РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

Том 68

МОСКВА

УДК 62–50

 В. С. Пацко

ПОВЕРХНОСТИ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯ В ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ С ФИКСИРОВАННЫМ МОМЕНТОМ ОКОНЧАНИЯ

Рассматриваются антагонистические линейные дифференциальные игры с фиксированным моментом окончания и непрерывной терминальной функцией платы. Управляющее воздействие первого (минимизирующего) игрока предполагается скалярным и ограниченным по модулю. Векторное управление второго игрока стеснено геометрическим ограничением. Доказывается утверждение о достаточном условии, при выполнении которого оптимальное позиционное управление обратной связи первого игрока можно задать при помощи поверхности переключения, разделяющей пространство игры на две части, в каждой из которых действует свое крайнее значение управляющего воздействия. Предлагаемый способ управления является устойчивым по отношению к неточностям численного построения поверхности переключения.

1. Постановка задачи и формулировка основного результата. *Предварительное описание задачи.* Пусть линейная дифференциальная игра с фиксированным моментом окончания ϑ описывается соотношениями

$$\begin{gathered}\dot{y}(t) = B^{(1)}(t)u(t) + C^{(1)}(t)\upsilon(t)\\ y(t) \in R^n, \quad |u(t)| \le \mu, \quad \upsilon(t) \in Q^{(1)}; \quad \gamma^{(1)}(y(\vartheta))\end{gathered} \tag{1.1}$$

Условимся, что управляющее воздействие $u(t)$ первого игрока является скалярным и ограниченным по модулю числом $\mu > 0$. Множество $Q^{(1)}$, ограничивающее управляющее воздействие $\upsilon(t)$ второго игрока, будем считать выпуклым компактом в конечномерном пространстве. Таким образом, $B^{(1)}(t)$ – вектор-столбец, а $C^{(1)}(t)$ – матрица соответствующих размеров. Функции $B^{(1)}$, $C^{(1)}$ предполагаем кусочно-непрерывными. Пусть $\gamma^{(1)} : R^n \to R$ – непрерывная функция платы. Первый игрок минимизирует значение $\gamma^{(1)}(y(\vartheta))$, интересы второго игрока противоположны.

Игру (1.1) будем называть исходной. Относящиеся к ней обозначения снабжаются верхним индексом (1). Условимся, что начальные моменты t_0 принадлежат промежутку $T = [\vartheta_1, \vartheta]$, где $\vartheta_1 < \vartheta$. Пусть $Z = T \times R^n$ – пространство игры.

Допустимым программным управлением $u(\cdot)$ ($\upsilon(\cdot)$) первого (второго) игрока назовем измеримую функцию времени $t \to u(t)$ ($t \to \upsilon(t)$), удовлетворяющую при любом t ограничению $|u(t)| \le \mu$ ($\upsilon(t) \in Q^{(1)}$). Обозначим через $L^{(1)}$ совокупность всех допустимых программных управлений $\upsilon(\cdot)$ второго игрока.

Следуя известному подходу [1], в качестве допустимых позиционных стратегий первого игрока рассмотрим произвольные функции $(t, x) \to U(t, x)$, определенные на множестве Z с числовыми значениями, ограниченными по модулю числом μ. Символом $y^{(1)}(\cdot; t_0, x_0, U, \Delta, \upsilon(\cdot))$ обозначим пошаговое движение системы (1.1) из позиции (t_0, x_0), когда первый игрок применяет стратегию U в дискретной схеме управления [1] с шагом $\Delta > 0$, а за второго игрока реализуется управление $\upsilon(\cdot) \in L^{(1)}$.

Положим

$$\Gamma^{(1)}(t_0, x_0, U, \Delta) = \sup_{v(\cdot) \in L^{(1)}} \gamma^{(1)}(y^{(1)}(\vartheta; t_0, x_0, U, \Delta, v(\cdot)))$$

Величина $\Gamma^{(1)}(t_0, x_0, U, \Delta)$ имеет смысл гарантии, которую обеспечивает первому игроку стратегия U для начальной позиции (t_0, x_0) в дискретной схеме управления с шагом Δ. Наилучшая гарантия первого игрока для начальной позиции (t_0, x_0) определяется формулой

$$\Gamma^{(1)}(t_0, x_0) = \min_U \overline{\lim_{\Delta \to 0}} \Gamma^{(1)}(t_0, x_0, U, \Delta)$$

где $\overline{\lim}$ означает верхний предел. Было показано [1], что минимум по U достигается, т.е. существует оптимальная стратегия. При этом не исключается зависимость оптимальной стратегии первого игрока от начальной позиции (t_0, x_0).

Известно [1, 2], что наилучший гарантированный результат $\Gamma^{(1)}(t_0, x_0)$ совпадает с симметрично определенным наилучшим гарантированным результатом второго игрока. Поэтому величину $\Gamma^{(1)}(t_0, x_0)$ называют также значением функции цены в точке (t_0, x_0).

Ниже будет показано, что при некотором дополнительном условии в игре (1.1) существует универсальная оптимальная стратегия U^* первого игрока, устойчивая по отношению к погрешностям ее численного задания.

Универсальность означает, что стратегия U^* является оптимальной для всех начальных позиций $(t_0, x_0) \in Z$. Подчеркнем, что речь идет об универсальности в "жестком" смысле: рассматриваемые стратегии являются функциями лишь от аргументов t, x. В классе стратегий, зависящих дополнительно от некоторого "параметра точности", существование оптимальных универсальных стратегий для широкого класса задач установлено ранее [3].

Универсальная оптимальная стратегия $(t, x) \to U^*(t, x)$ будет определена при помощи "поверхности переключения" (ПП), разбивающей пространство игры Z на две части: по одну сторону управление u принимает значение $-\mu$, по другую $+\mu$. На самой ПП оптимальное значение управления u можно брать любым из промежутка $[-\mu, \mu]$.

Вопрос о существовании универсальных оптимальных стратегий в дифференциальных играх кратко обсуждался ([1], с. 48) и был заострен после статьи [4], в которой приведен пример игровой задачи, где универсальная оптимальная стратегия не существует. Было показано [5, 6], что для линейных дифференциальных игр вида (1.1) с выпуклой функцией платы существует универсальная оптимальная стратегия первого игрока и она может быть задана при помощи ПП. Устойчивость такой стратегии была обоснована [7] в предположении об ограниченности "скорости вращения" вектора $B^{(1)}(t)$.

Было установлено [8, 9], что если множество $Q^{(1)}$ представляет собой отрезок (т.е. управляющее воздействие v является скалярным), то существует универсальная оптимальная стратегия второго (максимизирующего) игрока, и она также может быть задана при помощи ПП. Однако такая стратегия не обладает свойством устойчивости.

В данной работе усиливаются результаты статьи [7]: ослаблено условие выпуклости функции платы и снято предположение об ограниченности "скорости вращения" вектора $B^{(1)}(t)$. Так же, как и в [7], принята следующая схема рассуждений. Ориентируясь на компьютерные построения, подменяем исходную дифференциальную игру удобной аппроксимирующей игрой, для которой можем построить некоторую u-стабильную [1, 2] функцию или даже функцию цены игры. Обрабатывая такую функцию, получаем ПП. Применяем найденную ПП в исходной дифференциальной игре для задания универсальной стратегии первого игрока. Оцениваем гарантию первого игрока, которую он обеспечивает, используя построенную универсальную стратегию.

В качестве следствия из такой оценки получаем результат, касающийся универсальной оптимальной устойчивой стратегии в игре (1.1).

