

Ivanov A.G., Ushakov A.V.

**Adaptive Control
in Three-Dimensional Linear Systems
with Dynamical Disturbance of
Unknown Level**

Institute of Mathematics and Mechanics
Ural Branch of Russian Academy of Sciences
Ekaterinburg, Russia

SECOND INTERNATIONAL CONFERENCE on GAME THEORY AND MANAGEMENT
June 26-27, 2008, St. Petersburg, Russia

В первой части презентации рассматривается построение максимальных стабильных мостов для трехмерной (по целевому множеству) линейной дифференциальной игры. Во второй части разработанная процедура применяется для построения адаптивного управления в задачах, где априори не оговорено геометрическое ограничение на управление второго игрока.

Maximal stable bridge construction

Построение максимальных стабильных мостов

Дифференциальная игра в исходном пространстве и эквивалентная игра

$$\dot{x} = Ax + Bu + Cv$$

$$x \in R^m, \quad u \in P \subset R, \quad v \in Q \subset R$$

$$t \in [0, \theta]$$

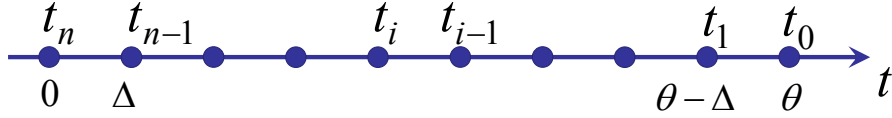
The target set M is a polyhedron in the space of three chosen coordinates of the phase vector

$$\dot{y} = D(t)u + E(t)v$$

$$D(t) = X_3(\theta, t)B, \quad E(t) = X_3(\theta, t)C$$

В исходной игре фазовый вектор может иметь любую размерность $m \geq 3$, но выпуклое целевое множество зависит только от трех выделенных компонент фазового вектора. Стандартной заменой переменных переходим к эквивалентной дифференциальной игре третьего порядка без фазовой переменной в правой части. Предполагаем, что ограничения P, Q на управления первого и второго игроков — отрезки.

Аппроксимирующая игра



$$F_i = W_i - \Delta \cdot P_i, \quad P_i = D(t_i)P, \quad Q_i = E(t_i)Q$$

$$\eta_i(l) = \rho(l, F_i) - \rho(l, \Delta \cdot Q_i), \quad l \in R^3$$

$$\rho(l, W_{i+1}) = \text{conv}(\eta_i)$$

Для построения максимального стабильного моста в рамках аппроксимирующей игры разбиваем ось времени с шагом Δ влево от момента окончания θ точками t_i , при этом $t_0 = \theta$. На каждом шаге замораживаем динамику эквивалентной системы. Результатом построений будут t -сечения $W_i = W(t_i) \subset R^3$ аппроксимирующего максимального стабильного моста W .

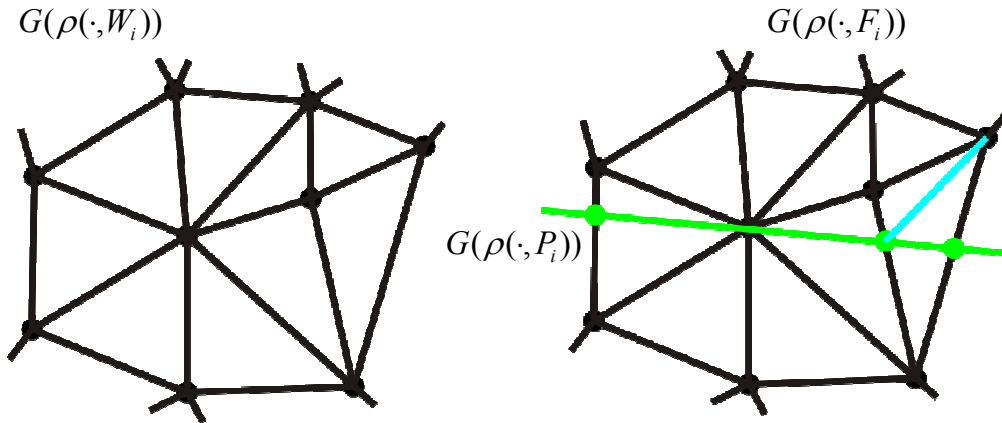
Построение сечений производится в попятной процедуре: на первом шаге на основе целевого выпуклого многогранника строится выпуклый многогранник W_1 ; на втором шаге на основе W_1 идет построение выпуклого многогранника W_2 и т.д.

Построение очередного сечения W_{i+1} моста сводится к операциям над выпуклыми многогранниками, а именно, к построению алгебраической суммы F_i многогранника W_i и отрезка $-\Delta P_i$ (учет действия первого игрока) и построению геометрической разности многогранника F_i и отрезка ΔQ_i (учет действия второго игрока). Последнее эквивалентно взятию выпуклой оболочки разности $\rho(\cdot, F_i) - \rho(\cdot, \Delta Q_i)$ опорных функций множеств F_i и ΔQ_i .

Для непрерывной, положительно однородной, кусочно-линейной функции $\gamma : l \rightarrow \gamma(l)$ с выпуклыми конусами линейности используем следующее представление: вводим на единичной сфере S сетку (граф) $G(\gamma)$, определяемую пересечением сферы с конусами линейности функции γ . В каждом узле $G(\gamma)$ записываем значение функции γ .

При построении опорной функции $\rho(\cdot, W_{i+1})$ многогранника W_{i+1} требуем, чтобы все конусы линейности функции $\rho(\cdot, W_i)$ были трехгранными и, соответственно, секторы сетки $G(\rho(\cdot, W_i))$ — треугольными. Для этого нужно разбить секторы начальной сетки на треугольные и в дальнейшем при образовании новых сеток вводить в случае необходимости дополнительное разбиение (триангуляцию сетки).

Processing the first player's action

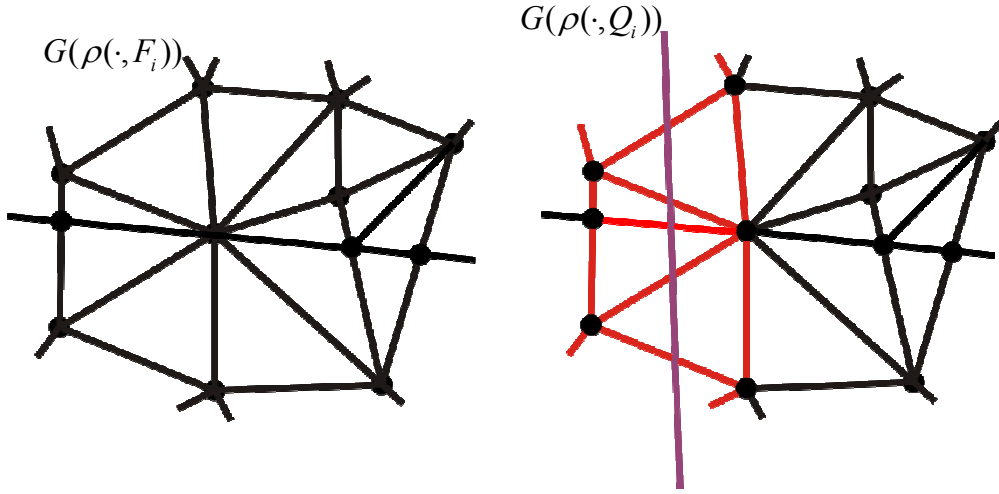


$$F_i = W_i + (-\Delta \cdot P_i), \quad P_i = D(t_i)P$$

Сетка $G(\rho(\cdot, F_i))$ есть результат наложения сеток $G(\rho(\cdot, W_i))$ и $G(\rho(\cdot, P_i))$. Поскольку P_i — отрезок в R^3 , то $G(\rho(\cdot, P_i))$ представляет собой окружность на сфере S — пересечение сферы с проходящей через нуль плоскостью, ортогональной P_i . При наложении сеток появляются новые узлы. Поэтому при построении сетки $G(\rho(\cdot, F_i))$ устанавливаем дополнительные связи для того, чтобы конусы линейности функции $\rho(\cdot, F_i)$ были трехгранными.

Учет действия второго игрока

Processing the second player's action



$$\eta_i(l) = \rho(l, F_i) - \rho(l, \Delta \cdot Q_i), \quad Q_i = E(t_i)Q$$

Пересчитываем значения опорной функции $\rho(\cdot, F_i)$ в узлах сетки $G(\rho(\cdot, F_i))$ с учетом действия второго игрока. Получаем функцию $\eta_i(\cdot)$.

Для перехода к опорной функции многогранника W_{i+1} в графе $G(\rho(\cdot, F_i))$ следует отбросить узлы, связанные с «нарушением» выпуклости функции $\eta_i(\cdot)$.

Для проведения овыпукления разработана итерационная процедура. Организуем список «подозрительных» связей между узлами. Первоначально в этот список заносятся связи сетки $G(\rho(\cdot, F_i))$, «разрушаемые» графом $G(\rho(\cdot, Q_i))$ и соседние к ним. Затем идет корректировка этих связей, суть которой в исправлении нарушений локальной выпуклости. При этом список подозрительных связей может пополняться другими связями. Наоборот, связи, удовлетворяющие условиям локальной выпуклости, удаляются из списка. Процесс заканчивается при исчерпании массива подозрительных связей.

