{v} - \varphi$ достигает локального минимума, выполняется неравенство $\underline{v}(x) + H(x, D\varphi(x)) \geq 0$.

2.2 Сходимость численной схемы

Для задачи быстрогодействия с линией жизни сформулируем и докажем предложение, аналогичное [36, стр. 127, Lemma 2.2]. В оригинальном предложении были опущены некоторые выкладки, например: отсутствовало доказательство для верхнего вязкостного решения; доказательство неравенств,

аналогичных неравенствам (2.11) и (2.12), было проведено не полностью; отсутствовали некоторые существенные замечания (например, в оригинальном предложении функция φ определена на замыкании области игры, но используется так, будто определена на всем $\mathbb{R}^d$). Доказательство, приведенное ниже, дает полную картину этих рассуждений.

Предложение 2.2. *Рассмотрим допустимые последовательности вещественных чисел $h_n > 0$ и $k_n > 0$, и пусть $\{\mathbf{w}_n(\cdot)\}$ — соответствующая им последовательность решений (2.2). Обозначим*

$$\bar{v}(x) := \limsup_{(y,n) \rightarrow (x,\infty)} \mathbf{w}_n(y), \quad \underline{v}(x) := \liminf_{(y,n) \rightarrow (x,\infty)} \mathbf{w}_n(y).$$

Функции $\bar{v}$ и $\underline{v}$ являются, соответственно, нижним и верхним вязкостным решением уравнения (2.3) с граничными условиями

$$\underline{v} \geq 0 \text{ на } \partial\mathcal{T}, \quad (2.6)$$

$$\bar{v} \leq 0 \text{ или } \bar{v} + H(x, D\bar{v}) \leq 0 \text{ на } \partial\mathcal{T}, \quad (2.7)$$

$$\underline{v} \geq 1 \text{ или } \underline{v} + H(x, D\underline{v}) \geq 0 \text{ на } \partial\mathcal{F}, \quad (2.8)$$

$$\bar{v} \leq 1 \text{ на } \partial\mathcal{F}. \quad (2.9)$$

Вторые неравенства в (2.7) и (2.8) понимаются в вязкостном смысле.

Доказательство. Доказательства того, что выполнены граничные условия (2.6), (2.7), и того, что $\bar{v}$ — нижнее решение, проводятся аналогично доказательствам в статье [36]. Последнее условие (2.9) очевидно из построения функции $\bar{v}$. Следовательно, нужно показать, что функция $\underline{v}$ — верхнее вязкостное решение и что выполнено граничное условие (2.8). Докажем это одновременно (в (2.8) будем доказывать второе неравенство).

Возьмем любую функцию $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^d)$ и точку y — точку локального строгого минимума для функции $\underline{v} - \varphi$. Хотя в определении верхнего вязкостного решения функция φ рассматривается только на множестве $\text{cl } \mathcal{G}$, мы определяем ее на всем пространстве $\mathbb{R}^d$, так как это понадобится нам в дальнейшем; сужение функции φ на множество $\text{cl } \mathcal{G}$ — гладкая функция. Поскольку от прибавления константы к функции φ свойство точки y не меняется, будем считать, что $\varphi(y) = \underline{v}(y)$. Точка y может либо принадлежать множеству $\mathcal{G}$, либо лежать на $\partial\mathcal{F}$. Случай, когда точка y принадлежит $\partial\mathcal{T}$, рассматривать

не нужно, так как он учтен в условии (2.6). Если $y \in \partial\mathcal{F}$ и $\underline{v}(y) \geq 1$, то условие (2.8) выполнено, поэтому в дальнейшем будем предполагать, что $\underline{v}(y) < 1$, если $y \in \partial\mathcal{F}$, и $\underline{v}(y) \leq 1$, если $y \in \mathcal{G}$.

Нужно доказать, что $\underline{v}(y) + H(y, D\varphi(y)) \geq 0$. Выберем последовательность точек x_n таких, что

$$\min_{\text{cl}(\mathcal{G} \cap B(y, 1))} (\mathbf{w}_n - \varphi) = (\mathbf{w}_n - \varphi)(x_n).$$

Базовое свойство слабых пределов в вязкостном смысле [35, 39, 50] — существование подпоследовательности (считаем, что это сама последовательность x_n) такой, что $x_n \rightarrow y$ и $\mathbf{w}_n(x_n) \rightarrow \underline{v}(y)$ при $n \rightarrow \infty$. Значит, можно выбрать такое $\varepsilon > 0$, что $B(y, \varepsilon) \subset \mathcal{G}$, если $y \in \mathcal{G}$, или $\varphi(y') < 1 - \varepsilon$ для любого $y' \in B(y, \varepsilon)$, если $y \in \partial\mathcal{F}$. Этого всегда можно добиться за счет уменьшения ε , так как если $y \in \partial\mathcal{F}$, то $\varphi(y) = \underline{v}(y) < 1$. Более того, можно выбрать такое достаточно большое n , что выполняются следующие условия:

- а) $x_n \in B(y, \varepsilon/3)$ — выполнится из-за сходимости последовательности x_n к точке y при $n \rightarrow \infty$;
- б) $|h_n f(x_n, p, q)| \leq \varepsilon/3$ — выполнится из-за стремления h_n к 0;
- в) $k_n \cdot \max\{(2 + \sigma), \sqrt{d}\} \leq \varepsilon/3$ — выполнится из-за стремления k_n к 0; здесь и далее $\sigma = \max\{|D\varphi(z)| : z \in B(y, 1)\}$;
- г) $\varphi(x_n) - \mathbf{w}_n(x_n) > -\varepsilon$ — выполнится, так как мы предположили, что y — точка минимума разности $\underline{v} - \varphi$ и $\varphi(y) = \underline{v}(y)$; из этого соотношения также следует, что $\varphi(x_n) < \mathbf{w}_n(x_n)$ (так как $\varphi(\cdot) < \underline{v}(\cdot)$ и $\underline{v}(\cdot) \leq \mathbf{w}_n(\cdot)$ в окрестности точки y).
- д) $5\varepsilon/3 < 1$ — выполнится за счет уменьшения ε .

Следующие выкладки проводятся для фиксированного n , поэтому временно опустим этот индекс в $h_n, k_n, \mathbf{w}_n, x_n, \gamma_n = e^{-h_n}$.

1. Пусть $y \in \mathcal{G}$. Запишем локальные координаты точки x через вершины l_s соответствующего симплекса: $x = \sum_s \lambda_s l_s$. Отметим, что $l_s \in B(y, \varepsilon)$, так как $x \in B(y, \varepsilon/3)$ и $l_s \in B(x, \varepsilon/3)$ (последнее верно, так как

$k\sqrt{d} \leq \varepsilon/3$). Поэтому $l_s \in \mathcal{G}$, откуда следует, что для $\mathbf{w}(l_s)$ справедливо следующее представление:

$$\mathbf{w}(l_s) = \gamma \max_{q \in Q} \min_{p \in P} \mathbf{w}_{loc}(z(l_s, p, q), \mathbf{W}) + 1 - \gamma.$$

2. Пусть $y \in \partial \mathcal{F}$. Тогда $-\varepsilon < \varphi(x) - \mathbf{w}(x) < 1 - \varepsilon - \mathbf{w}(x) \Rightarrow \mathbf{w}(x) < 1$. Поэтому, если $x = \sum_s \lambda_s l_s$, то найдется узел l_s такой, что $\lambda_s \neq 0$ и $\mathbf{w}(l_s) < 1$. Тогда снова для $\mathbf{w}(l_s)$ справедливо следующее представление:

$$\mathbf{w}(l_s) = \gamma \max_{q \in Q} \min_{p \in P} \mathbf{w}_{loc}(z(l_s, p, q), \mathbf{W}) + 1 - \gamma.$$

Отметим, что

$$\mathbf{w}(l_s) = \gamma \max_{q \in Q} \min_{p \in P} \mathbf{w}_{loc}(z(l_s, p, q), \mathbf{W}) + 1 - \gamma \geq \gamma \min_{p \in P} \mathbf{w}_{loc}(z(l_s, p, q), \mathbf{W}) + 1 - \gamma$$

для любого $q \in Q$. Кроме того, существует такое a_s (на котором достигается минимум), что для любого $\rho > 0$ выполняется неравенство:

$$\gamma \min_{p \in P} \mathbf{w}_{loc}(z(l_s, p, q), \mathbf{W}) + 1 - \gamma > \gamma \mathbf{w}_{loc}(z(l_s, a_s, q), \mathbf{W}) + 1 - \gamma - \rho h.$$

Обозначим $z_s(q) = z(l_s, a_s, q) = l_s + hf(l_s, a_s, q)$. Отсюда получаем, что для любого $\rho > 0$ выполнено соотношение

$$\mathbf{w}(l_s) - \gamma \mathbf{w}_{loc}(z_s(q), \mathbf{W}) - (1 - \gamma) > -\rho h \quad \forall q \in Q. \quad (2.10)$$

Пусть $z_s(q) = \sum_p \mu_p l_p$ и q любое. Докажем теперь, что

$$\mathbf{w}(x) - \varphi(x) \leq \mathbf{w}_{loc}(z_s(q), \mathbf{W}) - \varphi(z_s(q)) + \sigma k\sqrt{d} + o_1, \quad (2.11)$$

где $o_1 = o(|z_s(q) - l_{p^*}|)$, а p^* — индекс вершины l_{p^*} симплекса $S(z_s(q))$, для которой $\varphi(l_{p^*})$ — это минимальное значение φ на вершинах этого симплекса. Здесь и далее все o -величины рассматриваются при $n \rightarrow \infty$.

Если $z_s(q) \in \text{cl } \mathcal{G}$, то в силу условия б) имеем $z_s(q) \in B(l_s, \varepsilon/3)$. Так как $l_s \in B(x, \varepsilon/3)$, то $z_s(q) \in B(x, 2\varepsilon/3)$, а в силу а) и д), получаем $z_s(q) \in B(y, \varepsilon) \subset B(y, 1)$. Тогда неравенство (2.11) выполняется, поскольку x — точка

локального минимума функции $\mathbf{w} - \varphi$.

Пусть теперь $z_s(q) \notin \text{cl } \mathcal{G}$. Возможны два случая:

1. Найдется такой член в представлении $z_s(q)$, что $\mu_p \neq 0$ и $l_p \in \text{cl } \mathcal{G}$. Тогда аналогично имеем $l_p \in B(z_s(q), \varepsilon/3)$. Поскольку $z_s(q) \in B(l_s, \varepsilon/3)$, $l_s \in B(y, \varepsilon)$, то $l_p \in B(y, 5\varepsilon/3) \subset B(y, 1)$ по д), а значит, $\mathbf{w}(x) - \varphi(x) \leq \mathbf{w}(l_p) - \varphi(l_p)$, так как x — точка локального минимума $\mathbf{w} - \varphi$.
2. Для всех p таких, что $\mu_p \neq 0$, имеем $l_p \notin \text{cl } \mathcal{G}$. Напомним, что φ определена на всем пространстве $\mathbb{R}^d$ и что для любого $y' \in B(y, \varepsilon)$ выполняется условие $\varphi(y') < 1 - \varepsilon$. Тогда в силу условия г) имеем

$$\mathbf{w}(x) - \varphi(x) < \varepsilon < 1 - \varphi(l_p) = \mathbf{w}(l_p) - \varphi(l_p),$$

так как в узле $l_p \in \mathcal{F}$ функция $\mathbf{w}(l_p) = 1$.

Таким образом, показано, что $\mathbf{w}(x) - \varphi(x) \leq \mathbf{w}(l_p) - \varphi(l_p)$ для всех вершин l_p симплекса $S(z_s(q))$.

Имеется несложный факт: если $\mathbf{w}(x) - \varphi(x) \leq \mathbf{w}(l_p) - \varphi(l_p)$, $p = 1, \dots, d+1$, то для любого набора чисел μ_p таких, что $\mu_p \geq 0$, $\sum \mu_p = 1$ выполняется неравенство $\mathbf{w}(x) - \varphi(x) \leq \sum_p \mu_p (\mathbf{w}(l_p) - \varphi(l_p))$. Для проверки этого факта достаточно в последней сумме заменить разности $\mathbf{w}(l_p) - \varphi(l_p)$ на минимальную из них.

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(x) - \varphi(x) &\leq \sum_p \mu_p (\mathbf{w}(l_p) - \varphi(l_p)) = \sum_p \mu_p \mathbf{w}(l_p) - \sum_p \mu_p \varphi(l_p) \leq \\ &\leq \mathbf{w}_{loc}(z_s(q), \mathbf{W}) - \sum_p \mu_p \varphi(l_{p^*}) = \mathbf{w}_{loc}(z_s(q), \mathbf{W}) - \varphi(l_{p^*}), \end{aligned}$$

где индекс p^* определен на предыдущей странице после неравенства (2.11).

Заметим, что

$$\begin{aligned} |\varphi(z_s(q)) - \varphi(l_{p^*})| &\leq \sigma |z_s(q) - l_{p^*}| + o(|z_s(q) - l_{p^*}|) < \\ &< \sigma k \sqrt{d} + o(|z_s(q) - l_{p^*}|). \end{aligned}$$

Тогда $-\varphi(l_{p^*}) \leq -\varphi(z_s(q)) + \sigma k \sqrt{d} + o_1$. Отсюда получаем неравенство (2.11).

Покажем теперь, что $|\mathbf{w}(x) - \mathbf{w}(l_s)| \leq \sigma k \sqrt{d}$.

Так как x, l_s принадлежат одному симплексу S , то функция $\mathbf{w}$ является аффинной на отрезке $X = [x, l_s]$, а кроме того $|x - l_s| \leq k \sqrt{d}$. Так как функция $(\mathbf{w} - \varphi)|_X$ достигает минимума в точке x , мы получаем

$$\frac{|\mathbf{w}(x) - \mathbf{w}(l_s)|}{k \sqrt{d}} \leq \frac{|\mathbf{w}(x) - \mathbf{w}(l_s)|}{|x - l_s|} = |D_X \mathbf{w}| = |D_X \varphi| \leq \sigma.$$

Символ $D_X g$ означает производную сужения функции g на отрезок X как производную функции одного переменного.

Также отметим, что

$$\begin{aligned} |\varphi(z_s(q)) - \varphi(x + hf(x, a_s, q))| &\leq \sigma |z_s(q) - x - hf(x, a_s, q)| = \\ &= \sigma |l_s + hf(l_s, a_s, q) - x - hf(x, a_s, q)| \leq \\ &\leq \sigma (|l_s - x| + h |f(l_s, a_s, q) - f(x, a_s, q)|) \leq \sigma (k \sqrt{d} + h \lambda k \sqrt{d}). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Здесь λ — константа Липшица для функции f из условия С.1 (из соотношения (1.3)).

Теперь применим к (2.10) полученные неравенства для любого $q \in Q$:

$$-\rho h < \mathbf{w}(l_s) - \gamma \mathbf{w}_{loc}(z_s(q), \mathbf{W}) - (1 - \gamma) \leq$$

(так как $|\mathbf{w}(x) - \mathbf{w}(l_s)| \leq \sigma k \sqrt{d}$)

$$\leq \mathbf{w}(x) - \gamma \mathbf{w}_{loc}(z_s(q), \mathbf{W}) - (1 - \gamma) + \sigma k \sqrt{d} =$$

(добавим и вычтем $\gamma \mathbf{w}(x)$)

$$= (1 - \gamma) \mathbf{w}(x) + \gamma (\mathbf{w}(x) - \mathbf{w}_{loc}(z_s(q), \mathbf{W})) - (1 - \gamma) + \sigma k \sqrt{d} \leq$$

(по неравенству (2.11))

$$\leq (1 - \gamma) \mathbf{w}(x) + \gamma (\varphi(x) - \varphi(z_s(q))) - (1 - \gamma) + (1 + \gamma) \sigma k \sqrt{d} + \gamma o_1 \leq$$

(по неравенству (2.12))

$$\begin{aligned} &\leq (1 - \gamma)\mathbf{w}(x) + \gamma\left(\varphi(x) - \varphi(x + hf(x, a_s, q))\right) - \\ &\quad - (1 - \gamma) + (1 + 2\gamma + \gamma h\lambda)\sigma k\sqrt{d} + \gamma o_1. \end{aligned}$$

Поскольку ρ любое, то

$$\begin{aligned} 0 \leq & \frac{1 - \gamma_n}{h_n} \mathbf{w}_n(x_n) + \\ & + \min_{q \in Q} \max_{p \in P} \left\{ \gamma_n \frac{\varphi(x_n) - \varphi(x_n + h_n f(x_n, p, q))}{h_n} - \frac{1 - \gamma_n}{h_n} \right\} + \\ & + \sigma \frac{k_n}{h_n} \sqrt{d} (1 + 2\gamma_n + \gamma_n h_n \lambda) + \gamma o_1. \end{aligned}$$

Устремляя n к бесконечности, получаем $0 \leq \underline{v}(y) + H(y, D\varphi(y))$. Тем самым доказано соотношение (2.8), а с ним и тот факт, что $\bar{v}$ и $\underline{v}$ — нижнее и верхнее вязкостное решение задачи (2.3) с граничными условиями (2.6)–(2.9) в вязкостном смысле. $\square$

Теперь можно доказать теорему о сходимости предложенной численной схемы, аналогичную [36, стр.125–129, Theorem 2.3]. Для ее доказательства вводится следующее условие:

С.5 [37, условие (1.2), стр. 23] Существует константа $c > 0$ и ограниченная равномерно непрерывная функция $\eta : \text{cl } \mathcal{G} \cap O_c(\partial \mathcal{G}) \rightarrow \mathbb{R}^d$ такие, что включение $O_{c\mu}(x + \mu\eta(x)) \subseteq \mathcal{G}$ выполнено для всех $x \in \text{cl } \mathcal{G} \cap O_c(\partial \mathcal{G})$ и $0 < \mu \leq c$. Здесь $O_r(X) := \{x : \text{dist}(x, X) < r\}$ и $O_r(\emptyset) = \emptyset$.

Предложение 2.3. Пусть выполнены условия С.1–С.4. Тогда выполняется условие С.5.

Доказательство. Возьмем константу $c = \min\{\epsilon_2/2, 1/2\}$, где величина ϵ_2 взята из Предложения 1.4. В качестве функции η используем функцию, составленную из функций из Предложения 1.4: $n_{\mathcal{T}}(\cdot)$ на $\text{cl}(\mathcal{T}_{\epsilon_2} \setminus \mathcal{T})$ и $n_{\mathcal{F}}(\cdot)$ на $\text{cl}(\mathcal{F}_{\epsilon_2} \setminus \mathcal{F})$, а точнее, ее сужение на множество $\text{cl } \mathcal{G} \cap O_c(\partial \mathcal{G})$. По Предложению 1.4 функции $n_{\mathcal{T}}$ и $n_{\mathcal{F}}$ равномерно непрерывны, значит и их сужения равномерно непрерывны. Благодаря выбору константы c функция η определена

на двух компонентах связности и является равномерно непрерывной функцией на каждой из компонент. Возьмем любую точку $x \in \text{cl } \mathcal{G} \cap O_c(\partial \mathcal{G}) \cap (\mathcal{T}_{\epsilon_2} \setminus \mathcal{T})$ и любое число μ , удовлетворяющее условию $0 < \mu \leq c < 1$. По выбору точки x получаем, что $\text{dist}(\partial \mathcal{T}, x + \mu \eta(x)) \geq \mu > c\mu$, так как наименьшее значения расстояния можно получить, если $x \in \partial \mathcal{T}$, а в таком случае $\eta(x)$ — вектор внешней нормали к множеству $\mathcal{T}$ в точке x и $\text{dist}(\partial \mathcal{T}, x + \mu \eta(x))$ просто равняется μ . Также верна цепочка неравенств

$$\text{dist}(\partial \mathcal{F}, x + \mu \eta(x)) \geq \text{dist}(\partial \mathcal{F}, x) - \mu \geq \epsilon_2 - \mu \geq 2c - \mu \geq c \geq \mu > c\mu.$$

Отсюда получаем вложение $O_{c\mu}(x + \mu \eta(x)) \subseteq \mathcal{G}$. Для точек x из множества $\text{cl } \mathcal{G} \cap O_c(\partial \mathcal{G}) \cap (\mathcal{F}_{\epsilon_2} \setminus \mathcal{F})$ рассуждения аналогичные. $\square$

Теорема 2.1. *Предположим, что выполняются условия С.1–С.4. Пусть v — функция цены (1.14) игры (1.1), (1.13). Тогда последовательность $\{\mathbf{w}_n(\cdot)\}$ сходится к функции $v = \bar{v} = \underline{v}$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно на любом компактном множестве $\mathcal{K}$ в $\text{cl } \mathcal{G}$.*

Доказательство. По Предложению 2.2 функция $\bar{v}$ — нижнее решение краевой задачи (2.3), (2.6)–(2.9). Из разделов 1.3 и 1.4 следует, что функция цены v является непрерывным минимаксным решением. По Замечанию А.1 непрерывное минимаксное решение является и верхним, и нижним решением, а Теорема А.6 устанавливает эквивалентность минимаксных и вязкостных решений. Из этих рассуждений следует, что функция v является верхним вязкостным решением задачи (2.3), (2.6)–(2.9). Тогда, учитывая, что $\bar{v} \leq v$ или $\bar{v} + H(x, D\bar{v}) \leq 0$ на $\partial \mathcal{G} = \partial \mathcal{T} \cup \partial \mathcal{F}$, и применяя Теорему 1.1 из [37, pp.23–27] (см. приложение А.2, Теорема А.4), получаем, что $\bar{v} \leq v$ на $\text{cl } \mathcal{G}$. (Именно для использования этой теоремы и необходимо условие С.5, выполнение которого следует из условий С.1–С.4 по Предложению 2.3.) Таким же образом доказывается, что $v \leq \underline{v}$. Итак, $\bar{v} \leq \underline{v}$ на $\text{cl } \mathcal{G}$. По определению $\underline{v}$ и $\bar{v}$ (как $\liminf$ и $\limsup$ функций $\mathbf{w}_n$) $\underline{v} \leq \bar{v}$. Из этих двух неравенств получаем, что $\underline{v} = \bar{v} = v$ на $\text{cl } \mathcal{G}$.

Покажем, что последовательность $\{\mathbf{w}_n\}$ равномерно сходится к v на компактном множестве $\mathcal{K} \subset \text{cl } \mathcal{G}$. Докажем это от противного: предположим, что существуют $\varepsilon > 0$, $n_m \rightarrow \infty$ и $x_m \in \mathcal{K}$ такие, что $x_m \rightarrow x \in \mathcal{K}$, $|\mathbf{w}_{n_m}(x_m) - v(x_m)| > \varepsilon$. Отсюда следует, что последовательности можно

выбрать так, что либо выполнено неравенство $\mathbf{w}_{n_m}(x_m) > v(x_m) + \varepsilon$, либо $\mathbf{w}_{n_m}(x_m) < v(x_m) - \varepsilon$. Переходя к пределу по m и используя определения $\bar{v}$ и $\underline{v}$ и непрерывность функции v , получаем, что или $\bar{v}(x) \geq v(x) + \varepsilon$, или $\underline{v}(x) \leq v(x) - \varepsilon$, что противоречит с совпадением или функций v и $\bar{v}$, или v и $\underline{v}$ на $\text{cl } \mathcal{G}$. $\square$

2.3 Использование полилинейной интерполяции

При использовании компьютерной реализации численной схемы, описанной ранее в разделе 2.1.1, для симметричных задач получались несимметричные результаты (описание этого феномена приведено ниже в разделе 2.8.1). Это привело к необходимости использования других методов аппроксимации функции между узлами решетки, например, *полилинейной интерполяции*, то есть интерполяции полилинейной функцией.

Рассмотрим сначала частный случай для пространства $\mathbb{R}^2$. В таком пространстве данная интерполяция называется *билинейной* — это обобщение линейной интерполяции функций одной переменной для функций двух переменных. Обобщение основано на применении обычной линейной интерполяции сначала в направлении одной из координат, а затем в направлении другой координаты. Полученная функция билинейной интерполяции приближает значения исходной функции в произвольном прямоугольнике по четырем ее значениям в вершинах этого прямоугольника. В частном случае, когда известны значения интерполируемой функции $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ в точках, являющихся вершинами единичного квадрата с координатами вершин $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ и $(1, 1)$, формула билинейной интерполяции имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} f(x, y) \approx & f(0, 0)(1 - x)(1 - y) + \\ & + f(1, 0)x(1 - y) + f(0, 1)(1 - x)y + f(1, 1)xy. \end{aligned}$$

Допустим теперь, что нужно интерполировать значение функции $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ в точке $(x_1, \dots, x_d)$. Пусть даны значения функции f в вершинах $(x_1^{k_1}, \dots, x_d^{k_d})$ параллелотопа, которому принадлежит точка x . Здесь $k_1, \dots, k_d = 1, 2$, причем $x_1^1 \leq x_1 \leq x_1^2, \dots, x_d^1 \leq x_d \leq x_d^2$. Последовательно проводя линейную интерполяцию для каждого измерения, можно получить

следующую известную формулу:

$$\begin{aligned}
f(x_1, \dots, x_d) \approx & \frac{f(x_1^1, \dots, x_d^1)}{(x_1^2 - x_1^1) \cdots (x_d^2 - x_d^1)} (x_1^2 - x_1) \cdots (x_d^2 - x_d) + \\
& + \frac{f(x_1^1, \dots, x_d^2)}{(x_1^2 - x_1^1) \cdots (x_d^2 - x_d^1)} (x_1^2 - x_1) \cdots (x_d - x_d^1) + \cdots + \\
& + \frac{f(x_1^2, \dots, x_d^1)}{(x_1^2 - x_1^1) \cdots (x_d^2 - x_d^1)} (x_1 - x_1^1) \cdots (x_d^2 - x_d) + \\
& + \frac{f(x_1^2, \dots, x_d^2)}{(x_1^2 - x_1^1) \cdots (x_d^2 - x_d^1)} (x_1 - x_1^1) \cdots (x_d - x_d^1).
\end{aligned}$$

Здесь в числителях дробей в скобке аргументов f перебираются всевозможные сочетания x_i^1 и x_i^2 (всего 2^d слагаемых). При этом в сомножителях-скобках после дробей стоит разность $(x_i^2 - x_i)$, если в скобке аргументов присутствует x_i^1 , и разность $(x_i - x_i^1)$, если в скобке аргументов присутствует x_i^2 .

В целом, доказательство сходимости численной схемы включает два важных шага: доказательство сжимаемости оператора F , что обеспечивает существование решения дискретизированной задачи, и сходимости решения дискретизированной задачи к обобщенному решению краевой задачи при уменьшении шагов дискретизации.

Важным моментом доказательства первого шага является тот факт, что коэффициенты λ_p , с которыми при кусочно-линейной интерполяции «смешиваются» значения функции в вершинах симплекса $S(x)$, удовлетворяют условиям $\lambda_p \geq 0$ и $\sum_p \lambda_p = 1$. Но этим же свойством обладают и коэффициенты полилинейной интерполяции, поэтому доказательство этого утверждения для полилинейной интерполяции не требуется.

В [36] доказательство утверждения о сходимости решения дискретизированной задачи существенно опирается на выбранную линейную интерполяцию функции между узлами сетки. А именно, вид интерполяции используется в доказательстве неравенства $|\mathbf{w}(x) - \mathbf{w}(l_s)| \leq \sigma k \sqrt{d}$ в Предложении 2.2. В оригинальном доказательстве используется тот факт, что функция $\mathbf{w}(x)$ аффинна на $X = [x, l_s]$, что не является верным для случая полилинейной интерполяции. Для полилинейной интерполяции нужно заменить эту часть доказательства на следующую.

Известно, что в случае полилинейной интерполяции функция $\mathbf{w}(\cdot)$ является гладкой на каждом параллелотопе. Разложим функцию $\mathbf{w}(\cdot)$ по формуле

Тейлора в точке l_s — любой из вершин параллелотопа, содержащего x — в окрестности точки x с остаточным членом в форме Пеано (для такого разложения необходима непрерывность функции $\mathbf{w}(\cdot)$ везде и гладкость функции $\mathbf{w}(\cdot)$ в точке x):

$$\mathbf{w}(l_s) = \mathbf{w}(x) + \langle D\mathbf{w}(x), l_s - x \rangle + o(|l_s - x|) \leq \mathbf{w}(x) + \sigma k \sqrt{d} + o_2,$$

так как, по предположению, $D\mathbf{w}(x) = D\varphi(x)$. Функция o_2 при подстановке получившегося неравенства в неравенство (2.10) пойдет к нулю и предложение будет доказано. Это рассуждение верно для точек x , принадлежащих внутренности параллелотопа. Если точка x попала на какую-то гипергрань параллелотопа, то для построения аппроксимации в этой гипергрань, фактически, применяется полилинейная интерполяция в аффинном подпространстве меньшей размерности, содержащем эту гипергрань, на основе значений только в тех узлах, которые попали в это подпространство. Соответственно, можно применить изложенное выше рассуждение.

2.4 Реализация численной процедуры

Процедура, описанная в предыдущем разделе, является конструктивной за тем лишь исключением, что множество $\mathcal{G}$ не обязано быть ограниченным и, как следствие, сетка $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}$, его покрывающая, является бесконечной и не представимой в компьютере. Однако, если множество $\mathcal{G}$ ограничено, то возможна непосредственная компьютерная реализация предложенной вычислительной процедуры.

При создании компьютерной реализации важной является разработка структуры данных, хранящей сетку. Неразумно делать ее на основе многомерного массива, поскольку, во-первых, априори неизвестна размерность фазового пространства и, как следствие, массива, а во-вторых, при форме множества $\mathcal{G}$, существенно отличающейся от многомерного параллелепипеда, происходит избыточное хранение ненужных ячеек, не связанных с узлами сетки $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}$.

Вычислительная программа была реализована на языке C# для среды выполнения .Net 4.0 под операционную систему Microsoft Windows. Однако следует отметить, что в течение последних двух лет (после того, как програм-

ма была написана) фирма Microsoft выпустила кроссплатформенную версию dotNet Core этой среды, а так как программа использует только стандартные возможности языка, то она может быть запущена и под другими операционными системами, для которых имеется реализация dotNet Core — Linux, MacOS.

В случае запуска на многоядерных процессорах с общей памятью (Intel i3, i5, i7) с использованием стандартных средств .Net/dotNet Core может быть проведено распараллеливание процесса пересчета значений в узлах сетки, показывающее почти линейный рост производительности.

Вычислительная процедура подразумевает итеративный пересчет значений функции в узлах сетки $\mathcal{L}_G$ при заданных шагах h по времени и k по пространству либо с выполнением заданного количества итераций, либо до достижения итерации, когда новые значения функции в узлах отличаются от предыдущих не более, чем на указанную величину. В результате вычислений в выходной файл записываются финальные значения функции в узлах сетки.