Сделаем замечание о записи динамики линейной дифференциальной игры в виде (1.1). Особенность этой записи состоит в том, что фазовая переменная не входит в правую часть. Пусть линейная дифференциальная игра с фиксированным моментом окончания ϑ имеет вид

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{y}(t) + \mathbf{B}(t)u(t) + \mathbf{C}(t)\upsilon(t)$$
$$\mathbf{y}(t) \in R^m, \quad |u(t)| \le \mu, \quad \upsilon(t) \in Q^{(1)}; \quad \gamma(\mathbf{y}(\vartheta))$$

Предположим, что функция платы γ определяется лишь значениями некоторых n координат, $n \le m$, фазового вектора в момент окончания. Тогда переход к виду (1.1) осуществляется ([1], с. 160) при помощи стандартного преобразования $y(t) = X_{n,m}(\vartheta, t)\mathbf{y}(t)$, где $X_{n,m}(\vartheta, t)$ – матрица $n \times m$, составленная из соответствующих n строк фундаментальной матрицы Коши для системы $\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{y}(t)$. При этом

$$B^{(1)}(t) = X_{n,m}(\vartheta, t)\mathbf{B}(t), \quad C^{(1)}(t) = X_{n,m}(\vartheta, t)\mathbf{C}(t), \quad \gamma^{(1)}(y(\vartheta)) = \gamma(\mathbf{y}(\vartheta))$$

Аппроксимирующая игра. Наряду с игрой (1.1) рассмотрим еще одну дифференциальную игру

$$\begin{aligned} &\dot{y}(t) = B^{(2)}(t)u(t) + C^{(2)}(t)\upsilon(t) \\ &y(t) \in R^n, \quad |u(t)| \le \mu, \quad \upsilon(t) \in Q^{(2)}; \quad \gamma^{(2)}(y(\vartheta)) \end{aligned} \tag{1.2}$$

с фиксированным моментом окончания ϑ. Игру (1.2) будем интерпретировать как удобную для компьютерных вычислений аппроксимацию игры (1.1). Здесь $y(t)$ – фазовый вектор, функции $B^{(2)}$ и $C^{(2)}$ кусочно-непрерывны. Ограничение скалярного управляющего воздействия первого игрока такое же, как в игре (1.1), множество $Q^{(2)}$ – компакт в конечномерном пространстве. Предполагаем, что непрерывная функция платы $\gamma^{(2)} : R^n \to R$ удовлетворяет условию Липшица с константой λ и условию $\gamma^{(2)}(x) \to \infty$ при $|x| \to \infty$. Первый игрок минимизирует значение $\gamma^{(2)}(y(\vartheta))$, второй максимизирует.

Принадлежность той или иной величины к аппроксимирующей игре подчеркивается верхним индексом (2). Допустимые программные управления $u(\cdot)$, $\upsilon(\cdot)$ первого и второго игроков определим аналогично тому, как это сделано для игры (1.1). Обозначим через $L^{(2)}$ совокупность всех допустимых программных управлений $\upsilon(\cdot)$ второго игрока.

Будем считать, что в рамках аппроксимирующей игры (1.2) построена некоторая непрерывная u-стабильная функция $V^{(2)} : Z \to R$ с краевым условием

$$V^{(2)}(\vartheta, x) = \gamma^{(2)}(x), \quad x \in R^n$$

Согласно известному определению [1, 2], функцию $V^{(2)}$ называем u-стабильной, если для любой позиции $(t_*, x_*) \in Z$ по любому $t^* \in (t_*, \vartheta]$ и любому $\upsilon(\cdot) \in L^{(2)}$ найдется такое допустимое программное управление $u(\cdot)$ первого игрока, что для движения $y^{(2)}(t) = y^{(2)}(t; t_*, x_*, u(\cdot), \upsilon(\cdot))$ выполнено неравенство

$$V^{(2)}(t^*, y^{(2)}(t^*)) \le V^{(2)}(t_*, x_*)$$

Предположим, что функция $V^{(2)}$ удовлетворяет условию Липшица с константой λ по аргументу x равномерно по $t \in T$. Если $V^{(2)}$ – функция цены игры (1.2), то выполнение этого свойства вытекает из условия, наложенного на функцию $\gamma^{(2)}$.

Введем функцию $B^{(3)} : T \to R^n$, удовлетворяющую условию Липшица с константой β. Содержательно $B^{(3)}$ можно трактовать как липшицево приближение к функциям $B^{(1)}$ и $B^{(2)}$. Обозначим

$$\sigma = \max_{t \in T} \left| B^{(3)}(t) \right|$$

Ниже используется понятие квазивыпуклости скалярной функции. Как обычно, это означает выпуклость ее множеств уровня (множеств Лебега).

Условие А. При любом $t \in T$, для которого $B^{(3)}(t) \neq 0$, сужение функции $V^{(2)}(t, \cdot)$ на любую прямую в R^n, параллельную вектору $B^{(3)}(t)$, есть квазивыпуклая функция.

Замечание. Рассмотрим функцию, являющуюся сужением функции $V^{(2)}(t, \cdot)$ на некоторую прямую, параллельную вектору $B^{(3)}(t)$. Сформулированное условие означает требование нестрогой монотонности такой одномерной функции по обе стороны от точки ее глобального минимума.

Условие А выполнено, в частности, если при любом $t \in T$ является квазивыпуклой функция $V^{(2)}(t, \cdot)$. В случае, когда $V^{(2)}$ – функция цены аппроксимирующей игры (1.2), для обеспечения квазивыпуклости функций $V^{(2)}(t, \cdot)$, $t \in T$, достаточно потребовать квазивыпуклость функции платы $\gamma^{(2)}$.

Поверхность переключения. Многозначная функция $\mathbf{U}^0$. Для $(t, x) \in Z$ положим

$$\mathcal{A}(t, x) = \{z \in R^n : z = x + \alpha B^{(3)}(t),\ \alpha \in R\}$$

Если $B^{(3)}(t) \neq 0$, то множество $\mathcal{A}(t, x)$ – прямая, проходящая в пространстве R^n через точку x параллельно вектору $B^{(3)}(t)$. В случае $B^{(3)}(t) = 0$ множество $\mathcal{A}(t, x)$ является вырожденным и совпадает с точкой x. Не выделяя отдельно вырожденный случай, будем всегда называть множество $\mathcal{A}(t, x)$ прямой.

Пусть

$$\mathcal{V}(t, x) = \min_{z \in \mathcal{A}(t, x)} V^{(2)}(t, z), \quad (t, x) \in Z$$

Минимум достигается, поскольку функция $V^{(2)}(t, \cdot)$ непрерывна и уходит в бесконечность при $|x| \to \infty$. В силу условия А множество точек минимума представляет собой отрезок. Если $B^{(3)}(t) = 0$, то $\mathcal{V}(t, x) = V^{(2)}(t, x)$, $x \in R^n$.

Пусть далее для всех $t \in T$

$$\Pi(t) = \{x \in R^n : V^{(2)}(t, x) = \mathcal{V}(t, x)\}$$

$$\Pi_-(t) = \{x \in R^n : x + \alpha B^{(3)}(t) \notin \Pi(t),\ \forall \alpha \geq 0\}$$

$$\Pi_+(t) = \{x \in R^n : x + \alpha B^{(3)}(t) \notin \Pi(t),\ \forall \alpha \leq 0\}$$

Множества $\Pi_-(t)$, $\Pi_+(t)$ находятся в пространстве R^n по разные стороны относительно множества $\Pi(t)$. Из условия А следует, что при любом $(t, x) \in Z$ функция $V^{(2)}(t, \cdot)$ не возрастает (не убывает) в направлении вектора $B^{(3)}(t)$ на пересечении прямой $\mathcal{A}(t, x)$ с множеством $\Pi_+(t)$ ($\Pi_-(t)$).