Базовые статьи

- Zarkh M.A., V.S. Patsko. **Numerical solution of a third-order directed game.** *Soviet J. Comput. Systems*, 26 (4): 92–99, 1988;
transl. from *Izv. Akad. Nauk SSSR. Tekhn. Kibernet.*, no. 6: 162–169, 1987 (in Russian).
- Zarkh M.A., V.S. Patsko. **Construction of maximal stable bridges in a linear differential game.**
In: *Design of an Optimal Control in Game Systems*, 46–61, Akad. Nauk SSSR, Ural. Nauchn. Tsentr, Sverdlovsk, 1986 (in Russian).

При разработке алгоритма построения максимального стабильного моста использованы идеи из указанных на слайде статей.

Алгоритм построения максимального стабильного моста

Algorithm of Constructing the Maximal Stable Bridge

/* Preparation */

Forming the structure of a convex polyhedron $M = W_0$ on the basis of the vertices

Constructing the graph $G(\rho(\cdot, W_0))$ of the convex polyhedron on the basis of its structure

Triangulation of the obtained graph (mesh $G(\rho(\cdot, W_0))$)

/* Constructing t -sections $W_i = W(t_i)$ of the maximal stable bridge W^* */

Do, while $(t_i > 0)$

{

Constructing the mesh $G(\rho(\cdot, F_i))$

Computing $\eta_i(l) = \rho(l, F_i) - \rho(l, \Delta \cdot Q_i)$ in the nodes of $G(\rho(\cdot, F_i))$

Constructing the collection Π (the link collection, where the function $\eta_i(l)$ can be non-convex)

Convex hull construction

Do, while the collection Π is non-empty

{

if the function $\eta_i(\cdot)$ is convex in the first link from Π , then

{ remove this link from Π }

else

{ correct the function $\eta_i(\cdot)$ and the collection Π }

}

}

Здесь показана схема алгоритма построения моста. Она базируется на пошаговой процедуре построения сечений. Итерационная процедура овыпукления является наиболее затратной при вычислении очередного сечения.

Модельные примеры

Model examples

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + v \\ \dot{x}_2 = -kx_1 + u \end{cases}$$

$$|u| \leq 1, \quad |v| \leq 1$$

$k = 0$: the inertial point

$k = 1$: the oscillator (the pendulum)

Приведенная на слайде динамика в случае $k = 0$ описывает материальную точку на прямой, в случае $k = 1$ — конфликтно-управляемый осциллятор. Управлением u распоряжается первый игрок, управлением v — второй.

Нахождение функции цены в двумерной игре (при помощи трехмерного моста)

Model examples. Passing to the three-dimensional system

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + v \\ \dot{x}_2 = -kx_1 + u \\ \dot{c} = 0 \end{cases}$$

$$|u| \leq 1, \quad |v| \leq 1$$

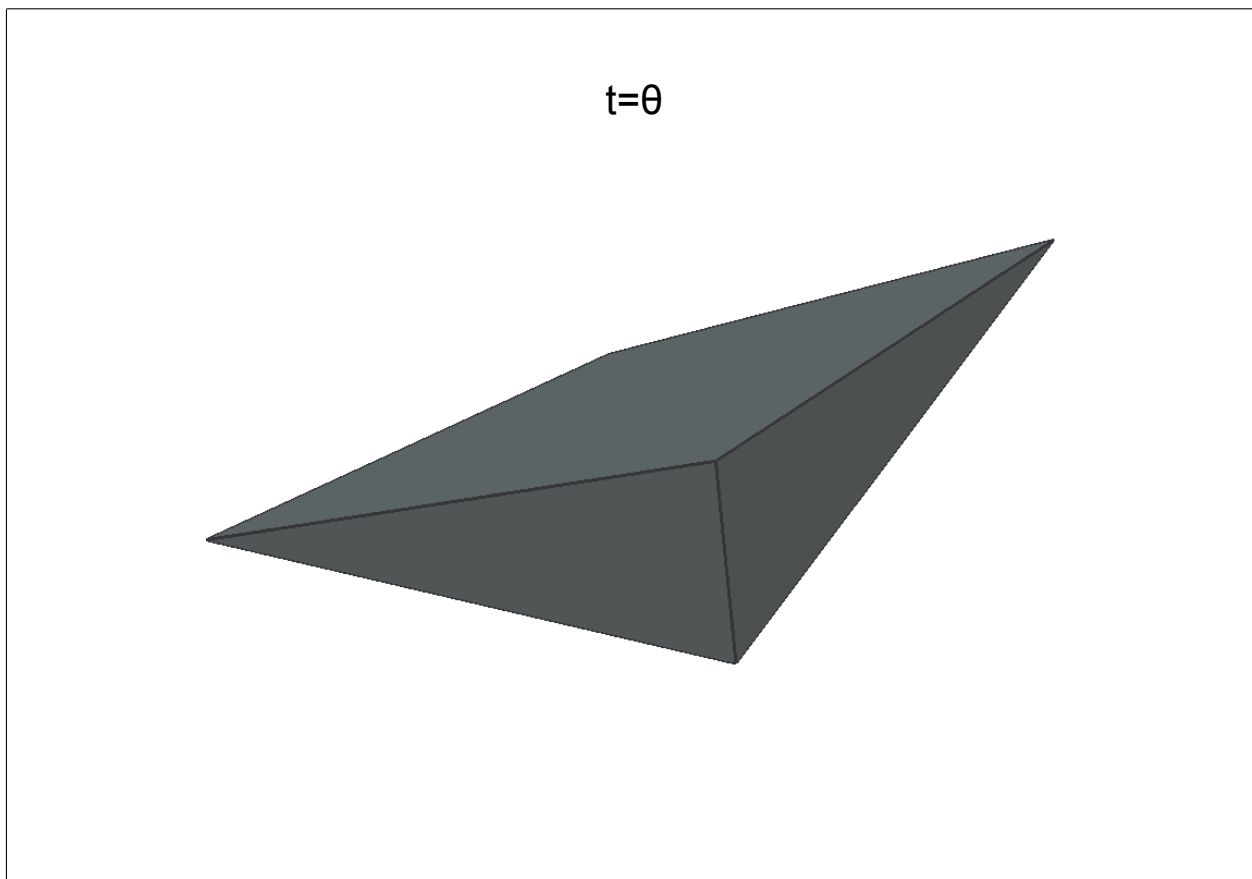
$$\gamma(x) = \max\{|x_1|, |x_2|\}$$

$$M = \{(x_1, x_2, c) : \gamma(x) \leq c \leq c^*\}$$

В двумерной игре с фиксированным моментом окончания терминальную функцию платы γ возьмем в виде $\gamma = \max\{|x_1|, |x_2|\}$. Нас интересует функция цены.

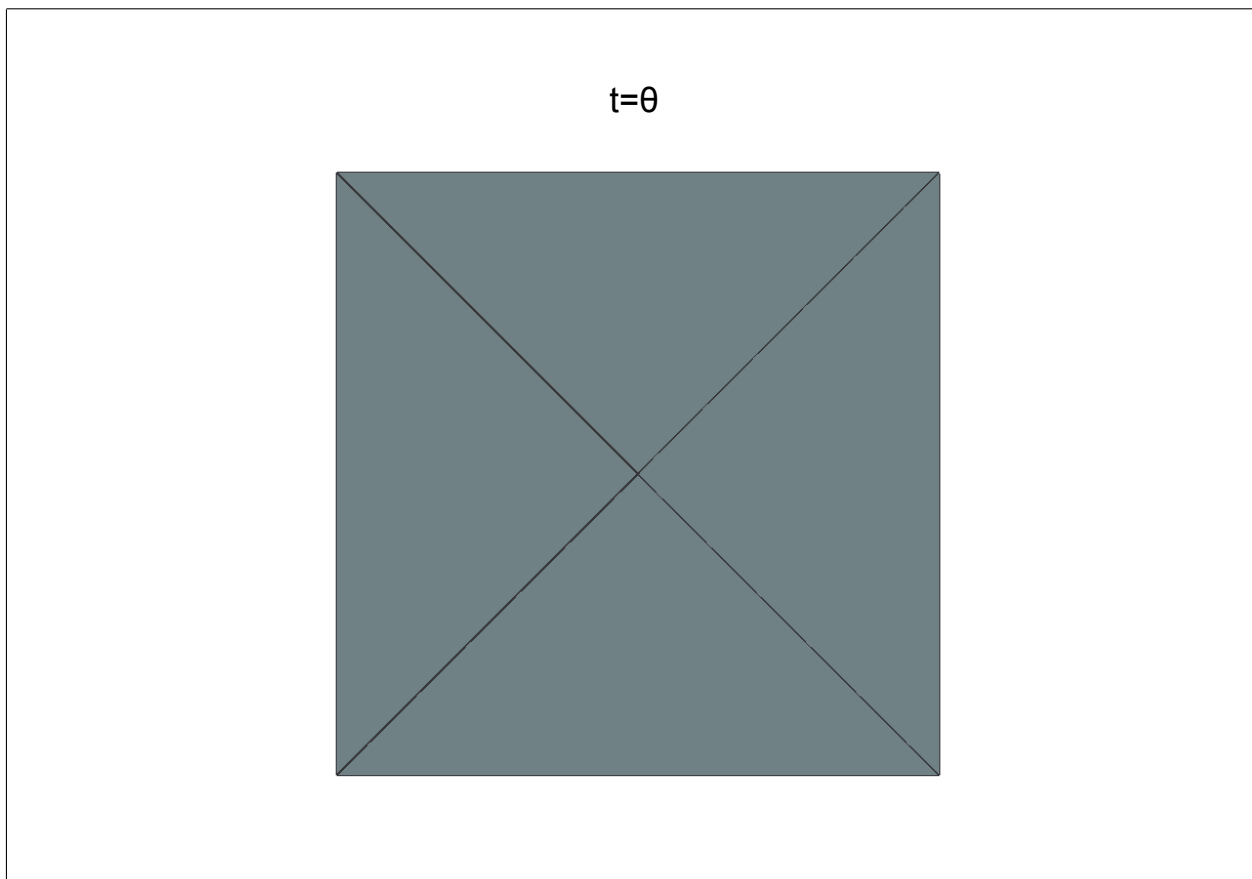
Для построения надграфика функции цены рассмотрим игру третьего порядка с целевым множеством M в виде срезки на некотором уровне c^* надграфика функции платы для двумерной игры. Тогда t -сечение моста трехмерной игры будет срезкой на уровне c^* надграфика функции цены двумерной игры для этого же момента t .