2.5 Основные типы данных

2.5.1 Описание точки в евклидовом пространстве

Структура `Point` описывает координаты точки:

```
public struct Point
{
    public double[] coords;
    public int Dim { get; set; }

    public Point(double[] coords)
    {
        Dim = coords.length;
        this.coords = coords;
    }
}
```

Массив координат `coords` — массив с незадаанным размером, так как априори неизвестна размерность фазового пространства; в конструкторе он присваивается переданным массивом. Поле `Dim` — размерность вектора. Для данной

структуры были реализованы все необходимые операции, как то: вычитание, сложение точек друг с другом, умножение/деление координат точки на коэффициент.

2.5.2 Описание значения функции цены

Структура `Value` содержит значение функции цены `value` и флаг `isTerminalPoint`, определяющий, принадлежит ли терминальному множеству точка, которой сопоставлено хранимое значение функции цены:

```
public struct Value
{
    public bool isTerminalPoint;
    public double value;
}
```

Для удобства реализации явно хранится информация о нулевых значениях функции цены в узлах, попавших в терминальное множество.

2.5.3 Описание терминального множества

Терминальное множество описывается интерфейсом `ITerminalSet` с единственной функцией, определяющей принадлежность точки терминальному множеству (характеристической функцией терминального множества):

```
interface ITerminalSet
{
    bool BelongsToTerminalSet(Point p);
}
```

На данный момент имеются две реализации этого интерфейса: `CircleTerminalSet` и `SquareTerminalSet`, которые описывают шар с заданным радиусом и центром и параллелотоп с заданными центром и сторонами, соответственно. Эти реализации прописаны в тексте программы и при инициализации работы программы создается экземпляр того класса, который соответствует входным данным.

2.5.4 Описание множества ограничений на управление

Основная операция, которая проделывается с множествами ограничений на управление игроков, — это поиск минимума/максимума. В компьютерной реализации «сплошные» множества ограничений подменяются конечным набором точек; при этом поиск экстремума по «сплошному» множеству подменяется конечным перебором, поиском по конечному набору точек. Множество управлений имеет следующий интерфейс:

```
interface IControlSet
{
    Point[] Set { get; }
}
```

То есть, множество управления — это массив **Set** точек **Point**. Существуют следующие реализации данного интерфейса:

1. **BoundaryControlSet** — граница параллелотопа с заданными начальной («левой нижней») и конечной («правой верхней») точками **Point** и шагом разбиения;
2. **CircleControlSet** — шар с заданным центром **Point**, радиусом и шагом разбиения. Здесь из кубической решетки выбираются точки, принадлежащие нужному шару (центр шара является узлом решетки), и дополнительно накидывается сетка точек на границу шара;
3. **PointControlSet** — одноточечное множество;
4. **RectangularControlSet** — параллелотоп с заданными начальной («левой нижней») и конечной («правой верхней») точками **Point** и шагом разбиения;
5. **RingControlSet** — сфера в n -мерном пространстве с заданным центром **Point**, радиусом и угловым шагом (в случае плоскости — окружность).

2.5.5 Описание динамики системы

Динамика системы описывается следующим интерфейсом:

```
interface IDynamic
{
    Func<Point, Point, Point, Point> Get();
}
```

Метод **Get** возвращает функциональный объект, соответствующий функции динамики $f(x, p, q) : \mathbb{R}^d \times P \times Q \rightarrow \mathbb{R}^d$. Реализованы классы, описывающие следующие типы динамики системы:

1. **SimpleMotions** для игры с «простыми движениями» с динамикой $f(x, p, q) = p + q$;
2. **MaterialPoint** для задачи управления «материальная точка» с динамикой (не зависящей от q)

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = f(x, p, q) = \begin{pmatrix} x_2 \\ p \end{pmatrix};$$

3. **Pendulum** для задачи управления «физический маятник» с динамикой

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = f(x, p, q) = \begin{pmatrix} x_2 \\ \cos x_1 \sin x_1 + \sin x_1 + p \end{pmatrix};$$

4. **Chauffeur** для игры «шофер-убийца» с редуцированной двумерной динамикой

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = f(x, p, q) = \begin{pmatrix} -5x_2p + 0.5 \sin q \\ 5x_1p + 0.5 \cos q - 1 \end{pmatrix};$$

5. **MaterialPoint3D** для задачи управления «материальная точка» с трехмерной динамикой и специальным вхождением управления:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = f(x, p, q) = \begin{pmatrix} x_2 + p \\ x_3 \\ p \end{pmatrix};$$

6. **DubinsCar** для задачи управления «машина Дубинса» с трехмерной ди-

намикой

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = f(x, p, q) = \begin{pmatrix} \cos x_3 \\ \sin x_3 \\ p \end{pmatrix};$$

7. **DubinsCar2D** для задачи управления «машина Дубинса» с двумерной редуцированной динамикой

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = f(x, p, q) = \begin{pmatrix} -x_2 p \\ x_1 p - 1 \end{pmatrix};$$

8. **ReedsShepp** для задачи Ридса–Шеппа с динамикой

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = f(x, p, q) = \begin{pmatrix} -x_2 p_1 + q_1 \\ x_1 p_1 - p_2 + q_2 \end{pmatrix}.$$

9. **ChauffeurModified** для модифицированной игры «шофер-убийца» с динамикой

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{V}_p \end{pmatrix} = f(x, p, q) = \begin{pmatrix} -\frac{x_2}{V_p} \sin \phi + 0.3 \sin \psi \\ \frac{x_1}{V_p} \sin \phi + 0.3 \cos \psi - V_p \\ \cos \phi \end{pmatrix}.$$

2.5.6 Описание сетки

Класс **Grid** описывает часть сетки, содержащуюся в множествах $\mathcal{G}$ и $\mathcal{T}$. Его основные поля выглядят следующим образом:

```
class Grid
{
    private ITerminalSet terminalSet;
    public Point[] Points { get; set; }
    public Value[][] Values { get; private set; }
}
```

где **terminalSet** — интерфейс, предоставляющий характеристическую функцию терминального множества; **Points** — массив всех точек сеток $\mathcal{L}_G$ и $\mathcal{L}_T$,

отсортированных в лексикографическом порядке; **Values** — массив массивов: первый индекс принимает значения 0 или 1 и соответствует значениями функции на текущей итерации алгоритма и на предыдущей, второй индекс соответствует индексу точки в массиве **Points**.

2.6 Алгоритм

Проиллюстрируем работу алгоритма с помощью псевдокода. Здесь **itersQnt** — количество итераций, **sup** и **inf** — переменные, служащие для поиска минимакса, $\text{gamma} = e^{-k}$.

```
// Цикл по количеству итераций
for (i = 0; i < itersQnt; i++)
{
    // idx — индекс в массиве Values, куда записывается текущая итерация
    // Если число i четное, то idx = 1,
    // а если число i нечетное, то idx = 0
    idx = 1 - i % 2
    // Итерируем по всем точкам из области вычислений
    foreach (point in Points)
    {
        // Если точка принадлежит терминальному множеству
        if (BelongsToTerminalSet(point))
        {
            // Значение в этой точке равняется нулю
            Values[idx][point] = 0;
            continue;
        }

        inf = 1E38 // плюс бесконечность
        // Итерируем по всем управлениям первого игрока
        foreach (p in ControlSetP)
        {
            sup = - 1E38 // минус бесконечность
            // Итерируем по всем управлениям второго игрока
```

```
foreach (q in ControlSetQ)
{
    // Используем метод Эйлера для нахождения новой точки
    newPoint = point + Dynamics(point, p, q) * k;

    // Вычисляем значение в новой точке
    newValue = GetValueAtPoint(newPoint);

    if (valueAtPoint > sup)
        sup = newValue;
}

if (sup < inf)
    inf = sup;
}

// Сохраняем новое значение
Values[idx][point] = gamma * inf + 1 - gamma;
}
}
```

Функция `GetValueAtPoint` получает значение в новой точке с помощью какого-либо способа интерполяции. Методы интерполяции, реализованные в существующей версии программы, описаны в разделе 2.8.

Из алгоритма также видно, что представляется возможным вычисление функции оптимального результата для задачи оптимального управления. Достаточно задать любое одноточечное множество управлений второго игрока и не использовать управление второго игрока в динамике. Тогда, фактически, будет происходить перебор только управлений первого игрока.

2.7 Формат данных

Разработанная программа представляет собой консольную утилиту, которая принимает на вход большое количество параметров. Для упрощения описания всех множеств в программу были добавлены классы, параметризу-

ющие необходимые данные. После чего стало возможным в консольной утилите использовать конфигурационный xml-файл. Приведем пример такого файла (нумерация строк приведена для удобства ссылок):

```
1 <GameParameters>
2   <Iter> 10 </Iter>
3   <SaveIter> 1 </SaveIter>
4   <FolderName> Simple Motions </FolderName>
5   <FunctionType> SimpleMotions </FunctionType>
6   <Continue> 0 </Continue>
7   <PathToContinue></PathToContinue>
8   <Debug>0</Debug>
9   <GridParameters>
10     <TimeStep>0.5</TimeStep>
11     <SizeOfBox>
12       <double>0.25</double>
13       <double>0.25</double>
14     </SizeOfBox>
15     <SizeOfDomain>
16       <double>3</double>
17       <double>3</double>
18     </SizeOfDomain>
19     <InitialPoint>
20       <coords>
21         <double>-1.5</double>
22         <double>-1.5</double>
23       </coords>
24       <Dim>2</Dim>
25     </InitialPoint>
26     <Interpolation>PolylinearInterpolation</Interpolation>
27   </GridParameters>
28   <U>
29     <Type>Rectangular</Type>
30     <Start>
31       <coords>
```

```
32      <double>-2</double>
33      <double>-2</double>
34    </coords>
35    <Dim>2</Dim>
36  </Start>
37  <End>
38    <coords>
39      <double>2</double>
40      <double>2</double>
41    </coords>
42    <Dim>2</Dim>
43  </End>
44  <Step>0.25</Step>
45 </U>
46 <V>
47   <Type>Rectangular</Type>
48   <Start>
49     <coords>
50       <double>-1</double>
51       <double>-1</double>
52     </coords>
53     <Dim>2</Dim>
54   </Start>
55   <End>
56     <coords>
57       <double>1</double>
58       <double>1</double>
59     </coords>
60     <Dim>2</Dim>
71   </End>
72   <Step>0.25</Step>
73 </V>
74 <TerminalSet>
75   <Type>Square</Type>
```

```
76     <HalfSide>0.5</HalfSide>
77     <Center>
78         <coords>
79             <double>0</double>
80             <double>0</double>
81         </coords>
82         <Dim>2</Dim>
83     </Center>
84 </TerminalSet>
85 </GameParameters>
```

Данная конфигурация описывает следующую игру. Решетка — квадрат 3×3 (**SizeOfDomain**, стр. 15–18) с начальной точкой $(-1.5, -1, 5)$ (**InitialPoint**, стр. 19–25), шаг разбиения по пространству — 0.25 по обоим направлениям (**SizeOfBox**, стр. 11–14), шаг разбиения по времени — 0.5 (**TimeStep**, стр. 10), тип интерполяции (**PolylinearInterpolation**, стр. 26, доступные типы описаны в разделе 2.8). Множество управлений первого игрока (**U**, стр. 28–45) — прямоугольник (**Rectangular**, стр. 29) с «левой нижней» точкой $(-2, -2)$, правой верхней — $(2, 2)$ (точки **Start**, стр. 30–36, и **End**, стр. 37–43, соответственно), и с шагом разбиения 0.25. Множество управлений второго игрока (**V**, стр. 46–73) — аналогичное, но с начальной и конечной точками $(-1, -1)$ и $(1, 1)$ соответственно. Терминальное множество (**TerminalSet**, стр. 74–84) — квадрат с центром (**Center**, стр. 77–83) в начале координат и со сторонами длиной 1 (**HalfSide** = 0.5, стр. 76). Тип динамики **SimpleMotions** — «простые движения» (стр. 5). Параметр **Iter** (стр. 2) означает, что нужно произвести 10 итераций алгоритма, а **SaveIter** — частоту, с которой нужно сохранять данные (стр. 3). В данном примере **SaveIter** выбрано так, чтобы пересчитанные значения сохранялись в отдельный файл после каждой итерации. Если пользователь решит, что десяти итераций было недостаточно, то, используя сохраненные данные, он сможет продолжить пересчет для большего количества итераций, начиная с сохраненного момента с помощью флага **Continue** (стр. 6) и указав в узле **PathToContinue** (стр. 7) путь к сохраненному файлу. Если выставлен флаг **Debug** (стр. 8), то работа алгоритма происходит в однопоточном режиме, иначе — в многопоточном.

2.8 Реализованные способы интерполяции

Функция `GetValueAtPoint`, используемая в алгоритме в разделе 2.6, возвращает значение функции цены в новой точке. Реализованы несколько алгоритмов для нахождения этого значения.

2.8.1 Базовая аппроксимация на основе локальных координат

По точке, в которой надо найти значение функции (и которая, вообще говоря, не является каким-то узлом решетки), строится «опорная точка», «левая нижняя» точка параллелотопа с вершинами из бесконечной сетки $\mathcal{L}$, содержащего данную точку. Затем с использованием бинарного поиска выясняется, принадлежит ли найденная «опорная точка» сетке $\mathcal{L}_G \cup \mathcal{L}_T$, то есть массиву `Points`. Если не принадлежит, то значение функции в данной точке полагаем равным единице. Если принадлежит, то линейно аппроксимируем значение в точке по формуле (2.1):

- определяется, какому из симплексов, составляющих найденный параллелотоп, принадлежит данная точка;
- находятся локальные координаты точки по отношению к найденному симплексу;
- вычисляется аппроксимирующее значение функции.

Оказалось, что этот метод аппроксимации нарушает симметричность результирующей функции в задачах, симметричных относительно выбранной сетки (симметричность динамики, терминального множества и множеств ограничений на управления игроков).

Во-первых, несимметричность возникает возле границы множества $\mathcal{G}$. Предположим, что это множество — параллелотоп со сторонами, параллельными направлениям сетки. Тогда для точек, расположенных снаружи множества $\mathcal{G}$, но близких к его границе «слева» (в отрицательном направлении отсчета индексов сетки), значение функции будет полагаться равным 1. В то время как для точек, расположенных снаружи множества $\mathcal{G}$, но близких к его границе «справа», значение функции будет аппроксимироваться на основе ее значений в крайних узлах, которые могут быть меньше 1. Как следствие, значение функции может быть меньше 1, что нарушает симметричность.

Этот недостаток иллюстрируется следующими двумя примерами.

Материальная точка. Пусть рассматривается задача управления с динамикой следующего вида:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = p.$$

Заданы множества $\mathcal{G} = [-1.5, 1.5] \times [-1.5, 1.5]$, $p \in P = [-1, 1]$, терминальное множество $\mathcal{T} = [-0.25, 0.25] \times [-0.25, 0.25]$. Шаг по времени $h = 0.15$, шаг по пространству $k = 0.025$, количество итераций $n = 50$. На рис. 2.1 представлены линии уровня функции цены для этой задачи, вычисленные с использованием базового алгоритма аппроксимации на основе локальных координат. Приведен крупный план несимметричных участков, которые хотелось бы иметь центральносимметричными.

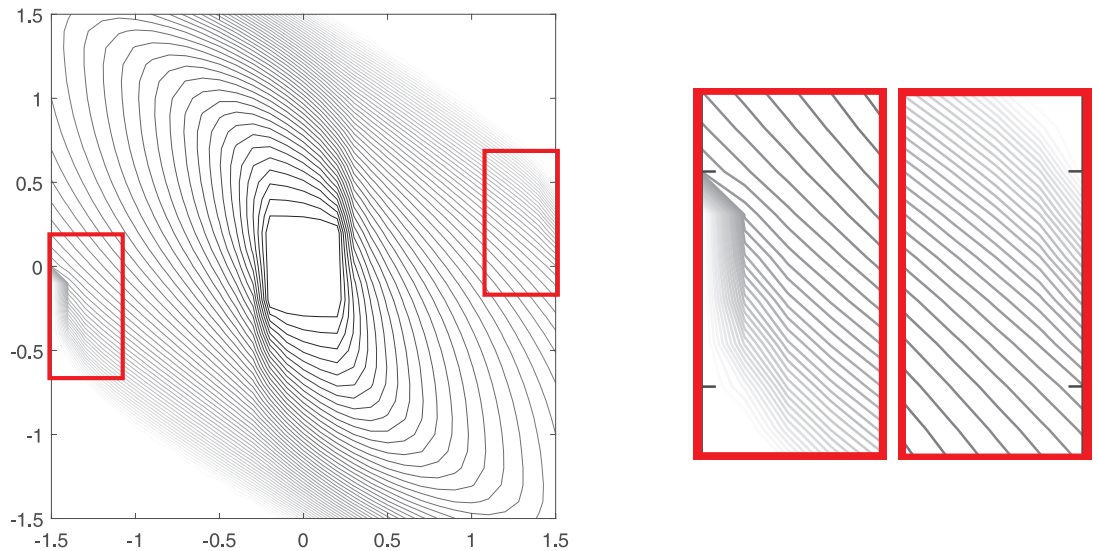


Рис. 2.1. Слева — общий вид линий уровня функции цены в задаче «Материальная точка», вычисленных с помощью базового алгоритма аппроксимации на основе локальных координат, справа — крупный план несимметричных участков, которые хотелось бы иметь центральносимметричными

Задача Ридса – Шенна. Пусть динамика имеет следующий вид:

$$\dot{x} = -y \cdot p_1 + q_1,$$

$$\dot{y} = x \cdot p_1 - p_2 + q_2.$$

Заданы множества: терминальное множество — круг радиуса 0.3 с центром в точке $(0, 1)$, множество игры $\mathcal{G} = [-1.5, 1.5] \times [-1, 2]$, $(p_1, p_2) \in P = [-1, 1] \times [-1, 1]$, $(q_1, q_2) \in Q = [-0.3, 0.3] \times [-0.3, 0.3]$. Шаг по времени

$h = 0.15$, шаг по пространству $k = 0.1$, количество итераций $n = 20$. На рис. 2.2 представлены линии уровня функций цены для этой задачи, вычисленные с использованием базового алгоритма аппроксимации на основе локальных координат. Приведен крупный план несимметричных участков, которые хотелось бы иметь осесимметричными.

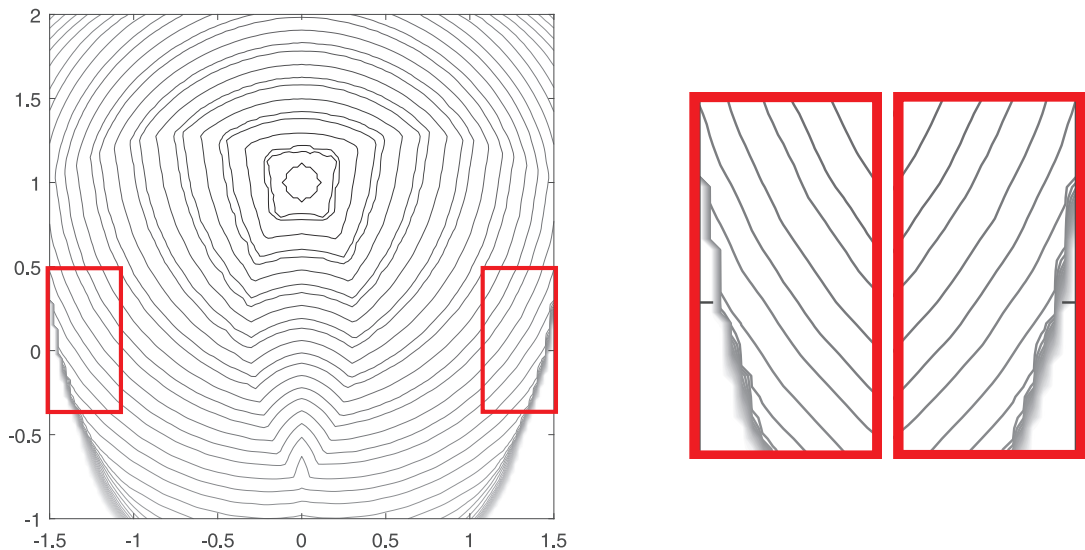


Рис. 2.2. Слева — общий вид линий уровня функции цены в задаче «Машина Ридса–Шеппа», вычисленных с помощью базового алгоритма аппроксимации на основе локальных координат, справа — крупный план несимметричных участков, которые хотелось бы иметь осесимметричными

Вторая причина возникновения несимметричности в симметричных задачах — несимметричность разделения параллелотопа на симплексы. Для случая пространства $\mathbb{R}^2$ эту проблему можно проиллюстрировать следующей схемой (см. рис 2.3).

На приведенном рисунке для двух симметричных узлов указаны оптимальные движения на шаге времени, приходящие в симметричные точки, которые попадают в несимметричные симплексы, что, вообще говоря, приводит к нахождению различных аппроксимирующих значений в этих точках. Для иллюстрации второй проблемы можно рассмотреть задачу управления *Машина Дубинса*. Пусть динамика имеет следующий вид:

$$\dot{x} = -yu, \quad \dot{y} = xu - 1.$$

Заданы множества: терминальное множество — круг радиуса 0.1 с центром в начале координат, множество игры $\mathcal{G} = [-3, 3] \times [-3, 3]$, $u \in [-1, 1]$,

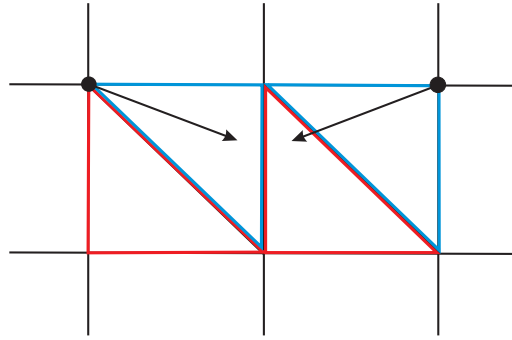


Рис. 2.3. Симметричные точки попадают в разные симплексы, вследствие чего возникает несимметричность значений

$(q_1, q_2) \in Q = [-0.3, 0.3] \times [-0.3, 0.3]$. Шаг по времени $h = 0.15$, шаг по пространству $k = 0.025$, количество итераций $n = 50$. На рис. 2.4 представлены линии уровня функций цены для этой задачи, вычисленные с использованием базового алгоритма аппроксимации на основе локальных координат. Также приведено наложение исходного рисунка и перевернутого, на котором ясно можно различить несимметричные линии уровня, которые хотелось бы иметь осесимметричными. Важно отметить, что в пределах одной итерации различия в значениях получаются недостаточно велики, и их сложно заметить на рисунках. Однако после выполнения большого количества итераций ошибки накапливаются, так как значения в вершинах симметричных симплексов ста-

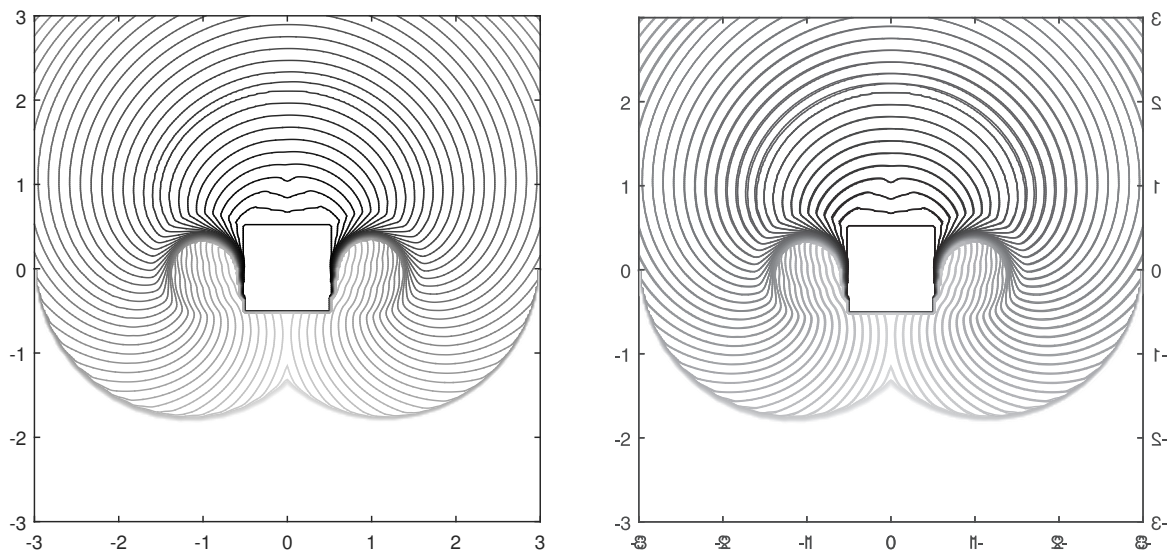


Рис. 2.4. Слева — общий вид линий уровня функции цены в задаче «Машина Дубинса», вычисленных с помощью базового алгоритма аппроксимации на основе локальных координат, справа — наложение исходного рисунка и перевернутого, на котором ясно видны несимметричные линии уровня

новятся разными, оптимальные движения из симметричных точек становятся не симметричными, и разница между значениями в симметричных узлах с каждой итерацией увеличивается.

2.8.2 Улучшенная аппроксимация на основе локальных координат

Для преодоления первой из указанных проблем базового алгоритма аппроксимации на основе локальных координат, для случая, когда множество $\mathcal{G}$ является параллелотопом, был изменен алгоритм получения значения функции в точке, отличной от узла сетки. В новом варианте алгоритма аппроксимации, если точка, в которой нужно вычислить значение функции, не попадает в множество $\mathcal{G}$, то значение функции полагается равным 1. Для параллелотопа такая проверка осуществляется тривиально. В принципе, этот метод можно применять и в ситуации, когда имеется характеристическая функция множества $\mathcal{G}$, однако такой вариант в настоящее время не реализован.

Применение этого алгоритма визуально исправляет несимметричность функции цены в областях, прилегающих к границе множества $\mathcal{G}$. На рис. 2.5 приведены линии уровня функции цены для задачи «Материальная точка», приведенной в предыдущем подразделе. В сравнении с рис. 2.1 видна симметричность линий уровня. На рис. 2.6 приведены линии уровня функции цены для задачи «Машина Ридса – Шеппа», приведенной в предыдущем подразделе. Симметричность линий уровня также появилась в сравнении с рис. 2.2.

2.8.3 Базовый алгоритм полилинейной интерполяции

Вторая причина возникновения несимметричности результата, описанная в подразделе 2.8.1, — разбиение каждого параллелотопа сетки на симплексы, которое является несимметричным. Для преодоления этой проблемы можно применить какую-либо другую аппроксимацию, не опирающуюся на разбиение на симплексы. В частности, такой аппроксимацией является полилинейная интерполяция, описанная в разделе 2.3. При поиске значения в точке сначала находится «опорная точка» так же, как в базовом алгоритме аппроксимации на основе локальных координат 2.8.1. Если опорная точка не принадлежит сетке $\mathcal{L}_{\mathcal{G}} \cup \mathcal{L}_{\mathcal{T}}$, то значение функции в данной точке полагается равным 1. Иначе значение находится при помощи полилинейной интерполяции.

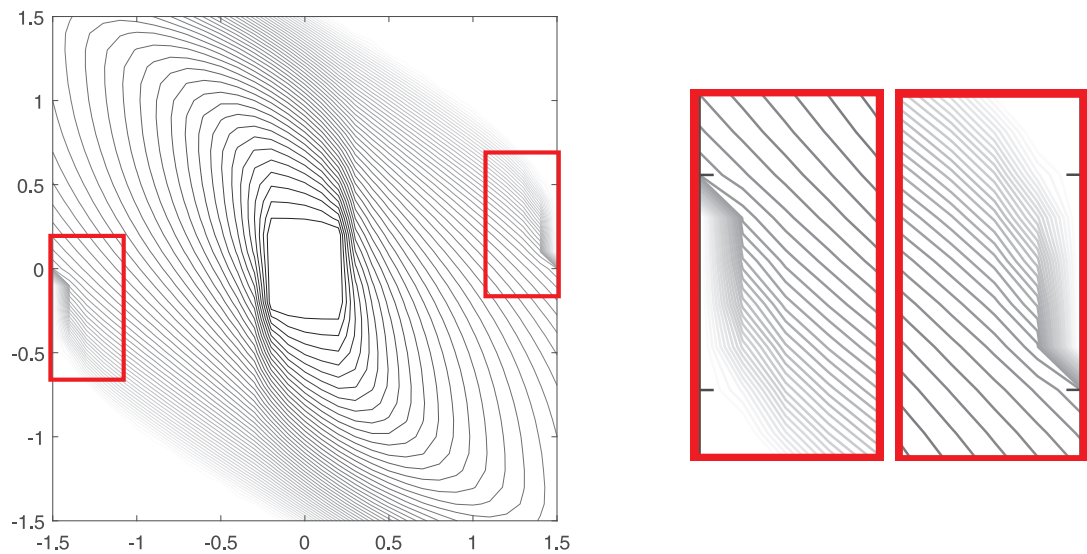


Рис. 2.5. Слева — общий вид линий уровня функции цены в задаче «Материальная точка», вычисленных с помощью улучшенного алгоритма аппроксимации на основе локальных координат, справа — крупный план симметричных участков, на которых появилась центральная симметричность

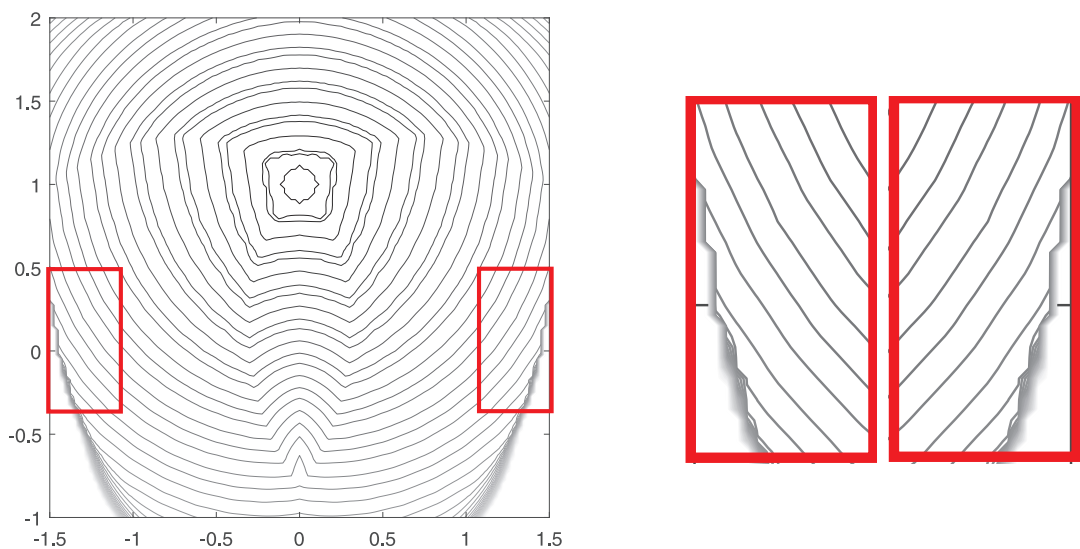


Рис. 2.6. Слева — общий вид линий уровня функции цены в задаче «Машина Ридса–Шепша», вычисленных с помощью улучшенного алгоритма аппроксимации на основе локальных координат, справа — крупный план симметричных участков, на которых появилась осевая симметричность

Видно, что такой подход не обеспечивает симметричность значений вблизи границы множества $\mathcal{G}$.