Определим на Z многозначную функцию

$$\mathbf{U}^0(t, x) = \begin{cases} \{-\mu\}, & x \in \Pi_-(t) \\ \{\mu\}, & x \in \Pi_+(t) \\ [-\mu, \mu], & x \in \Pi(t) \end{cases}$$

Функция $\mathbf{U}^0(t, \cdot)$ принимает крайние значения из отрезка $[-\mu, \mu]$ в множествах $\Pi_-(t)$, $\Pi_+(t)$ и "переключается" с одного крайнего значения на другое на множестве $\Pi(t)$. Множество

$$\Pi = \{(t, x) \in Z : x \in \Pi(t)\}$$

есть замкнутое односвязное множество, разделяющее Z на две части. Хотя множество Π не всегда является в общепринятом смысле поверхностью, тем не менее для наглядности будем называть его поверхностью переключения управляющего воздействия первого игрока.

Множества $\Pi^r(t)$. *Многозначная функция* $\mathbf{U}^r$. Продолжим введение обозначений для формулировки основного результата.

Пусть $r \geq 0$. В случае $B^{(3)}(t) \neq 0$ положим

$$\Pi^r(t) = \left\{ x \in R^n : x = z + \alpha \frac{B^{(3)}(t)}{|B^{(3)}(t)|}, \quad z \in \Pi(t), \quad |\alpha| \leq r \right\}$$

Множество $\Pi^r(t)$ – геометрическое r-расширение множества $\Pi(t)$. Расширение происходит с использованием вектора $B^{(3)}(t)$. Если $B^{(3)}(t) = 0$, то примем $\Pi^r(t) = \Pi(t) = R^n$.

Введем множества

$$\Pi^r_-(t) = \{x \in R^n : x + \alpha B^{(3)}(t) \notin \Pi^r(t), \ \forall \alpha \geq 0\}$$

$$\Pi^r_+(t) = \{x \in R^n : x + \alpha B^{(3)}(t) \notin \Pi^r(t), \ \forall \alpha \leq 0\}$$

Множество $\Pi^r_-(t)$ ($\Pi^r_+(t)$) представляет собой часть пространства R^n, расположенную относительно $\Pi^r(t)$ по (противоположно) направлению вектора $B^{(3)}(t)$. Очевидно, что $\Pi^r_-(t) \subset \Pi_-(t)$, $\Pi^r_+(t) \subset \Pi_+(t)$. При $r = 0$ имеем $\Pi^r(t) = \Pi(t)$, $\Pi^r_-(t) = \Pi_-(t)$, $\Pi^r_+(t) = \Pi_+(t)$.

Определим на Z многозначную функцию

$$\mathbf{U}^r(t, x) = \begin{cases} \{-\mu\}, & x \in \Pi^r_-(t) \\ \{\mu\}, & x \in \Pi^r_+(t) \\ [-\mu, \mu], & x \in \Pi^r(t) \end{cases}$$

Формулировка основного результата. Для любых моментов t_*, t^* из промежутка T положим

$$\chi(t_*, t^*) = \mu \int_{t_*}^{t^*} \kappa(t)dt + \int_{t_*}^{t^*} m(t)dt$$

$$\kappa(t) = |B^{(1)}(t) - B^{(3)}(t)| + |B^{(2)}(t) - B^{(3)}(t)|$$

$$m(t) = \max_{l \in R^n,\ |l| \leq 1} \left[\max_{q \in Q^{(1)}} l' C^{(1)}(t) q - \max_{q \in Q^{(2)}} l' C^{(2)}(t) q \right]$$

Величина $\chi(t_*, t^*)$ характеризует в интегральном смысле различие функций $B^{(1)}$, $B^{(2)}$, $B^{(3)}$, а также функций $C^{(1)}$, $C^{(2)}$ и множеств $Q^{(1)}$, $Q^{(2)}$. Штрих означает транспонирование.

Предполагая, что начальные позиции системы (1.1) принадлежат некоторому компактному множеству K в пространстве игры Z, символом F обозначим компактное множество в R^n, оценивающее сверху множество возможных состояний системы (1.1) в момент ϑ. Примем

$$\|\gamma^{(1)} - \gamma^{(2)}\|_F = \max_{x \in F} |\gamma^{(1)}(x) - \gamma^{(2)}(x)|$$

Далее будет доказано следующее утверждение.

Теорема. Пусть выполнены условия, наложенные на системы (1.1), (1.2), а также на функции $V^{(2)}$ и $B^{(3)}$, включая условие А. Пусть $r \ge 0$, $\Delta > 0$. Тогда для любой стратегии U первого игрока, такой, что $U(t, x) \in \mathbf{U}^r(t, x)$, $(t, x) \in Z$, и любой начальной позиции $(t_0, x_0) \in K$ справедлива оценка

$$\begin{gathered}\Gamma^{(1)}(t_0, x_0, U, \Delta) \le V^{(2)}(t_0, x_0) + \Lambda(t_0, r, \Delta) + \|\gamma^{(1)} - \gamma^{(2)}\|_F \\ \Lambda(t_0, r, \Delta) = 2\lambda\sqrt{(2\sigma\mu\Delta + r)\beta\mu}(\vartheta - t_0) + 4\lambda\sigma\mu\Delta + \lambda r + \lambda\chi(t_0, \vartheta)\end{gathered} \tag{1.3}$$

Сделаем некоторые пояснения. Функция $V^{(2)}$, обладающая свойством u-стабильности, предполагается построенной в рамках аппроксимирующей игры. Поэтому в правой части оценки (1.3) стоит известное значение $V^{(2)}(t_0, x_0)$. Различие динамик исходной и аппроксимирующей игр, а также отличие функции $B^{(3)}$ от функций $B^{(1)}$ и $B^{(2)}$ учитываются величиной $\chi(t_0, \vartheta)$. Слагаемое $\|\gamma^{(1)} - \gamma^{(2)}\|_F$ характеризует различие функций платы. Множества переключения $\Pi^r(t)$, $t \in T$, для многозначной функции $\mathbf{U}^r$ определяются через построения, осуществляемые при помощи функций $V^{(2)}$ и $B^{(3)}$.

В целом, правая часть соотношения (1.3) оценивает гарантию первого игрока в игре (1.1), когда он использует с шагом Δ произвольную однозначную позиционную стратегию U, являющуюся выборкой из многозначной функции $\mathbf{U}^r$.

Поскольку $\Pi(t) \subset \Pi^r(t)$, $t \in T$, то вне множества

$$\Pi^r = \{(t, x) \in Z : x \in \Pi^r(t)\}$$

стратегия U совпадает с функцией $\mathbf{U}^0$, задаваемой при помощи поверхности П. Пусть U^0 – некоторая однозначная выборка многозначной функции $\mathbf{U}^0$. Из сказанного выше получаем, что действие стратегии U^0, осуществляемое с ошибками в множестве Π^r, также оценивается правой частью соотношения (1.3). Поэтому можно говорить об устойчивости стратегии U^0 по отношению к неточностям построения поверхности П.