Целевое множество



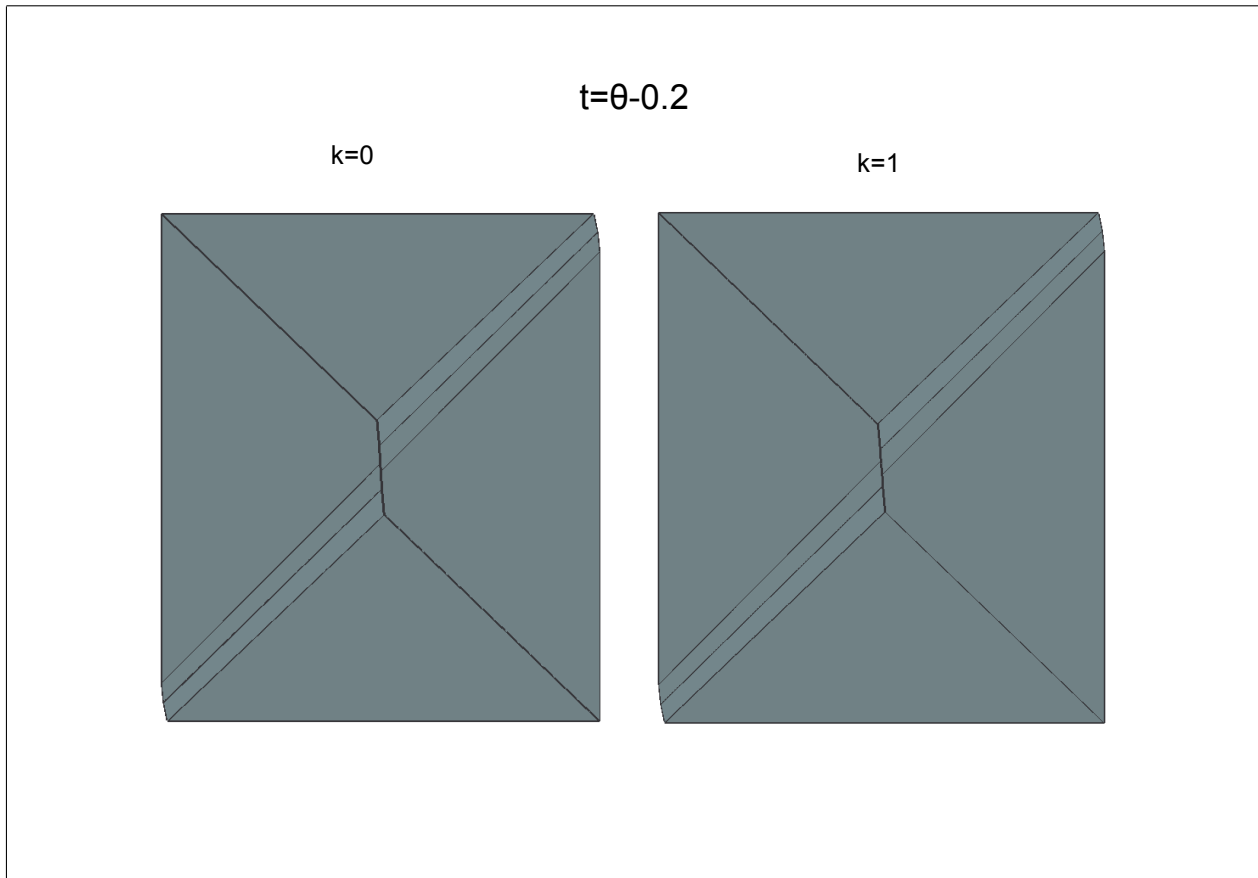
Здесь показано целевое множество трехмерной игры: вид сбоку — перевернутая «вверх ногами» четырехгранная пирамида с вершиной в начале координат.

Целевое множество



Целевое множество трехмерной игры: вид снизу.

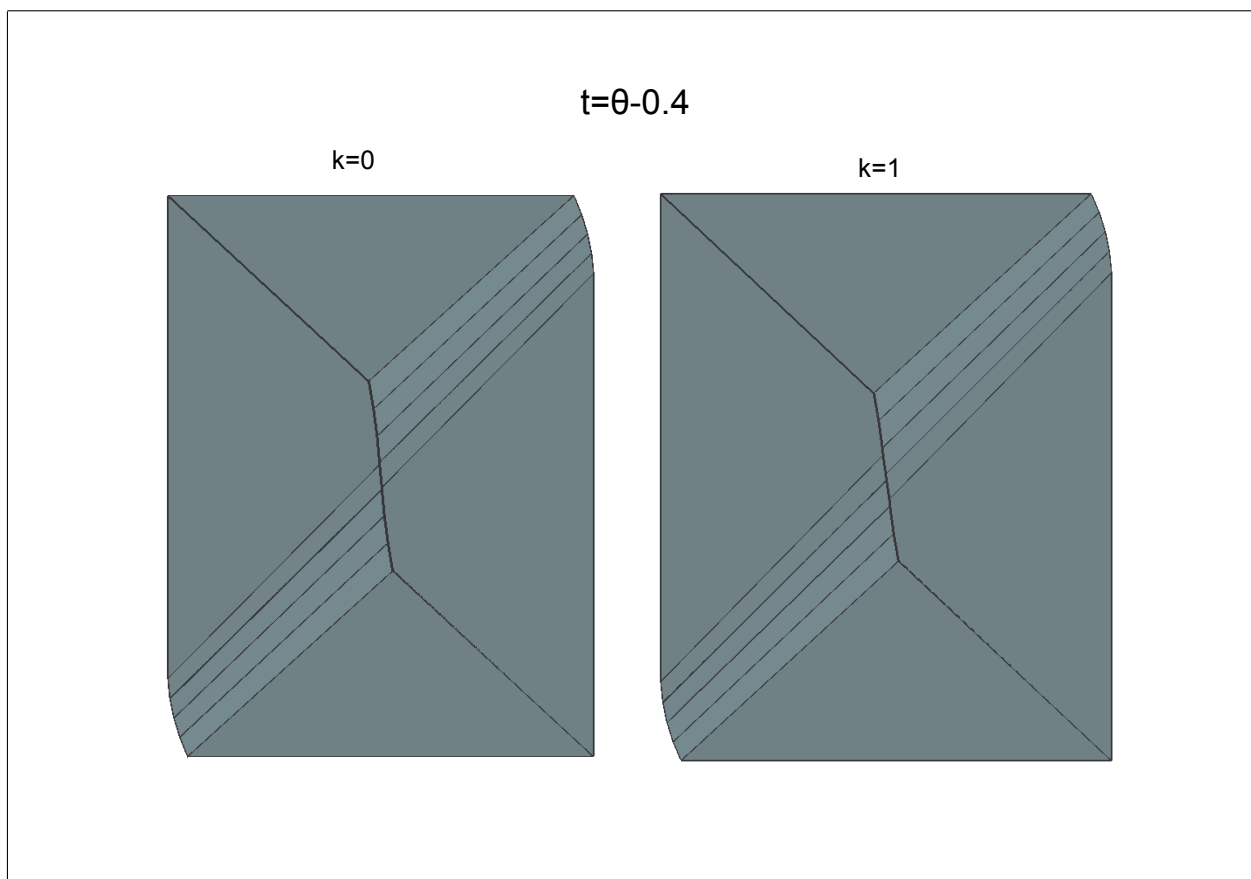
Сечения моста для разных моментов времени