2.8.4 Улучшенный алгоритм полилинейной интерполяции

Для исправления указанного недостатка алгоритма, приведенного в предыдущем подразделе, в случае, когда множество $\mathcal{G}$ является параллелотопом (или задается при помощи своей характеристической функции), можно было бы применить подход, описанный в подразделе 2.8.2: если данная точка находится вне множества $\mathcal{G}$, значение функции в ней полагается равным 1. Однако был предложен более универсальный метод, работоспособный при любой форме множества $\mathcal{G}$. Идея этого метода достаточно прямолинейная: для нахождения приближенного значения функции в данной точке ищутся все вершины параллелотопа, содержащего эту точку, и запускается полилинейная интерполяция в том случае, когда хотя бы одна из вершин принадлежит сетке $\mathcal{L}_{\mathcal{G}} \cup \mathcal{L}_{\mathcal{T}}$. В пространстве размерности d параллелотоп имеет 2^d вершин, так что в пространствах высокой размерности эта операция может быть достаточно длительной. Впрочем, для применения алгоритма полилинейной интерполяции все равно требуется нахождение всех вершин параллелотопа, так что применение этой идеи приводит к одинаковой обработке точек, как принадлежащих множеству $\mathcal{G}$, так и лежащих вне его.

Применение полилинейной интерполяции исправляет несимметричность линий уровня в задаче «Машина Дубинса». На рис. 2.7 приведены линии уровня функции цены для задачи «Машина Дубинса», приведенной в предыдущем подразделе. В сравнении с рис. 2.4 видна симметричность линий уровня.

В программе реализованы 4 способа, приближающих значение функции цены в новой точке:

1. `FuzzyLinearInterpolation` — кусочно-линейная интерполяция;
2. `LinearInterpolation` — кусочно-линейная интерполяция с условием на границу множества (используется только в том случае, когда множество $\mathcal{G}$ — параллелотоп);
3. `FuzzyPolylinearInterpolation` — полилинейная интерполяция с поиском «опорной точки»;

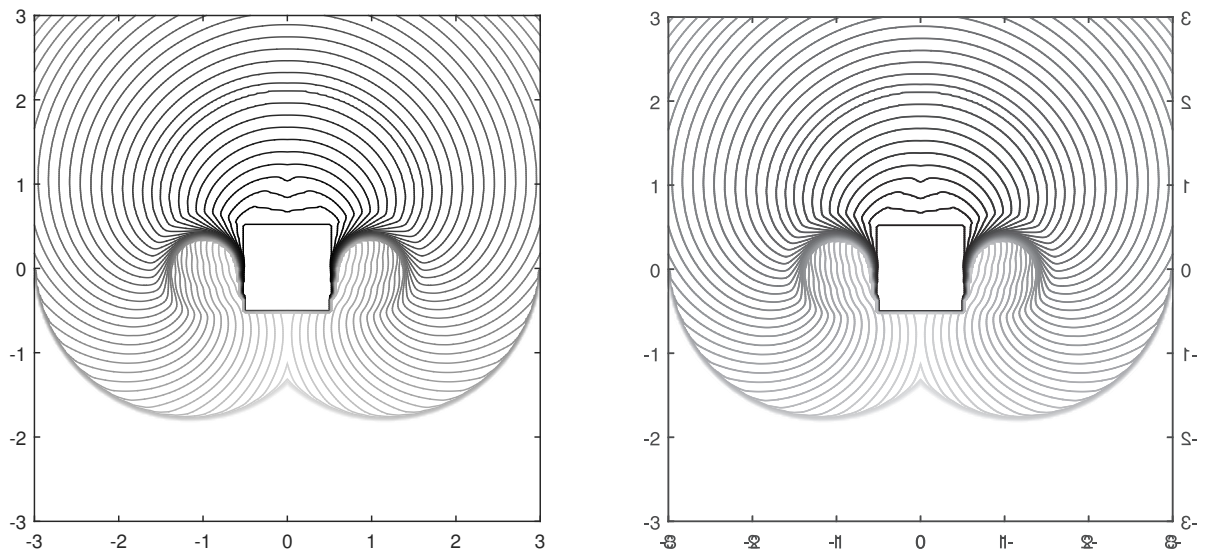


Рис. 2.7. Слева — общий вид линий уровня функции цены в задаче «Машина Дубинса», вычисленных с помощью полилинейной интерполяции, справа — наложение исходного рисунка и перевернутого, на котором ясно видна симметричность линий уровня

4. `PolylinearInterpolation` — полилинейная интерполяция с поиском всех точек параллелотопа.

Конкретный способ интерполяции выбирается из параметров, переданных в конфигурационном файле.

3 Визуализация функции цены

В случае двумерного фазового вектора визуализация результатов вычислений производилась в форме графика функции цены, который является в этой ситуации поверхностью, погруженной в трехмерное пространство, а также в виде двумерных множеств уровня. Восстановление графика по отдельным точкам производилось с помощью собственного алгоритма, так как существующие системы визуализации (например, Matlab и GNUPlot) используют алгоритмы, нацеленные на визуализацию непрерывных поверхностей. Графики, восстановленные с помощью собственного алгоритма, визуализировались в системе MeshLab.

В случае трехмерного фазового вектора сам по себе график функции цены погружен в четырехмерное пространство и непосредственно не может быть отображен. В этом случае разумно визуализировать результаты при помощи набора множеств уровня функции цены, то есть множеств $\mathbb{L}_c$ точек пространства игры, в которых значение функции не превосходит заданной величины c . Простейший подход — отобразить облако узлов сетки $\mathcal{L}_G$, обладающих соответствующим значением. Однако при этом невозможно наглядно представить трехмерную структуру множества.

Другой подход основывается на телесном представлении множества: на каждый узел сетки $\mathcal{L}_G$, принадлежащий визуализируемому множеству уровня, «надевается» «кирпичик» — прямоугольный трехмерный параллелепипед со сторонами, равными шагам сетки по соответствующим координатам (в дальнейшем, при описании алгоритма, для простоты будем считать, что это куб). Недостаток такого метода заключается в том, что у полученного множества имеется много маленьких граней, составляющих существенные (прямые) углы между собой. Даже после визуального затенения по Фонгу остаются существенные перепады освещенности. Это требует дополнительных усилий по сглаживанию поверхности.

Для сглаживания трехмерных поверхностей использовались, совместно и по отдельности, алгоритмы Marching Cubes [65] и лапласовского сглаживания [76]. Алгоритм Marching Cubes был улучшен автором для сохранения симметричности поверхности, если такая присутствовала.

3.1 Marching Cubes

Marching Cubes — алгоритм в компьютерной графике, впервые предложенный в 1987 году на конференции SIGGRAPH Вильямом Лоренсеном и Харви Клайном [65]. Он предназначен для сглаживания поверхности воксельного множества, то есть множества, заданного совокупностью кубов, центры которых расположены на заданной сетке.

Пусть задан некоторый набор точек такой, что каждая точка является узлом равномерной сетки $\mathcal{L}$, накинута на пространство $\mathbb{R}^3$, и в каждой точке задано некоторое значение. При таком подходе мы получим, что каждая точка решетки $\mathcal{L}$ принадлежит какому-то кубу. Если значение в вершине такого куба меньше, чем некоторая заранее выбранная величина V , то считаем, что вершина лежит внутри поверхности, которая будет строиться, а если больше — то нет.

Алгоритм итерирует по этим кубам и определяет как «достроенная» поверхность должна пересекать куб, а затем переходит к следующему. Поскольку в каждом таком кубе только восемь вершин и два состояния у каждой (если значение в вершине куба меньше V , то вершина лежит внутри поверхности, а если больше V — то вне ее), то существует только $2^8 = 256$ различных вариантов того, как новая поверхность может пересекать этот куб. Перебирая все 256 случаев, авторы алгоритма получили таблицу, описывающую, как по вершинам, принадлежащим поверхности, эту поверхность достроить.

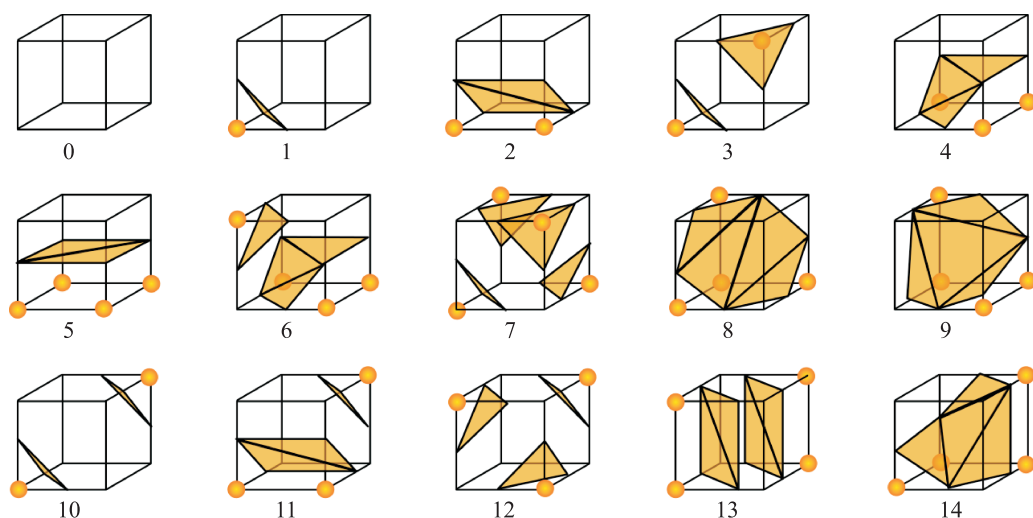


Рис. 3.1. Различные конфигурации достраиваемой поверхности в алгоритме Marching Cubes (рисунок взят с https://ru.wikipedia.org/wiki/Marching_cubes). Оранжевыми точками отмечены узлы, принадлежащие визуализируемому множеству

Каждый куб можно представить восьмибитным числом, сопоставив каждой вершине 1 или 0. Полученное число используется в качестве индекса элемента массива, хранящего конфигурации полигонов. Наконец, каждая вершина сгенерированного полигона помещается в подходящую позицию на том ребре куба, на котором она лежала изначально.

Из-за симметрии куба, 256 вариантов можно свести к 15 базовым (см. рис. 3.1).

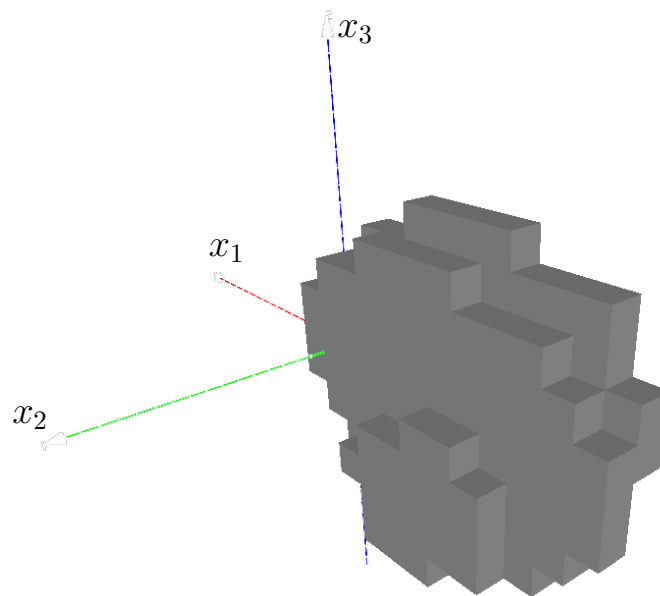


Рис. 3.2. Множество достижимости для задачи «машина Дубинса» до применения алгоритма

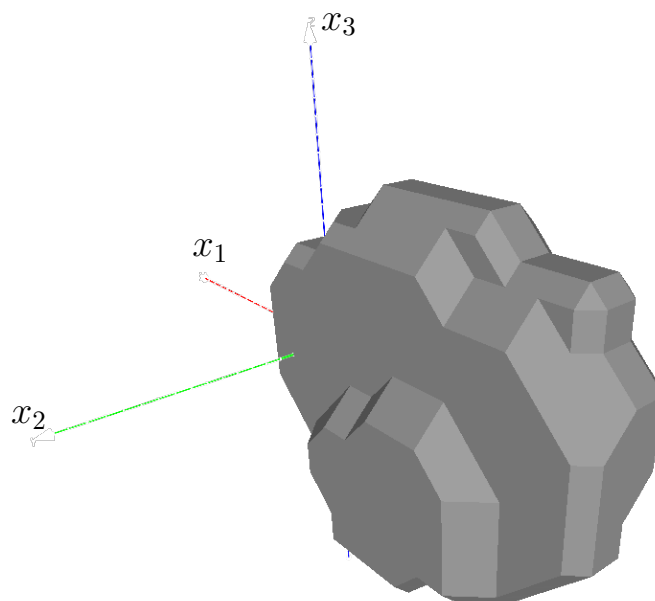


Рис. 3.3. Множество достижимости для задачи «машина Дубинса» после применения алгоритма

Простейший шаблон (случай 0) используется в том случае, если значения во всех вершинах куба меньше (или больше) V одновременно, и ничего не достраивает. Следующий шаблон (случай 1) появляется тогда, когда поверхность отделяет одну вершину от остальных семи, и достраивает один треугольник, пересекающийся с тремя гранями куба. Все остальные конфигурации достраивают большее количество полигонов.

На рис. 3.2 показано некоторое множество уровня функции цены машины Дубинса (см. главу 4, раздел 4.1), а на рис. 3.3 — применение алгоритма Marching Cubes к ней.

Основной задачей научной визуализации является наглядное представление особенностей изучаемого объекта, интересных для исследователя. У множеств уровня одной из таких особенностей является симметричность относительно тех или иных плоскостей, осей или точек. С этой точки зрения, базовый алгоритм Marching Cubes имеет недостаток, мешающий корректно использовать другие алгоритмы после него на симметричных поверхностях. В случаях 2, 4, 5, 6, 8, 11 и 13 (рис. 3.1) конструируемая поверхность получает четырехугольники, которые несимметричным образом делятся диагональю на два треугольника; эта несимметричность может усугубляться при применении других алгоритмов, модифицирующих построенную поверхность. Для преодоления проблемы несимметричной аппроксимации симметричных тел алгоритм Marching Cubes был улучшен автором следующим образом. В указанных случаях разделение четырехугольников стало производиться на четыре треугольника обеими диагоналями (см. рис. 3.4).

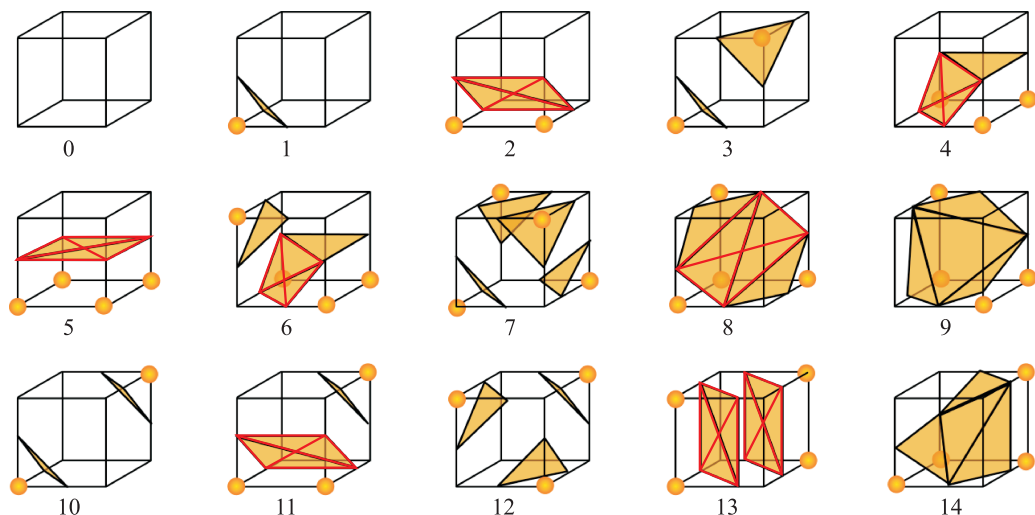


Рис. 3.4. Улучшенные конфигурации поверхности

Пример работы базового и улучшенного алгоритма для простейшего случая (одного куба) показан на рис 3.5.

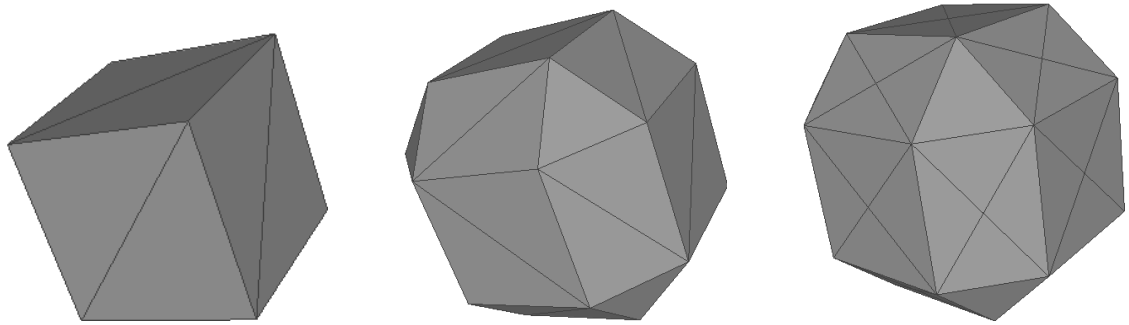


Рис. 3.5. Алгоритмы Marching Cubes (базовый и улучшенный), примененные к одному кубу; тонкими линиями указана получаемая сетка треугольников

На рис. 3.6–3.8 показаны результаты применения базового и улучшенного алгоритмов к аппроксимации шара. Такое улучшение алгоритма позволяет более успешно применять к результирующей поверхности другие алгоритмы, например те, которые будут описаны ниже. При рассмотрении рис. 3.8 видно, что после применения алгоритма сглаживания возникает некоторая несимметричность поверхности, полученной с помощью базового алгоритма Marching Cubes (на рисунке слева). В то же время, поверхность, полученная после применения улучшенного алгоритма, дала симметричный результат после сглаживания (на рисунке справа).

3.2 Алгоритм Лапласа и НС-алгоритм

На рис. 3.5 и 3.7 видно, что после применения алгоритма Marching Cubes результирующая поверхность все равно получается недостаточно «гладкой», поэтому к результирующей поверхности стоит применять какие-либо другие алгоритмы сглаживания.

В статье [76] предложен следующий алгоритм сглаживания полигональной поверхности, основанный на перемещении некоторых ее вершин.

Обозначим полигональную поверхность как M , а множество всех вершин как $V = \{p_1, \dots, p_n\}$. Множество всех вершин V делится на множества фиксированных вершин V_{fix} и множество вершин, которые можно перемещать V_{var} . Множество соседних вершин для вершины p_i обозначается как $\text{adj}(p_i)$. Также мы считаем, что o_i — это начальное положение i -ой вершины до применения алгоритма, q_i — положение i -ой вершины до применения очередной

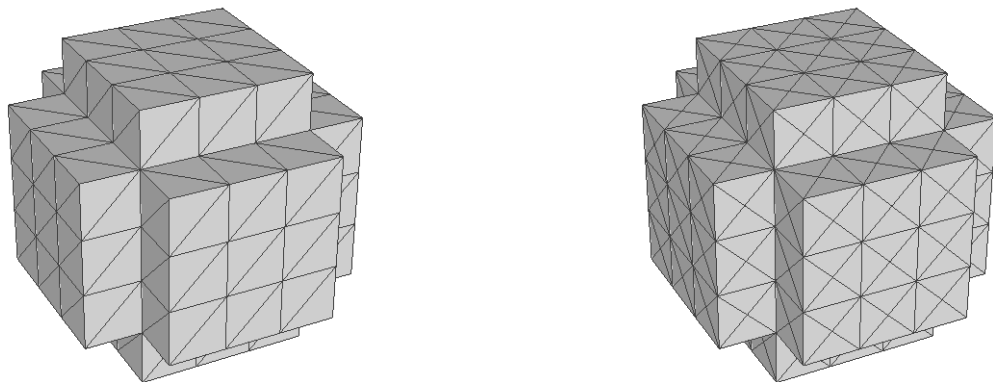


Рис. 3.6. «Шар» из кубов: базовый (слева) и улучшенный (справа) алгоритм

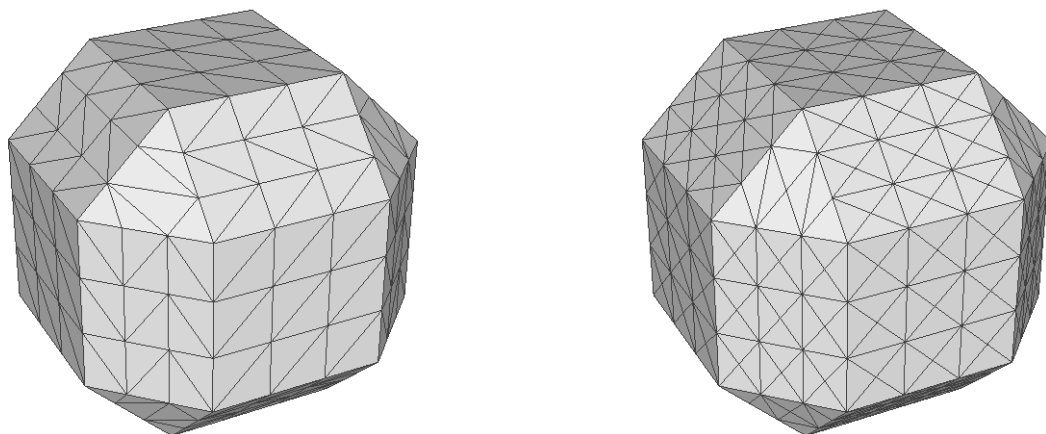


Рис. 3.7. Применение алгоритма Marching Cubes к «шару»: базовый (слева) и улучшенный (справа) алгоритм

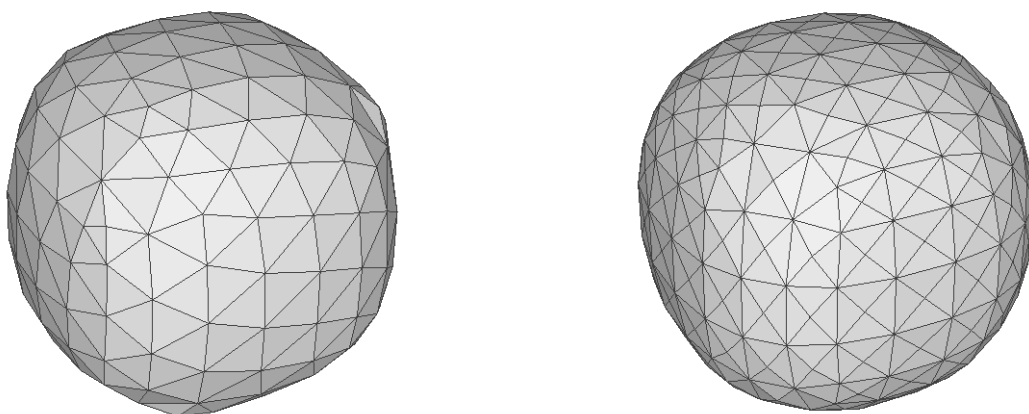


Рис. 3.8. Применение другого алгоритма сглаживания к результирующей поверхности базового (слева) и улучшенного (справа) алгоритма Marching Cubes

итерации алгоритма, p_i — новая, модифицированная точка (после применения очередной итерации алгоритма). Основная идея алгоритма Лапласа и НС-алгоритма заключается в том, чтобы перемещать вершины полигонов так, чтобы результирующая поверхность получилась более «гладкой».

3.2.1 Лапласовское сглаживание

В данном алгоритме вершина q_i заменяется средним арифметическим соседних вершин (см. рис 3.9):

$$p_i := \begin{cases} \frac{1}{|\text{adj}(q_i)|} \sum_{j \in \text{adj}(q_i)} q_j, & q_i \in V_{var}, \\ q_i, & q_i \in V_{fix}. \end{cases}$$

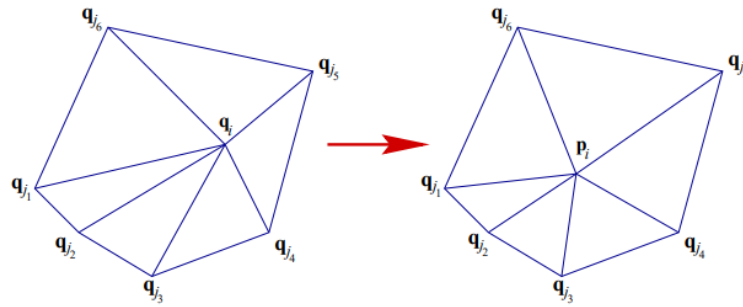


Рис. 3.9. Схема, иллюстрирующая идею алгоритма Лапласа; рисунок взят из статьи [76]

Можно сказать, что алгоритм Лапласа «выравнивает» поверхность: выпуклые участки втягиваются, а вогнутые — выправляются. Соответственно, если тело в целом является выпуклым, то оно сжимается. Поэтому при применении этого алгоритма нужно или ограничиться небольшим количеством итераций, или применять дополнительные меры, замедляющие сжатие. Одна из таких модификаций алгоритма Лапласа приведена в следующем подразделе.

3.2.2 НС-алгоритм

Идея НС-алгоритма (НС — сокращение для Humphrey's classes) такова: найденные с помощью алгоритма Лапласа точки p_i следует отодвинуть обратно к предыдущим точкам q_i или (и) исходным точкам o_i (см. рис 3.10) с

ПОМОЩЬЮ ВЕЛИЧИН

$$b_i := p_i - (\alpha o_i + (1 - \alpha)q_i),$$

$$d_i := \beta b_i + \frac{1 - \beta}{|\text{adj}(q_i)|} \sum_{j \in \text{adj}(q_i)} b_j.$$

Здесь α и β — коэффициенты из диапазона $[0, 1]$, показывающие насколько сильно начальные точки o_i и предыдущие точки q_i влияют на положение новой точки p_i .

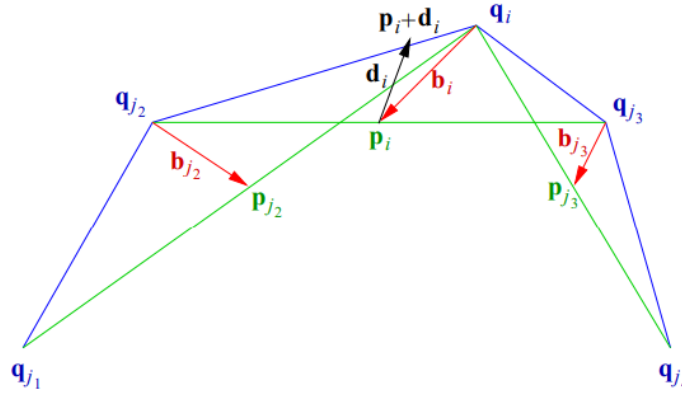


Рис. 3.10. Определение d_i в НС-алгоритме (в случае, когда $\alpha = 0$); рисунок взят из статьи [76]

Приведем псевдокод НС-алгоритма

```
// Инициализируем точки  $p_i$  начальным значением  $o_i$ 
 $p := o$ ;
do
{
  // Итерируем по всем точкам
  for ( $i = 0$ ;  $i < V_{var}.length$ ;  $i++$ )
  {
     $q_i = V_{var}[i]$ ;
     $n = |\text{adj}(q_i)|$ 
    if ( $n \neq 0$ )
    {
      // Находим  $p_i$  с помощью алгоритма Лапласа
       $p_i = \frac{1}{n} \sum_{j \in \text{adj}(q_i)} q_j$ 
    }
     $b_i = p_i - (\alpha o_i + (1 - \alpha)q_i)$ 
```

```

    }
    // Итерируем по всем точкам
    for (i = 0; i < Vvar.length; i++)
    {
        n = |adj( $q_i$ )|
        if (n != 0)
        {

$$p_i = p_i - (\beta \cdot b_i + \frac{1-\beta}{n} \sum_{j \in \text{adj}(q_i)} b_j)$$

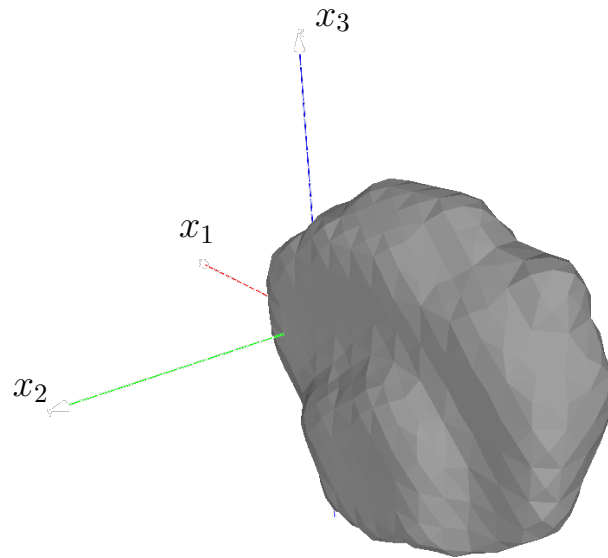
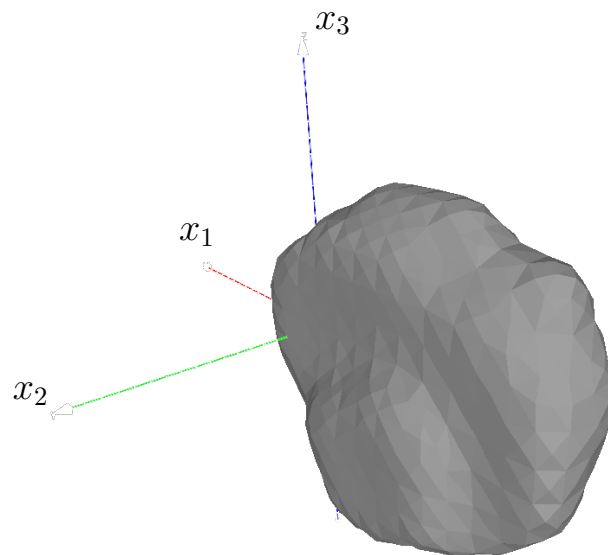
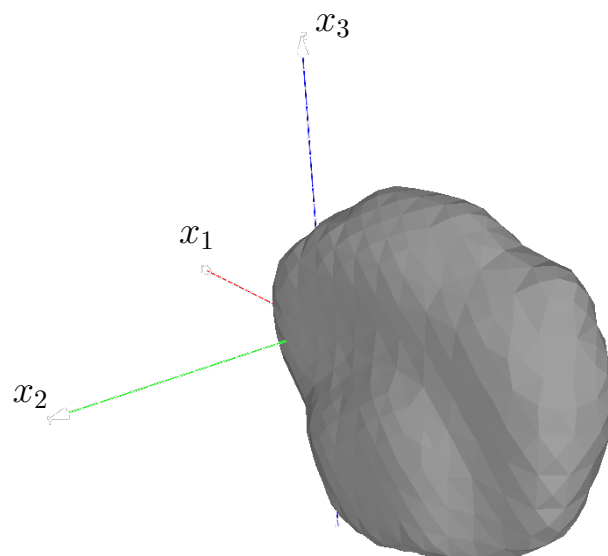
        }
    }
}
while (condition)
// завершаем итерационный цикл, когда достигли нужного условия,
// например, когда достигли достаточной гладкости поверхности

```

Итак, в алгоритме фактически два шага: сначала точки p_i сопоставляются с точками q_i с помощью лапласовского сглаживания, а затем точки p_i сопоставляются с точками $p_i + d_i$ для коррекции результата. Результат работы алгоритма проиллюстрирован на рис. 3.11–3.13, на которых изображена поверхность, являющаяся границей некоторого множества уровня функции цены машины Дубинса, к которой применен HC-алгоритм с различным числом итераций n и параметрами α и β . HC-алгоритм был применен после применения алгоритма Marching Cubes к данной функции.