Допустим, что аппроксимирующая игра совпадает с исходной и $B^{(3)} = B^{(1)}$. Тогда

$$\chi(t_0, \vartheta) = 0, \quad \|\gamma^{(1)} - \gamma^{(2)}\|_F = 0$$

Пусть, кроме того, в качестве u-стабильной функции $V^{(2)}$ используется функция цены $\mathbf{\Gamma}^{(1)}$ исходной игры и выполнено условие А. В силу оценки (1.3) получим

$$\mathbf{\Gamma}^{(1)}(t_0, x_0, U^0, \Delta) \le \mathbf{\Gamma}^{(1)}(t_0, x_0) + 2\lambda\sqrt{(2\sigma\mu\Delta + r)\beta\mu}(\vartheta - t_0) + 4\lambda\sigma\mu\Delta + \lambda r$$

Стало быть, если функция $B^{(1)}$, а также функция платы $\gamma^{(1)}$ удовлетворяют условию Липшица, $\gamma^{(1)}(x) \to \infty$ при $|x| \to \infty$, если выполнено условие А для функции цены $\mathbf{\Gamma}^{(1)}$ в паре с функцией $B^{(1)}$ и поверхность переключения П строится на основе функции $\mathbf{\Gamma}^{(1)}$, то в качестве универсальной устойчивой оптимальной стратегии U^* в игре (1.1) можно взять стратегию U^0.

2. Вспомогательные утверждения. Для компактных множеств X, Y в R^n пусть

$$d(X, Y) = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} |x - y|$$

– хаусдорфово отклонение множества X от множества Y. Положим

$$G_\upsilon^{(i)}(t_*, t^*) = \bigcup_{\upsilon(\cdot) \in L^{(i)}} \int_{t_*}^{t^*} C^{(i)}(t)\upsilon(t)dt, \quad i = 1, 2$$

Множества $G_\upsilon^{(i)}(t_*, t^*)$ – выпуклые компакты. Справедлива оценка

$$d(G_\upsilon^{(1)}(t_*, t^*), G_\upsilon^{(2)}(t_*, t^*)) \le \int_{t_*}^{t^*} m(t)dt \tag{2.1}$$

Символом $G^{(2)}(t;\ t_*,\ x_*)$ обозначим множество достижимости системы (1.2) в момент t при начальном состоянии x_* в момент t_* и при переборе всех допустимых программных управлений $u(\cdot)$, $\upsilon(\cdot)$ на промежутке $[t_*,\ t]$. Положим

$$\mathbf{G}^{(2)}(t;\ t_*,\ x_*) = G^{(2)}(t;\ t_*,\ x_*) + B(2(t-t_*)\sigma\mu)$$

Здесь $B(r)$ – шар радиуса r в R^n.

Для $t \in T$ и $c \in R$ положим

$$W_c^{(2)}(t) = \{x \in R^n : V^{(2)}(t, x) \le c\}, \quad W_c^{(2)} = \{(t, x) \in Z : x \in W_c^{(2)}(t)\}$$

Лемма 1. Пусть $(t_*, x_*) \in Z$, $\delta > 0$, $t_* + \delta \le \vartheta$. Пусть $y^{(1*)}(\cdot)$ – движение системы (1.1) в силу допустимых программных управлений $u(\cdot)$, $\upsilon(\cdot)$, выходящее в момент t_* из точки x_*. Тогда справедлива оценка

$$\mathcal{V}(t_* + \delta, y^{(1*)}(t_* + \delta)) \le V^{(2)}(t_*, x_*) + \lambda\beta\mu\delta^2 + \lambda\chi(t_*, t_* + \delta) \tag{2.2}$$

Доказательство. По заданному в условии леммы управлению $\upsilon(\cdot) \in L^{(1)}$ определим в множестве $G_\upsilon^{(1)}(t_*, t_* + \delta)$ точку

$$g = \int_{t_*}^{t_*+\delta} C^{(1)}(t)\upsilon(t)dt$$

Пусть $\bar g$ – ближайшая к ней точка множества $G_\upsilon^{(2)}(t_*, t_* + \delta)$. Выберем $\bar\upsilon(\cdot) \in L^{(2)}$ так, что

$$\bar g = \int_{t_*}^{t_*+\delta} C^{(2)}(t)\bar\upsilon(t)dt$$

Используя u-стабильность функции $V^{(2)}$, по управлению $\bar\upsilon(\cdot)$ найдем такое $\bar u(\cdot)$, что для движения $y^{(2*)}(t) = y^{(2*)}(t;\ t_*,\ x_*,\ \bar u(\cdot),\ \bar\upsilon(\cdot))$, выходящего в момент t_* из точки x_*, выполнено включение

$$y^{(2*)}(t_* + \delta) \in W_{c_*}^{(2)}(t_* + \delta) \left(c_* = V^{(2)}(t_*, x_*)\right) \tag{2.3}$$

Обозначим

$$J_1 = \int_{t_*}^{t_*+\delta} B^{(1)}(t)u(t)dt - \int_{t_*}^{t_*+\delta} B^{(2)}(t)\bar u(t)dt$$

$$J_2 = \int_{t_*}^{t_*+\delta} C^{(1)}(t)\upsilon(t)dt - \int_{t_*}^{t_*+\delta} C^{(2)}(t)\bar\upsilon(t)dt$$

Тогда

$$y^{(1*)}(t_* + \delta) - y^{(2*)}(t_* + \delta) = J_1 + J_2 \tag{2.4}$$

Имеем

$$\begin{aligned} J_1 = &\int_{t_*}^{t_*+\delta} (B^{(1)}(t) - B^{(3)}(t))u(t)dt - \int_{t_*}^{t_*+\delta} (B^{(2)}(t) - B^{(3)}(t))\bar u(t)dt + \\ &+ \int_{t_*}^{t_*+\delta} \left(B^{(3)}(t) - B^{(3)}(t_* + \delta)\right)(u(t) - \bar u(t))dt + B^{(3)}(t_* + \delta)\int_{t_*}^{t_*+\delta} (u(t) - \bar u(t))dt \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$J_2 = g - \bar{g} \tag{2.6}$$

Символом π обозначим оператор ортогонального проектирования пространства R^n на подпространство, ортогональное вектору $B^{(3)}(t_* + \delta)$.

Принимая во внимание, что управления $u(t)$ и $\bar{u}(t)$ ограничены по модулю числом μ, функция $B^{(3)}$ удовлетворяет условию Липшица с константой β и $\pi B^{(3)}(t_* + \delta) = 0$, из соотношения (2.5) получим

$$|\pi J_1| \le \mu \int\limits_{t_*}^{t_* + \delta} \kappa(t)dt + \beta\mu\delta^2$$

Учитывая соотношения (2.6) и (2.1), имеем

$$|\pi J_2| = |\pi g - \pi\bar{g}| \le |g - \bar{g}| \le \int\limits_{t_*}^{t_* + \delta} m(t)dt$$

Окончательно получаем

$$\left|\pi y^{(1*)}(t_* + \delta) - \pi y^{(2*)}(t_* + \delta)\right| \le \beta\mu\delta^2 + \chi(t_*, t_* + \delta) \tag{2.7}$$

Пусть $\tilde{x}$ – ближайшая к множеству $W^{(2)}_{c_*}(t_* + \delta)$ точка на прямой $\mathcal{A}(t_* + \delta, y^{(1*)}(t_* + \delta))$. Из включения (2.3) и определения оператора π следует, что

$$d(\{\tilde{x}\}, W^{(2)}_{c_*}(t_* + \delta)) \le \left|\pi\tilde{x} - \pi y^{(2*)}(t_* + \delta)\right| = \left|\pi y^{(1*)}(t_* + \delta) - \pi y^{(2*)}(t_* + \delta)\right|$$