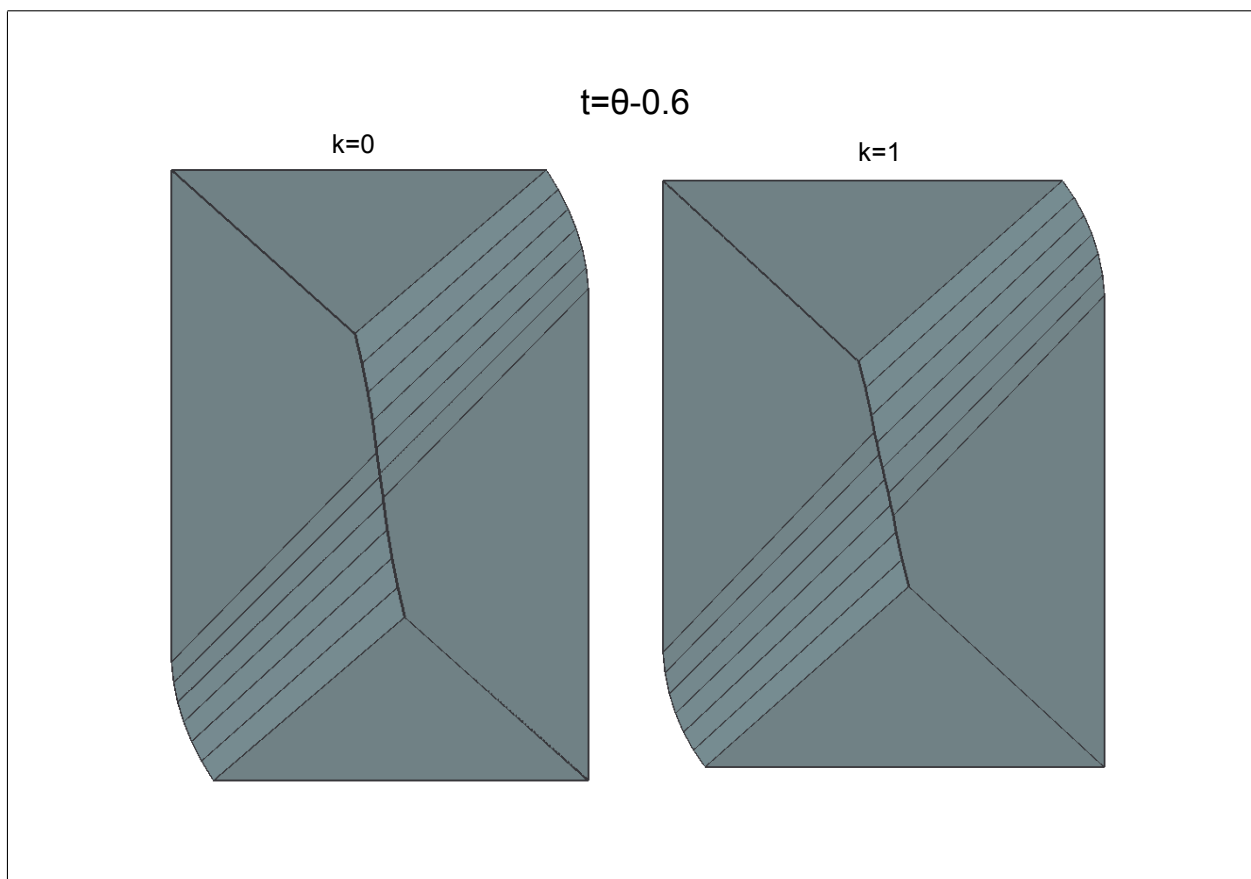
Здесь и далее изображены t -сечения моста исследуемых трехмерных игр для разных моментов времени. Слева для материальной точки, справа — для маятника. Представлен вид «снизу» — со стороны отрицательных значений оси s . Ось y_1 направлена горизонтально справа налево, ось y_2 — вертикально вверх.

Для моментов t близких к θ структура t -сечений очень проста. Она может быть найдена аналитически.

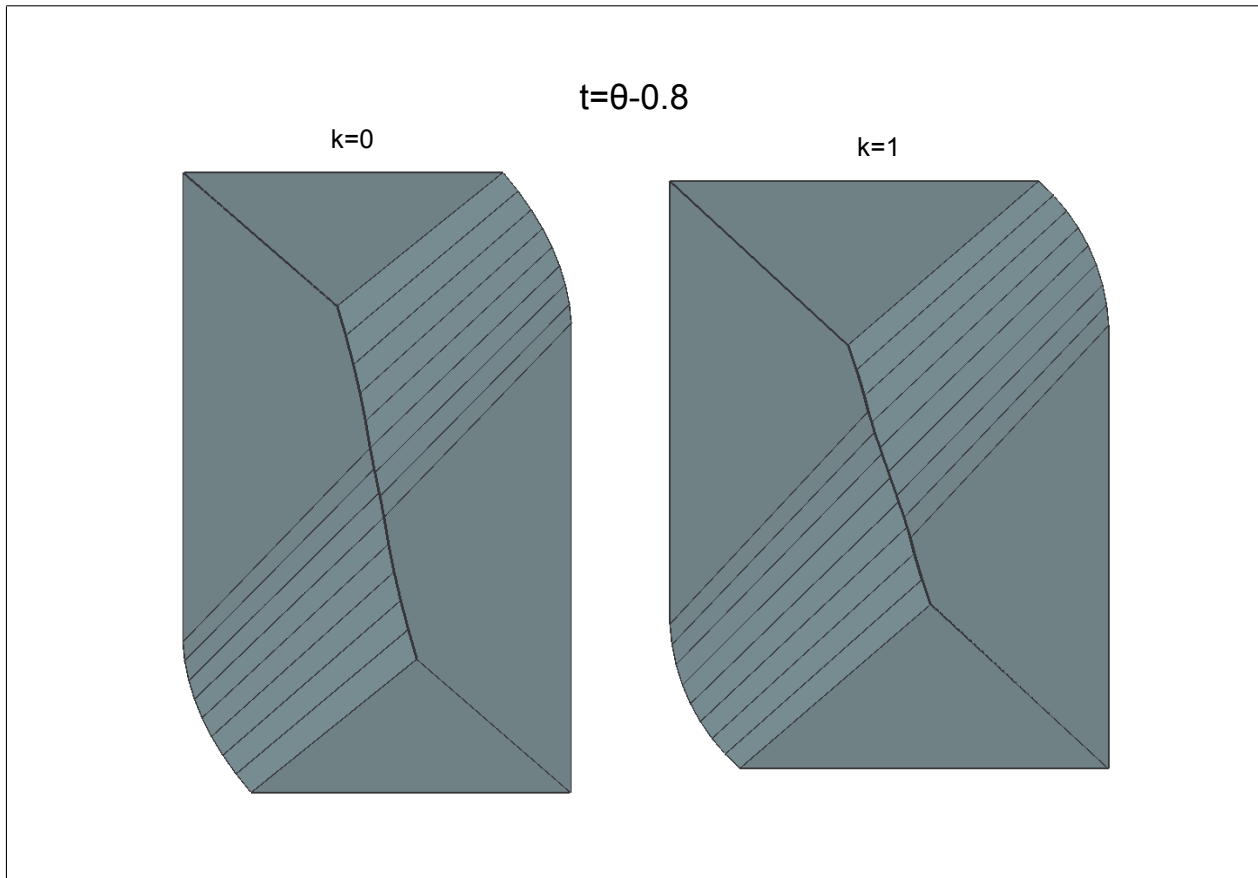
Сечения моста для разных моментов времени



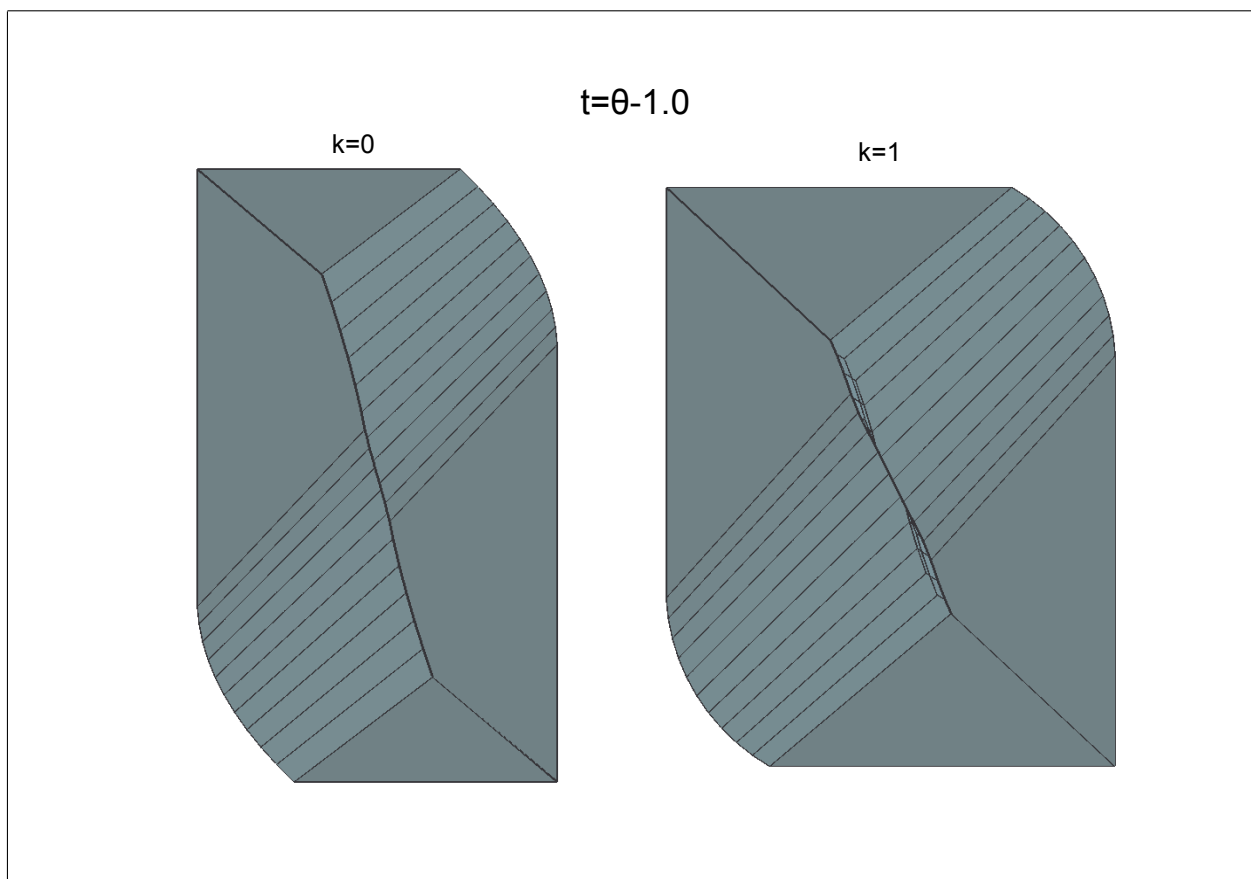
Сечения моста для разных моментов времени



