

Российская академия наук
Уральское отделение

Институт математики и механики

Научные доклады

В.С. Пацко, В.Л.Турова

ИГРА ШОФЕР-УБИЙЦА:
ИСТОРИЯ
И СОВРЕМЕННЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Екатеринбург
2009

УДК 517.977, 62-50

Пацко В.С., Турова В.Л.

ИГРА ШОФЕР-УБИЙЦА: ИСТОРИЯ И СОВРЕМЕННЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ.

Научные доклады.

Екатеринбург: УрО РАН, 2009. 44 с.

ISBN 978-5-7691-2041-1

Игра “шофер-убийца” — одна из самых известных модельных задач теории дифференциальных игр. “Автомобиль”, пытающийся как можно скорее сбить “пешехода”, — под этот наглядный образ, предложенный Р. Айзексом, подходят многие прикладные проблемы. Не менее замечательно и то, что задача очень трудна и интересна как объект математического исследования. Дан обзор публикаций, посвященных классической постановке и ее модификациям. Работа может быть полезна для студентов, инженеров и научных сотрудников, специализирующихся в области теории управления и ее приложений.

Иллюстр. 39, ссылок 35.

Ключевые слова: дифференциальные игры, задачи оптимального быстродействия, игра шофер-убийца, функция цены игры, численные построения, попятные процедуры

Ответственный редактор: член-корр. РАН А.Г. Ченцов

Рецензент: член-корр. РАН В.Н. Ушаков

Работа выполнена в рамках программы Президиума РАН
“Математическая теория управления”
и при поддержке РФФИ (09-01-00436, 07-01-96085).

ISBN 978-5-7691-2041-1

© ИММ УрО РАН, 2009

Введение

Игра шофер-убийца предложена Руфусом Филиппом Айзексом и описана в отчете [1] для RAND Corporation в 1951 г. Задача подробно изложена в его книге “Differential games” [2], вышедшей в 1965 г. и переведенной [3] на русский язык в 1967 г. В этой задаче “автомобиль” с ограниченным снизу радиусом разворота и постоянной по величине линейной скоростью преследует безынерционного “пешехода”, скорость которого не превышает заданного значения. Слова “автомобиль”, “пешеход” и название “шофер-убийца” оказались на редкость удачными, хотя в качестве реальных объектов Р. Айзекс подразумевал [4, с. 543] управляемую торпеду и увертывающийся от неё небольшой катер.

Привлекательность игры связана не только с ее явной прикладной интерпретацией, но также и с тем, что после перехода к относительным координатам фазовый вектор становится двумерным. В относительных координатах получаем дифференциальную игру на плоскости, что обеспечивает наглядность рассмотрения геометрии оптимальных движений и сингулярных линий, на которых происходит расщепление, слияние или излом оптимальных движений.

Начатое Р. Айзексом исследование было продолжено Джоном Валентином Бреквеллом и Энтони Виллитс Мерцем. Они усовершенствовали метод Айзекса решения дифференциальных игр и открыли новые типы сингулярных линий для задач на плоскости. Полное описание структуры решения игры шофер-убийца в зависимости от параметров задачи представлено в диссертации Э. Мерца, выполненной под руководством Дж. Бреквелла в Стэнфордском университете. Проделанная Э. Мерцем работа представляется фантастической, и его диссертация, на наш взгляд, — лучшее исследование из тех, что были посвящены конкретным модельным задачам.

Настоящая работа — дань уважения неоценимому вкладу в теорию дифференциальных игр трех выдающихся ученых: Р. Айзекса, Дж. Бреквелла и Э. Мерца. Мы благодарны Эллен Саре Айзекс, Джону Александру Бреквеллу и Энтони Виллитс Мерцу за предоставленные ими ранее не публиковавшиеся фотографии (рис. 1–7).



Рис. 1: Левое фото: Руфус Айзекс (около 1932–1936 гг.). Правое фото: Роза и Руфус Айзекс с дочерью Эллен в Хартфорде, Коннектикут, предположительно в 1945 г. перед переходом Айзекса в Нотр-Дамский университет.



Рис. 2: Роза и Руфус Айзекс с дочерьми Френ и Эллен на берегу озера Мичиган, 1947 г., в период работы Айзекса в Нотр-Дамском университете.



Рис. 3: Роза и Руфус Айзекс у трапа круизного корабля (около 1960 г.).



Рис. 4: Руфус Айзекс, проводы на пенсию (1979 г.).



Рис. 5: Джон Бреквелл на выпускном празднике в Стэнфордском университете.