Поэтому

$$V^{(2)}(t_* + \delta, \tilde{x}) \le c_* + \lambda\left|\pi y^{(1*)}(t_* + \delta) - \pi y^{(2*)}(t_* + \delta)\right| =$$
$$= V^{(2)}(t_*, x_*) + \lambda\left|\pi y^{(1*)}(t_* + \delta) - \pi y^{(2*)}(t_* + \delta)\right|$$

Учитывая неравенство (2.7), заключаем, что требуемое неравенство (2.2) вытекает из того, что

$$\mathcal{V}(t_* + \delta, y^{(1*)}(t_* + \delta)) \le V^{(2)}(t_* + \delta, \tilde{x})$$

Лемма 2. Пусть $(t_*, x_*) \in Z$, $\delta > 0$, $t_* + \delta \le \vartheta$. Пусть $y^{(1*)}(\cdot)$ – движение системы (1.1) в силу постоянного управления $u(t) \equiv \mu$ ($u(t) \equiv -\mu$) и некоторого $\upsilon(\cdot) \in L^{(1)}$, выходящее в момент t_* из точки x_*. Предположим, что

$$\mathbf{G}^{(2)}(t_* + \delta; t_*, x_*) \subset \Pi_+(t_* + \delta) \ (\mathbf{G}^{(2)}(t_* + \delta; t_*, x_*) \subset \Pi_-(t_* + \delta))$$

Тогда справедлива оценка

$$V^{(2)}(t_* + \delta, y^{(1*)}(t_* + \delta)) \le V^{(2)}(t_*, x_*) + \lambda\beta\mu\delta^2 + \lambda\chi(t_*, t_* + \delta) \tag{2.8}$$

Доказательство. Так же, как и в начальной части доказательства леммы 1, по заданному $\upsilon(\cdot) \in L^{(1)}$ выберем управление $\bar{\upsilon}(\cdot) \in L^{(2)}$. Далее, используя u-стабильность функции $V^{(2)}$, подберем $\bar{u}(\cdot)$ так, чтобы возникающее в силу $\bar{u}(\cdot)$, $\bar{\upsilon}(\cdot)$ движение $y^{(2*)}(\cdot)$ удовлетворяло условиям

$$y^{(2*)}(t_*) = x_*, \quad y^{(2*)}(t_* + \delta) \in W^{(2)}_{c_*}(t_* + \delta) \quad (c_* = V^{(2)}(t_*, x_*)) \tag{2.9}$$

Положим

$$\hat{z} = y^{(2*)}(t_* + \delta) + B^{(3)}(t_* + \delta) \int\limits_{t_*}^{t_* + \delta} (u(t) - \bar{u}(t))dt$$

Покажем, что

$$V^{(2)}(t_* + \delta, \hat{z}) \le V^{(2)}(t_* + \delta, y^{(2*)}(t_* + \delta)) \tag{2.10}$$

Рассмотрим случай

$$u(t) \equiv \mu, \quad \mathbf{G}^{(2)}(t_* + \delta;\, t_*, x_*) \subset \Pi_+(t_* + \delta)$$

В силу последнего вложения получаем

$$y^{(2*)}(t_* + \delta) \in \Pi_+(t_* + \delta), \quad \hat{z} \in \Pi_+(t_* + \delta) \tag{2.11}$$

Поскольку $\hat{z} \in \mathscr{A}(t_* + \delta, y^{(2*)}(t_* + \delta))$ и $u(t) \ge \bar{u}(t)$, $t \in [t_*, t_* + \delta]$, то векторы $\hat{z} - y^{(2*)}(t_* + \delta)$ и $B^{(3)}(t_* + \delta)$ сонаправлены. Учитывая условие А, отсюда выводим неравенство (2.10).

В случае

$$u(t) \equiv -\mu, \quad \mathbf{G}^{(2)}(t_* + \delta;\, t_*, x_*) \subset \Pi_-(t_* + \delta)$$

неравенство (2.10) доказывается аналогично, только теперь надо воспользоваться соотношениями, отличающимися от (2.11) заменой индекса плюс на индекс минус, и неравенством $u(t) \le \bar{u}(t)$, $t \in [t_*, t_* + \delta]$.

Поскольку правая часть неравенства (2.10) не превышает c_*, получаем включение $\hat{z} \in W^{(2)}_{c_*}(t_* + \delta)$. Стало быть,

$$d(\{y^{(1*)}(t_* + \delta)\}, W^{(2)}_{c_*}(t_* + \delta)) \le |y^{(1*)}(t_* + \delta) - \hat{z}|$$

Используя определение вектора $\hat{z}$ и равенство (2.4), имеем

$$y^{(1*)}(t_* + \delta) - \hat{z} = J_1 + J_2 - B^{(3)}(t_* + \delta) \int\limits_{t_*}^{t_* + \delta} (u(t) - \bar{u}(t))dt$$

Учитывая равенства (2.5) и (2.6), условие Липшица для функции $B^{(3)}$, правило выбора управления $\bar{\upsilon}(\cdot)$ и неравенство (2.1), получим

$$|y^{(1*)}(t_* + \delta) - \hat{z}| \le \beta\mu\delta^2 + \chi(t_*, t_* + \delta)$$

Требуемое неравенство (2.8) вытекает из того, что

$$V^{(2)}(t_* + \delta, y^{(1*)}(t_* + \delta)) \le V^{(2)}(t_* + \delta, \hat{z}) + \lambda|y^{(1*)}(t_* + \delta) - \hat{z}|$$

$$V^{(2)}(t_* + \delta, \hat{z}) \le V^{(2)}(t_*, x_*)$$

Лемма 3. **Пусть $(\bar{t}, \bar{x}) \in Z$, $\hat{t} \in (\bar{t}, \vartheta]$. Пусть $y^{(1*)}(\cdot)$ – движение системы (1.1) в силу постоянного управления $u(t) \equiv \mu$ ($u(t) \equiv -\mu$) и некоторого $\upsilon(\cdot) \in L^{(1)}$, выходящее в момент $\bar{t}$ из точки $\bar{x}$. Предположим, что $y^{(1*)}(t) \in \Pi_+(t)$ ($y^{(1*)}(t) \in \Pi_-(t)$) при всех $t \in [\bar{t}, \hat{t}]$. Тогда справедлива оценка**

$$V^{(2)}(\hat{t}, y^{(1*)}(\hat{t})) \le V^{(2)}(\bar{t}, \bar{x}) + \lambda\chi(\bar{t}, \hat{t}) \tag{2.12}$$

Доказательство. Разобьем промежуток $[\bar{t}, \hat{t}]$ моментами $t_1, t_2, \ldots, t_s$ ($t_1 = \bar{t}$, $t_s = \hat{t}$) с шагом δ так, чтобы для любого $k = 1, 2, \ldots, s - 1$ было выполнено соотношение

$$\mathbf{G}^{(2)}(t_{k+1}, t_k, y^{(1*)}(t_k)) \subset \Pi_+(t_{k+1}) \;\; (\mathbf{G}^{(2)}(t_{k+1}, t_k, y^{(1*)}(t_k)) \subset \Pi_-(t_{k+1}))$$

Это можно сделать, опираясь на предположение о расположении $y^{(1*)}(t)$ относительно $\Pi(t)$. В силу леммы 2 имеем оценку

$$V^{(2)}(t_{k+1}, y^{(1*)}(t_{k+1})) \le V^{(2)}(t_k, y^{(1*)}(t_k)) + \lambda\beta\mu\delta^2 + \lambda\chi(t_k, t_{k+1})$$

Применяя ее последовательно для $k = 1, 2, \ldots, s-1$, доказываем неравенство, отличающееся от (2.12) наличием в правой части слагаемого $\lambda\beta\mu\delta(\hat{t} - \bar{t})$. Переходя к пределу при $\delta \to 0$, получим оценку (2.12).