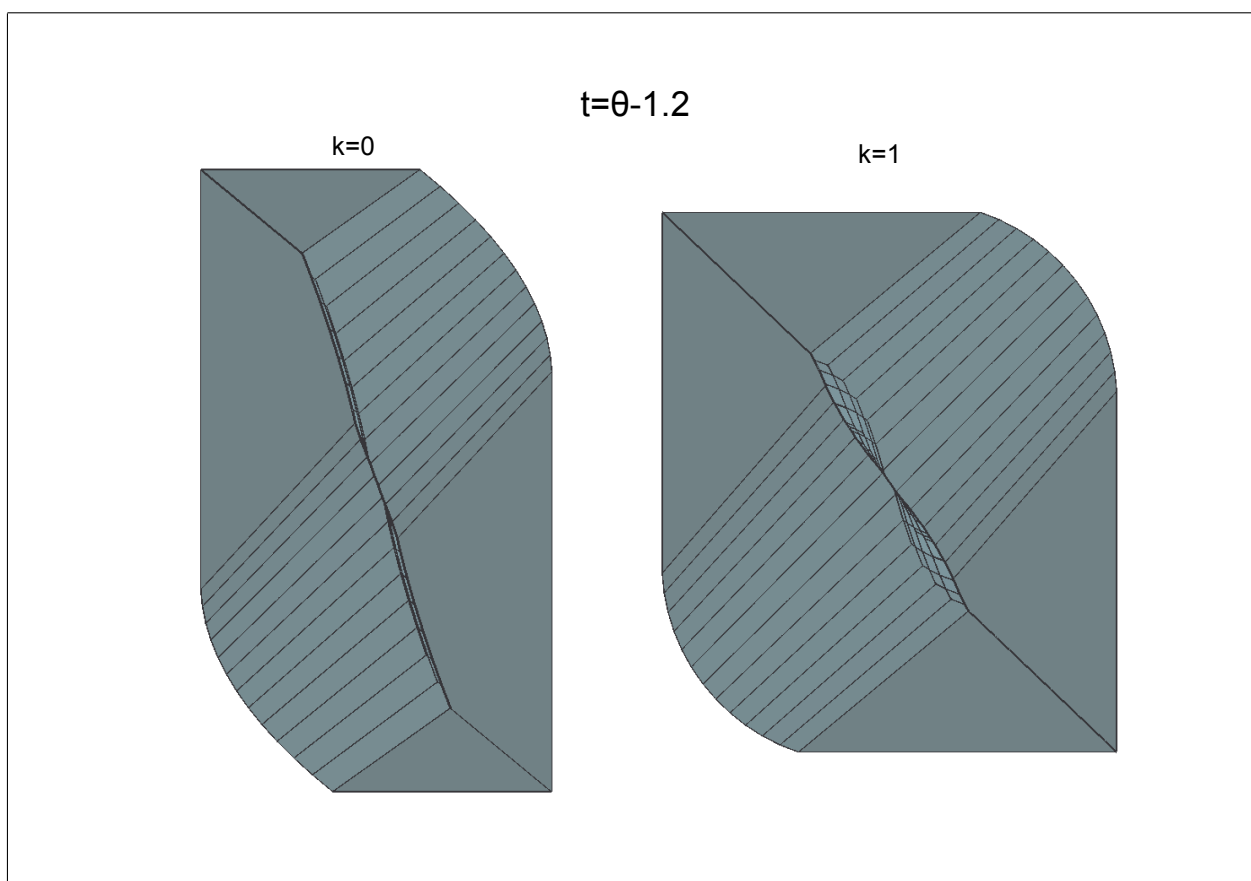
Сечения моста для разных моментов времени