3.3 Комбинация Marching Cubes и HC-алгоритма

Наилучшего результата при сглаживании трехмерных поверхностей можно добиться, комбинируя улучшенный алгоритм Marching Cubes и HC-алгоритм. На рис. 3.6–3.8 слева показано последовательно: построение стандартной воксельной поверхности «шара» из кубов, применение стандартного алгоритма Marching Cubes к воксельной поверхности, применение HC-алгоритма к результату работы стандартного алгоритма Marching Cubes. На этих же рисунках справа показано последовательно: построение улучшенной воксельной поверхности «шара» из кубов (в которой четырехугольники бьются на четыре треугольника, а не на два), применение улучшенного алгоритма Marching

Рис. 3.11. Машина Дубинса, НС-алгоритм, $n = 5$, $\alpha = 0.05$, $\beta = 0.5$ Рис. 3.12. Машина Дубинса, НС-алгоритм, $n = 10$, $\alpha = 0.05$, $\beta = 0.5$ Рис. 3.13. Машина Дубинса, НС-алгоритм, $n = 50$, $\alpha = 0.05$, $\beta = 0.5$

Cubes к воксельной поверхности, применение НС-алгоритма к результату работы улучшенного алгоритма Marching Cubes. В целом, можно сказать, что результат применения НС-алгоритма к поверхности после улучшенного Marching Cubes дает более правдоподобный результат: во втором случае поверхность получилась более «шарообразной».

3.4 Визуализация двумерных поверхностей

Первоначально результаты вычислений были визуализированы с помощью систем Matlab и GNUPlot. На вход этим системам подается набор точек, лежащих на визуализируемом графике, после чего системами производится восстановление поверхности в трехмерном пространстве. Считается, что точки расположены на прямоугольной сетке в пространстве аргументов. Однако обе эти системы имеют один и тот же недостаток: при визуализации графика функции двух переменных, являющегося поверхностью в трехмерном пространстве, возникают артефакты, связанные с разрывами поверхности. Алгоритмы, встроенные в эти системы, нацелены на визуализацию непрерывных поверхностей, поэтому при их использовании соединяются края разрыва, что затрудняет анализ результатов (см. рис. 3.14 слева). В связи с этим была написана собственная программа, которая по файлу с результатами счета строит набор треугольников, описывающих именно разрывную поверхность.

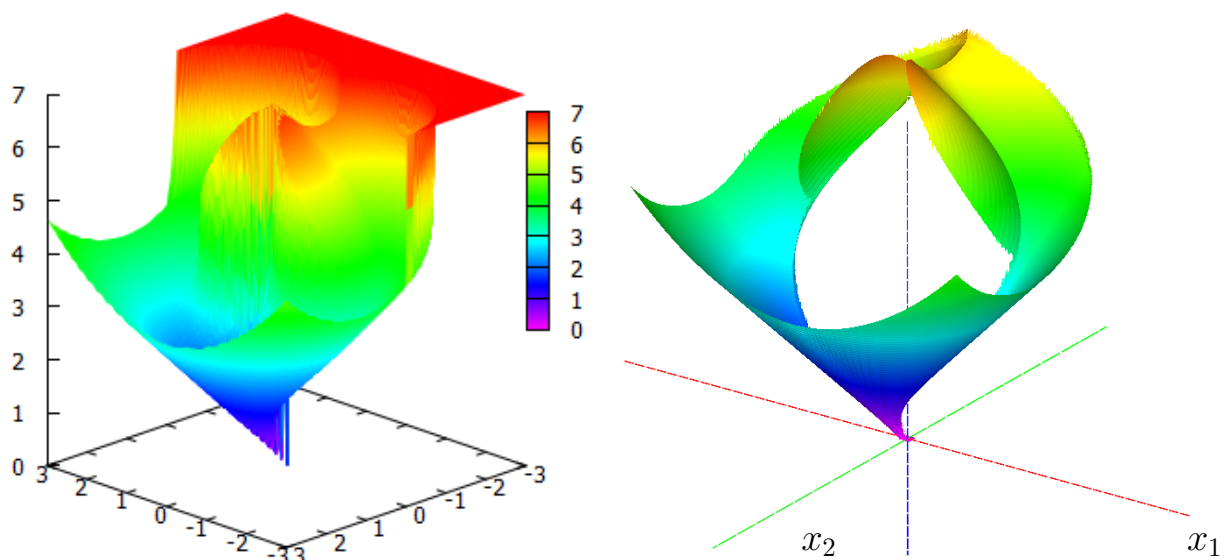


Рис. 3.14. Машина Дубинса с редуцированной динамикой (слева — график функции цены, визуализированный с помощью алгоритмов системы GNUPlot, справа — с помощью системы MeshLab после разрядки поверхности при помощи авторского алгоритма)

В настоящее время анализ разрывов реализован наиболее простым образом: если разница аппликат хотя бы двух вершин очередного формируемого треугольника больше параметра непрерывности, то есть некоторого заданного порога (подбираемого для каждого графика индивидуально), то такой треугольник исключается из поверхности.

При применении такой процедуры часто рядом с линией разрыва возникает «пила» из-за того, что один из треугольников, порождаемых в ячейке сетки (прямоугольнике) исключается по указанному критерию, а другой — нет. Поэтому треугольник исключается из формируемой поверхности также, если после отработки первого критерия какая-то из вершин этого треугольника принадлежит только ему. Такой проход делается один раз, после чего «пилообразность» края разрыва несколько уменьшается.

Еще одной типовой линией разрыва на графике является линия между конечными значениями функции цены в области, где первый игрок успешно справляется со своей задачей и за конечное время приводит систему на терминальное множество, и бесконечными значениями в области, где второй игрок выводит систему на линию жизни. При этом возникает «плато» (красная горизонтальная часть графика на рис. 3.14 слева). После удаления треугольников, соединяющих края разрыва, это плато остается «висеть в воздухе», что тоже затрудняет восприятие рисунка. Поэтому был введен третий критерий удаления треугольника из формируемой поверхности: хотя бы одна из его вершин имеет аппликату, большую или равную уровню срезки графика.

Результат применения такой процедуры к графику, показанному на рис. 3.14 слева, приведен на рис. 3.14 справа. Исчезло красное плато, разрывы функции цены прослеживаются. По краям разрывов по-прежнему имеется «пила», хотя и не очень большая.

4 Примеры

Вычисления примеров производились в параллельном режиме на персональном компьютере с четырехядерным процессором Intel Core i7-2600K с частотой 3.70 ГГц и 12 Гб оперативной памяти. Все временные параметры счета приведены для этого компьютера. В примерах все поверхности трехмерных множеств уровня построены с помощью последовательного применения симметричного алгоритма Marching Cubes (см. раздел 3.1) и HC-алгоритма (см. раздел 3.2.2) и визуализированы с помощью системы MeshLab. В задачах с двумерным фазовым вектором графики функции цены построены с помощью алгоритма, описанного в разделе 3.4, и визуализированы в программе MeshLab, а множества уровня данных двумерных поверхностей сформированы с помощью программы GNUPlot.

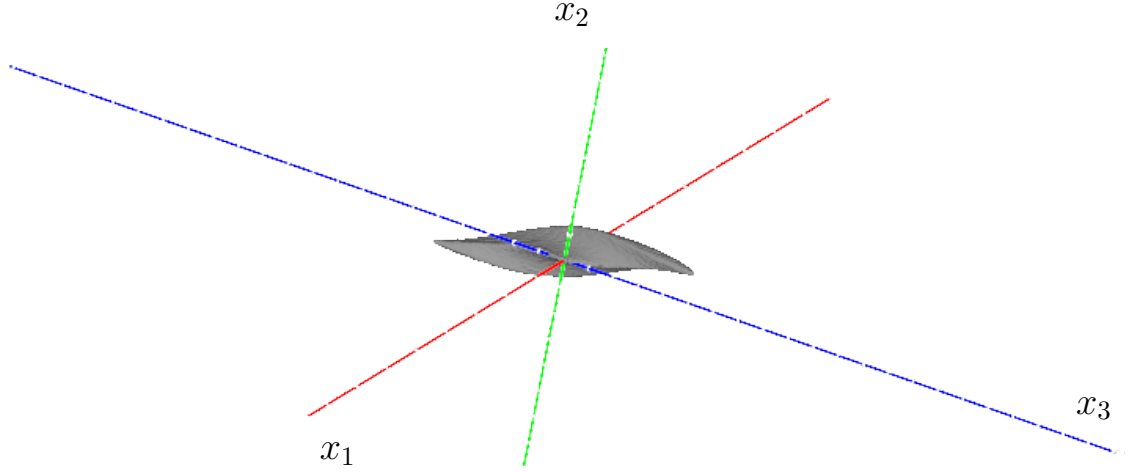
Следует отметить, что функция цены является непрерывной в модифицированной игре «шофер-убийца» с машиной типа Ридса – Шеппа (раздел 4.7), в остальных примерах функция цены является разрывной. То есть применение описанной численной процедуры для их решения не обосновано. Однако фактически получаемые результаты имеют хорошее совпадение с результатами работы других алгоритмов.

4.1 Машина Дубинса

Первый пример — машина Дубинса. Эта модель простейшим образом описывает движение автомобиля (корабля, летательного аппарата) на плоскости с постоянной по величине линейной скоростью и ограниченным радиусом разворота. Фактически, данная задача — это задача управления, но она была заменена дифференциальной игрой с фиктивным управлением второго игрока. Динамика такой системы записывается следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = f(x, p, q) = \begin{pmatrix} \cos x_3 \\ \sin x_3 \\ p \end{pmatrix},$$

где x_1, x_2 — геометрические координаты автомобиля, x_3 — угол между положительным направлением оси x_1 и направлением движения автомобиля,

Рис. 4.1. Машина Дубинса, $\mathbb{L}_c$, $c = \pi$

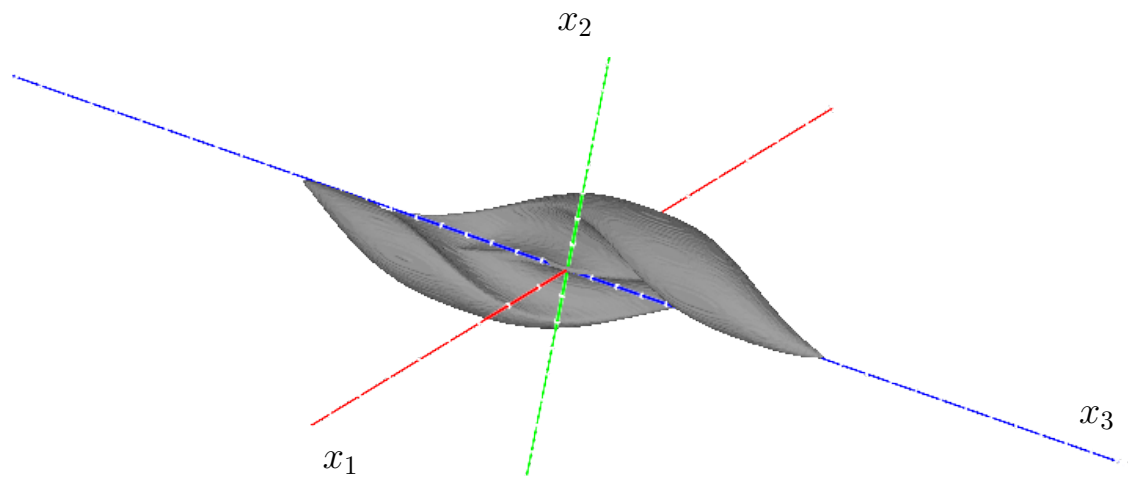
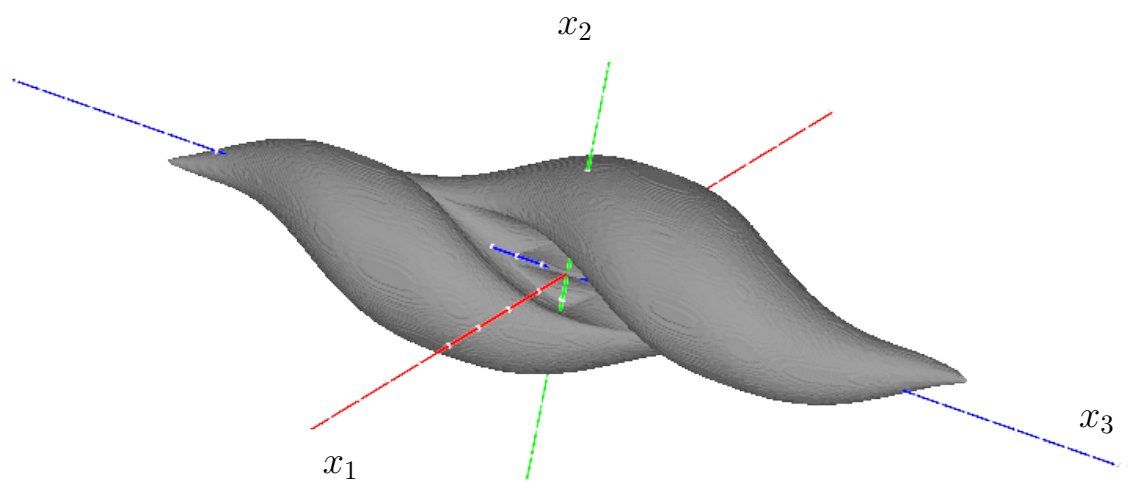
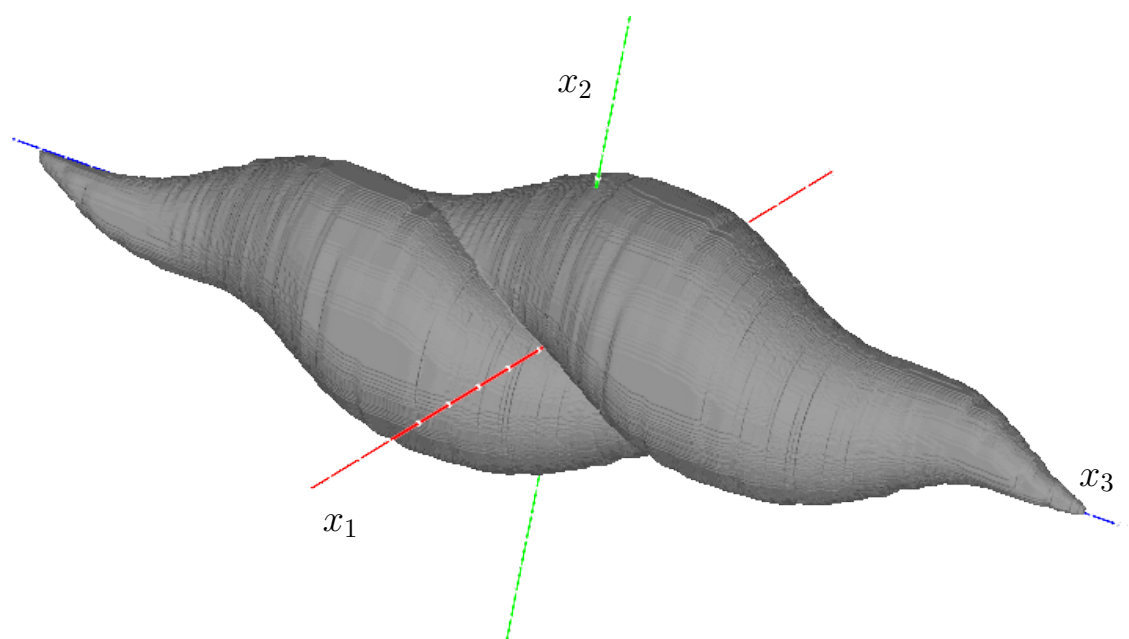
$p \in [-1, 1]$ — управляющее воздействие, мгновенная угловая скорость поворота направления движения. Терминальное множество $\mathcal{T}$ — куб с центром в начале координат и сторонами длиной 0.4. Множество $\mathcal{W}$ — прямоугольный параллелепипед $[-10.0, +12.5] \times [-12.0, +12.0] \times [-12.5, +12.5]$. Число итераций $n = 150$, шаг по времени $h = 0.15$, шаг по пространству $k = 0.075$. Результаты вычислений — различные множества уровня $\mathbb{L}_c$ функции цены — приведены на рис. 4.1–4.4 (рис. 4.1 — для значения $c = \pi$, рис. 4.2 — для $c = 2\pi$, рис. 4.3 — для $c = 3\pi$, рис. 4.4 — для $c = 4\pi$). К данным результатам были применены алгоритмы Marching Cubes и алгоритм Лапласа для сглаживания полученной трехмерной поверхности, изображения были сделаны в системе MeshLab. Время вычисления составило 16 часов.

4.2 Машина Дубинса с редуцированной динамикой

Второй исследуемый пример также представляет машину Дубинса, однако вместо исходной трехмерной динамики рассматривается редуцированная двумерная. Вводится подвижная система координат, начало которой совмещается с автомобилем, а ось x_2 направляется вдоль вектора линейной скорости. Уравнения движения в новых координатах имеют вид:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = f(x, p, q) = \begin{pmatrix} -x_2 p \\ x_1 p - 1 \end{pmatrix}.$$

Управляющее воздействие $p \in [-1, 1]$ имеет тот же смысл мгновенной угловой скорости поворота направления движения. Шаг по времени $h = 0.05$,

Рис. 4.2. Машина Дубинса, $\mathbb{L}_c$, $c = 2\pi$ Рис. 4.3. Машина Дубинса, $\mathbb{L}_c$, $c = 3\pi$ Рис. 4.4. Машина Дубинса, $\mathbb{L}_c$, $c = 4\pi$

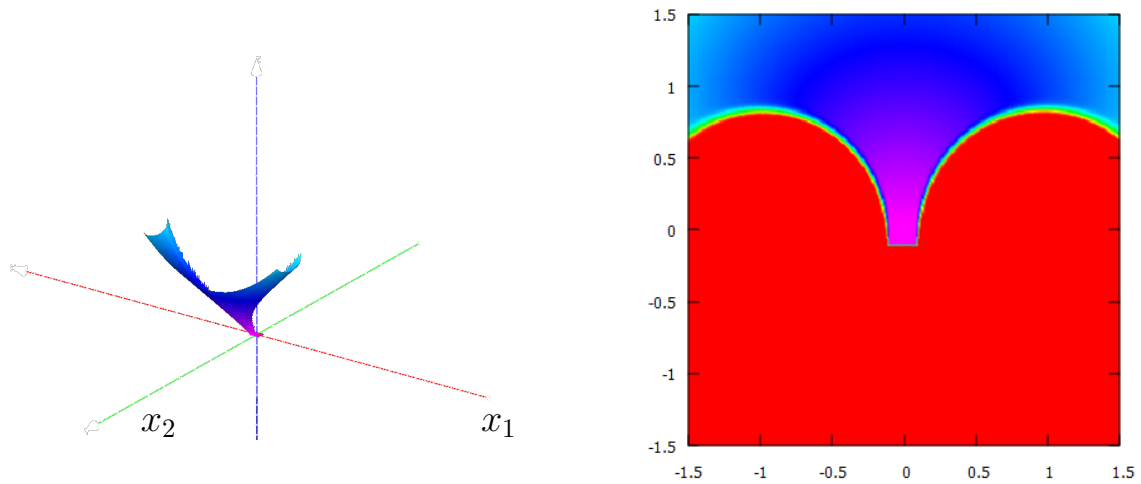


Рис. 4.5. Задача «машина Дубинса» с редуцированной двумерной динамикой. Множество игры $\mathcal{W}_0 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x_1|, |x_2|\} \leq 1.5\}$

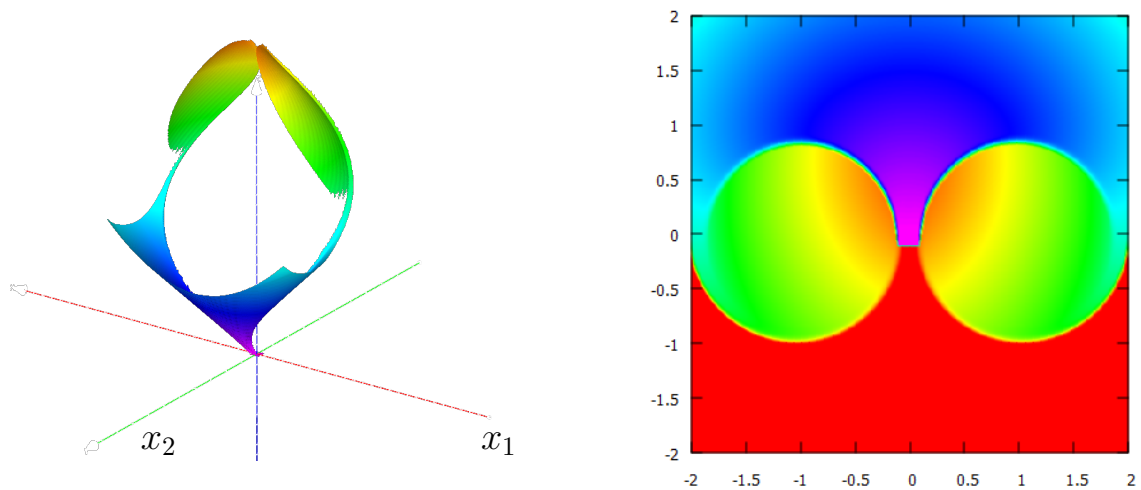


Рис. 4.6. Задача «машина Дубинса» с редуцированной двумерной динамикой. Множество игры $\mathcal{W}_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x_1|, |x_2|\} \leq 2\}$

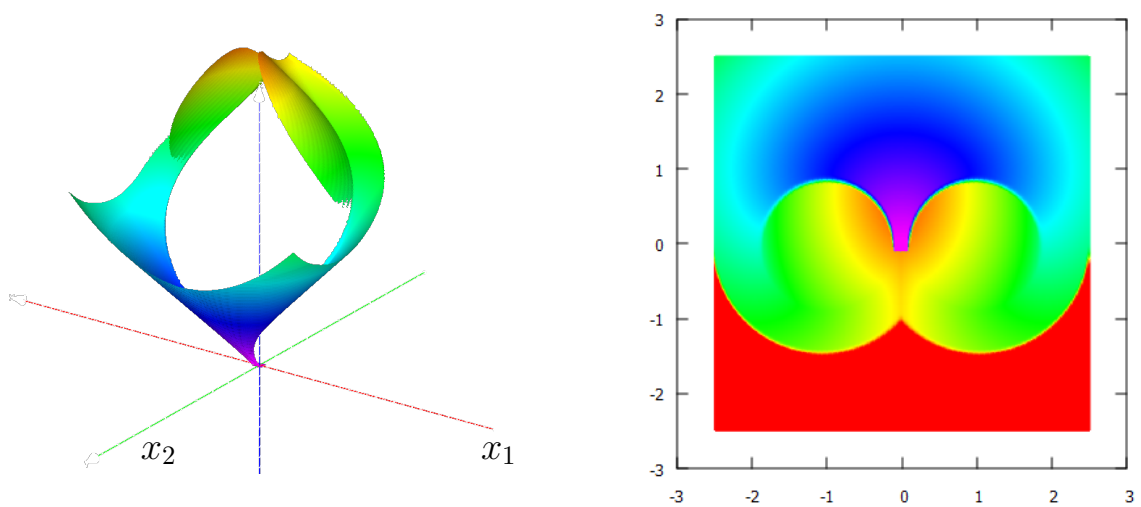


Рис. 4.7. Задача «машина Дубинса» с редуцированной двумерной динамикой. Множество игры $\mathcal{W}_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x_1|, |x_2|\} \leq 2.5\}$

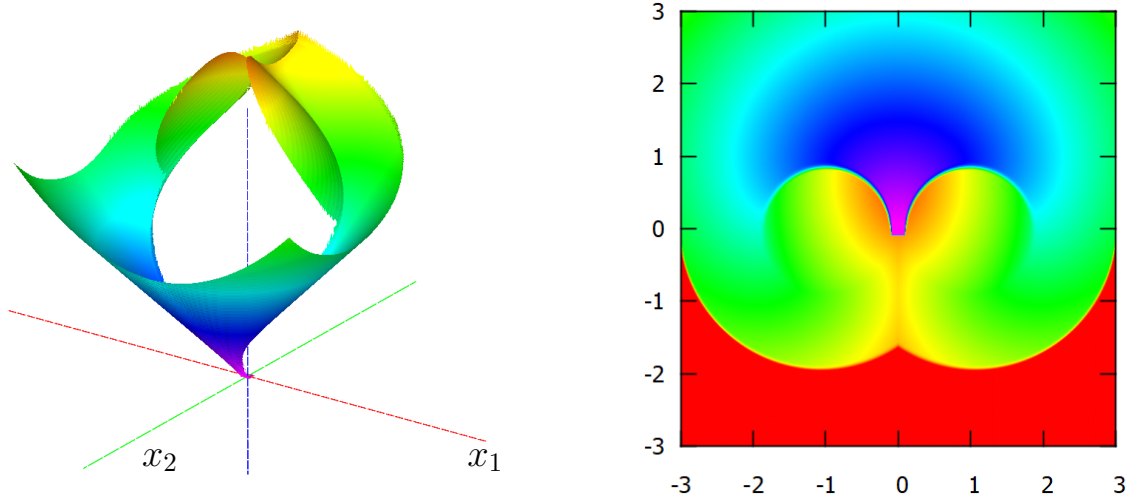


Рис. 4.8. Задача «машина Дубинса» с редуцированной двумерной динамикой. Множество игры $\mathcal{W}_3 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x_1|, |x_2|\} \leq 3\}$

шаг по пространству $k = 0.01$. Терминальное множество $\mathcal{T} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x_1|, |x_2|\} \leq 0.1\}$. Вычисления производились для разных множеств $\mathcal{W}$; они являются квадратами с центром в начале координат. Количество итераций $n = 150$. Графики полученных функций цены для этих вариантов числовых данных на рис. 4.5–4.8.

На правых частях рисунков 4.5–4.8 область красного цвета отвечает результату $+\infty$. Лиловый квадрат в центре — это терминальное множество, функция цены на котором равна нулю. Из результатов видно, что, если для множества $\mathcal{W}_0$ функция цены в достаточно большой части множества равняется $+\infty$, то для множества $\mathcal{W}_3$ плато красного цвета уже уменьшается, что лишний раз показывает важность выбора множества $\mathcal{W}$ для получения результата, совпадающего с значением в задаче без линии жизни.

Время вычисления составило 3, 6, 9 и 12 минут соответственно.

4.3 Машина Дубинса с круглым множеством $\mathcal{W}$

Третий исследуемый пример — тоже машина Дубинса с динамикой из предыдущего примера, но множество $\mathcal{W}$ теперь не квадрат, а круг радиуса 3 с центром в начале координат. Управляющее воздействие $p \in [-1, 1]$, шаг по времени $h = 0.05$, шаг по пространству $k = 0.01$. Терминальное множество $\mathcal{T} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x_1|, |x_2|\} \leq 0.5\}$. Количество итераций $n = 150$. Результаты вычислений показаны на рис. 4.9.

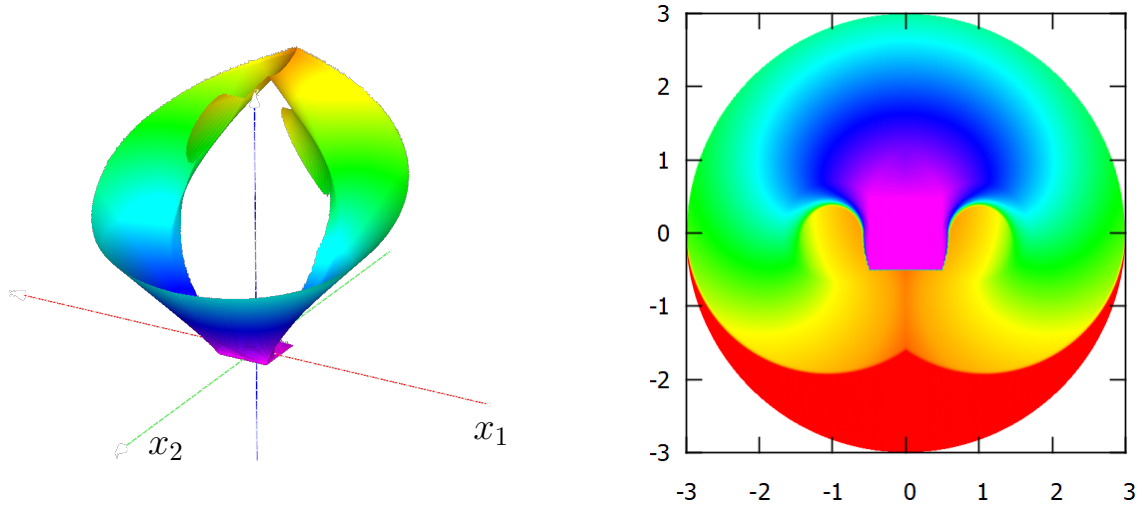


Рис. 4.9. Задача «машина Дубинса» с редуцированной двумерной динамикой и круглым множеством $\mathcal{W}$ (слева — функция цены, справа — множества уровня)

4.4 Игра «шофер-убийца», пример 1

Следующий пример, исследованный при помощи предложенной численной процедуры, — игра «шофер-убийца» [1, 60].

Игра происходит на плоскости. Преследователь P движется с фиксированной скоростью w_P , радиус кривизны его траектории ограничен заданной величиной R ; P управляет выбором значения этого радиуса кривизны в каждый момент. Убегающий E обладает динамикой простых движений, то есть величина w_E его линейной скорости фиксирована, а управление состоит в том, что в каждый момент выбирается направление движения. Считается, что преследователь быстрее: $w_P > w_E$. Поимка пешехода происходит, когда расстояние между P и E не больше заданного радиуса захвата l .