Лемма 4. Пусть $(\bar{t}, \bar{x}) \in Z$, $\hat{t} \in (\bar{t}, \vartheta]$. Пусть $y^{(1*)}(\cdot)$ – движение системы (1.1) в силу допустимых программных управлений $u(\cdot)$, $\upsilon(\cdot)$, выходящее в момент $\bar{t}$ из точки $\bar{x}$. Тогда справедлива оценка

$$V^{(2)}(\hat{t}, y^{(1*)}(\hat{t})) \le V^{(2)}(\bar{t}, \bar{x}) + 2\lambda\mu\sigma(\hat{t} - \bar{t}) + \lambda\chi(\bar{t}, \hat{t}) \tag{2.13}$$

Доказательство. Предположим, что $(t_*, x_*) \in Z$, $\delta > 0$, $t_* + \delta \le \vartheta$. Копируя начальную часть доказательства леммы 1, по заданному $\upsilon(\cdot) \in L^{(1)}$ выберем экстремальное управление $\bar{\upsilon}(\cdot) \in L^{(2)}$. Затем подберем $\bar{u}(\cdot)$ так, чтобы возникающее в силу $\bar{u}(\cdot)$, $\bar{\upsilon}(\cdot)$ движение $y^{(2*)}(\cdot)$ удовлетворяло условиям (2.9).

Учитывая равенства (2.4)–(2.6), условие Липшица для функции $B^{(3)}$, неравенство $|B^{(3)}(t_* + \delta)| \le \sigma$, правило выбора управления $\bar{\upsilon}(\cdot)$ и неравенство (2.1), получим

$$\left|y^{(1*)}(t_* + \delta) - y^{(2*)}(t_* + \delta)\right| \le \beta\mu\delta^2 + 2\sigma\mu\delta + \chi(t_*, t_* + \delta)$$

Отсюда в силу соотношений

$$V^{(2)}(t_* + \delta, y^{(1*)}(t_* + \delta)) \le V^{(2)}(t_* + \delta, y^{(2*)}(t_* + \delta)) + \lambda\left|y^{(1*)}(t_* + \delta) - y^{(2*)}(t_* + \delta)\right|$$

$$V^{(2)}(t_* + \delta, y^{(2*)}(t_* + \delta)) \le V^{(2)}(t_*, x_*)$$

выводим неравенство

$$V^{(2)}(t_* + \delta, y^{(1*)}(t_* + \delta)) \le V^{(2)}(t_*, x_*) + \lambda\beta\mu\delta^2 + 2\lambda\sigma\mu\delta + \lambda\chi(t_*, t_* + \delta) \tag{2.14}$$

Разбивая, как в доказательстве леммы 3, промежуток $[\bar{t}, \hat{t}]$ с шагом δ, используем на каждом шаге оценку (2.14). Переходя к пределу при $\delta \to 0$, получим оценку (2.13).

3. Доказательство теоремы. Зафиксируем число $r \ge 0$. Рассмотрим движение $y^{(1)}(\cdot)$ системы (1.1) из позиции $(t_0, x_0) \in K$, $t_0 < \vartheta$, в силу некоторой стратегии $U \subset \mathbf{U}^r$ первого игрока с шагом Δ дискретной схемы управления и некоторого $\upsilon(\cdot) \in L^{(1)}$.

Для записи изменения функции $V^{(2)}$ вдоль движения $y^{(1)}(\cdot)$ на промежутке $[t_*, t^*]$ введем обозначение

$$\mathrm{Var}(V^{(2)}, [t_*, t^*]) = V^{(2)}(t^*, y^{(1)}(t^*)) - V^{(2)}(t_*, y^{(1)}(t_*))$$

1°. Пусть $\beta > 0$, $\sigma > 0$. Положим

$$h = \sqrt{(2\sigma\mu\Delta + r)/(\beta\mu)} \tag{3.1}$$

А. Выделим вдоль движения $y^{(1)}(\cdot)$ "петли", связанные с заходом в множества $\Pi^r(t)$. Определим также свободные промежутки.

Двигаясь от t_0 к ϑ, находим первый момент t, когда $y^{(1)}(t) \in \Pi^r(t)$. Такой момент назовем моментом начала первой петли и обозначим t_1. Далее отмечаем момент $\tilde{t}_1$ окончания первой петли как последний момент t на промежутке $[t_1, t_1 + h] \cap T$, в который $y^{(1)}(t) \in \Pi^r(t)$. Момент $\tilde{t}_1$, в частности, может совпадать с t_1.

В качестве момента t_2 начала второй петли возьмем первый момент $t \in [t_1 + h, \vartheta]$, когда $y^{(1)}(t) \in \Pi^r(t)$. Затем отмечаем момент $\tilde{t}_2$ окончания второй петли как последний момент t на промежутке $[t_2, t_2 + h] \cap T$, когда $y^{(1)}(t) \in \Pi^r(t)$.

Продолжая такой процесс, получим набор петель на $[t_0, \vartheta]$.

Удаляем из $[t_0, \vartheta]$ внутренность промежутков построенных петель. Получаем упорядоченный набор отрезков. Каждый из них называем свободным промежутком, он может быть вырожденным, т.е. состоящим из одной точки.

Если на $[t_0, \vartheta]$ петли отсутствуют, то считаем $[t_0, \vartheta]$ свободным промежутком.

Б. Пусть $[\tau, \eta]$ – некоторый свободный промежуток. Покажем, что приращение функции $V^{(2)}$ на нем описывается неравенством

$$\operatorname{Var}_f(V^{(2)}, [\tau, \eta]) \le 2\lambda\sigma\mu\Delta + \lambda\chi(\tau, \eta) \tag{3.2}$$

Нижний индекс f подчеркивает, что изменение функции $V^{(2)}$ подсчитывается на свободном промежутке.

Вдоль движения $y^{(1)}(\cdot)$ реализуется некоторое управление $u(\cdot)$. Значение $u(t)$ назовем "правильным", если $u(t) = \mu$ $(u(t) = -\mu)$ при $y^{(1)}(t) \in \Pi_+(t)$ $(y^{(1)}(t) \in \Pi_-(t))$.

На внутренности свободного промежутка движение $y^{(1)}(\cdot)$ идет по одну сторону от множества Π^r, а стало быть, и по одну сторону от поверхности Π. Поэтому при $\Delta \le \eta - \tau$ управление $u(t)$ является правильным на $[\tau + \Delta, \eta)$ и произвольно разве лишь на $[\tau, \tau + \Delta)$. В силу леммы 3 получим

$$\operatorname{Var}(V^{(2)}, [\tau + \Delta, \eta]) \le \lambda\chi(\tau + \Delta, \eta)$$

а в силу леммы 4

$$\operatorname{Var}(V^{(2)}, [\tau, \tau + \Delta]) < 2\lambda\mu\sigma\Delta + \lambda\chi(\tau, \tau + \Delta)$$

Складывая последние два неравенства, приходим к оценке (3.2).

Если $\Delta > \eta - \tau$, то применяем лемму 4 ко всему промежутку $[\tau, \eta]$. Вновь получаем оценку (3.2).