Сечения моста для разных моментов времени

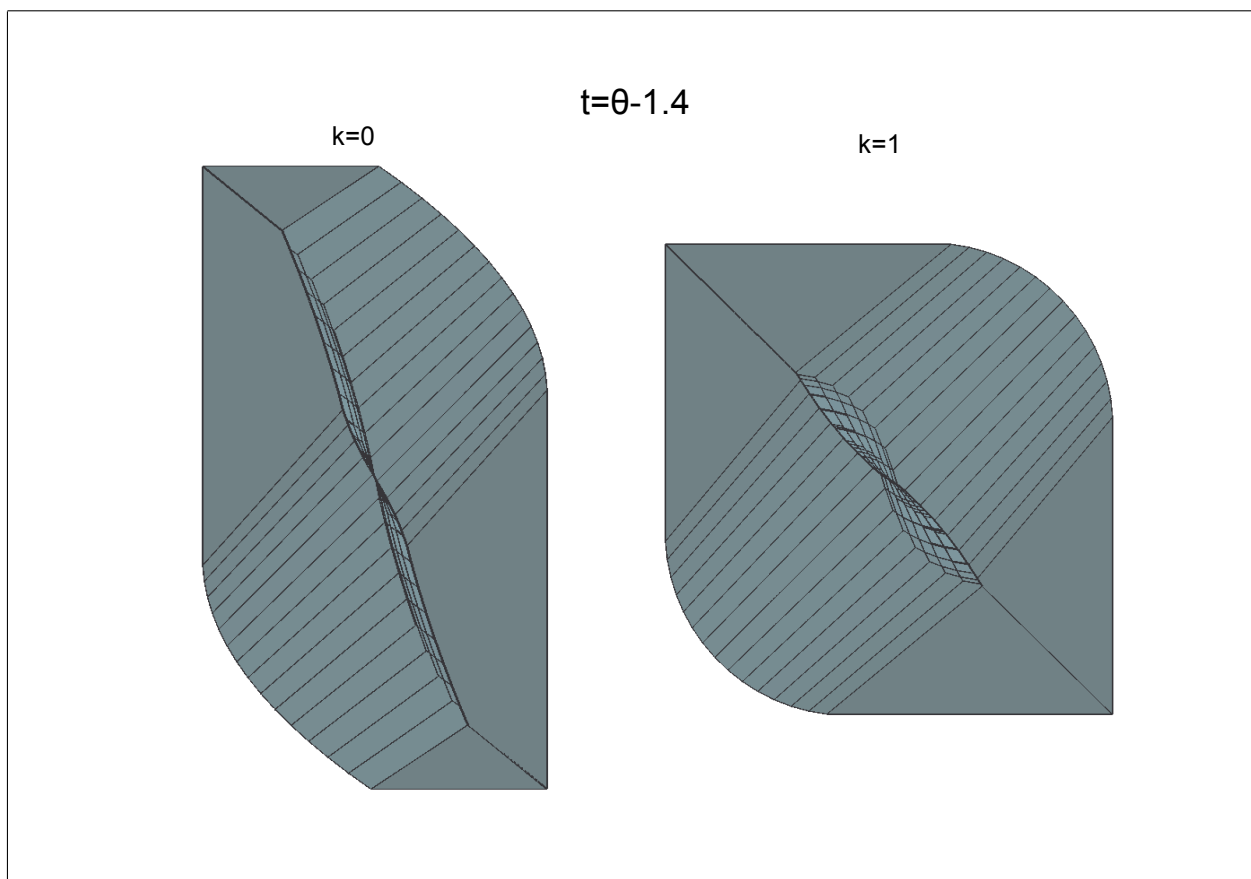


Сечения моста для разных моментов времени

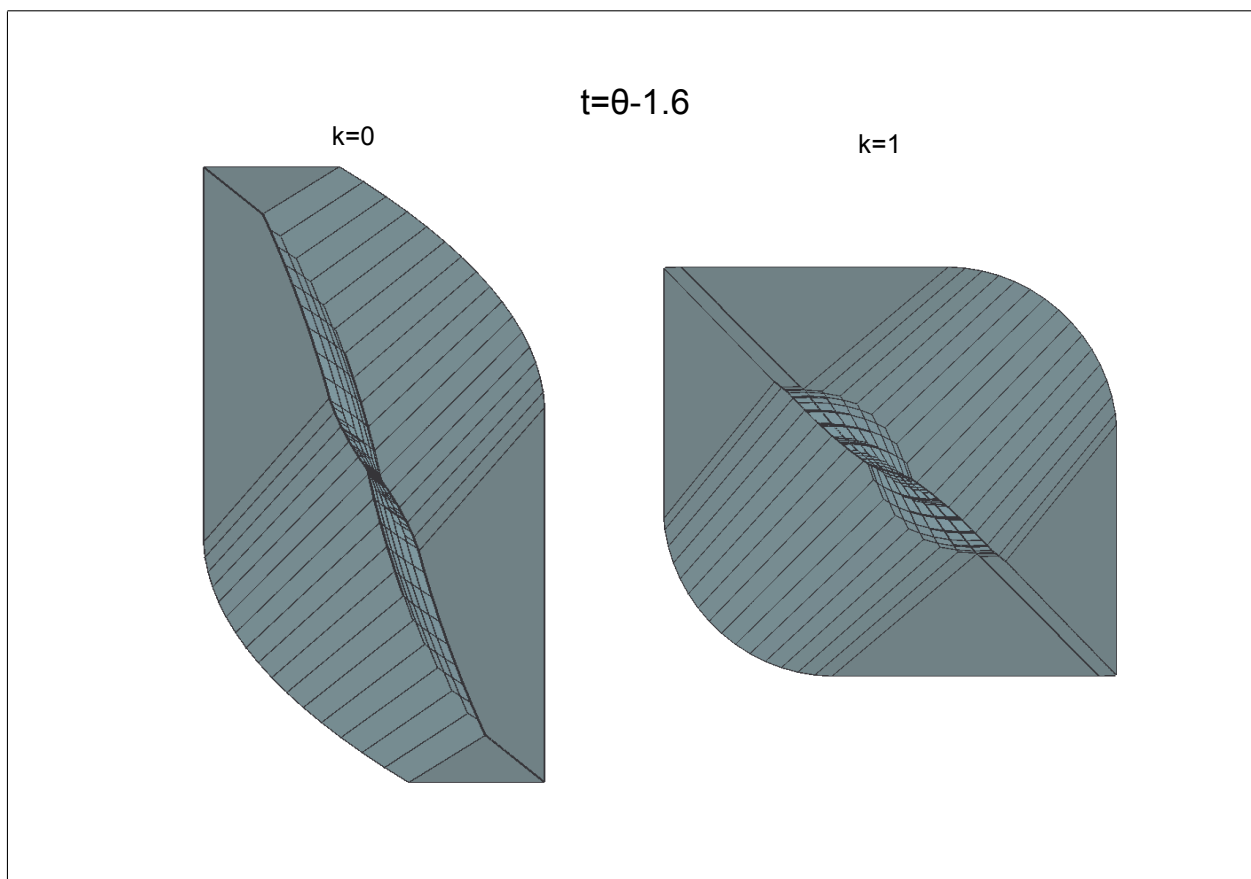


Здесь и далее структура t -сечений является сложной.

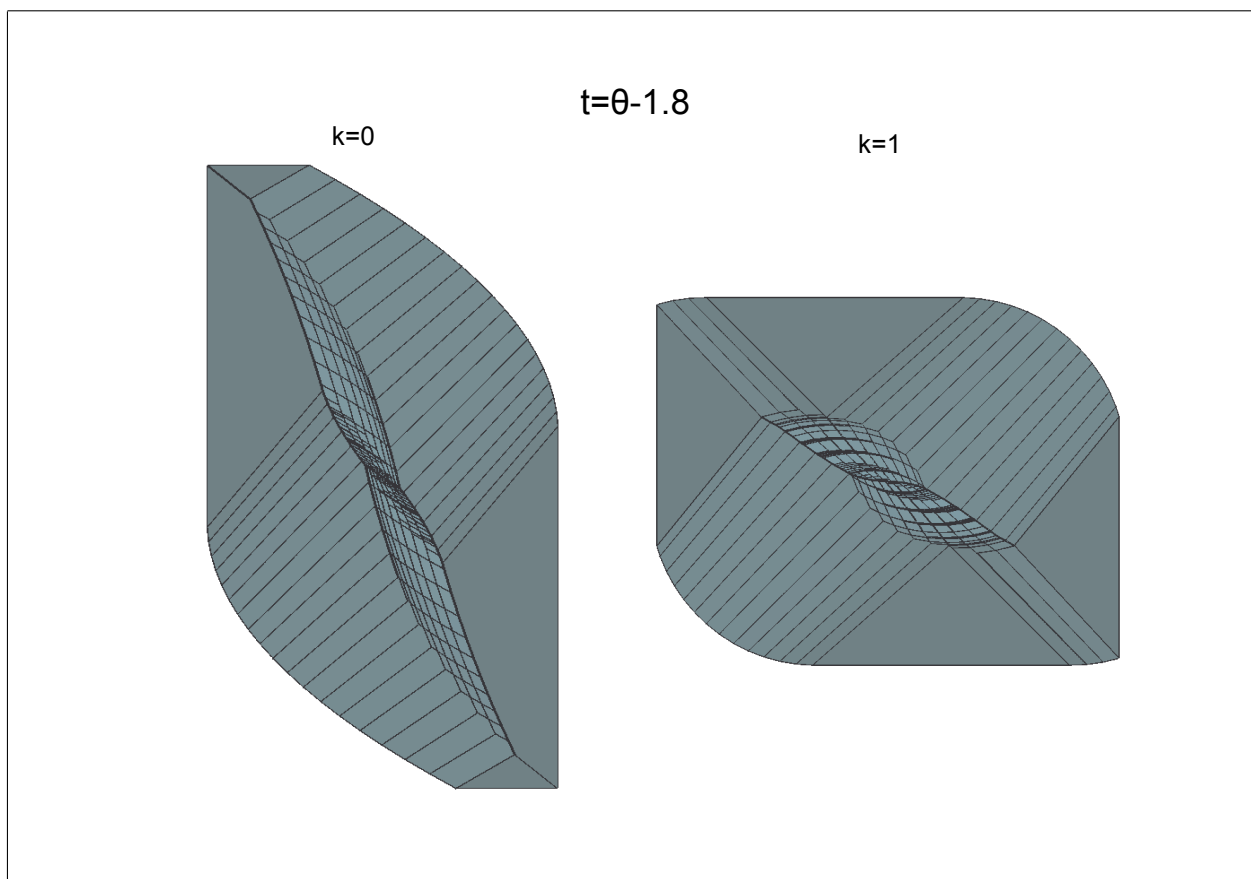
Сечения моста для разных моментов времени



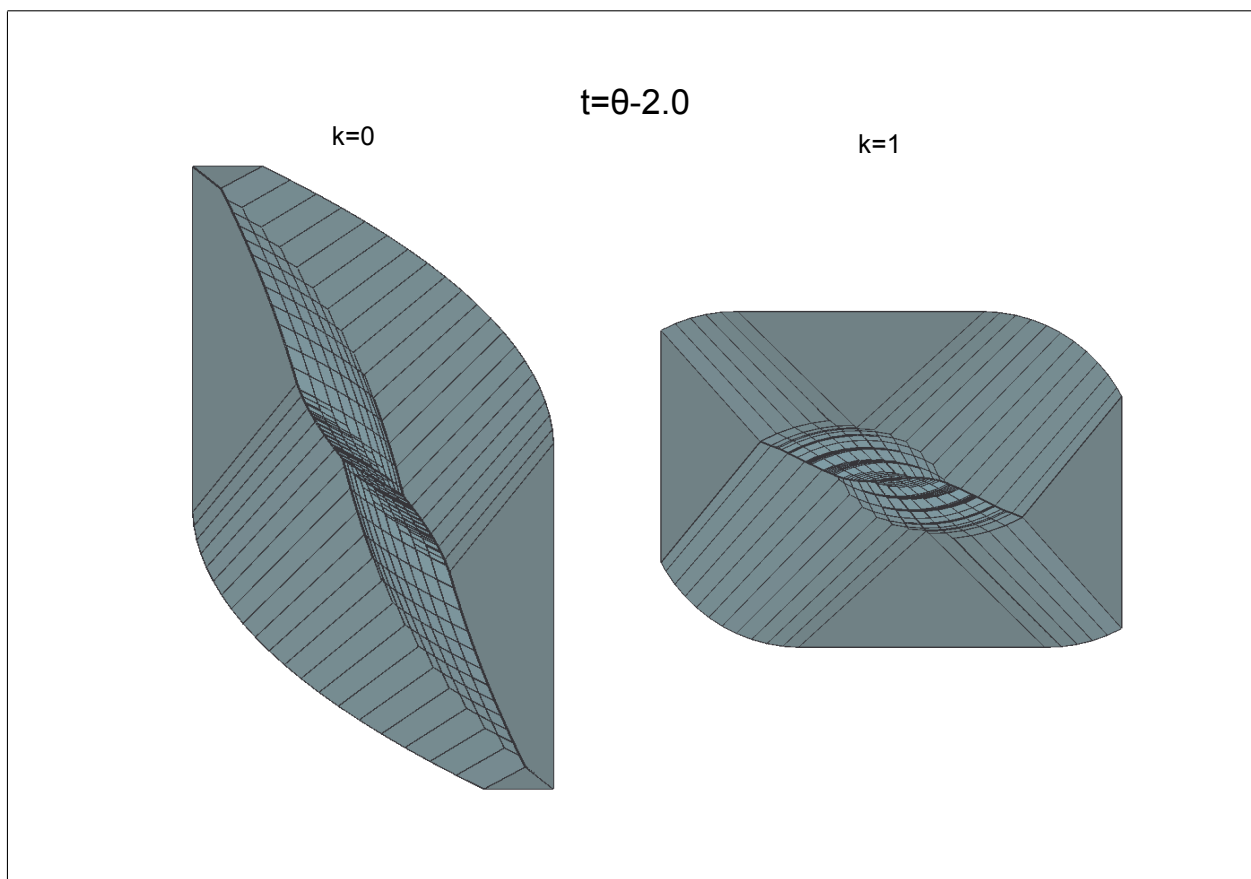
Сечения моста для разных моментов времени