Чтобы записать уравнения движения игроков, достаточно задать пять фазовых координат: по две координаты для обозначения положения P и E и еще одну для обозначения направления движения P . Обозначим их через $X_1^P, X_2^P, X_1^E, X_2^E, \theta$. Угол ψ — угол между осью ординат и направлением движения E , угол θ — угол между осью ординат и направлением движения P . Уравнения движения можно записать так:

$$\begin{aligned} \dot{X}_1^P &= w_P \sin \theta, & \dot{X}_1^E &= w_E \sin \psi, \\ \dot{X}_2^P &= w_P \cos \theta, & \dot{X}_2^E &= w_E \cos \psi, \\ \dot{\theta} &= \frac{w_P}{R} \psi, \end{aligned}$$

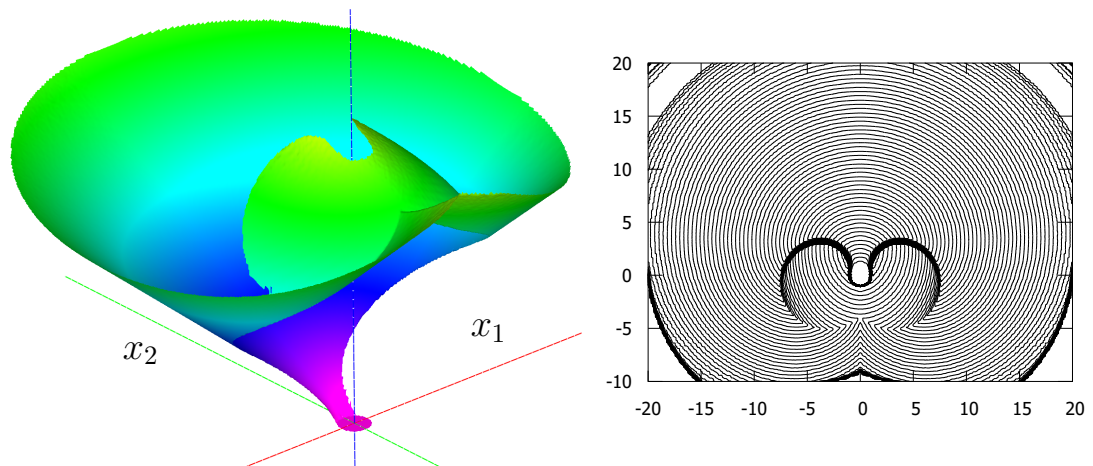


Рис. 4.10. Игра «шофер-убийца», пример 1: слева — функция цены, справа — множества уровня

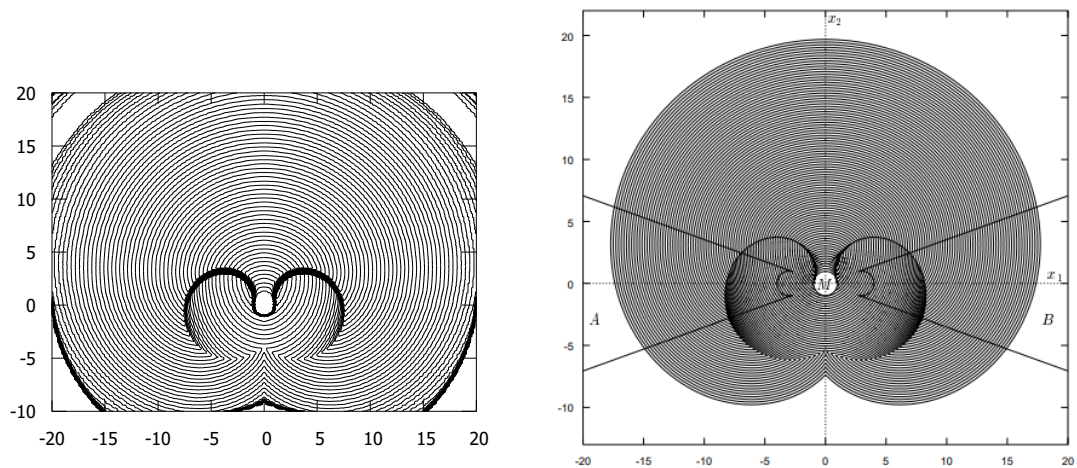


Fig. 25. Level sets of the homicidal chauffeur game for $w^{(1)} = 3$, $w^{(2)} = 1$ and $R = 3$.

Рис. 4.11. Игра «шофер-убийца», пример 1: сравнение полученных множеств уровня (слева) с множествами из статьи [68] (справа)

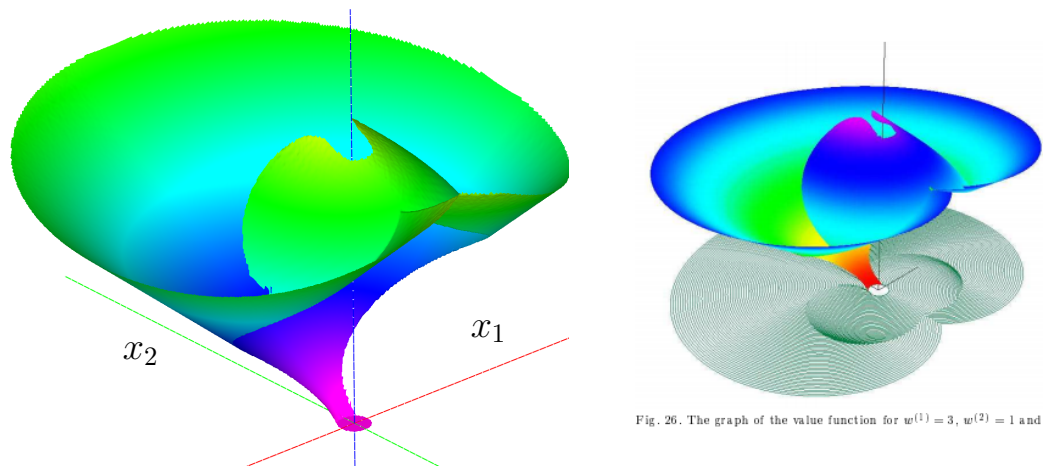


Fig. 26. The graph of the value function for $w^{(1)} = 3$, $w^{(2)} = 1$ and $R = 3$.

Рис. 4.12. Игра «шофер-убийца», пример 1: сравнение полученной функции цены (слева) с функцией из статьи [68] (справа)

Эта игра допускает понижение размерности пространства игры с 5 до 2 [1, 60]. Вводятся разностные координаты $x_1 = X_1^E - X_1^P$, $x_2 = X_2^E - X_2^P$. Тем самым, на плоскости выбирается подвижная система координат, начало которой совмещается с автомобилем P . Скорость автомобиля считается направленной вдоль положительного направления оси x_2 . Тогда уравнения движения принимают следующий вид:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = f(x, p, q) = \begin{pmatrix} \frac{w_P}{R} x_2 \varphi + w_P \sin \psi \\ \frac{w_P}{R} x_1 \varphi - w_P + w_E \cos \psi \end{pmatrix}, \quad -1 \leq \varphi \leq 1.$$

Вычисления производятся для следующего варианта динамики системы, первоначально использованного в статье [68]:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = f(x, p, q) = \begin{pmatrix} -x_2 p + \sin q \\ x_1 p + \cos q - 3 \end{pmatrix},$$

где $p \in [-1, 1]$, $q \in [-\pi, \pi]$. Терминальное множество $\mathcal{T}$ — круг с центром в начале координат и радиусом 1, множество $\mathcal{W}$ — это прямоугольник $[-20, 20] \times [-10, 20]$. Число итераций $n = 150$. Шаг по времени $h = 0.1$, шаг по пространству $k = 0.1$. Время вычисления составило 2.5 часов. Результат вычисления показан на рис. 4.10.

На рис. 4.11 и 4.12 представлено сравнение множеств уровня и функции цены, полученных с помощью алгоритмов, описанных в данной работе, и результатов вычислений из статьи [68].

4.5 Игра «шофер-убийца», пример 2

Следующий пример — игра «шофер-убийца» с другим вариантом динамики системы, также первоначально использованным в статье [68]:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = f(x, p, q) = \begin{pmatrix} -10x_2 p + 0.6 \sin q \\ 10x_1 p + 0.6 \cos q - 2 \end{pmatrix},$$

где $p \in [-1, 1]$, $q \in [-\pi, \pi]$. Терминальное множество $\mathcal{T}$ — круг с центром в точке $(0.2, 0.3)$ и радиусом 0.015, множество $\mathcal{W}$ — это прямоугольник $[-1.5, 1.5] \times [-1, 1.5]$. Число итераций $n = 200$. Шаг по времени $h = 0.001$, шаг

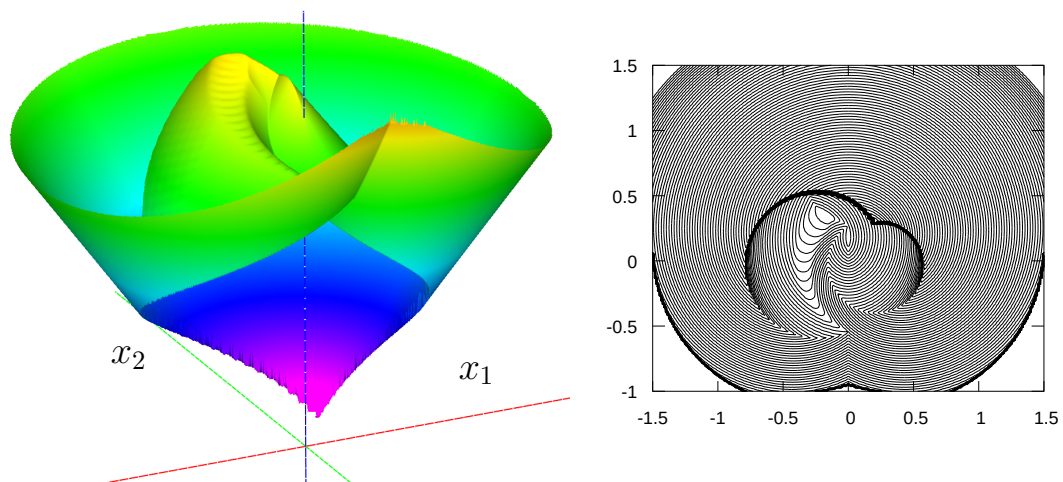


Рис. 4.13. Игра «шофер-убийца», пример 2: слева — функция цены, справа — множества уровня

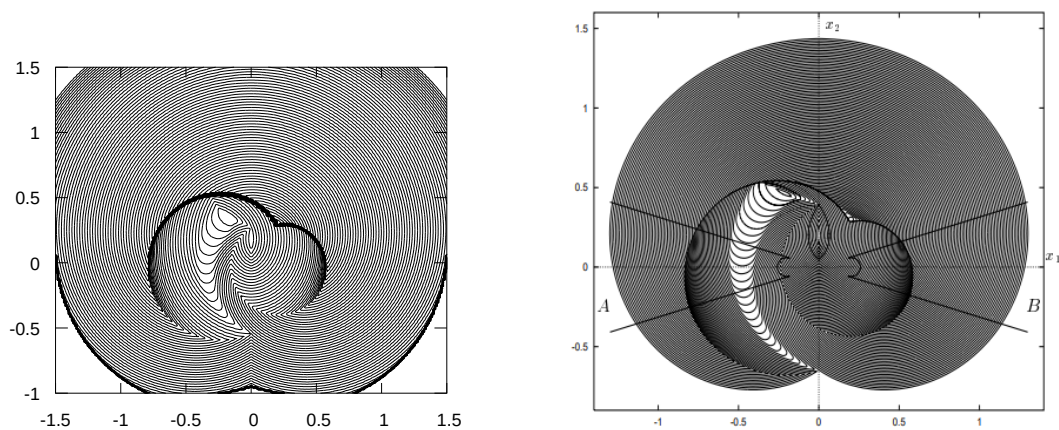


Fig. 27. Complicated structure of level sets in the “region of turn.” The terminal set is a small circle in the first quadrant; $w^{(1)} = 2$, $w^{(2)} = 0.6$ and $R = 0.2$.

Рис. 4.14. Игра «шофер-убийца», пример 2: сравнение полученных множеств уровня (слева) с множествами из статьи [68] (справа)

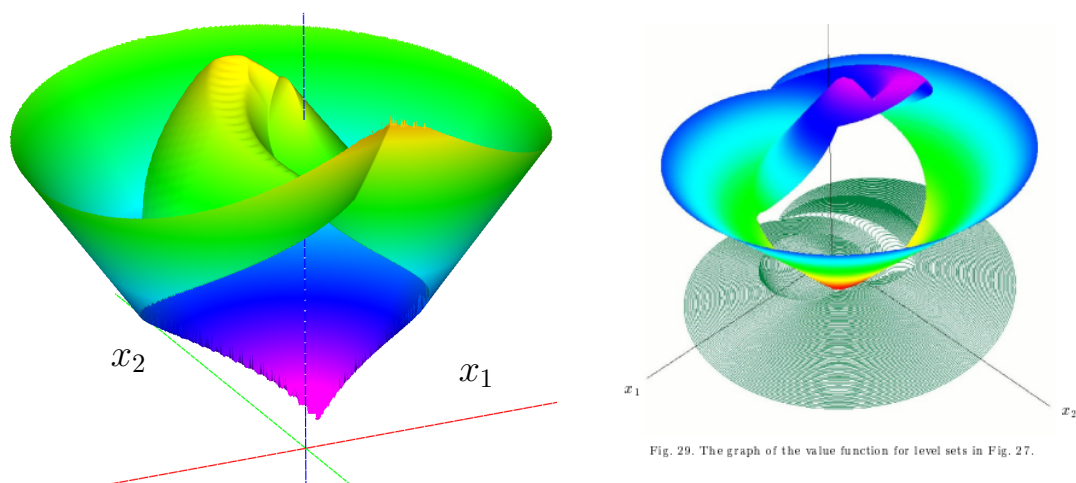


Fig. 29. The graph of the value function for level sets in Fig. 27.

Рис. 4.15. Игра «шофер-убийца», пример 2: сравнение полученной функции цены (слева) с функцией из статьи [68] (справа)

по пространству $k = 0.005$. Время вычисления составило 7 часов 51 минуту. Результат вычисления показан на рис. 4.13.

На рис. 4.14 и 4.15 представлено сравнение множеств уровня и функции цены, полученных с помощью алгоритмов, описанных в данной работе, и результатов вычислений из статьи [68].

4.6 Игра «шофер-убийца» с машиной типа Ридса – Шеппа

В классической постановке задачи «шофер-убийца» рассматривался автомобиль Дубинса, линейная скорость которого всегда была направлена вперед и оставалась постоянной по величине. Другая модель автомобиля, изученная Дж.А.Ридсом и Л.А.Шеппом в [72], подразумевает возможность изменения величины линейной скорости в диапазоне $[-1, 1]$, то есть в этом случае автомобиль обладает задним ходом. Модели с несимметричными возможностями движения автомобиля вперед и назад численно исследовались В.Л.Туровой и В.С.Пацко в [18, 70]. Следующие два примера обладают динамикой такого типа:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = f(x, p, q) = \begin{pmatrix} -x_2 \cdot p_1 + q_1 \\ x_1 \cdot p_1 - p_2 + q_2 \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

Здесь первый игрок управляет величинами p_1 и p_2 , а второй — q_1 и q_2 . Управление p_1 определяет угловую скорость вращения направления движения автомобиля, а управление p_2 отвечает за мгновенное значение линейной величины его скорости. В частности, из-за мгновенного изменения значения управления p_2 с положительного на отрицательное автомобиль может мгновенно менять направление движения, что, конечно, является математической идеализацией. Управление p_2 меняется в пределах от a до 1, a является параметром задачи. Если $a = 1$, то получаемая модель является автомобилем Дубинса. Если $a = -1$, то модель является автомобилем Ридса – Шеппа.

Для данной динамики были посчитаны два примера: первый с параметром $a = -0.6$ (см. рис. 4.16), и второй с параметром $a = -1$ (см. рис. 4.17). В первом случае множество $\mathcal{W}$ — круг радиуса 4, во втором — прямоугольник $[-2, 2] \times [-2.5, 2.5]$. Шаг по пространству $k = 0.025$, шаг по времени $h = 0.075$, $p \in [-1, 1] \times [a, 1]$, $|q| \leq 0.3$, терминальное множество — круг с центром в

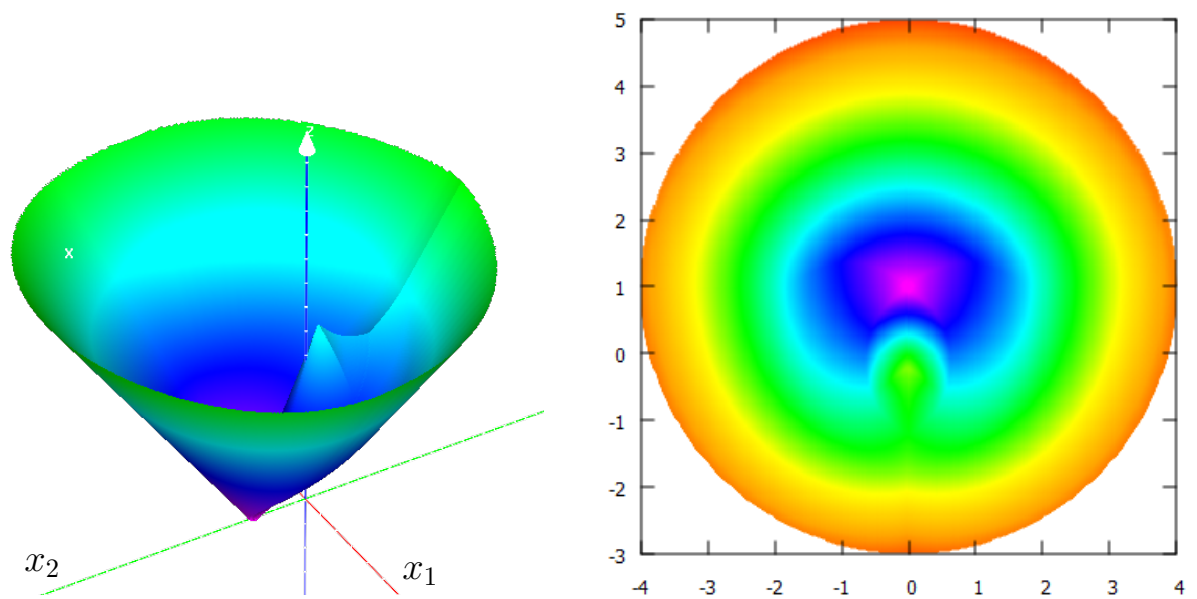


Рис. 4.16. Игра «шофер-убийца» с машиной Ридса – Шеппа, $a = -0.6$: слева — функция цены, справа — множества уровня

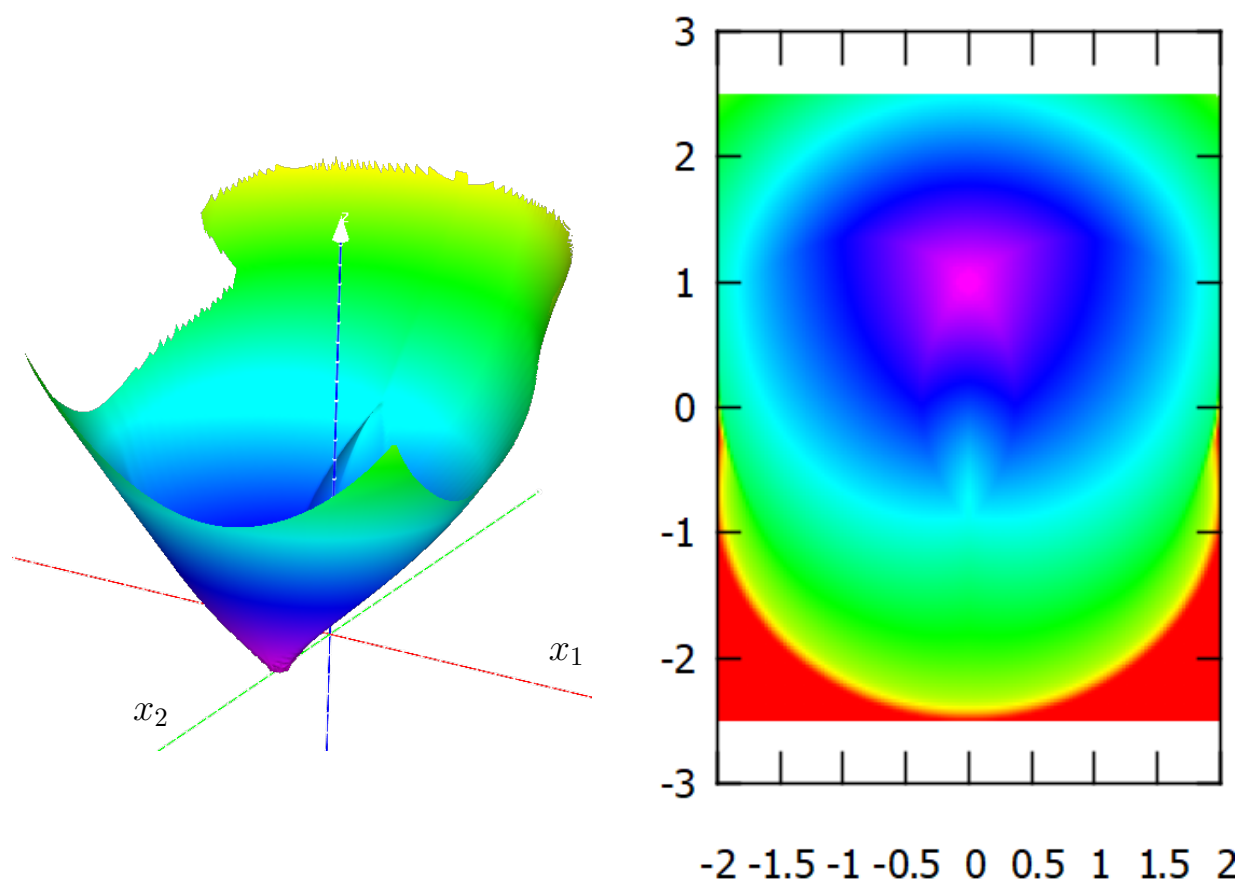


Рис. 4.17. Игра «шофер-убийца» с машиной Ридса – Шеппа, $a = -1$: слева — функция цены, справа — множества уровня

точке $(0, 1)$ радиуса 0.2. Количество итераций $n = 150$. Время вычисления в первом случае составило примерно 6 часов, во втором — 4 часа. Время вычисления во втором случае меньше, поскольку меньше количество узлов в выбранной сетке.

4.7 Модифицированная игра «шофер-убийца» с машиной типа Ридса – Шеппа

В предыдущем примере функция цены получается непрерывной вблизи границы $\mathcal{T}$, но, тем не менее, на границе $\mathcal{F}$ есть разрыв. Модифицируем динамику из примера 4.6 следующим образом:

$$\tilde{f}(x, p, q) = \alpha(x)f(x, p, q) + (1 - \alpha(x))q. \quad (4.2)$$

Здесь функция

$$\alpha(x) = \begin{cases} 1, & d(x) \leq R, \\ (R + l - d(x))/l, & R < d(x) \leq R + l, \\ 0, & d(x) > R + l, \end{cases}$$

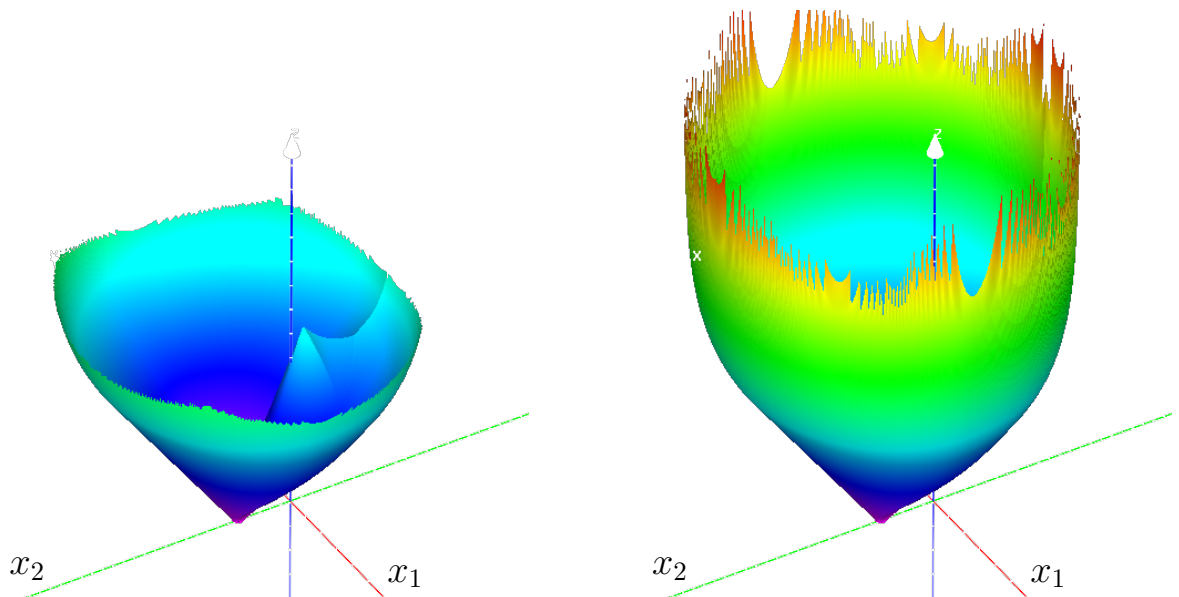


Рис. 4.18. Модифицированная игра «шофер-убийца» с машиной Ридса – Шеппа, слева — функция цены с параметром визуализации 0.1, справа — с параметром визуализации 10

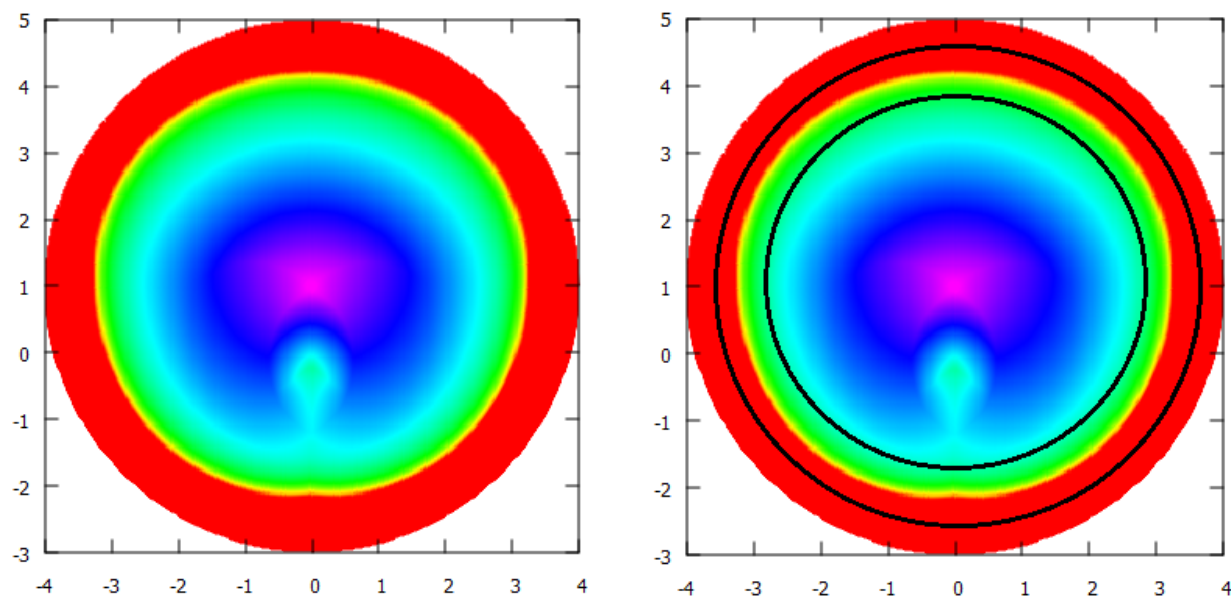


Рис. 4.19. Модифицированная игра «шофер-убийца» с машиной Ридса – Шеппа, слева — множества уровня функции цены, справа — множества уровня с отмеченными на них границами переходного слоя

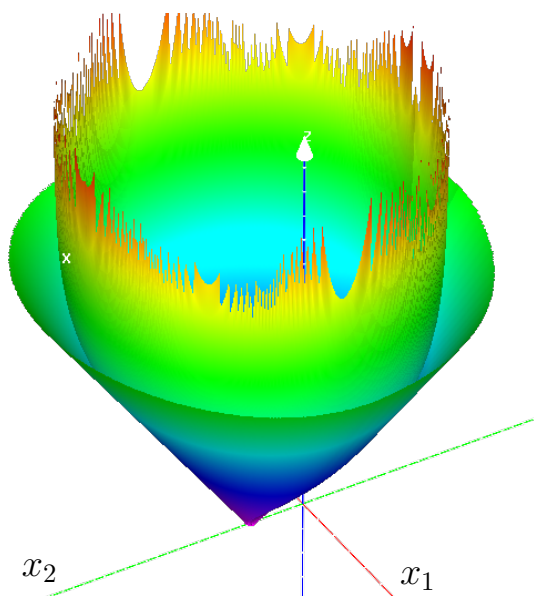


Рис. 4.20. Совмещенные графики функции цены обычной и модифицированной игр «шофер-убийца» с машиной Ридса – Шеппа

где $d(x) = \sqrt{x_1^2 + (x_2 - 1)^2}$ — расстояние от точки x до центра теримального множества, $R = 2.5$ — радиус окружности, внутри которой динамика остается немодифицированной, $l = 1$ — ширина переходного слоя.

При таком задании динамики получаем, что в круге радиуса 2.5 с центром в точке $(0, 1)$ динамика остается той же, что и в задаче 4.6, а на слое шириной 1 происходит непрерывный переход от динамики $\dot{x} = f(x, p, q)$ к динамике $\dot{x} = q$. Тем самым, вне круга радиуса 3.5 с центром в точке $(0, 1)$ у второго игрока имеется динамическое преимущество, из-за чего на границе $\partial\mathcal{F}$ множества $\mathcal{F}$ выполняется условие С.4 и, как следствие, функция цены вблизи границы множества $\mathcal{F}$ становится непрерывной и ее значение там равно $+\infty$.

На рис. 4.18 изображен график функции цены модифицированной задачи. При визуализации использовались разные параметры непрерывности функции: слева — 0.1, справа — 10. Напомним, что параметр непрерывности — это порог, ограничивающий разность аппликат вершин треугольника, при превышении которого треугольник не включается в формируемую поверхность. На рис. 4.19 справа изображены множества уровня функции цены, слева черным цветом отмечены границы переходного слоя. Рисунок 4.20 совмещает график модифицированной функции цены и график обычной функции из задачи 4.6.

Из рассмотрения рисунка 4.20 складывается впечатление, что в некоторой части имеется совпадение графиков функций цены задачи 4.6 с динамикой (4.1) и задачи 4.7 с динамикой (4.2). Совпадение в круге радиуса 2.5 с центром в точке $(0, 1)$ (то есть на множестве совпадения динамик) было подтверждено сравнением результатов численного счета для этих задач.