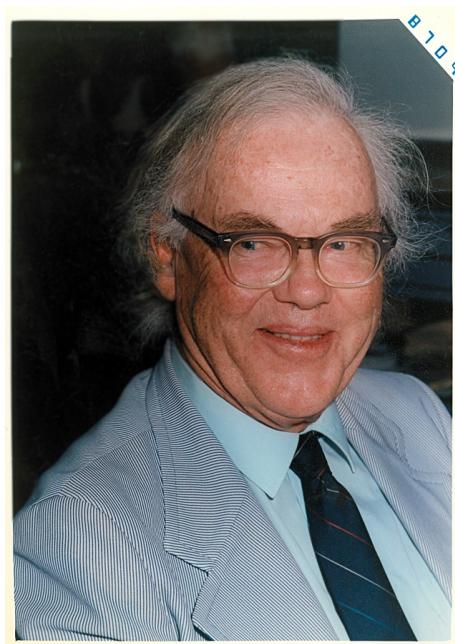


Рис. 6: Джон Бреквелл (апрель 1987 г.).

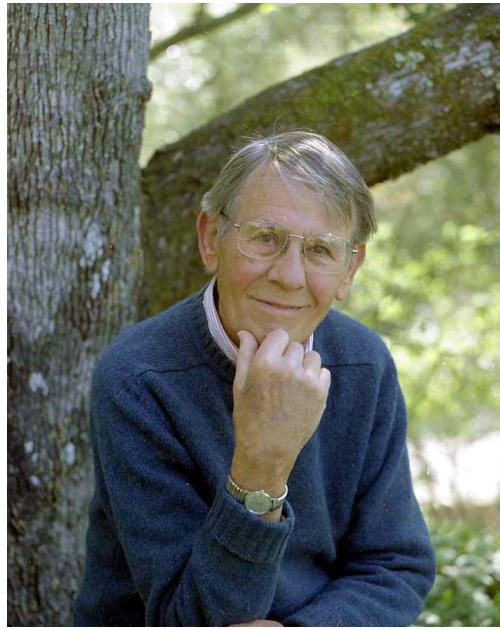


Рис. 7: Энтони Мерц (март 2008 г.).

Значение игры шофер-убийца также в том, что она стимулировала появление новых задач с динамикой, как в классической постановке, но другими целями игроков. Наиболее известной среди них является игра сопровождения-уклонения, рассмотренная в работах Джона Бреквелла, Джозефа Левина и Гирта Яна Олсдера.

Интересный вариант задачи шофер-убийца исследован в статьях французских математиков Пьера Кардалиге, Марка Квинкампса и Патрика Сент-Пьера. Здесь цели игроков старые, но ограничение на управление убегающего зависит от расстояния между ним и преследователем.

Мы рассматриваем также постановку, в которой усилены возможности преследователя: он становится более подвижным.

Изложение указанных выше задач сопровождается результатами расчета множеств уровня функции цены по алгоритму, разработанному авторами данного обзора. Алгоритм основан на подходе к решению дифференциальных игр, развивающемуся в рамках научной школы Николая Николаевича Красовского (Екатеринбург).

В последнем разделе упомянуты работы, где игра шофер-убийца

рассматривается как тестовый пример для численных методов. Отмечается также, что интересной для численного исследования является игра шофер-убийца с двумя целевыми множествами.

Настоящее издание лишь незначительно отличается от работы [5], опубликованной на английском языке. Добавлены рис. 22–24 и описание к ним.

1. Классическая постановка Р. Айзекса

Обозначим игроков буквами P и E . Динамика имеет вид

$$\begin{aligned} P : \dot{x}_p &= w \sin \theta & E : \dot{x}_e &= v_1 \\ \dot{y}_p &= w \cos \theta & \dot{y}_e &= v_2 \\ \dot{\theta} &= wu/R, |u| \leq 1 & v &= (v_1, v_2)', |v| \leq \rho. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь w — величина линейной скорости, R — минимальный радиус разворота. Нормируя время и геометрические координаты, можно считать, что $w = 1$, $R = 1$. Таким образом, в безразмерных переменных динамика запишется в виде

$$\begin{aligned} P : \dot{x}_p &= \sin \theta & E : \dot{x}_e &= v_1 \\ \dot{y}_p &= \cos \theta & \dot{y}_e &= v_2 \\ \dot{\theta} &= u, |u| \leq 1 & v &= (v_1, v_2)', |v| \leq \nu. \end{aligned} \quad (2)$$

Совмешая начало относительных координат с игроком P и направляя ось y по вектору его скорости, перейдем [2] к системе

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -yu + v_x \\ \dot{y} &= xu - 1 + v_y \\ |u| &\leq 1, v = (v_x, v_y)', |v| \leq \nu. \end{aligned} \quad (3)$$

Цель игрока P , распоряжающегося управлением u , — привести фазовый вектор как можно скорее на терминальное множество M — круг радиусом r с центром в начале координат. Второй игрок, распоряжающийся управлением v , препятствует этому. Управления строятся по принципу обратной связи.