Сечения моста для разных моментов времени



Сечения моста для разных моментов времени



Adaptive control

Адаптивное управление

Adaptive Control

$$\dot{x} = Ax + Bu + Cv$$

$$x \in R^m, \quad u \in P \subset R, \quad v \in R$$

$$t \in [0, \theta]$$

Ganebnyi S.A, Kumkov S.S. and V.S.Patsko. **Control design in problems with an unknown level of dynamical disturbance**, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2006, vol. 70, issue 5, pp. 680–695;
transl. from *Prikl. Math. Mekh.*, 2006, vol. 70, issue 5, pp. 753–770 (in Russian).

Рассматривается задача о построении адаптивного управления в линейных системах с неизвестным уровнем динамической помехи. Цель полезного управления — приведение n выделенных компонент фазового вектора на выпуклое, ограниченное целевое множество в фиксированный момент времени θ . Полезное управление стеснено геометрическим ограничением. Динамическая помеха (управление второго игрока) предполагается ограниченной, но уровень ограничения заранее неизвестен.

Принцип адаптивного управления

Adaptive Control

$$\dot{x} = Ax + Bu + Cv,$$

$$x \in R^m, \quad u \in P \subset R, \quad v \in R,$$

$$t \in [0, \theta]$$

weak disturbance => weak useful control, which steers the system near the center of the target set

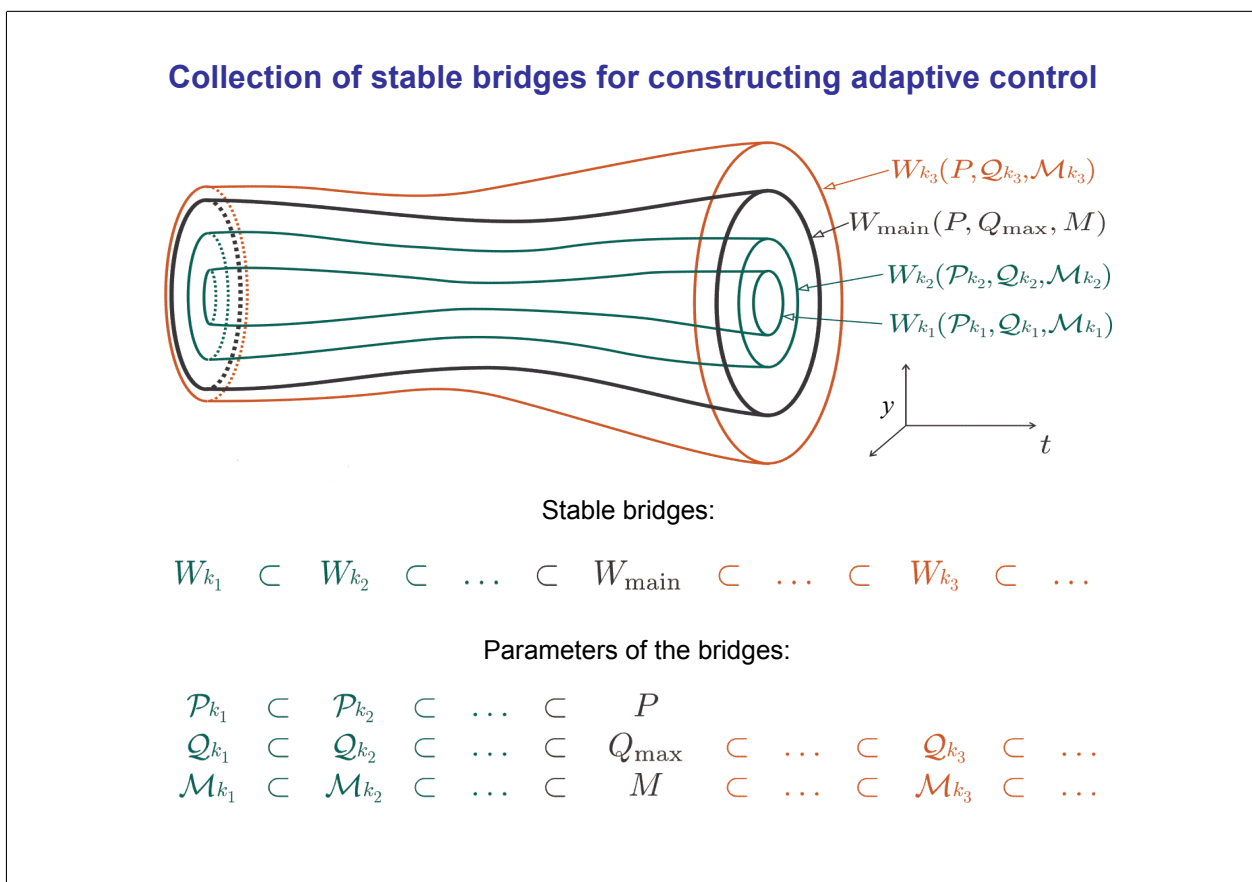
disturbance of “average level” => extremal useful control, which steers the system to the given target set, possibly, closely to its border

“strong” disturbance => extremal useful control; system comes outside the target set, but the miss is minimized

Ganebnyi S.A., Kumkov S.S. and V.S.Patsko. Control design in problems with an unknown level of dynamical disturbance, Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 2006, vol. 70, issue 5, pp. 680-695; transl. from Prikl. Math. Mekh., 2006, vol. 70, issue 5, pp. 753-770 (in Russian).

На этом слайде пояснены требования к адаптивному управлению.

Семейство стабильных мостов для формирования адаптивного управления



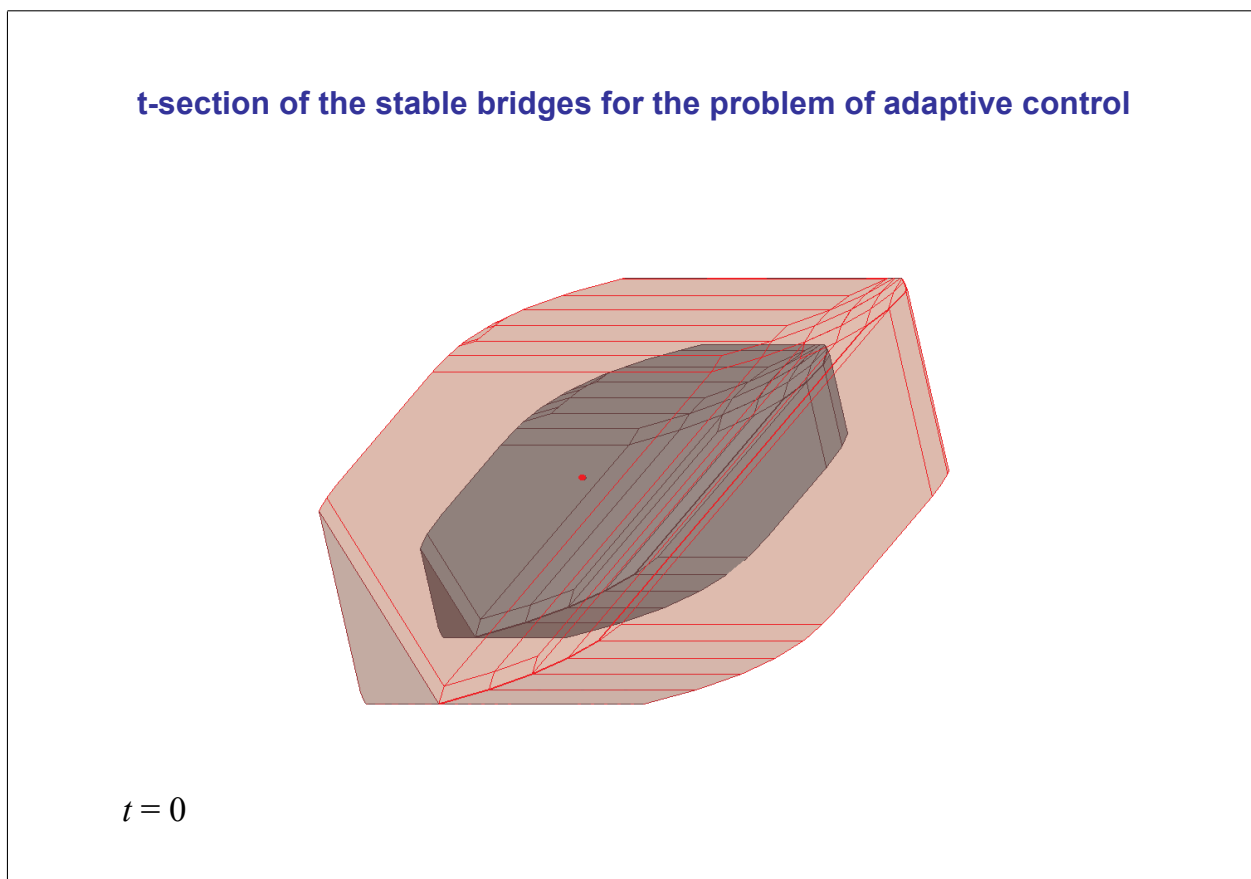
Рассматривается упорядоченное семейство стабильных мостов. Каждый мост определяется тройкой: ограничение на управление первого игрока, ограничение на управление второго игрока, целевое множество.