4.8 Материальная точка

Классической задачей быстрогодействия из математической теории оптимального управления является задача «материальная точка на прямой». Задача имеет простейшую линейную динамику:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = f(x, p, q) = \begin{pmatrix} x_2 \\ p \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

где x_1 — геометрическая координата точки на прямой, x_2 — скорость, управляющее воздействие $p \in [-1, 1]$ можно ассоциировать с силой, действующей на точку. Целевое множество $\mathcal{T}$ — квадрат с центром в начале координат и сторонами, равными 0.5 (то есть цель управления — привести точку близко к началу координат с небольшой линейной скоростью в момент приведения), множество $\mathcal{W}$ — квадрат с центром в начале координат и сторонами, равными 4. Количество итераций $n = 100$, шаг по времени $h = 0.05$, по пространству $k = 0.025$. Время счета составило чуть меньше, чем полчаса.

4.9 Материальная точка со смещенным целевым множеством

Рассматривается задача, имеющая динамику (4.3) материальной точки, те же ограничения на управляющее воздействие, но иное целевое множество $\mathcal{T}$. Сейчас множество $\mathcal{T}$ выбрано как квадрат с центром в точке $(0, 1)$ и сторонами длиной 0.4. Похожая дифференциальная игра (с динамикой материальной точки на прямой и таким смещенным терминальным множеством) изучалась в [16]. Множество $\mathcal{W}$ — квадрат с центром в начале координат и сторонами длиной 8. Число итераций $n = 150$, шаг по времени $h = 0.01$, по пространству $k = 0.01$.

Графики и множества уровня численно полученной функции оптимального результата для этой задачи и для задачи из предыдущего раздела приведены на рис. 4.22 и 4.21 соответственно. В обоих случаях можно разглядеть теоретически вычисляемые параболические линии переключения управления с одного крайнего значения на другое, уходящие от левой нижней и правой верхней вершин квадрата терминального множества, на которых функция оптимального результата имеет разрыв.

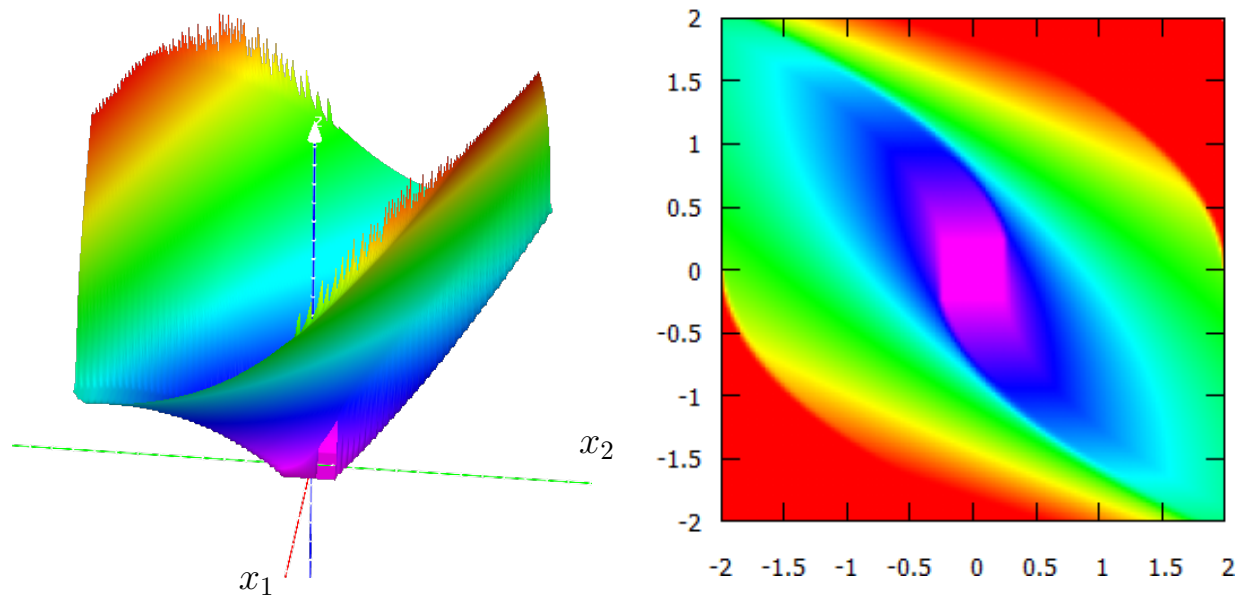


Рис. 4.21. Материальная точка: слева — функция цены, справа — множества уровня

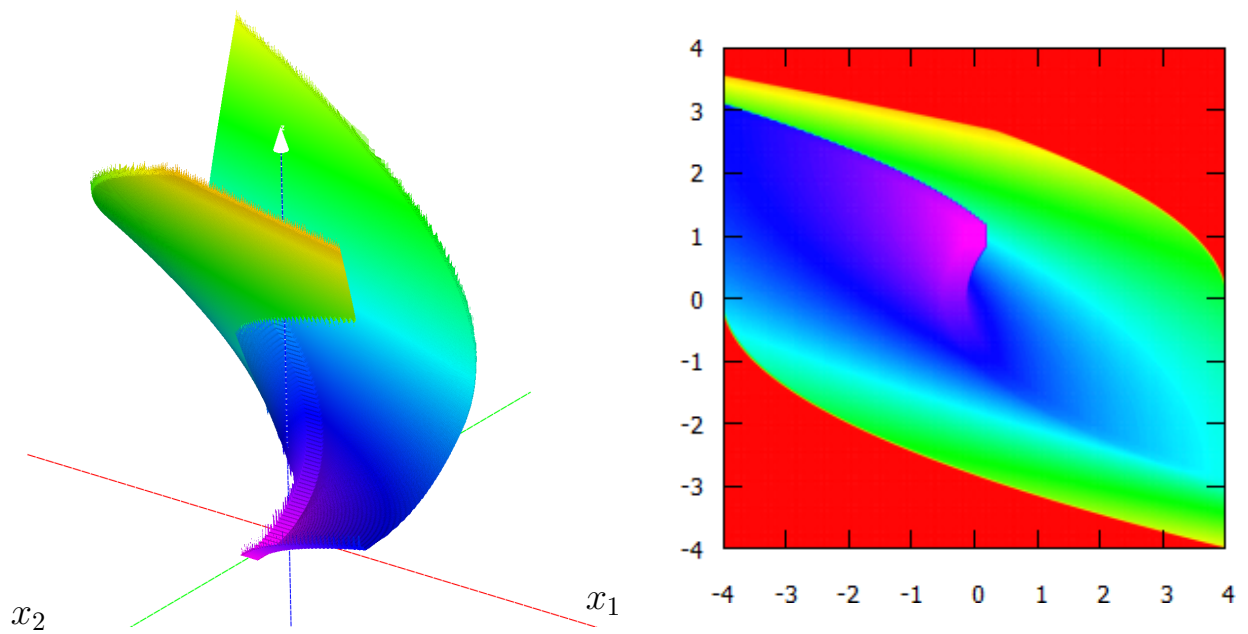


Рис. 4.22. Материальная точка со смещенным целевым множеством $\mathcal{T}$: слева — функция цены, справа — множества уровня

4.10 Модифицированная игра «изотропные ракеты»

Рассмотрим модифицированную игру «изотропные ракеты» со следующей редуцированной динамикой из статьи [42]:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{V}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{Wx_2}{V_p} \sin \phi + V_e \sin \psi, \\ \frac{Wx_1}{V_p} \sin \phi + V_e \cos \psi - V_p, \\ W \cos \phi. \end{pmatrix}$$

Здесь преследователь использует два управления. Управление W отвечает за величину ускорения; от этой величины зависит как изменение координат x_1 и x_2 , так и изменение величины линейной скорости V_p преследователя. Управление ϕ — это угол между векторами скорости и ускорения преследователя; предполагается, что $-\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2$.

Отметим, что из-за ограничения на ϕ величина V_p может только расти. При этом на величину скорости наложено ограничение $V_p \in [V_{\min}, V_{\max}]$.

Значение V_e — это величина скорости убегающего; ψ — угол между вектором скорости убегающего и направлением оси x_2 ($0 \leq \psi \leq 2\pi$).

Целевое множество — это цилиндр $\mathcal{T} = \{(x_1, x_2, V_p) : x_1^2 + x_2^2 \leq 0.3^2\}$. Для вычислений использовались величины $W \equiv 1$, $V_e \equiv 0.3$. Шаг по времени равен $h = 0.05$, шаги по пространству, соответственно, $k = 0.05, 0.05, 0.01$. Количество итераций $n = 150$.

Просчитывались два примера. В первом — $V_{\min} = 0.8$, $V_{\max} = 1.2$, множество $\mathcal{W} = [-5.0, 5.0] \times [-5.0, 5.0] \times [0.8, 1.2]$. Время вычисления составило 30 часов.

Во втором примере были выбраны значения $V_{\min} = 0.5$, $V_{\max} = 1.5$, множество $\mathcal{W} = [-6.0, 6.0] \times [-4.0, 7.0] \times [0.5, 1.5]$. Время вычисления составило 37 часов.

В этой задаче график функции цены $v(x_1, x_2, V_p)$ погружен в четырехмерное пространство и не может быть явно визуализирован. Поэтому на рисунках представлены множества уровня функции цены, то есть множество точек (x_1, x_2, V_p) , удовлетворяющих неравенству $v(x_1, x_2, V_p) \leq 5.7$ (см. рис. 4.23).

Также на рис. 4.24 и 4.25 представлено сравнение множеств уровня, полученных с помощью алгоритмов, описанных в данной работе, и результатов вычислений из статьи [42].

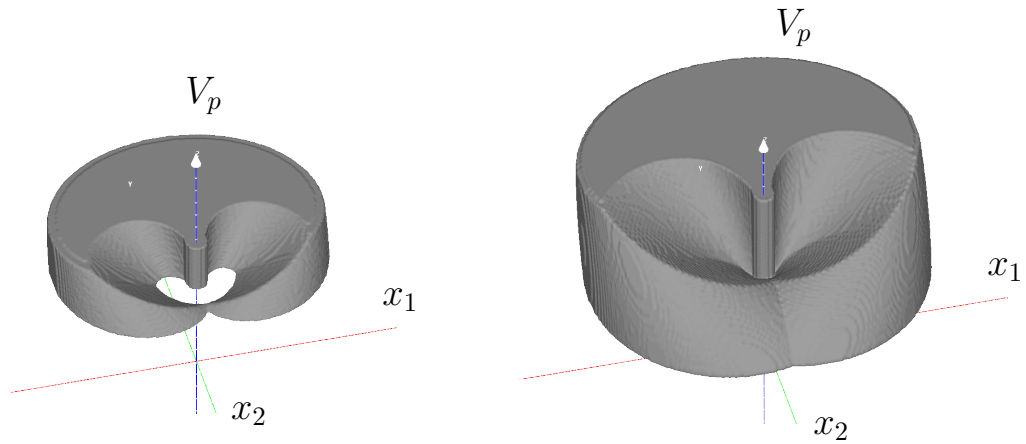


Рис. 4.23. Модифицированная игра «изотропные ракеты», $0.8 \leq V_p \leq 1.2$ (слева) и $0.5 \leq V_p \leq 1.5$ (справа)

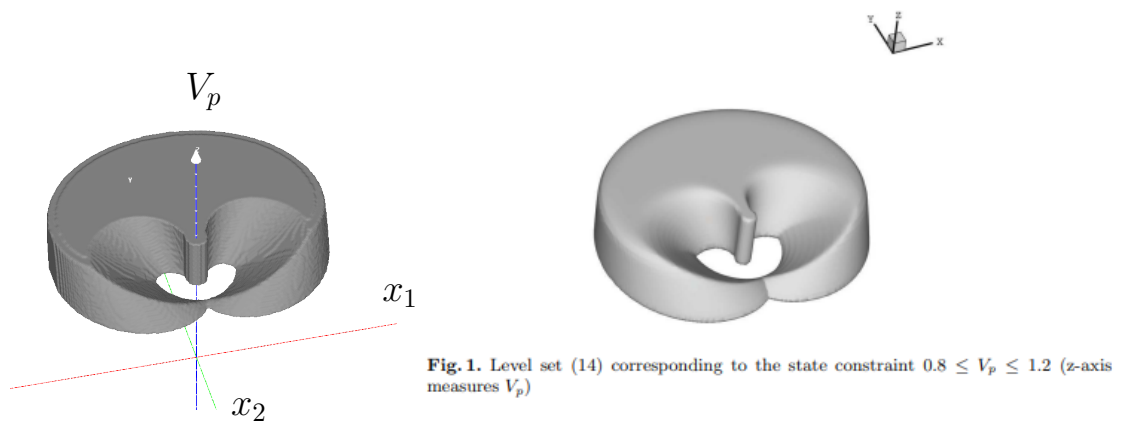


Рис. 4.24. Модифицированная игра «изотропные ракеты», $0.8 \leq V_p \leq 1.2$, сравнение полученного множества уровня (слева) с множеством из статьи [42] (справа)

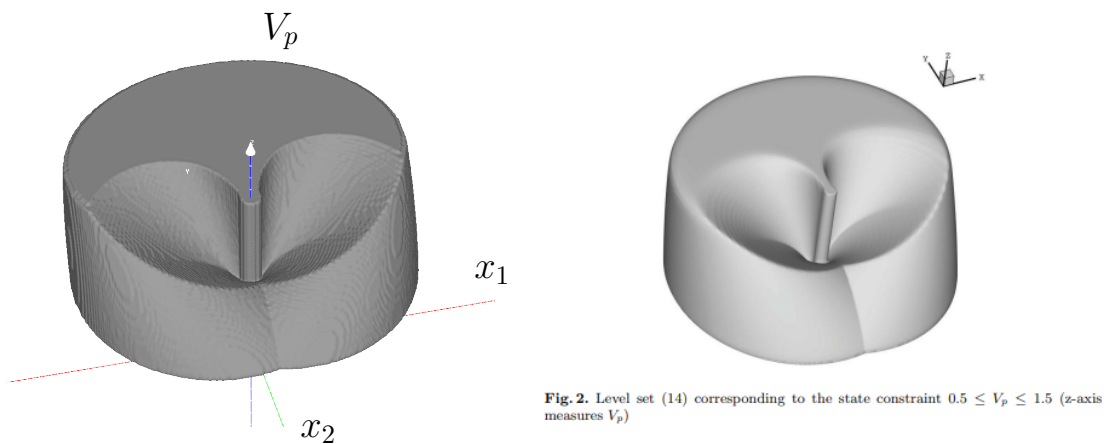


Рис. 4.25. Модифицированная игра «изотропные ракеты», $0.5 \leq V_p \leq 1.5$, сравнение полученного множества уровня (слева) с множеством из статьи [42] (справа)

Заклучение

В данном исследовании были выполнены следующие задачи.

1. Обосновано существование функции цены дифференциальной игры оптимального быстрогодействия с линией жизни.
2. Доказано существование непрерывного обобщенного (минимаксного) решения краевой задачи для уравнения ГЯ, соответствующей дифференциальной игре оптимального быстрогодействия с линией жизни, и совпадение его с функцией цены такой игры.
3. Доказаны теоремы о характеристизации области совпадения функций цены дифференциальных игр оптимального быстрогодействия с линией жизни и без нее.
4. Сформулирована численная схема построения непрерывной функции цены дифференциальной игры оптимального быстрогодействия с линией жизни, доказана ее сходимостъ к вязкостному решению соответствующей краевой задачи для уравнения ГЯ и создана ее программная реализация.
5. Для сглаживания поверхностей при их визуализации создана программная реализация алгоритма Marching Cubes и НС-алгоритма и проведено исследование качества визуализации при применении их к представлению результатов решения дифференциальных игр оптимального быстрогодействия с линией жизни.

Перспективы дальнейшей разработки темы. Фактически, в данном исследовании рассматривается непрерывная функция цены, что не очень характерно для дифференциальных игр быстрогодействия. В дальнейшем планируется отказаться от условий С.3 и С.4 динамического преимущества игроков вблизи границ соответствующих множеств и обобщить результаты на случай разрывной функции цены.

Список литературы

- [1] *Айзекс, Р.* Дифференциальные игры / Р.Айзекс. — М.: Мир, 1967. — 479 с.
- [2] Алгоритмы и программы решения линейных дифференциальных игр / под ред. А.И.Субботин, В.С.Пацко. — Свердловск, 1984. — 295 с.
- [3] *Бураго, Д.Ю.* Курс метрической геометрии / Д.Ю.Бураго, Ю.Д.Бураго, С.В.Иванов. — Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. — 512 с.
- [4] *Григоренко, Н.Л.* Методы решения дифференциальных игр / Н.Л.Григоренко, Ю.Н.Киселев, Н.В.Лагунова, Д.Б.Силин, Н.Г.Тринько // Математическое моделирование. — 1993. — С. 296–316.
- [5] *Дубровин, Б.А.* Современная геометрия: методы и приложения. Том II, Геометрия и топология многообразий. Издание четвертое, исправленное и дополненное. / Б.А.Дубровин, С.П.Новиков, А.Т.Фоменко. — М.: Эдиториал УРСС, 1998. — 280 с.
- [6] *Дуткевич, Ю.Г.* Игры с «линией жизни». Случай L -захвата / Ю.Г.Дуткевич, Л.А.Петросян // Вестник Ленинградского университета. Серия 1: Математика, механика, астрономия. — 1969. — Т. 19, № 4. — С. 12.
- [7] *Колмогоров, А.Н.* Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н.Колмогоров, С.В.Фомин. — 7-е изд. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 572 с.
- [8] *Красовский, Н.Н.* Об одной задаче преследования / Н.Н.Красовский // Прикл. математика и механика. — 1962. — Т. 26, № 2. — С. 218–232.
- [9] *Красовский, Н.Н.* Об одной задаче преследования / Н.Н.Красовский // Прикл. математика и механика. — 1963. — Т. 27, № 3. — С. 244–254.
- [10] *Красовский, Н.Н.* Теория управления движением / Н.Н.Красовский. — М.: Наука, 1968. — 476 с.

- [11] Красовский, Н.Н. Игровые задачи о встрече движений / Н.Н.Красовский. — М: Наука, 1970. — 420 с.
- [12] Красовский, Н.Н. Позиционные дифференциальные игры / Н.Н.Красовский, А.И.Субботин. — М.: Наука, 1974. — 455 с.
- [13] Кружков, С.Н. Обобщенные решения уравнения Гамильтона–Якоби типа эйконала, I / С.Н.Кружков // Матем. сборник. — 1975. — Т. 27. — С. 406–446.
- [14] Никольский, М.С. О приближенном вычислении геометрической разности множеств / М.С.Никольский // Вестник Московского университета, Сер. 15, вычислительная математика и кибернетика. — 2003. — № 1. — С. 49–54.
- [15] Михалев, Д.К. Построение решений в дифференциальных играх на конечном промежутке времени и визуализация решений : диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук : 05.13.18 / Д.К.Михалев [Место защиты: Челяб. гос. ун-т]. — Екатеринбург: Институт математики и механики, 2009. — 206 с.
- [16] Пацко, В.С. Дифференциальная игра сближения с фиксированным моментом окончания / В.С.Пацко, С.И.Тарасова, Деп. в ВИНТИ, 1983, Свердловск, № 5320–83, 112 с.
- [17] Пацко, В.С. Численное решение дифференциальных игр на плоскости. Препринт / В.С.Пацко, В.Л.Турова. Екатеринбург: ИММ УрО РАН. — 1995. — http://sector3.imm.uran.ru/preprint1995_01/preprint_1995_rus.pdf
- [18] Пацко, В.С. Игра шофер-убийца: история и современные исследования. Препринт / В.С.Пацко, В.Л.Турова. Екатеринбург: ИММ УрО РАН. — 2009. — http://sector3.imm.uran.ru/poland2008patsko/preprint_Wroclaw_rus1.pdf
- [19] Петросян, Л.А. Дисперсионные поверхности в одном семействе игр преследования / Л.А.Петросян // Доклады Академии наук Армянской ССР. — 1966. — Т. 43, № 4. — С. 193–197.

- [20] *Петросян, Л.А.* Дифференциальные игры преследования / Л.А.Петросян // Ленинград: Издательство ЛГУ, 1977. — 222 с.
- [21] *Половинкин, Е.С.* Алгоритмы численного решения линейных дифференциальных игр / Е.С.Половинкин, Г.Е.Иванов, М.В.Балашов, Р.В.Константинов, А.В.Хорев // Математический сборник. — 2001. — Т. 192, № 10. — С. 95–122.
- [22] *Понтрягин, Л.С.* О некоторых дифференциальных играх / Л.С.Понтрягин // Докл. АН СССР. — 1964. — Т. 156, № 4. — С. 738–741.
- [23] *Понтрягин, Л.С.* К теории дифференциальных игр / Л.С.Понтрягин // Успехи мат. наук, 1966. — Т. 21, № 4. — С. 193–246.
- [24] *Понтрягин, Л.С.* Линейные дифференциальные игры, 1 / Л.С.Понтрягин // Докл. АН СССР. — 1967. — Т. 174, № 6. — С. 1278–1280.
- [25] *Понтрягин, Л.С.* Линейные дифференциальные игры, 2 / Л.С.Понтрягин // Докл. АН СССР. — 1967. — Т. 175, № 4. — С. 764–766.
- [26] *Пшеничный, Б.Н.* Структура дифференциальных игр / Б.Н.Пшеничный // Докл. АН СССР. — 1969. — Т. 184, № 2. — С. 285–287.
- [27] *Пшеничный, Б.Н.* О дифференциальных играх с фиксированным временем / Б.Н.Пшеничный, М.И.Сагайдак // Кибернетика. — 1970. — № 2. — С. 54–63.
- [28] *Сизый, С.В.* Лекции по дифференциальной геометрии / С.В.Сизый. — Учеб. пособие для студентов вузов. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 376 с.
- [29] *Субботин, А.И.* Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона–Якоби / А.И.Субботин. — М.: Наука, 1991. — 216 с.
- [30] *Субботин, А.И.* Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации / А.И.Субботин // Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. — 336 с.

- [31] *Ушаков, В.Н.* К задаче построения стабильных мостов в дифференциальной игре сближения-уклонения / В.Н.Ушаков // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. — 1980. — № 4. — С. 29–36.
- [32] *Тарасьев, А.М.* О построении множеств позиционного поглощения в игровых задачах управления / А.М.Тарасьев, В.Н.Ушаков, А.П.Хрипунов // Труды Института математики и механики, Том 1. — Екатеринбург: УрО РАН. — 1992. — С. 160–177.
- [33] *Averbukh, V.L.* Specialized Visualization Systems for Differential Games / V.L.Averbukh, S.S.Kumkov, V.S.Patsko, O.A.Pykhteev, D.A.Yurtaev // Progress in Simulation, Modeling, Analysis and Synthesis of Modern Electrical and Electronic Devices and Systems / N.E. Mastorakis (Ed.). — WSES Press. — 1999. — С. 301–306.
- [34] *Bardi, M.* An approximation scheme for the minimum time function / M.Bardi, M.Falcone // SIAM J. Contr. and Optim. — 1990. — Vol. 28, No. 4. — pp. 950–965.
- [35] *Bardi, M.* Optimal Control and Viscosity Solutions of Hamilton–Jacobi–Bellman Equations / M.Bardi, I.Capuzzo-Dolcetta. — Boston: Birkhäuser, 1997.
- [36] *Bardi, M.* Numerical methods for pursuit-evasion games via viscosity solutions / M.Bardi, M.Falcone, P.Soravia // Annals of the International Society of Dynamic Games, Vol. 6: Stochastic and Differential Games / M.Bardi, T.Parthasarathy, T.E.S.Raghavan (Eds.). — Boston: Birkhäuser. — 1999. — С. 105–175.
- [37] *Bardi, M.* A comparison result for Hamilton–Jacobi equations and applications to some differential games lacking controllability / M. Bardi, P. Soravia // Funkc. Ekvacioj. — 1994 — Vol. 37. — pp. 19–43.
- [38] *Barles, G.* Discontinuous solutions of deterministic optimal stopping time problems / G.Barles, Q.Perthame // RAIRO Model. Math. Anal. — 1987. — No. 21. — С. 557–579.

- [39] *Barles, G.* Solutions de viscosite des equations de Hamilton–Jacobi / G.Barles // *Mathematiques et Applications*. — 1994. — No. 17.
- [40] *Berkovitz, L.D.* A variational approach to differential games / L.D.Berkovitz // *Advances in game theory*. — Princeton: Princeton Univ. Press. — 1964. — Vol. 3 — C. 127–174.
- [41] *Blaquière, A.* Gerard F., Leitmann G. Quantitive and Qualitative Games / A.Blaquière, F.Gerard, G.Leitmann. — New York, London: Acad. Press., 1969. — 172 p.
- [42] *Botkin, N.* Computation of value functions in nonlinear differential games with state constraints / N.Botkin, K.-H.Hoffmann, N.Mayer, V.Turova // Hömberg, D., Tröltzsch, F. (eds.) *System Modeling and Optimization. CSMO 2011. IFIP Advances in Information and Communication Technology*. — 2013. — Vol. 391 pp. 235–244.
- [43] *Breakwell, J.V.* Towards a complete solution of the homicidal chauffeur game / J.V.Breakwell, A.W.Merz // *Proc. 1st Intern. Conf. Theory and Appl. of Differential Games*, Amherst, Mass. — 1969. — C.III-1–III-5.
- [44] *Breitner, M. H.* Three-dimensional air combat analysis — an example for the numerical solution of complex differential games / M. H. Breitner, R. Lachner, H. J. Pesch // *Annals of the International Society of Dynamic Games*. — Boston: Birkhäuser. — 1996. — T. 3. — C. 53–77.
- [45] *Cardaliaguet, P.* Some algorithms for differential games with two players and one target / P.Cardaliaguet, M.Quincampoix, P.Saint-Pierre // *RAIRO-Modélisation-Mathématique-et-Analyse-Numérique*. — 1994. — Vol. 28, No. 4. — C. 441–461.
- [46] *Cardaliaguet, P.* Numerical Methods for Optimal Control and Differential Games / P.Cardaliaguet, M.Quincampoix, P.Saint-Pierre // *Ceremade CNRS URA 749, Univ. of Paris, Dauphine*. — 1995.
- [47] *Cardaliaguet, P.* Set-valued numerical analysis for optimal control and differential games / P.Cardaliaguet, M.Quincampoix, P.Saint-Pierre // *Stochastic and Differential Games: Theory and Numerical Methods: Annals*

- Intern. Soc. Dynamic Games. — Boston: Birkhäuser. — 1999 — Т. 4. — С. 177–247.
- [48] *Cockayne, E.J.* Plane motion of a particle subject to curvature constraints / E.J.Cockayne, G.W.C.Hall // SIAM Journal on Control. — 1975. — Vol. 13, No. 1. — С. 197–220.
- [49] *Crandall, M.G.* Some properties of viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations / M.G.Crandall, L.C.Evans, P.L.Lions // Transactions of the American Mathematical Society. — 1984. — Vol. 282, No. 2. — pp. 487–502.
- [50] *Crandall, M.G.* User’s guide to viscosity solutions of second order partial differential equations / M.G.Crandall, H.Ishii, P.L.Lions // Bull. Amer. Math. Soc. — 1992. — No.27. — pp. 1–67.
- [51] *Crandall, M.G.* Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations / M.G.Crandall, L.C.Evans, P.L.Lions // Transactions of the American Mathematical Society. — 1983. — Vol. 277, No. 1. — pp. 1–42.
- [52] *Dubins, L.E.* On Curves of Minimal Length with a Constraint on Average Curvature, and with Prescribed Initial and Terminal Positions and Tangents / Dubins, L.E. // American Journal of Mathematics. — 1957. — Vol. 79, No. 3. — pp. 497–516.
- [53] *Fleming, W.H.* The convergence problem for differential games / W.H.Fleming // J. Math. Anal. and Appl. — 1961. — No. 3. — С. 102–116.
- [54] *Fleming, W.H.* The convergence problem for differential games, 2 / W.H.Fleming // Adv. in Game Theory, Ann. Math. Studies. — 1964. — No. 52. — С. 195–210.
- [55] *Gronwall, T.H.* Note on the derivatives with respect to a parameter of the solutions of a system of differential equations / T.H.Gronwall // Ann. of Math. — 1919. — Vol. 20, No. 2. — С. 292–296.
- [56] *Isaacs, R.P.* Games of Pursuit, Paper P-257 / R.P.Isaacs. — Santa Monica, California: RAND Corporation, 1951.

- [57] *Isaacs, R.P.* Differential Games, I: Introduction. Research Memorandum RM-1391 / R.P.Isaacs. — Santa Monica, California: RAND Corporation, 1954.
- [58] *Isaacs, R.P.* Differential Games, II: The Definition and Formulation. Research Memorandum RM-1399 / R.P.Isaacs. — Santa Monica, California: RAND Corporation, 1954.
- [59] *Isaacs, R.P.* Differential Games, III: The Basic Principles of the Solution Process. Research Memorandum RM-1411 / R.P.Isaacs. — Santa Monica, California: RAND Corporation, 1954.
- [60] *Isaacs, R.* Differential Games / R. Isaacs. — New York: John Wiley and Sons, 1965.
- [61] *Krasovskii, N.N.* Game-Theoretical Control Problems / N.N.Krasovskii, A.I.Subbotin. — New York: Springer-Verlag, 1988.
- [62] *Kelley, J.L.* General Topology / J.L.Kelley. — New York: Springer-Verlag, 1975.
- [63] *Leitmann, G.A.* Differential game of pursuit and evasion / G.Leitmann // Internat. J. Non-Linear Mech. — 1969. — T. 4, No. 4. — C. 72–89.
- [64] *Lewin, J.* The surveillance-evasion game of degree / J.Lewin, J.V.Breakwell // J. Optimiz. Theory and Appl. — 1975. — Vol. 16, No. 3–4. — C. 339–353.
- [65] *Lorensen, W.E.* Marching Cubes: A high resolution 3D surface construction algorithm / W.E.Lorensen, H.E.Cline // ACM SIGGRAPH Computer Graphics. — Vol. 21, No. 4. — C. 163–169.
- [66] *Patsko, V.S.* Numerical solutions to the minimum-time problem for linear second-order conflict-controlled systems / V.S.Patsko, V.L.Turova // Proceedings of the Seventh International Colloquium on Differential Equations, Plovdiv, Bulgaria, August 18–23, 1996 / D. Bainov (Ed.). — 1997. — pp. 329–338.