В. Будем говорить, что $[\tau, \eta]$ – промежуток вида E_1, если он составлен из некоторой петли $[t_i, \tilde{t}_i]$ и примыкающего к ней справа свободного промежутка. Промежуток $[\tau, \eta]$ вида E_1 при дополнительном условии $\tau + h \le \eta$ будем называть промежутком вида E_2.

Оценим приращение функции $V^{(2)}$ вдоль движения $y^{(1)}(\cdot)$ на промежутке вида E_1.

Рассмотрим промежуток петли $[t_i, \tilde{t}_i]$. Применяя лемму 1 при $\delta = \tilde{t}_i - t_i$, имеем

$$\mathcal{V}(\tilde{t}_i, y^{(1)}(\tilde{t}_i)) \le V^{(2)}(t_i, y^{(1)}(t_i)) + \lambda\beta\mu(\tilde{t}_i - t_i)^2 + \lambda\chi(t_i, \tilde{t}_i)$$

Поскольку $\tilde{t}_i - t_i \le h$, то второе слагаемое в правой части можно заменить на $\lambda\beta\mu h(\tilde{t}_i - t_i)$. Учитывая неравенство

$$V^{(2)}(\tilde{t}_i, y^{(1)}(\tilde{t}_i)) \le \mathcal{V}(\tilde{t}_i, y^{(1)}(\tilde{t}_i)) + \lambda r$$

приходим к соотношению

$$\operatorname{Var}(V^{(2)}, [t_i, \tilde{t}_i]) \le \lambda\beta\mu h(\tilde{t}_i - t_i) + \lambda r + \lambda\chi(t_i, \tilde{t}_i) \tag{3.3}$$

На свободном промежутке $[\tilde{t}_i, \eta]$ имеем неравество (3.2) при $\tau = \tilde{t}_i$, объединяя которое с неравенством (3.3) с учетом неравенства $\tilde{t}_i - t_i \le \eta - \tau$, получим

$$\operatorname{Var}_1(V^{(2)}, [\tau, \eta]) \le \lambda\beta\mu h(\eta - \tau) + 2\lambda\sigma\mu\Delta + \lambda r + \lambda\chi(\tau, \eta) \tag{3.4}$$

Нижний индекс 1 подчеркивает, что подсчет приращения функции $V^{(2)}$ происходит на промежутке вида E_1.

Перейдем к оценке приращения Var_2 функции $V^{(2)}$ вдоль движения $y^{(1)}(\cdot)$ на промежутке вида E_2. Поскольку в этом случае $\eta - \tau \geq h$, то из соотношения (3.1) следует неравенство

$$2\lambda\sigma\mu\Delta + \lambda r \leq \lambda\beta\mu h(\eta - \tau)$$

Привлекая неравенство (3.4), получим

$$\mathrm{Var}_2(V^{(2)}, [\tau, \eta]) \leq 2\lambda\beta\mu h(\eta - \tau) + \lambda\chi(\tau, \eta) \tag{3.5}$$

Г. Рассмотрим промежуток $[t_0, \vartheta]$. Представим его составленным из первого свободного промежутка $[t_0, t_1]$, конечного числа промежутков вида E_2, идущих друг за другом от момента t_1 до некоторого момента t^* (их суммарный промежуток есть $[t_1, t^*]$), и остаточного промежутка $[t^*, \vartheta]$ вида E_1. Применяя последовательно оценки (3.2), (3.5) и (3.4), имеем

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(V^{(2)}, [t_0, \vartheta]) &= \mathrm{Var}_f(V^{(2)}, [t_0, t_1]) + \mathrm{Var}(V^{(2)}, [t_1, t^*]) + \\ &+ \mathrm{Var}_1(V^{(2)}, [t^*, \vartheta]) \leq 2\lambda\sigma\mu\Delta + 2\lambda\beta\mu h(t^* - t_1) + \\ &+ \lambda\beta\mu h(\vartheta - t^*) + 2\lambda\sigma\mu\Delta + \lambda r + \lambda\chi(t_0, \vartheta) \leq \\ &\leq 2\lambda\beta\mu h(\vartheta - t_0) + 4\lambda\sigma\mu\Delta + \lambda r + \lambda\chi(t_0, \vartheta)\end{aligned}$$

Подставляя h по формуле (3.1), получим

$$\mathrm{Var}(V^{(2)}, [t_0, \vartheta]) \leq \Lambda(t_0, r, \Delta) \tag{3.6}$$

2°. Пусть $\beta = 0$, $\sigma \geq 0$. Двигаясь от t_0 к ϑ, находим первый момент t, когда $y^{(1)}(t) \in \Pi^r(t)$. Обозначим его t_1. Пусть $\hat{t}$ – последний на $[t_0, \vartheta]$ момент, когда $y^{(1)}(t) \in \Pi^r(t)$. Имеем

$$y^{(1)}(t) \notin \Pi^r(t), \quad t \in [t_0, t_1) \cup (\hat{t}, \vartheta]$$

Для промежутков $[t_0, t_1]$ и $[\hat{t}, \vartheta]$, опираясь на леммы 3, 4 (так же, как при выводе неравенства (3.2)), получим

$$\mathrm{Var}(V^{(2)}, [t_0, t_1]) \leq 2\lambda\sigma\mu\Delta + \lambda\chi(t_0, t_1) \tag{3.7}$$

$$\mathrm{Var}(V^{(2)}, [\hat{t}, \vartheta]) \leq 2\lambda\sigma\mu\Delta + \lambda\chi(\hat{t}, \vartheta) \tag{3.8}$$

Для промежутка $[t_1, \hat{t}]$, обращаясь к лемме 1 при $\beta = 0$, имеем

$$\mathcal{V}(\hat{t}, y^{(1)}(\hat{t})) \leq V^{(2)}(t_1, y^{(1)}(t_1)) + \lambda\chi(t_1, \hat{t})$$

и поэтому, учитывая неравенство

$$V^{(2)}(\hat{t}, y^{(1)}(\hat{t})) \leq \mathcal{V}(\hat{t}, y^{(1)}(\hat{t})) + \lambda r$$

приходим к оценке

$$\mathrm{Var}(V^{(2)}, [t_1, \hat{t}]) \leq \lambda r + \lambda\chi(t_1, \hat{t}) \tag{3.9}$$

Объединяя неравенства (3.7)–(3.9), получим

$$\mathrm{Var}(V^{(2)}, [t_0, \vartheta]) \leq 4\lambda\sigma\mu\Delta + \lambda r + \lambda\chi(t_0, \vartheta) \tag{3.10}$$

3°. Опираясь на неравенство (3.6) в случае $\beta > 0$, $\sigma > 0$ и на неравенство (3.10) в случае $\beta = 0$, $\sigma \geq 0$, имеем оценку

$$V^{(2)}(\vartheta, y^{(1)}(\vartheta)) \leq V^{(2)}(t_0, x_0) + \Lambda(t_0, r, \Delta) \tag{3.11}$$

Поскольку

$$\gamma^{(2)}(y^{(1)}(\vartheta)) = V^{(2)}(\vartheta, y^{(1)}(\vartheta)), \quad \gamma^{(1)}(y^{(1)}(\vartheta)) \leq \gamma^2(y^{(1)}(\vartheta)) + \|\gamma^{(1)} - \gamma^{(2)}\|_F$$

и правая часть неравенства (3.11) не зависит от выбранного $\upsilon(\cdot) \in L^{(1)}$, заключаем, что справедливо неравенство (1.3).