Главный мост W_{main} соответствует тройке P, Q_{max}, M , где множества P и M заданы по постановке задачи, а множество Q_{max} трактуется как геометрическое ограничение на помеху, которое первый игрок считает «разумным» в рассматриваемой задаче. Предполагаем, что каждое из множеств P, Q_{max}, M содержит нуль своего пространства.

В случае $n = 2$ алгоритмы построения адаптивного управления реализованы ранее. Рисунок вложенной системы мостов приведен именно двумерного случая.

В данной работе рассматривается случай трехмерного целевого множества. Следовательно, t -сечения мостов также являются трехмерными. Для построения мостов используется алгоритм, описанный в первой части презентации.

Моделирование адаптивного управления



Представим результаты моделирования для некоторой системы (ее не выписываем). За первого игрока используется адаптивное управление, за второго — случайная помеха. Для построения адаптивного управления применяем известный в теории дифференциальных игр принцип экстремального прицеливания.

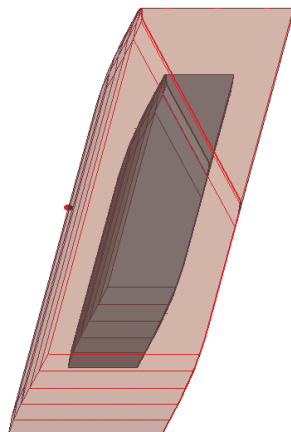
На идущей далее последовательности слайдов показано поведение фазового состояния системы относительно t -сечений главного моста.

На начальном промежутке времени фазовая точка находится вне главного моста (точка красного цвета). Поэтому для построения адаптивного управления используются t -сечения внешних мостов. Розовым цветом показано то из них, на которое производится прицеливание при построении управления. В некоторый момент времени фазовая точка попадает внутрь главного моста (внутри главного моста она изображается оранжевым цветом). В таких ситуациях изображаются только t -сечения главного моста, хотя управление осуществляется путем прицеливания на t -сечение некоторого моста, вложенного в главный. Сечения вложенных мостов рассчитываются очень просто: умножением соответствующего t -сечения главного моста на коэффициент $k < 1$.

В левом нижнем углу указан момент текущего времени. Соседние слайды с одинаковым моментом времени различаются точкой зрения. При переходе от одного момента времени к другому ракурс не меняется.

Моделирование адаптивного управления

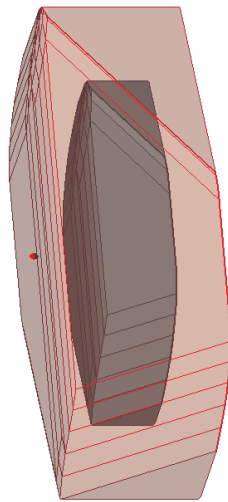
t-section of the stable bridges for the problem of adaptive control



$t = 0$

Моделирование адаптивного управления

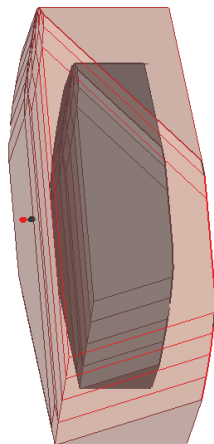
t-section of the stable bridges for the problem of adaptive control



$t = 0$

Моделирование адаптивного управления

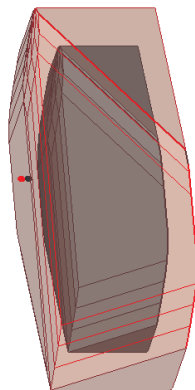
t-section of the stable bridges for the problem of adaptive control



$t = 0.2$

Моделирование адаптивного управления

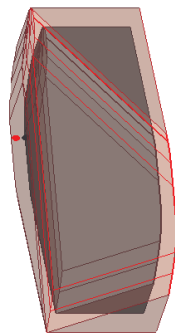
t-section of the stable bridges for the problem of adaptive control



$t = 0.4$

Моделирование адаптивного управления

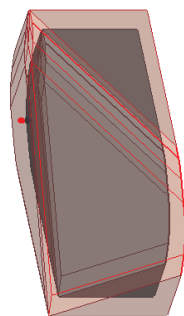
t-section of the stable bridges for the problem of adaptive control



$t = 0.6$

Моделирование адаптивного управления

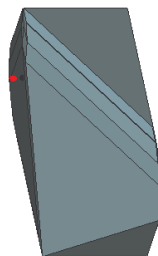
t-section of the stable bridges for the problem of adaptive control



$t = 0.8$

Моделирование адаптивного управления

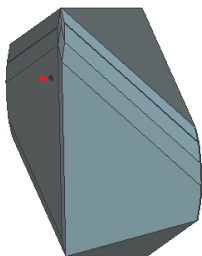
t-section of the stable bridges for the problem of adaptive control



$t = 1.0$

Моделирование адаптивного управления

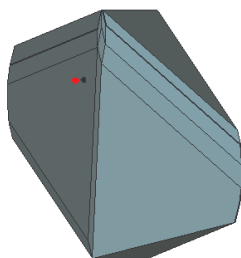
t-section of the stable bridges for the problem of adaptive control



$t = 1.0$

Моделирование адаптивного управления

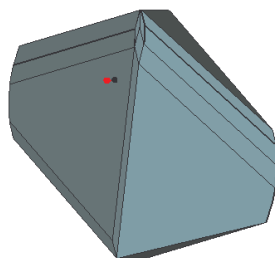
t-section of the stable bridges for the problem of adaptive control



$t = 1.0$

Моделирование адаптивного управления

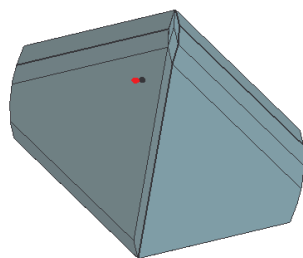
t-section of the stable bridges for the problem of adaptive control



$t = 1.0$

Моделирование адаптивного управления

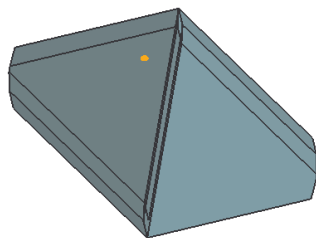
t-section of the stable bridges for the problem of adaptive control



$t = 1.0$

Моделирование адаптивного управления

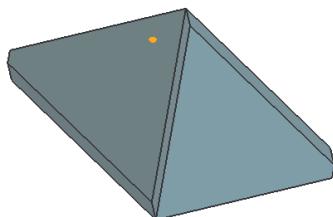
t-section of the stable bridges for the problem of adaptive control



$t = 1.2$

Моделирование адаптивного управления

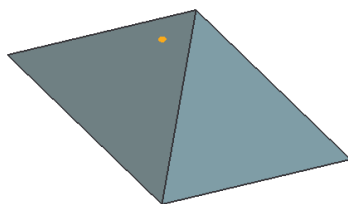
t-section of the stable bridges for the problem of adaptive control



$t = 1.4$

Моделирование адаптивного управления

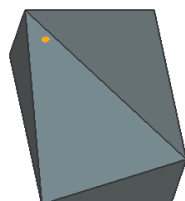
t-section of the stable bridges for the problem of adaptive control



$t = 1.6$

Моделирование адаптивного управления

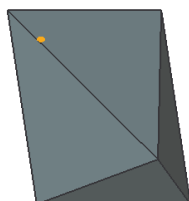
t-section of the stable bridges for the problem of adaptive control



$t = 1.6$

Моделирование адаптивного управления

t-section of the stable bridges for the problem of adaptive control



$t = 1.6$