- [67] *Patsko, V.S.* Numerical solution to the acoustic homicidal chauffeur game / V.S.Patsko, V.L.Turova // System Modelling and Optimization: methods, theory, and applications. 19th IFIP TC7 Conference on System Modelling and Optimization, July 12–16, 1999, Cambridge, UK / M.J.D.Powell, S.Scholtes (Eds.). — 1999. — C. 227–249.
- [68] *Patsko, V.S.* Level Sets of the Value Function in Differential Games with the Homicidal Chauffeur Dynamics / V.S.Patsko, V.L.Turova // International Game Theory Review. — 2001. — Vol. 3, No. 1. — C. 67–112.
- [69] *Patsko, V.S.* Numerical Study of Differential Games with the Homicidal Chauffeur Dynamics / V.S.Patsko, V.L.Turova. — Ekaterinburg: Institute of mathematics and mechanics, UrB of RAS, 2000. — 58 c. — http://sector3.imm.uran.ru/preprint2000_01/preprint2000.pdf
- [70] *Patsko, V.S.* Homicidal chauffeur game: history and modern studies / V.S.Patsko, V.L.Turova. — Ekaterinburg: Institute of mathematics and mechanics, UrB of RAS, 2009. — http://sector3.imm.uran.ru/poland2008patsko/preprint_Wroclaw_transl.pdf
- [71] *Petrosjan, L.A.* A family of differential survival games in the space $\mathbb{R}^n$ / L.A.Petrosjan // Soviet Math. Dokl. — 1965 — No. 6. — C. 377–380.
- [72] *Reeds, J.A.* Optimal paths for a car that goes both forwards and backwards / J.A.Reeds, L.A.Shepp. — Pac. J. Math. Vol. 145, No. 2. 1990. — pp.367–393.
- [73] *Subbotin, A.I.* Generalized Solutions of First Order PDEs: the Dynamical Optimization Perspective / A.I.Subbotin. — Boston: Birkhäuser, 1995.
- [74] *Ushakov, V.* Construction of solutions in differential games of pursuit-evasion / V.Ushakov // Lecture Notes in nonlinear analysis. — Torun: Nicholas Copernicus University. — 1998. — Vol. 2. — pp. 269–281.
- [75] *Viro, O.Ya.* Elementary Topology / O.Ya.Viro., O.A. Ivanov, N.Yu. Netsvetaev, V.M. Kharlamov. — American Mathematical Society, 2008.
- [76] *Vollmer, J.* Improved Laplacian Smoothing of Noisy Surface Meshes / J.Vollmer, R.Mencl, H.Muller // Computer Graphics Forum — Blackwell

Publishers Ltd and the Eurographics Association. — 1999. — Vol. 18, No. 3. — pp. 131–138.

Публикации автора по теме диссертации

- [77] *Munts, N.V.* Numerical method for time-optimal differential games with life line / N.V.Munts, S.S.Kumkov // 55th Israel Annual Conference on Aerospace Sciences. — 2015. — Vol. 2. — pp. 1253–1266. (Scopus)
- [78] *Munts, N.V.* Существование функции цены в игре быстрогодействия с линией жизни (Existence of value function in time-optimal game with life line) / N.V.Munts, S.S.Kumkov // Proceedings of the 47th International Youth School-conference “Modern Problems in Mathematics and its Applications”. Yekaterinburg, Russia, January 31 – February 6, 2016. — pp. 94–99. <http://ceur-ws.org/Vol-1662/opt6.pdf> (Scopus)
- [79] *Мунц, Н.В.* Численный метод решения дифференциальных игр быстрогодействия с линией жизни / Н.В.Мунц, С.С.Кумков // Международная конференция по математической теории управления и механике, Суздаль, 07–11 июля 2017 г. — С. 101.
- [80] *Мунц, Н.В.* О совпадении минимаксного решения и функции цены игры быстрогодействия с линией жизни / Н.В.Мунц, С.С.Кумков // Труды Института математики и механики УрО РАН. — Екатеринбург: УрО РАН. — 2018. — Т. 24, № 2. — С. 200–214.
- [81] *Мунц, Н.В.* Численный метод решения дифференциальных игр быстрогодействия с линией жизни / Н.В.Мунц, С.С.Кумков // Математическая Теория Игр и ее Приложения. — 2018. — Т. 10, № 3. — С. 48–75.
- [82] *Мунц, Н.В.* Полилинейные аппроксимации в сеточных методах нахождения обобщенного решения уравнения Гамильтона – Якоби / Н.В.Мунц, С.С.Кумков // «Устойчивость, управление, дифференциальные игры» (SCDG2019): Материалы Международной конференции, посвященной 95-летию со дня рождения академика Н.Н. Красовского, (Екатеринбург, 16–20 сентября 2019 г.). — Екатеринбург: ИММ УрО РАН — 2019. — С. 231–235.
- [83] *Munts, N.V.* On Time-Optimal Problems with Lifeline / N.V.Munts, S.S.Kumkov // Dynamic Games and Applications. — 2019. — Vol. 9, No. 3. — pp. 751–770. (Scopus)

- [84] *Munts, N.V.* On the Coincidence of the Minimax Solution and the Value Function in a Time-Optimal Game with a Lifeline / N.V.Munts, S.S.Kumkov // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. — 2019. — Vol. 305. — pp. 125–139. (Scopus)
- [85] *Munts, N.V.* A Numerical Method for Solving Time-Optimal Differential Games with a Lifeline / N.V.Munts, S.S.Kumkov // Automation and Remote Control. — 2020. — Vol. 81. — pp. 1545–1561. (Scopus)
- [86] *Мунц, Н.В.* Численное исследование задач управления и дифференциальных игр, включающих динамику «машина Дубинса» / Н.В.Мунц, С.С.Кумков // Современные проблемы математики и ее приложений, Международная (51-я Всероссийская) молодежная школа-конференция 3–7 февраля 2020 г., г. Екатеринбург. — 2020.
- [87] *Munts, N.V.* Numerical Study of Different Variants of Dubins' Car Model / N.V.Munts // Proceedings of the The 60th Israel Annual Conference on Aerospace Sciences, Tel-Aviv & Haifa, Israel, March 4–5, 2020. — 2020. — Vol. 2. — pp. 1006–1022. (Scopus)
- [88] *Munts, N.V.* Convergence of Numerical Method for Time-Optimal Differential Games with Lifeline / N.V.Munts, S.S.Kumkov // Annals of the International Society of Dynamic Games, Vol. 17, Games of Conflict, Evolutionary Games, Economic Games, and Games Involving Common Interest. — Basel: Birkhäuser. — 2020. — pp. 101–130. (Scopus)
- [89] *Munts, N.V.* Grid Method for Numerical Study of Time-Optimal Games with Lifeline / N.V.Munts, S.S.Kumkov // Proceedings of the Workshop on Mathematical Modeling and Scientific Computing: Focus on Complex Processes and Systems — dedicated to the memory of Nikolai Botkin, Munich, Germany, November 19–20, 2020. — 2020. — pp. 192–198. (Scopus)

Список иллюстраций

1.1	Множества $\mathcal{T}$, $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$	15
1.2	Окружности Z_0 , Y_0 , Y_s и функция $\mathcal{D}(s)$	21
1.3	Точки x , x_1 , $\bar{x}$, y_x , y_{x_1}	23
1.4	Множества $\partial\mathcal{T}$, $B^1(x)$ и $B^2(x)$ и величина D^*	24
1.5	Множества $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}_\epsilon$ и $\mathcal{T}_{2\epsilon}$	25
1.6	Точки x' , $\underline{x}'$, x'' , $\underline{x}''$	25
1.7	Множества $\mathcal{T}$, $\mathcal{F}_\kappa$ и $\mathcal{G}_\kappa$ для построения нижнего решения. Внешняя сплошная линия — $\partial\mathcal{F}$, пунктирная линия — $\partial\mathcal{F}_\kappa$. . .	32
1.8	Множества $\mathcal{T}_\kappa$, $\mathcal{G}_\kappa$ и $\mathcal{F}$ для построения верхнего решения. Внутренняя сплошная линия — $\partial\mathcal{T}$, пунктирная линия — $\partial\mathcal{T}_\kappa$	35
1.9	Иллюстрация к Теореме 1.6	54
2.1	Слева — общий вид линий уровня функции цены в задаче «Материальная точка», вычисленных с помощью базового алгоритма аппроксимации на основе локальных координат, справа — крупный план несимметричных участков, которые хотелось бы иметь центральносимметричными	83
2.2	Слева — общий вид линий уровня функции цены в задаче «Машина Ридса–Шеппа», вычисленных с помощью базового алгоритма аппроксимации на основе локальных координат, справа — крупный план несимметричных участков, которые хотелось бы иметь осесимметричными	84
2.3	Симметричные точки попадают в разные симплексы, вследствие чего возникает несимметричность значений	85
2.4	Слева — общий вид линий уровня функции цены в задаче «Машина Дубинса», вычисленных с помощью базового алгоритма аппроксимации на основе локальных координат, справа — наложение исходного рисунка и перевернутого, на котором ясно видны несимметричные линии уровня	85

2.5	Слева — общий вид линий уровня функции цены в задаче «Материальная точка», вычисленных с помощью улучшенного алгоритма аппроксимации на основе локальных координат, справа — крупный план симметричных участков, на которых появилась центральная симметричность	87
2.6	Слева — общий вид линий уровня функции цены в задаче «Машина Ридса–Шеппа», вычисленных с помощью улучшенного алгоритма аппроксимации на основе локальных координат, справа — крупный план симметричных участков, на которых появилась осевая симметричность	87
2.7	Слева — общий вид линий уровня функции цены в задаче «Машина Дубинса», вычисленных с помощью полилинейной интерполяции, справа — наложение исходного рисунка и перевернутого, на котором ясно видна симметричность линий уровня . . .	89
3.1	Различные конфигурации достраиваемой поверхности в алгоритме Marching Cubes (рисунок взят с https://ru.wikipedia.org/wiki/Marching_cubes). Оранжевыми точками отмечены узлы, принадлежащие визуализируемому множеству	91
3.2	Множество достижимости для задачи «машина Дубинса» до применения алгоритма	92
3.3	Множество достижимости для задачи «машина Дубинса» после применения алгоритма	92
3.4	Улучшенные конфигурации поверхности	93
3.5	Алгоритмы Marching Cubes (базовый и улучшенный), примененные к одному кубу; тонкими линиями указана получаемая сетка треугольников	94
3.6	«Шар» из кубов: базовый (слева) и улучшенный (справа) алгоритм	95
3.7	Применение алгоритма Marching Cubes к «шару»: базовый (слева) и улучшенный (справа) алгоритм	95
3.8	Применение другого алгоритма сглаживания к результирующей поверхности базового (слева) и улучшенного (справа) алгоритма Marching Cubes	95

3.9	Схема, иллюстрирующая идею алгоритма Лапласа; рисунок взят из статьи [76]	96
3.10	Определение d_i в НС-алгоритме (в случае, когда $\alpha = 0$); рисунок взят из статьи [76]	97
3.11	Машина Дубинса, НС-алгоритм, $n = 5$, $\alpha = 0.05$, $\beta = 0.5$	99
3.12	Машина Дубинса, НС-алгоритм, $n = 10$, $\alpha = 0.05$, $\beta = 0.5$. . .	99
3.13	Машина Дубинса, НС-алгоритм, $n = 50$, $\alpha = 0.05$, $\beta = 0.5$. . .	99
3.14	Машина Дубинса с редуцированной динамикой (слева — график функции цены, визуализированный с помощью алгоритмов системы GNUPlot , справа — с помощью системы MeshLab после разрядки поверхности при помощи авторского алгоритма)	100
4.1	Машина Дубинса, $\mathbb{L}_c$, $c = \pi$	103
4.2	Машина Дубинса, $\mathbb{L}_c$, $c = 2\pi$	104
4.3	Машина Дубинса, $\mathbb{L}_c$, $c = 3\pi$	104
4.4	Машина Дубинса, $\mathbb{L}_c$, $c = 4\pi$	104
4.5	Задача «машина Дубинса» с редуцированной двумерной динамикой. Множество игры $\mathcal{W}_0 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \max\{ x_1 , x_2 \} \leq 1.5\}$	105
4.6	Задача «машина Дубинса» с редуцированной двумерной динамикой. Множество игры $\mathcal{W}_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \max\{ x_1 , x_2 \} \leq 2\}$	105
4.7	Задача «машина Дубинса» с редуцированной двумерной динамикой. Множество игры $\mathcal{W}_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \max\{ x_1 , x_2 \} \leq 2.5\}$	105
4.8	Задача «машина Дубинса» с редуцированной двумерной динамикой. Множество игры $\mathcal{W}_3 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \max\{ x_1 , x_2 \} \leq 3\}$	106
4.9	Задача «машина Дубинса» с редуцированной двумерной динамикой и круглым множеством $\mathcal{W}$ (слева — функция цены, справа — множества уровня)	107
4.10	Игра «шофер-убийца», пример 1: слева — функция цены, справа — множества уровня	108
4.11	Игра «шофер-убийца», пример 1: сравнение полученных множеств уровня (слева) с множествами из статьи [68] (справа) . .	108

4.12	Игра «шофер-убийца», пример 1: сравнение полученной функции цены (слева) с функцией из статьи [68] (справа)	108
4.13	Игра «шофер-убийца», пример 2: слева — функция цены, справа — множества уровня	110
4.14	Игра «шофер-убийца», пример 2: сравнение полученных множеств уровня (слева) с множествами из статьи [68] (справа) . .	110
4.15	Игра «шофер-убийца», пример 2: сравнение полученной функции цены (слева) с функцией из статьи [68] (справа)	110
4.16	Игра «шофер-убийца» с машиной Ридса–Шеппа, $a = -0.6$: слева — функция цены, справа — множества уровня	112
4.17	Игра «шофер-убийца» с машиной Ридса–Шеппа, $a = -1$: слева — функция цены, справа — множества уровня	112
4.18	Модифицированная игра «шофер-убийца» с машиной Ридса–Шеппа, слева — функция цены с параметром визуализации 0.1, справа — с параметром визуализации 10	113
4.19	Модифицированная игра «шофер-убийца» с машиной Ридса–Шеппа, слева — множества уровня функции цены, справа — множества уровня с отмеченными на них границами переходного слоя	114
4.20	Совмещенные графики функции цены обычной и модифицированной игр «шофер-убийца» с машиной Ридса–Шеппа	114
4.21	Материальная точка: слева — функция цены, справа — множества уровня	117
4.22	Материальная точка со смещенным целевым множеством $\mathcal{T}$: слева — функция цены, справа — множества уровня	117
4.23	Модифицированная игра «изотропные ракеты», $0.8 \leq V_p \leq 1.2$ (слева) и $0.5 \leq V_p \leq 1.5$ (справа)	119
4.24	Модифицированная игра «изотропные ракеты», $0.8 \leq V_p \leq 1.2$, сравнение полученного множества уровня (слева) с множеством из статьи [42] (справа)	119
4.25	Модифицированная игра «изотропные ракеты», $0.5 \leq V_p \leq 1.5$, сравнение полученного множества уровня (слева) с множеством из статьи [42] (справа)	119

Приложения

A.1 Минимаксные решения

Определения и теоремы взяты из книг [30, 73].

Рассмотрим краевую задачу для уравнения Гамильтона – Якоби:

$$H(x, Dv) - v = 0, \quad x \in \Omega, \quad (\text{A.1})$$

$$v(x) = \sigma(x), \quad x \in \partial\Omega. \quad (\text{A.2})$$

Здесь Ω — область в пространстве $\mathbb{R}^d$; Dv обозначает градиент функции v .

Определение A.1. Рассмотрим величины

$$d^-v(x; g) = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \{ \delta^{-1} (v(x + \delta g') - v(x)) : \delta \in (0, \varepsilon), |g - g'| \leq \varepsilon \},$$

$$d^+v(x; g) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \{ \delta^{-1} (v(x + \delta g') - v(x)) : \delta \in (0, \varepsilon), |g - g'| \leq \varepsilon \}.$$

Эти соотношения определяют нижнюю и верхнюю производные функции v в точке $x \in \Omega$ по направлению $g \in \mathbb{R}^d$.

Определение A.2. Множества $D^-v(x)$ и $D^+v(x)$ определяются равенствами

$$D^-v(x) = \{ s \in \mathbb{R}^d : \langle s, g \rangle - d^-v(x; g) \leq 0, \quad \forall g \in \mathbb{R}^d \},$$

$$D^+v(x) = \{ s \in \mathbb{R}^d : \langle s, g \rangle - d^+v(x; g) \geq 0, \quad \forall g \in \mathbb{R}^d \},$$

и называются субдифференциалом и супердифференциалом функции v в точке $x \in \Omega$.

Определение A.3. Верхним (соответственно, нижним) минимаксным решением уравнения (A.1) называется полунепрерывная снизу (соответственно, сверху) функция $u : \Omega \mapsto \mathbb{R}$, удовлетворяющая условию $H(x, s) - u(x) \leq 0$ для всех $x \in \Omega$ и $s \in D^-u(x)$ ($H(x, s) - u(x) \geq 0$ для всех $x \in \Omega$ и $s \in D^+u(x)$).

Определение А.4. Верхним решением задачи (А.1), (А.2) называется полунепрерывная снизу функция $u : \text{cl } \Omega \mapsto \mathbb{R}$, которая удовлетворяет следующим требованиям:

(i) Сужение функции u на область Ω является верхним решением уравнения (А.1).

(ii) Для нее выполняется граничное условие (А.2) и ограничение

$$|u(x)| \leq c, \quad \forall x \in \text{cl } \Omega. \quad (\text{А.3})$$

Определение А.5. Нижним решением задачи (А.1), (А.2) называется такая полунепрерывная сверху функция $u : \text{cl } \Omega \mapsto \mathbb{R}$, которая удовлетворяет следующим требованиям:

(j) Сужение функции u на область Ω является нижним решением уравнения (А.1).

(jj) Для нее выполняется граничное условие (А.2) и ограничение (А.3).

(jjj) Функция u непрерывна в каждой точке $x \in \partial\Omega$.

Определение А.6. Минимаксным решением в задаче (А.1), (А.2) называется функция $u : \text{cl } \Omega \mapsto \mathbb{R}$, удовлетворяющая соотношениям

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u^{(k)}(x) = u(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(x), \quad x \in \text{cl } \Omega,$$

где $\{u^{(k)}\}_1^\infty$ ($\{u_k\}_1^\infty$) — последовательности верхних (нижних) минимаксных решений задачи (А.1), (А.2).

Замечание А.1. [30, § 18.3, стр. 244] В случае, когда минимаксное решение непрерывно, оно является одновременно верхним и нижним решением.

Приведем формулировку теоремы существования минимаксного решения [30, § 18.6, стр.245].

Теорема А.1. Пусть выполнены следующие предположения:

Н.1 Функция $H(\cdot, 0)$ ограничена, то есть для всех $x \in \Omega$ $|H(x, 0)| \leq c$.

Н.2 Для всех $x \in \Omega$ и $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^d$ для гамильтониана H выполняется неравенство $|H(x, p_1) - H(x, p_2)| \leq \rho(x)|p_1 - p_2|$, где $\rho(x) = (1 + |x|)\mu$, а μ — некоторое положительное число.

Н.3 Для любого ограниченного множества $\Omega_0 \subset \Omega$ существует константа λ такая, что $|H(x_1, p) - H(x_2, p)| \leq \lambda|x_1 - x_2|(1 + |p|)$ для всех $p \in \mathbb{R}^d$ и $x_1, x_2 \in \Omega_0$.

И пусть также существует нижнее решение задачи (A.1), (A.2) в смысле Определения A.5. Тогда существует единственное минимаксное решение задачи (A.1), (A.2) в смысле Определения A.6. Это минимаксное решение совпадает с минимальным верхним решением.

Следует отметить, что когда требуется иметь дело с полунепрерывным снизу решением задачи (A.1), (A.2), можно изменить Определения A.4 и A.5 и сформулировать Теорему A.2, в которой требуется существование верхнего минимаксного решения.

Определение A.4'. Верхним решением задачи (A.1), (A.2) называется полунепрерывная снизу функция $u : \text{cl } \Omega \mapsto \mathbb{R}$, которая удовлетворяет следующим требованиям:

(i) Сужение функции u на область Ω является верхним решением уравнения (A.1).

(ii) Для нее выполняется граничное условие (A.2) и ограничение (A.3).

(iii) Функция u непрерывна в каждой точке $x \in \partial\Omega$.

Определение A.5'. Нижним решением задачи (A.1), (A.2) называется такая полунепрерывная сверху функция $u : \text{cl } \Omega \mapsto \mathbb{R}$, которая удовлетворяет следующим требованиям:

(j) Сужение функции u на область Ω является нижним решением уравнения (A.1).

(jj) Для нее выполняется граничное условие (A.2) и ограничение (A.3).

Отметим, что в сравнении с Определениями A.4 и A.5, условие непрерывности было перемещено из определения нижнего решения в определение верхнего решения.

Определение A.6'. Минимаксным решением в задаче (A.1), (A.2) называется функция $u : \text{cl } \Omega \mapsto \mathbb{R}$, удовлетворяющая соотношениям

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u^{(k)}(x) = u(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(x), \quad x \in \text{cl } \Omega,$$

где $\{u^{(k)}\}_1^\infty$ ($\{u_k\}_1^\infty$) — последовательности верхних (нижних) минимаксных решений задачи (А.1), (А.2) в смысле Определения А.4' (А.5').

Теорема А.2 ([30], стр. 245). Пусть выполнены предположения Н.1–Н.3 и пусть также существует верхнее решение задачи (А.1), (А.2) в смысле Определения А.4'. Тогда существует минимаксное решение задачи (А.1), (А.2) в смысле Определения А.6'.

Теорема А.3 ([30], стр. 245–246). Пусть выполнены предположения Н.1–Н.3 и пусть существуют нижнее решение задачи (А.1), (А.2) в смысле Определения А.5 и верхнее решение задачи (А.1), (А.2) в смысле Определения А.4'. Тогда существует непрерывное минимаксное решение задачи (А.1), (А.2).

А.2 Вязкостные решения

Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^d$.

Определение А.7. [36] Назовём полунепрерывную сверху функцию $u(\cdot)$ нижним вязкостным решением уравнения (2.3), если для любой функции $\varphi \in C^1(\Omega)$ и для любой точки x , где достигается локальный максимум для функции $u - \varphi$, выполняется неравенство $u(x) + H(x, D\varphi(x)) \leq 0$.

Определение А.8. [36] Назовём полунепрерывную снизу функцию $u(\cdot)$ верхним вязкостным решением уравнения (2.3), если для любой функции $\varphi \in C^1(\Omega)$ и для любой точки x , где достигается локальный минимум для функции $u - \varphi$, выполняется неравенство $u(x) + H(x, D\varphi(x)) \geq 0$.

Определение А.9. [36] Полунепрерывная сверху функция $\bar{v} : \text{cl } \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет на границе Ω неравенству $\bar{v} + H(x, D\bar{v}) \leq 0$ в вязкостном смысле, если $\forall \varphi \in C^1(\text{cl } \Omega)$ и точки $x \in \partial\Omega$, в которой функция $\bar{v} - \varphi$ достигает локального максимума, верно, что $\bar{v}(x) + H(x, D\varphi(x)) \leq 0$.

Определение А.10. [36] Полунепрерывная снизу функция $\underline{v} : \text{cl } \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет на границе Ω неравенству $\underline{v} + H(x, D\underline{v}) \geq 0$ в вязкостном смысле, если $\forall \varphi \in C^1(\text{cl } \Omega)$ и точки $x \in \partial\Omega$, в которой функция $\underline{v} - \varphi$ достигает локального минимума, верно, что $\underline{v}(x) + H(x, D\varphi(x)) \geq 0$.

Теорема А.4. [37, pp.23–27, Теорема 1.1] Предположим, что выполняются условия С.1, С.2, С.5. Пусть полунепрерывная сверху функция $u_1 : \text{cl } \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ является нижним вязкостным решением уравнения (2.3), ограниченным сверху, а полунепрерывная снизу функция $u_2 : \text{cl } \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ является верхним вязкостным решением уравнения (2.3), ограниченным снизу. Пусть также функция u_2 непрерывна во всех точках границы $\partial\Omega$ и u_1 удовлетворяет одному из неравенств $u_1 \leq u_2$ или $u_1 + H(x, Du_1) \leq 0$ на $\partial\Omega$ в вязкостном смысле. Тогда $u_1 \leq u_2$ на $\text{cl } \Omega$. Аналогичное условие выполнено и при предположениях, что функция u_1 вместо функции u_2 непрерывна в каждой точке границы $\partial\Omega$ и верно одно из неравенств $u_1 \leq u_2$ или $u_2 + H(x, Du_2) \geq 0$ на $\partial\Omega$.

А.3 Существование обобщенного минимаксного решения для гамильтониана (2.4) и его совпадение с вязкостным решением

В книгах [73, 30] изучается уравнение вида

$$H(x, Du(x)) - u(x) = \min_{p \in P} \max_{q \in Q} \langle Du(x), f(x, p, q) \rangle + 1 - u(x) = 0, \quad (\text{A.4})$$

с гамильтонианом (1.17), для которого и доказаны все утверждения относительно минимаксных решений. В то же время в статье [36] используется гамильтониан (2.4):

$$H(x, Du(x)) + u(x) = \max_{p \in P} \min_{q \in Q} \langle -Du(x), f(x, p, q) \rangle - 1 + u(x) = 0. \quad (\text{A.5})$$

Понятие вязкостного решения изучается для уравнения такого вида.

Видно, что первое из этих двух уравнений получается умножением второго на -1 (во втором уравнении минус выносится из скалярного произведения, затем из-под $\max \min$, превращая его в $\min \max$). Однако в определениях и доказательствах используются понятия, каждое из которых само по себе не является симметричным: полунепрерывность функции сверху/снизу, под- и надграфики функций, неравенства больше или равно/меньше или равно и т.д. В разных разделах диссертации используются различные формализации обобщенного решения краевой задачи для уравнения типа ГЯ. Поэтому необходимо показать, что для уравнения с гамильтонианом (2.4) тоже существует минимаксное решение и что оно совпадает с вязкостным решением. Приводимое ниже обоснование этого факта носит технический характер и, по сути дела, состоит в указании взаимной симметричности объектов, используемых при работе с минимаксными и вязкостными решениями.

Схема определения минимаксного решения имеет следующий вид. Сначала по уравнению (по гамильтониану) определяется характеристическое включение. Затем формулируются условия на правую часть характеристического дифференциального включения, которые обеспечивают некоторые «хорошие» свойства этого дифференциального включения. После этого вводится ряд определений верхних, нижних и минимаксных решений уравнения ГЯ,

при этом среди них присутствуют определения, эквивалентные соответствующим определениям вязкостных решений. Наконец, доказывается эквивалентность введенных определений, и, в частности, эквивалентность минимаксных и вязкостных решений.

Ниже проходится тот же самый путь, но для уравнения (А.5) вместо уравнения (А.4), исследуемого в книге [73, 30].

Сначала напомним определения и утверждения из книги [30, стр. 20].

Рассмотрим следующее уравнение в частных производных первого порядка

$$F(x, u(x), Du(x)) = 0, \quad x \in \mathcal{G} \subset \mathbb{R}^d, \quad (\text{А.6})$$

где $\mathcal{G}$ – открытое множество в $\mathbb{R}^d$. Предполагается, что функция $(x, z, s) \mapsto F(x, z, s) : \mathcal{G} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица

$$|F(x, z, s') - F(x, z, s'')| \leq \rho(x)|s' - s''| \quad \forall s', s'' \in \mathbb{R}^d,$$

где функция $\rho(x)$ непрерывна на $\mathcal{G}$. Предполагается, что функция $z \mapsto F(x, z, s)$ является неубывающей (в [30, стр. 20] функция $z \mapsto F(x, z, s)$ является невозрастающей).

Определение А.11. Функция $u : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$ называется минимаксным решением уравнения (А.6), если для нее выполняется следующее условие: для любой точки $(x_0, z_0) \in \text{gr } u = \{(x, u(x)) : x \in \mathcal{G}\}$ и любого вектора $s \in \mathbb{R}^d$ существуют число $\tau > 0$ и липшицева функция $(x(\cdot), z(\cdot)) : [0, \tau] \rightarrow \mathcal{G} \times \mathbb{R}$ такие, что $(x(0), z(0)) = (x_0, z_0)$, $z(t) = u(x(t))$ для всех $t \in [0, \tau]$, и справедливо соотношение $\dot{z}(t) = \langle \dot{x}(t), s \rangle + F(x(t), z(t), s)$ при почти всех $t \in [0, \tau]$.

Здесь $\text{gr } u$ – график функции u , определяемый формулой

$$\text{gr } u = \{(x, z) : z = u(x), x \in \mathcal{G}\}.$$

А.3.1 Характеристические дифференциальные включения

Характеристическое дифференциальное включение имеет вид

$$(\dot{x}(t), \dot{z}(t)) \in E(x(t), z(t), s),$$

где s – вектор в $\mathbb{R}^d$, а

$$E(x, z, s) = \{(f, g) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} : |f| \leq \rho(x), g = \langle f, s \rangle + F(x, z, s)\} \quad (\text{A.7})$$

для $(x, z, s) \in \mathcal{G} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$.

В [30, стр. 21] характеристическое дифференциальное включение определяется несколько по-другому:

$$E(x, z, s) = \{(f, g) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} : |f| \leq \rho(x), g = \langle f, s \rangle - F(x, z, s)\}.$$

А.3.2 Допустимые многозначные отображения E

Для отображения $E(x, z, s)$ определяется класс допустимых многозначных отображений. Пусть Ψ – некоторое непустое множество. Мы назовем многозначное отображение

$$\mathcal{G} \times \mathbb{R} \times \Psi \ni (x, z, \psi) \mapsto E(x, z, \psi) \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$$

допустимым, если оно удовлетворяет следующим условиям:

- (i) для всех $(x, z, \psi) \in \mathcal{G} \times \mathbb{R} \times \Psi$ множество $E(x, z, \psi)$ выпукло и компактно в $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$;
- (ii) для каждого $\psi \in \Psi$ многозначное отображение $\mathcal{G} \times \mathbb{R} \ni (x, z) \mapsto E(x, z, \psi)$ полунепрерывно сверху;
- (iii⁺) при любых $\psi \in \Psi$, $x \in \mathcal{G}$, $z' \leq z''$ и $(f, g') \in E(x, z', \psi)$ существует такой элемент $(f, g'') \in E(x, z'', \psi)$, что $g'' \geq g'$;
- (iii[−]) при любых $\psi \in \Psi$, $x \in \mathcal{G}$, $z' \leq z''$ и $(f, g'') \in E(x, z'', \psi)$ существует такой элемент $(f, g') \in E(x, z', \psi)$, что $g' \leq g''$;
- (iv⁺) для любых $(x, z, s) \in \mathcal{G} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ найдется $\psi_0 \in \Psi$ такое, что

$$\begin{aligned} F(x, z, s) = \max \{g - \langle f, s \rangle : (f, g) \in E(x, z, \psi_0)\} \leq \\ \leq \max \{g - \langle f, s \rangle : (f, g) \in E(x, z, \psi)\} \end{aligned}$$

при всех $\psi \in \Psi$;

(iv⁻) для любых $(x, z, s) \in \mathcal{G} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ найдется $\psi^0 \in \Psi$ такое, что

$$\begin{aligned} F(x, z, s) &= \min \{g - \langle f, s \rangle : (f, g) \in E(x, z, \psi^0)\} \geq \\ &\geq \min \{g - \langle f, s \rangle : (f, g) \in E(x, z, \psi)\} \end{aligned}$$

при всех $\psi \in \Psi$;

У А.И.Субботина последние два условия (iv⁺) и (iv⁻) сформулированы по-другому [30, стр. 25]:

(iv⁺)^{*} для любых $(x, z, s) \in \mathcal{G} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ найдется вектор $\psi^0 \in \Psi$ такой, что

$$\begin{aligned} F(x, z, s) &= \min \{\langle f, s \rangle - g : (f, g) \in E(x, z, \psi^0)\} \geq \\ &\geq \min \{\langle f, s \rangle - g : (f, g) \in E(x, z, \psi)\} \end{aligned}$$

при всех $\psi \in \Psi$;

(iv⁻)^{*} для любых $(x, z, s) \in \mathcal{G} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ найдется вектор $\psi_0 \in \Psi$ такой, что

$$\begin{aligned} F(x, z, s) &= \max \{\langle f, s \rangle - g : (f, g) \in E(x, z, \psi_0)\} \leq \\ &\leq \max \{\langle f, s \rangle - g : (f, g) \in E(x, z, \psi)\} \end{aligned}$$

при всех $\psi \in \Psi$;

Предложение А.1. Пусть многозначное отображение E задано соотношением (А.7). Тогда $E(x, z, p) \cap E(x, z, q) \neq \emptyset$ для всех $(x, z, p, q) \in \mathcal{G} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$.