Видно, что описание задачи содержит два независимых параметра ν и r .

Р. Айзекс исследовал задачу для некоторых значений указанных параметров, используя свой метод решения дифференциальных игр. Основой метода является попятное построение характеристик соответствующего уравнения в частных производных. Проводится заполнение регулярными характеристиками некоторой первичной области, затем вторичной области и т.д. Итоговые характеристики на плоскости фазовых переменных совпадают с оптимальными траекториями.

Как уже отмечалось, игра шофер-убийца была впервые описана Р. Айзексом в его отчете 1951 г. Обложка отчета показана на рис. 8.

На рис. 9 приведены картинки из книги Р. Айзекса [2]. Решение задачи симметрично относительно оси ординат. Верхняя часть оси ординат представляет собой сингулярную линию, на которую под углом приходят (рис. 9А) в прямом времени оптимальные движения и затем идут по ней к терминальному множеству. По терминологии Р. Айзекса, это — универсальная сингулярная линия. Участок оси ординат, примыкающий снизу к терминальному множеству, — также универсальная сингулярная линия: оптимальные движения идут по ней вниз. Далее универсальная линия переходит в рассеивающую. Из любой точки на ней оптимальные движения расходятся. На барьерной линии B функция цены игры разрывна. Положительной назовем

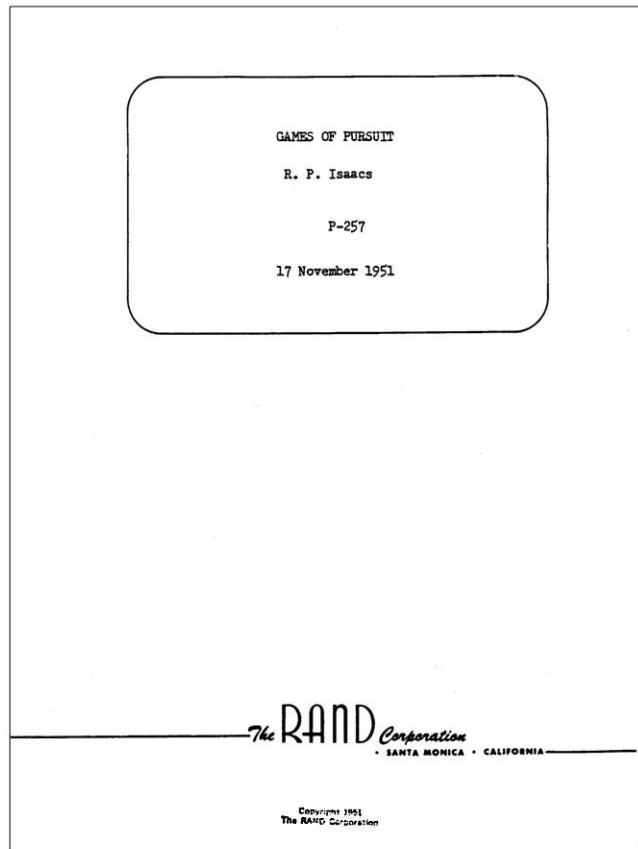


Рис. 8: Обложка отчета Р. Айзекса [1] для RAND Corporation.

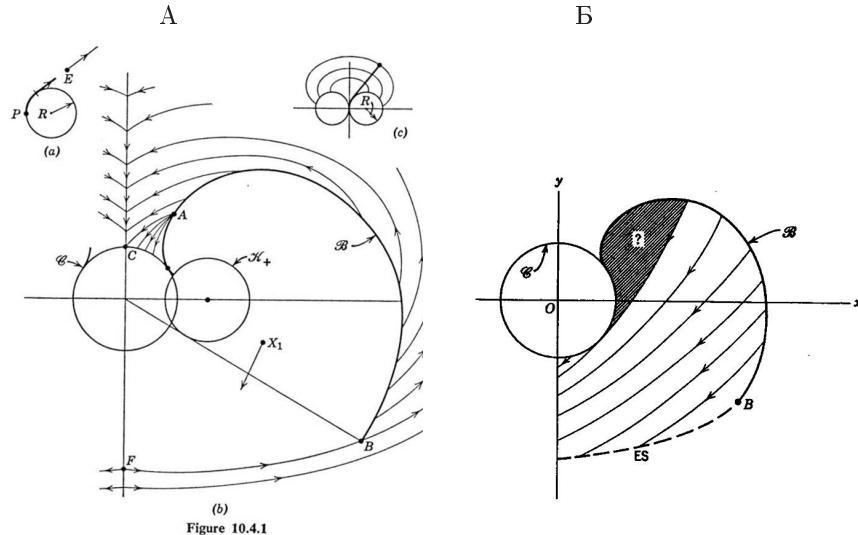


Рис. 9: Рисунки из книги Р. Айзекса, поясняющие решение игры шофер-убийца.