4. Опыт численного построения поверхностей переключения. В данной работе не обсуждаются алгоритмы численного построения ПП в линейных дифференциальных играх с фиксированным моментом окончания. Ограничимся кратким описанием публикаций, где изложены результаты компьютерного моделирования игровых задач с использованием ПП.

Наиболее простым является случай, когда в линейной дифференциальной игре значения квазивыпуклой функции платы в момент окончания игры определяются лишь некоторыми двумя координатами фазового вектора, т.е. $n = 2$.

Для этого случая разработаны [10–12] эффективные алгоритмы построения t-сечений множеств уровня функции цены в координатах системы (1.1). Дискретизация по t определяет аппроксимирующую игру (1.2). Построения ведутся на заданной сетке $\{t_k\}$ моментов времени и на некоторой сетке $\{c_p\}$ значений функции цены. Каждое сечение $W_c^{(2)}(t_k)$ множества уровня представляет собой выпуклый многоугольник на плоскости. Переход от построенного сечения $W_c^{(2)}(t_k)$ к сечению $W_c^{(2)}(t_{k-1})$, $t_{k-1} < t_k$,осуществляется при помощи попятной процедуры, использующей операцию овыпукления положительно-однородной кусочно-линейной функции в пространстве R^2.

Несложная обработка [5, 7, 11, 12] многоугольников $W_c^{(2)}(t_k)$, $c \in \{c_p\}$, дает для управляющего воздействия u первого игрока линию переключения, соответствующую моменту t_k. Просчитанные на сетке $\{t_k\}$ линии переключения задают в пространстве игры ПП. Наборы линий переключения хранятся в памяти и используются в дискретной схеме управления.

При помощи указанных программ исследована [11, 13–16] задача о посадке самолета в условиях ветрового возмущения. Процесс посадки рассматривался до момента пролета торца взлетно-посадочной полосы. Способ управления при помощи ПП, задаваемой набором линий переключения, тестировался [17, 18] также на модельных задачах посадки и взлета из [19–21]. Была рассмотрена [22] задача о разбеге самолета по взлетно-посадочной полосе в условиях ветрового возмущения; исследуемый способ управления также был основан на построении ПП.

Изучалась [23] в игровой постановке задача о перемещении груза с подвижной точкой подвеса; была построена ПП, определяющая оптимальный способ управления.

Описан пакет программ для построения ПП в случае $n = 3$ [24].

Автор благодарит Л.В. Камневу за замечания.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (03-01-00415).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. *Krasovskii N. N., Subbotin A. I.* Game-Theoretical Control Problems. N. Y., etc.: Springer, 1988. 518 p.
3. *Красовский Н.Н.* Дифференциальные игры. Аппроксимационные и формальные модели // Мат. сб. 1978. Т. 107. № 4. С. 541–571.
4. *Субботина Н.Н.* Универсальные оптимальные стратегии в позиционных дифференциальных играх // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19. № 11. С. 1890–1896.

5. *Botkin N.D., Patsko V.S.* Universal strategy in a differential game with fixed terminal time // Problems of Control and Inform. Theory. 1982. V. 11. № 6. P. 419–432.
6. *Боткин Н.Д.* Оптимальная универсальная стратегия в линейной дифференциальной игре // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. № 9. С. 1475–1480.
7. *Боткин Н.Д., Пацко В.С.* Позиционное управление в линейной дифференциальной игре // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1983. № 4. С. 78–85.
8. *Зарх М.А., Пацко В.С.* Построение управления второго игрока в линейной дифференциальной игре на основе свойства отталкивания // Управление с гарантированным результатом / Под ред. А.И. Субботина и В.Н. Ушакова. Свердловск: Ин-т мат. и мех. УНЦ АН СССР, 1987. С. 37–70.
9. *Зарх М.А.* Универсальная стратегия второго игрока в линейной дифференциальной игре // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 3. С. 395–400.
10. *Исакова Е.А., Логунова Г.В., Пацко В.С.* Построение стабильных мостов в линейной дифференциальной игре с фиксированным моментом окончания // Алгоритмы и программы решения линейных дифференциальных игр / Под ред. А.И. Субботина и В.С. Пацко. Свердловск: Ин-т мат. и мех. УНЦ АН СССР, 1984. С. 127–158.
11. *Botkin N.D., Patsko V.S., Zarkh M.A.* Numerical solution of linear differential games // Differential Games-Developments in Modelling and Computation: Lecture Notes in Control and Inform. Sci. Berlin etc.: Springer, 1991. V. 156. P. 226–234.
12. *Patsko V.S.* Special aspects of convex hull constructing in linear differential games of small dimension // Proc. 10th IFAC Workshop on Control Applications of Optimization. L.: Pergamon Press, 1996. P. 19–24.
13. *Боткин Н.Д., Кейн В.М., Пацко В.С.* Модельная задача об управлении боковым движением самолета на посадке // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 4. С. 560–567.
14. *Botkin N.D., Kein V.M., Patsko V.S., Turova V.L.* Aircraft landing control in the presence of windshear // Problems of Control and Inform. Theory. 1989. V. 18. № 4. P. 223–235.
15. *Боткин Н.Д., Зарх М.А., Кейн В.М., Пацко В.С., Турова В.Л.* Дифференциальные игры и задачи управления самолетом при ветровых помехах // Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1993. № 1. С. 68–76.
16. *Patsko V.S., Botkin N.D., Kein V.M., Turova V.L., Zarkh M.A.* Control of an aircraft landing in windshear // J. Optimiz. Theory and Appl. 1994. V. 83. № 2. P. 237–267.
17. *Иванов А.Г.* Моделирование движения самолета на этапе посадки // Проблемы управления с гарантированным результатом / Под ред. А.И. Субботина и С.А. Брыкалова. Екатеринбург: Ин-т мат. и мех. УрО РАН, 1992. С. 15–26.
18. *Турова В.Л.* Применение численных методов теории дифференциальных игр к задачам о взлете и прекращении посадки самолета // Тр. Ин-та мат. и мех. УрО РАН. 1992. Т. 2. С. 188–201.
19. *Miele A., Wang T., Melvin W.W.* Optimal take-off trajectories in the presence of windshear // J. Optimiz. Theory and Appl. 1986. V. 49. № 1. P. 1–45.
20. *Miele A., Wang T., Tzeng C.Y., Melvin, W.W.* Optimal abort landing trajectories in the presence of windshear // J. Optimiz. Theory and Appl. 1987. V. 55. № 2. P. 165–202.
21. *Miele A., Wang T., Wang H., Melvin W.W.* Optimal penetration landing trajectories in the presence of windshear // J. Optimiz. Theory and Appl. 1988. V. 57. № 1. P. 1–40.
22. *Боткин Н.Д., Красов А.И.* Позиционное управление в модельной задаче о разбеге самолета // Позиционное управление с гарантированным результатом / Под ред. А.И. Субботина и А.М. Тарасьева. Свердловск: Ин-т мат. и мех. УрО АН СССР, 1988. С. 22–32.
23. *Соколов Б.Н., Турова В.Л.* Синтез оптимального управления маятником при наличии активных помех // Изв. РАН. МТТ. 1988. № 5. С. 14–23.
24. *Зарх М.А.* Пакет программ для решения трехмерных дифференциальных игр // Анализ и синтез динамических систем в условиях неопределенности. М: Изд-во МАИ, 1990. С. 35–41.

Екатеринбург
e-mail: patsko@imm.uran.ru

Поступила в редакцию
17.II.2004