Доказательство. Пересечение в таком случае содержит элемент (f^*, g^*) вида

$$\begin{aligned} f^* &= (p - q) \frac{F(x, z, p) - F(x, z, q)}{|p - q|^2}, \\ g^* &= \langle f^*, p \rangle + F(x, z, p) = \langle f^*, q \rangle + F(x, z, q). \end{aligned}$$

□

Докажем следующую теорему:

Теорема А.5. Многозначное отображение $E(x, z, s)$, заданное соотношением (А.7), удовлетворяет условиям (i)-(iv⁻).

Доказательство. Очевидно, что многозначное отображение $E(x, z, s)$ удовлетворяет условиям (i) и (ii). Покажем, что выполняется условие (iii⁺).

Функция $F(x, z, s)$ не убывает по z , то есть для любых $z' \leq z''$ следует, что $F(x, z', s) \leq F(x, z'', s)$. Выберем $\psi \in \Psi$, $x \in \mathcal{G}$, $z' \leq z''$. Пусть

$$g' = \langle f, s \rangle + F(x, z', s), \quad g'' = \langle f, s \rangle + F(x, z'', s).$$

Здесь $f \in \mathbb{R}^d$, $|f| \leq \rho(x)$. Тогда

$$g' - g'' = F(x, z', s) - F(x, z'', s) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad g' \leq g''.$$

Условие (iii⁻) доказывается аналогично.

Теперь покажем выполнение условия (iv⁺) (условие (iv⁻) доказывается аналогично). Имеем

$$\begin{aligned} \min_{p \in \mathbb{R}^d} \max \{g - \langle f, s \rangle : (f, g) \in E(x, z, p)\} &\leq \\ &\leq \max \{g - \langle f, s \rangle : (f, g) \in E(x, z, s)\} = F(x, z, s). \end{aligned}$$

С другой стороны, по Предложению А.1

$$\begin{aligned} \min_{p \in \mathbb{R}^d} \max \{g - \langle f, s \rangle : (f, g) \in E(x, z, p)\} &\geq \\ &\geq \min_{p \in \mathbb{R}^d} \{g - \langle f, s \rangle : (f, g) \in E(x, z, p) \cap E(x, z, s)\} = F(x, z, s). \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что

$$F(x, z, s) \leq \min_{p \in \mathbb{R}^d} \max \{g - \langle f, s \rangle : (f, g) \in E(x, z, p)\} \leq F(x, z, s).$$

В свою очередь, найдется вектор ψ_0 такой, что:

$$\begin{aligned} \min_{p \in \mathbb{R}^d} \max \{g - \langle f, s \rangle : (f, g) \in E(x, z, p)\} &= \\ &= \max \{g - \langle f, s \rangle : (f, g) \in E(x, z, \psi_0)\}, \end{aligned}$$

из чего следует искомое. □

А.3.3 Определения верхних, нижних и минимаксных решений для допустимого многозначного отображения E

Пусть $u : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$ – полунепрерывная снизу (сверху) функция. Каждое из приведенных ниже свойств может выступать в качестве определения верхнего (нижнего) решения.

(U1/L1) для любых $x_0 \in \mathcal{G}$, $z_0 \geq u(x_0)$ ($z_0 \leq u(x_0)$) и $s \in \mathbb{R}^d$ существует липшицевая функция $(x(\cdot), z(\cdot)) : [0, \tau] \rightarrow \mathcal{G} \times \mathbb{R}$, определенная на интервале $[0, \tau]$, где τ – некоторое положительное число, такая, что выполняется начальное условие $(x(0), z(0)) = (x_0, z_0)$, и неравенство (A.8) (неравенство (A.9) для L1)

$$z(t) = z_0 + \int_0^t [\langle \dot{x}(\zeta), s \rangle + F(x(\zeta), z(\zeta), s)] d\zeta \geq u(x(t)), \quad (\text{A.8})$$

$$z(t) = z_0 + \int_0^t [\langle \dot{x}(\zeta), s \rangle + F(x(\zeta), z(\zeta), s)] d\zeta \leq u(x(t)) \quad (\text{A.9})$$

имеет место для $t \in [0, \tau]$;

(U2/L2) для произвольно выбранного параметра $\psi \in \Psi$ надграфик (подграфик) функции u слабо инвариантен относительно дифференциального включения

$$(\dot{x}(t), \dot{z}(t)) \in E^+(x(t), z(t), \psi) / E^-(x(t), z(t), \psi), \quad (\text{A.10})$$

здесь и в (U3/L3), (U5/L5), (U6/L6) мы обозначаем через E^+ (E^-) произвольное многозначное отображение, удовлетворяющее условиям (i), (ii), (iii⁺), (iv⁺) ((i), (ii), (iii⁻), (iv⁻)).

(U3/L3) $T((x, u(x)); \text{epi } u) \cap E^+(x, u(x), \psi) \neq \emptyset$ ($T((x, u(x)); \text{epi } u) \cap E^-(x, u(x), \psi) \neq \emptyset$) для всех $x \in \mathcal{G}$ и $\psi \in \Psi$;

(U4/L4) $\text{co } T((x, u(x)); \text{epi } u) \cap E^+(x, u(x), \psi) \neq \emptyset$ ($\text{co } T((x, u(x)); \text{epi } u) \cap E^-(x, u(x), \psi) \neq \emptyset$) для всех $x \in \mathcal{G}$ и $\psi \in \Psi$;

(U5/L5) $F(x, u(x), s) \geq 0$ ($F(x, u(x), s) \leq 0$) для всех $x \in \mathcal{G}$ и $s \in D^-u(x)$ ($s \in D^+u(x)$);

(U6/L6) $\inf \{d^-u(x; f) - g : (f, g) \in E^+(x, u(x), \psi)\} \leq 0$ ($\inf \{d^+u(x; f) - g : (f, g) \in E^-(x, u(x), \psi)\} \geq 0$) для всех $x \in \mathcal{G}$ и $\psi \in \Psi$;

(U7/L7) $\inf \{d^-u(x; f) - \langle s, f \rangle - F(x, u(x), s) : f \in \mathbb{R}^d\} \leq 0$ ($\inf \{d^+u(x; f) - \langle s, f \rangle - F(x, u(x), s) : f \in \mathbb{R}^d\} \geq 0$) для всех $x \in \mathcal{G}$ и $s \in \mathbb{R}^d$.

В классической теории минимаксных решений [30, стр. 38] в свойствах (U1) и (L1) в подынтегральной части перед слагаемым $F(x(\zeta), z(\zeta), s)$ стоит знак минус, а в свойствах (U5), (L5), (U7), (L7) знаки в неравенствах заменены на противоположные.

Пусть $u : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная функция. Рассмотрим свойства, каждое из которых может быть принято за определение минимаксных решений.

(M1) для любых $(x_0, z_0) \in \text{gr } u$ и $s \in \mathbb{R}^d$ существует число $\tau > 0$ и липшицева функция $(x(\cdot), z(\cdot)) : [0, \tau] \rightarrow \mathcal{G} \times \mathbb{R}$, которая удовлетворяет уравнению

$$\dot{z}(t) = \langle \dot{x}(t), s \rangle + F(x(t), z(t), s),$$

начальному условию $(x(0), z(0)) = (x_0, z_0)$ и равенству $z(t) = u(x(t))$ для всех $t \in [0, \tau]$;

(M2) при произвольном выборе вектора $\psi \in \Psi$ график функции u слабо инвариантен относительно дифференциального включения

$$(\dot{x}(t), \dot{z}(t)) \in E(x(t), z(t), \psi),$$

здесь и в (M3), (M4) символ E обозначает произвольное многозначное отображение, которое удовлетворяет всем условиям (i)-(iv⁻).

(M3) $T(u)(x) \cap E(x, u(x), \psi) \neq \emptyset$ для всех $x \in \mathcal{G}$ и $\psi \in \Psi$;

(M4) со $T(u)(x) \cap E(x, u(x), \psi) \neq \emptyset$ для всех $x \in \mathcal{G}$ и $\psi \in \Psi$;

(M5) функция u – одновременно верхнее и нижнее решения;

(M6) $T(u)(x) \cap \Gamma(x, u(x), s) \neq \emptyset$ для всех $x \in \mathcal{G}$ и $s \in \mathbb{R}^d$;

(M7) со $T(u)(x) \cap \Gamma(x, u(x), s) \neq \emptyset$ для всех $x \in \mathcal{G}$ и $s \in \mathbb{R}^d$.

В классической теории минимаксных решений [30, стр. 40] в условии (M1) перед слагаемым $F(x(t), z(t), s)$ стоит знак плюс.

А.3.4 Теорема об эквивалентности

Теорема А.6. Для полунепрерывной снизу функции $u : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$ условия (U1), (U2), ..., (U7) эквивалентны. Аналогично, для полунепрерывной сверху функции $u : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$ свойства (L1), (L2), ..., (L7) эквивалентны. Для непрерывной функции $u : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$ условия (M1), (M2), ..., (M7) эквивалентны.

Сначала мы докажем эквивалентность условий (U1)-(U7). Мы рассмотрим импликации в следующем порядке

$$(U2) \Leftrightarrow (U3) \Leftrightarrow (U4), \quad (U5) \Leftrightarrow (U6), \quad (U3) \Leftrightarrow (U6), \\ (U6) \Rightarrow (U7), \quad (U7) \Rightarrow (U5), \quad (U1) \Leftrightarrow (U2).$$

Доказательство импликаций $(U2) \Leftrightarrow (U3) \Leftrightarrow (U4)$, $(U3) \Leftrightarrow (U6)$ и $(U1) \Leftrightarrow (U2)$ полностью повторяют доказательства, описанные в [30, стр. 43], поэтому мы их опустим.

Доказательство эквивалентности $(U5) \Leftrightarrow (U6)$

Пусть имеет место условие (U6). Выберем произвольный вектор $s \in D^-u(x)$. Согласно условию (iv^+) , существует такой параметр $\psi_0 \in \Psi$, что

$$F(x, u(x), s) = \max \{g - \langle s, f \rangle : (f, g) \in E^+(x, u(x), \psi_0)\}. \quad (A.11)$$

Отметим, что функция $f \mapsto d^-u(x; f)$ полунепрерывна снизу, а множество $E^+(x, u(x), \psi_0)$ замкнуто и ограничено. Тогда из условия (U6) вытекает существование таких $(f', g') \in E^+(x, u(x), \psi_0)$, которые удовлетворяют неравенству

$$d^-u(x; f) - g' \leq 0.$$

Из (A.11) следует, что

$$F(x, u(x), s) \geq g - \langle s, f' \rangle \geq d^-u(x; f') - \langle s, f' \rangle.$$

Из определения субдифференциала вытекает неравенство

$$d^-u(x; f) - \langle s, f \rangle \geq 0.$$

Комбинируя приведенные выше неравенства, мы приходим к неравенству $F(z, u(x), s) \geq 0$. Импликация $(U6) \Rightarrow (U5)$ доказана.

Докажем импликацию (U5) $\Rightarrow$ (U6). Пусть имеет место (U5). Предположим от противного, что

$$\min \{d^-u(x_0; f) - g : (f, g) \in E^+(x_0, u(x_0), \psi)\} > 0$$

для некоторой точки $(x_0, \psi) \in \mathcal{G} \times \Psi$. Так как $f \mapsto d^-u(x_0; f)$ – полунепрерывная снизу функция, то существует такое положительное число α , что

$$\min \{d^-u(x_0; f) - g : (f, g) \in E_\alpha\} > 0, \quad (\text{A.12})$$

где E_α – α -окрестность множества $E^+(x_0, u(x_0), \psi)$.

Используем Теорему А.7. Полагаем

$$\begin{aligned} y &= (x, z) \in Y = \mathcal{G} \times \mathbb{R}, & v(x, z) &= u(x) - z, \\ h &= (f, g) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}, & H &= E_\alpha, & y_0 &= (x_0, 0). \end{aligned}$$

Заметим, что $d^-v(y; h) = d^-v(x, z; f, g) = d^-u(x; f) - g$.

Пусть $D^-v(x, z) \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ – субдифференциал функции v , а вектор $(s, p) \in D^-v(x, z)$ – субградиент этой функции. Согласно определению последнего, имеет место соотношение

$$\langle s, f \rangle + pg - d^-v(x, z; f, g) = \langle s, f \rangle + pg - d^-u(x; f) + g \leq 0$$

для всех $(f, g) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$. Следовательно,

$$p = -1, \quad s \in D^-u(x).$$

Из условия (A.12) вытекает, что функция v удовлетворяет условиям Теоремы А.7. Напомним, что многозначное отображение $(x, z) \mapsto E^+(x, z, \psi)$ полунепрерывно снизу, и, значит, можно подобрать такое число $\varepsilon > 0$, что имеет место неравенство

$$E(x', z', \psi) \subset E_\alpha, \quad \forall x' \in B(x_0; \varepsilon), \quad \forall z' \in [u(x_0) - 2\varepsilon, u(x_0) + 2\varepsilon].$$

Согласно Теореме А.7 (приложение А.4, стр. 155), существуют такие точка

$y_\varepsilon = (x_\varepsilon, z_\varepsilon) \in Y$ и субградиент $(s_\varepsilon, -1) \in D^-v(y_\varepsilon)$, что

$$\begin{aligned} |x_0 - x_\varepsilon| < \varepsilon, \quad |z_\varepsilon| < \varepsilon, \quad |u(x_0) - u(x_\varepsilon) + z_\varepsilon| < \varepsilon, \\ \min \{ \langle s_\varepsilon, f \rangle - g : (f, g) \in E_\alpha \} > 0. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Так как $E^+(x_\varepsilon, u(x_\varepsilon), \psi) \subset E_\alpha$, то мы получаем из (A.13) и (iv⁺), что

$$\begin{aligned} F(x_\varepsilon, u(x_\varepsilon), s_\varepsilon) &\leq \max \{ g - \langle s_\varepsilon, f \rangle : (f, g) \in E^+(x_\varepsilon, u(x_\varepsilon), \psi) \} \leq \\ &\leq \max \{ g - \langle s_\varepsilon, f \rangle : (f, g) \in E_\alpha \} < 0. \end{aligned}$$

Последнее неравенство противоречит предположению о выполнении всюду условия (U5). Этим противоречием завершено доказательство импликации (U5) $\Rightarrow$ (U6).

Доказательство импликаций (U6) $\Rightarrow$ (U7), (U7) $\Rightarrow$ (U5)

Пусть выполняется условие (U6). Выберем произвольно $s \in \mathbb{R}^d$. Согласно (iv⁺), существует такой вектор $\psi_0 \in \Psi$, что

$$F(x, u(x), s) = \max \{ g - \langle s, f \rangle : (f, g) \in E^+(x, u(x), \psi_0) \}. \quad (\text{A.14})$$

Заметим, что функция $f \mapsto d^-u(x; f)$ полунепрерывна снизу, а множество $E^+(x, u(x), \psi_0)$ компактно. Тогда, используя условие (U6), мы получаем, что существуют такие $(f', g') \in E^+(x, u(x), \psi_0)$, которые удовлетворяют неравенству

$$d^-u(x; f') - g' \leq 0.$$

Из (A.14) мы получаем

$$F(x, u(x), s) \geq g' - \langle s, f' \rangle.$$

И тогда

$$d^-u(x; f') - \langle s, f' \rangle - F(x, u(x), s) \leq 0.$$

Импликация (U6) $\Rightarrow$ (U7) доказана.

Пусть имеет место условие (U7). Выберем произвольно $s \in D^-u(x)$. Согласно определению субдифференциала, неравенство $d^-u(x; f) - \langle s, f \rangle \geq 0$ имеет место для всех $f \in \mathbb{R}^d$. Итак, из (U7) следует (U5).

Таким образом, доказана эквивалентность условий (U1)-(U7). Эквивалентность условий (L1)-(L7) может быть доказана аналогичным образом. Сейчас мы докажем эквивалентность условий (M1)-(M7).

В целом, доказательство эквивалентности (M1)-(M7) полностью повторяет описанное в [30, стр. 47], кроме эквивалентности (M5) $\Leftrightarrow$ (M6).

Доказательство импликации (M5) $\Rightarrow$ (M6)

Предположим, что имеет место условие (M5). Тогда справедливы и условия (U6) и (L6). Пусть

$$\mathcal{G} \times \mathbb{R} \times \Psi' \ni (x, z, \psi) \mapsto E^+(x, z, \psi) \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$$

– некоторое многозначное отображение, которое обладает свойствами (i), (ii), (iii⁺), (iv⁺). Аналогично, пусть

$$\mathcal{G} \times \mathbb{R} \times \Psi'' \ni (x, z, \psi) \mapsto E^-(x, z, \psi) \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$$

– некоторое многозначное отображение, которое обладает свойствами (i), (ii), (iii⁻), (iv⁻).

Выберем произвольный вектор $s \in \mathbb{R}^d$. Согласно (iv⁺) и (iv⁻), существуют такие $\psi_0 \in \Psi'$ и $\psi^0 \in \Psi''$, что

$$F(x, u(x), s) = \max \{g - \langle s, f \rangle : (f, g) \in E^+(x, u(x), \psi_0)\}, \quad (\text{A.15})$$

$$F(x, u(x), s) = \min \{g - \langle s, f \rangle : (f, g) \in E^-(x, u(x), \psi^0)\}.$$

Докажем, что существуют такие

$$(f', g') \in T(u)(x), \quad (f'', g'') \in T(u)(x),$$

что

$$g' - \langle s, f' \rangle \leq F(x, u(x), s), \quad g'' - \langle s, f'' \rangle \geq F(x, u(x), s). \quad (\text{A.16})$$

Здесь $T(u)(x)$ — контингентный конус к графику функции u в точке $(x, u(x)) \in \mathcal{G} \times \mathbb{R}^d$ (Определение А.19, приложение А.4, стр. 155). Сначала предположим, что $d^-u(x; f) > -\infty$ для всех $f \in \mathbb{R}^d$. Согласно (U6) и (A.15), существуют $(f', g^*) \in E^+(x, u(x), \psi_0)$, такие, что $g' = d^-u(x; f) \leq g^* < +\infty$,

и

$$F(x, u(x), s) \geq g^* - \langle s, f' \rangle \geq g' - \langle s, f' \rangle.$$

Используя (А.17), мы получаем, что $(f', g') \in T(u)(x)$.

Теперь рассмотрим оставшийся случай. Предположим, что существует такой вектор $f \in \mathbb{R}^d$, что $d^-u(x; f) = -\infty$. Полагаем $f' = 0$ и $g' = |F(x, u(x), s)|$. Используя Предложение А.2, мы получаем $(f', g') \in T(u)(x)$. Ясно, что (f', g') удовлетворяют первому из неравенств в (А.16). Аналогичным образом можно показать, что существуют $(f'', g'') \in T(u)(x)$, удовлетворяющие второму неравенству в (А.16).

Полагаем

$$(f(\lambda), g(\lambda)) = \begin{cases} (-\lambda f', -\lambda g') & \text{для } \lambda \in [-1, 0], \\ (\lambda f'', \lambda g'') & \text{для } \lambda \in [0, 1]. \end{cases}$$

Так как $T(u)(x)$ – конус, то $(f(\lambda), g(\lambda)) \in T(u)(x)$ для всех $\lambda \in [-1, 1]$. Из непрерывности функции $\lambda \mapsto (f(\lambda), g(\lambda))$ и неравенств (А.16) вытекает существование такого числа $\tilde{\lambda} \in [-1, 1]$, что

$$g(\tilde{\lambda}) - \langle s, f(\tilde{\lambda}) \rangle = F(x, u(x), s).$$

Таким образом, мы получаем $(f(\tilde{\lambda}), g(\tilde{\lambda})) \in T(u)(x) \cap \Gamma(x, u(x), s)$. Импликация (М5) $\Rightarrow$ (М6) доказана.

Доказательство импликации (М6) $\Rightarrow$ (М5)

Пусть имеет место (М6), то есть существуют $(f', g') \in T(u)(x) \cap \Gamma(x, u(x), s)$. Согласно (А.18), справедливы оценки

$$d^-u(x; f') \leq g' \leq d^+u(x; f'),$$

а значит, и

$$d^-u(x; f') - \langle s, f' \rangle - F(x, u(x), s) \leq 0,$$

$$d^+u(x; f') - \langle s, f' \rangle - F(x, u(x), s) \geq 0.$$

Мы получили, что из (М6) следует (U7) и (L7). Поэтому функция u является одновременно и верхним, и нижним решением. Таким образом, импликация (М6) $\Rightarrow$ (М5) доказана.

Из этой теоремы следует согласованность минимаксных решений с вязкостными решениями [36]. Определение А.8 эквивалентно Определению (U5), а Определение А.7 — (L5), из чего следует, что нижнее вязкостное решение эквивалентно нижнему минимаксному решению, а верхнее вязкостное решение — верхнему минимаксному. Этого удалось добиться благодаря предположению, что функция $z \mapsto F(x, z, s)$ является строго возрастающей по z .

А.4 Выпуклый анализ

Определения и теоремы взяты из книг [30, 73].

Определение А.12. Нижней производной функции u в точке $x \in \mathcal{G}$ по направлению $f \in \mathbb{R}^d$ называется

$$d^-u(x; f) = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \{ \delta^{-1} (u(x + \delta f') - u(x)) : \delta \in (0, \varepsilon), |f - f'| \leq \varepsilon \}.$$

Определение А.13. Верхней производной функции u в точке $x \in \mathcal{G}$ по направлению $f \in \mathbb{R}^d$ называется

$$d^+u(x; f) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \{ \delta^{-1} (u(x + \delta f') - u(x)) : \delta \in (0, \varepsilon), |f - f'| \leq \varepsilon \}.$$

Определение А.14. Субдифференциалом функции u в точке $x \in \mathcal{G}$ называется

$$D^-u(x) = \{ s \in \mathbb{R}^d : \langle s, f \rangle - d^-u(x; f) \leq 0, \forall f \in \mathbb{R}^d \}.$$

Определение А.15. Супердифференциалом функции u в точке $x \in \mathcal{G}$ называется

$$D^+u(x) = \{ s \in \mathbb{R}^d : \langle s, f \rangle - d^+u(x; f) \geq 0, \forall f \in \mathbb{R}^d \}.$$

Определение А.16. Надграфик функции $u : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет равенству

$$\text{epi } u = \{ (x, z) : z \geq u(x), x \in \mathcal{G} \}.$$

Определение А.17. Подграфик функции $u : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет равенству

$$\text{hypo } u = \{ (x, z) : z \leq u(x), x \in \mathcal{G} \}.$$

Определение А.18. Множество

$$T(\omega, W) = \{ h \in \mathbb{R}^d : \liminf_{\delta \rightarrow 0} \delta^{-1} \text{dist}(\omega + \delta h; W) = 0 \}$$

называется контингентным (тангенциальным) конусом к множеству W в точке ω .

Определение А.19. *Контингентный (тангенциальный) конус к графику функции u в точке $(x, u(x)) \in \mathcal{G} \times \mathbb{R}$ определяется следующим образом:*

$$T(u)(x) = \{(f, g) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} : \liminf_{\delta \rightarrow 0} \delta^{-1} \text{dist}((x + \delta f, u(x) + \delta g); \text{gr } u) = 0\}.$$

Гиперплоскость определяется следующим равенством

$$\Gamma(x, z, s) = \{(f, g) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} : g = \langle f, s \rangle - F(x, z, s)\}.$$

По определениям конуса $T(u)(x)$ и производных по направлениям имеем

$$-\infty < d^-u(x; f) < +\infty \Rightarrow (f, d^-u(x; f)) \in T(u)(x), \quad (\text{A.17})$$

$$-\infty < d^+u(x; f) < +\infty \Rightarrow (f, d^+u(x; f)) \in T(u)(x),$$

$$(f, g) \in T(u)(x) \Rightarrow d^-u(x; f) \leq g \leq d^+u(x; f). \quad (\text{A.18})$$

Предложение А.2. *Пусть $u : \mathcal{G} \in \mathbb{R}^d$ – полунепрерывная снизу функция. Пусть для некоторых $x \in \mathcal{G}$ и $f \in \mathbb{R}$ имеет место $d^-u(x; f) = -\infty$. Тогда $\{0\} \times (-\infty, 0] \in T(u)(x)$. Точно также пусть $u : \mathcal{G} \in \mathbb{R}^d$ – полунепрерывная сверху функция. Пусть для некоторых $x \in \mathcal{G}$ и $f \in \mathbb{R}$ имеет место $d^+u(x; f) = \infty$. Тогда $\{0\} \times [0, \infty) \in T(u)(x)$.*

Теорема А.7. *Пусть $Y \ni y \mapsto v(y) \in \mathbb{R}$ – полунепрерывная снизу функция, определенная на открытом множестве $Y \subset \mathbb{R}^m$, и пусть H – выпуклое компактное множество в $\mathbb{R}^m$. Пусть для некоторой точки $y_0 \in Y$ выполняется неравенство*

$$d^-v(y_0; h) > 0, \quad \forall h \in H.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существуют точка $y_\varepsilon \in Y$ и субградиент $s_\varepsilon \in D^-v(y_\varepsilon)$ такие, что

$$|y_0 - y_\varepsilon| < \varepsilon; \quad \langle s_\varepsilon, h \rangle > 0, \quad \forall h \in H,$$

$$|v(y_0) - v(y_\varepsilon)| < \varepsilon.$$

А.5 Информация о дифференцируемых многообразиях

Формулировка геометрических свойств поверхности $\partial\mathcal{T}$ может быть дана следующим образом: множество $\partial\mathcal{T}$ является дважды гладким $(d-1)$ -мерным многообразием с ограниченной сверху кривизной [5, §1, стр. 6–7].

То есть $\partial\mathcal{T}$ покрывается конечным или счетным количеством областей $\mathcal{Z}_k^T$, в каждой из которых заданы дважды непрерывно дифференцируемые координатные функции $\varsigma_{k,l}^T(z_1, \dots, z_{d-1}) : \mathbb{R}^{d-1} \rightarrow \partial\mathcal{T}$, $l = 1, \dots, d$. Если две области имеют непустое пересечение, то на нем координатные функции одной области выражаются через координатные функции другой области взаимно однозначно и дважды гладко.

То, что координатные функции $\varsigma_k^T(z)$ поверхности дважды непрерывно дифференцируемы, дает, что для значений индекса $i = 1, \dots, d-1$ векторы частных производных

$$\frac{\partial \varsigma_k^T(z)}{\partial z_i} = \frac{\partial}{\partial z_i} \left(\varsigma_{k,1}^T(z), \dots, \varsigma_{k,d}^T(z) \right)' = \left(\frac{\partial \varsigma_{k,1}^T(z)}{\partial z_i}, \dots, \frac{\partial \varsigma_{k,d}^T(z)}{\partial z_i} \right)'$$

один раз непрерывно дифференцируемы. Штрих означает транспонирование.

Обозначим через

$$a_1 \times \dots \times a_{d-1} := \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_d \\ a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,d} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,d} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{d-1,1} & a_{d-1,2} & \dots & a_{d-1,d} \end{bmatrix}$$

операцию получения *обобщенного векторного произведения* [28, §6] $d-1$ векторов $a_1, \dots, a_{d-1}$. Символы $e_1, \dots, e_d$ обозначают ортонормированные базисные векторы. Эта операция определяется аналогично векторному произведению в $\mathbb{R}^3$ и позволяет получить вектор, ортогональный $a_1, \dots, a_{d-1}$. Именно это свойство является наиболее важным в данном контексте.

Гладкость частных производных в свою очередь обеспечивает, что вектор-функция $n_{\mathcal{T}}(x) = n_{\mathcal{T}}(\varsigma_k^T(z))$ нормального гауссова поля [28, §35] вдоль поверхности $\partial\mathcal{T}$ в области $\mathcal{Z}_k^T$ также является гладкой, поскольку вычисляется

по формуле

$$n_{\mathcal{T}}(x) = n_{\mathcal{T}}(\varsigma_k^{\mathcal{T}}(z)) = \pm \frac{\frac{\partial \varsigma_k^{\mathcal{T}}(z)}{\partial z_1} \times \frac{\partial \varsigma_k^{\mathcal{T}}(z)}{\partial z_2} \times \dots \times \frac{\partial \varsigma_k^{\mathcal{T}}(z)}{\partial z_{d-1}}}{\left| \frac{\partial \varsigma_k^{\mathcal{T}}(z)}{\partial z_1} \times \frac{\partial \varsigma_k^{\mathcal{T}}(z)}{\partial z_2} \times \dots \times \frac{\partial \varsigma_k^{\mathcal{T}}(z)}{\partial z_{d-1}} \right|}.$$

Знак перед дробью выбирается таким образом, чтобы вектор $n_{\mathcal{T}}(x)$ был ориентирован вонне множества $\mathcal{T}$ внутрь множества $\mathcal{G}$. Вектора частных производных функции $\varsigma_k^{\mathcal{T}}(\cdot)$ являются линейно независимыми по определению многообразия, поэтому обобщенное векторное произведение этих векторов отлично от нуля. Дважды непрерывная дифференцируемая стыковка координат между областями $\mathcal{Z}_k^{\mathcal{T}}$ дает гладкую стыровку функции $n_{\mathcal{T}}(x)$ гауссова нормального поля.

Требование ограниченности снизу радиуса кривизны поверхности $\partial\mathcal{T}$ означает, что в каждой точке нормальная кривизна этой поверхности в любом направлении [28, §39] ограничена сверху константой $1/r > 0$.

Аналогичное описание имеют множество $\partial\mathcal{F}$ и функция внешней нормали $n_{\mathcal{F}}(x)$ к границе множества $\mathcal{F}$.