ту сторону барьера линии, где цена меньше. Противоположную сторону считаем отрицательной.

Из точки окончания барьера линии по касательной отходит экивокальная сингулярная линия (рис. 9Б). Она разделяет две регулярные области. Оптимальные движения, попадая на эту линию, расщепляются: одно идет по экивокальной линии, другое — сходит с нее в примыкающую справа регулярную область.

Экивокальная линия задается при помощи дифференциального уравнения, которое явно не интегрируется. Поэтому для функции цены в области между экивокальной и барьера линиями нет явного описания. Наиболее трудной для исследования является “тыльная” часть этой области (рис. 9Б, заштрихованный кусок), обозначенная у Р. Айзекса знаком вопроса. Здесь он не сумел получить решение.

На рис. 10 показаны множества уровня $W(\tau) = \{(x, y) : V(x, y) \leq \tau\}$ функции цены $V(x, y)$ для $\nu = 0.3, r = 0.3$. Численные результаты, представленные на рис. 10 и последующих рисунках, получены при помощи разработанного авторами алгоритма [6]. Линии на границе множеств $W(\tau)$, $\tau > 0$, для каждой точки (x, y) которых выполнено равенство $V(x, y) = \tau$, будем называть фронтами (изохронами). Попутное в обратном времени τ построение фронтов, начиная с

границы терминального множества, составляет основу алгоритма. Специальная компьютерная программа для визуализации графиков функции цены дифференциальных игр быстродействия разработана Владимиром Лазаревичем Авербухом и Олегом Александровичем Пыхтеевым [7].

Построения для рис. 10 выполнены с шагом $\Delta = 0.01$ и доведены до момента $\tau_f = 10.3$. Шаг вывода фронтов $\delta = 0.1$. На рис. 11 представлен график функции цены. Функция цены разрывна на барьерной линии и на части границы терминального множества. В рассматриваемом случае функция цены дифференцируема в упомянутой выше тыльной части.

В классической постановке игры шофер-убийца целевое множество — круг с центром в начале координат. При смещении центра терминального круга с оси y теряется симметрия решения относительно этой оси. Возникающая при этом структура фронтов по отрицательную сторону от барьерных линий может быть весьма сложной. Один из таких примеров показан на рис. 12. Центр терминального круга радиусом 0.075 находится в точке с координатами $m_x = 1, m_y = 1.5$. Шаг попятных построений $\Delta = 0.01$. Максимальное значение цены игры для вычисленных фронтов, равное 9.5, достигается в точке, лежащей во втором квадранте. Фронты выведены с шагом $\delta = 0.08$. На рис. 13 представлен график функции цены игры.

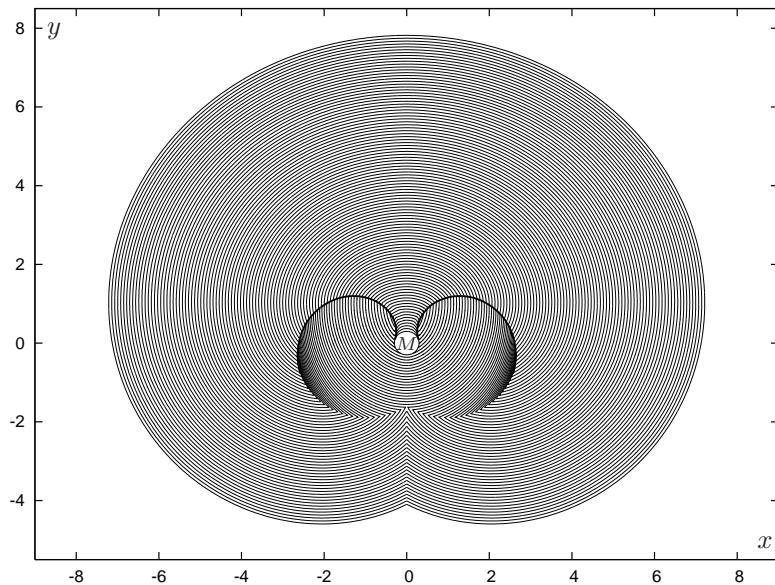


Рис. 10: Множества уровня функции цены игры для классической задачи; параметры игры $\nu = 0.3$ и $r = 0.3$; попутные построения проделаны до момента времени $\tau_f = 10.3$ с шагом $\Delta = 0.01$, шаг вывода фронтов $\delta = 0.1$.

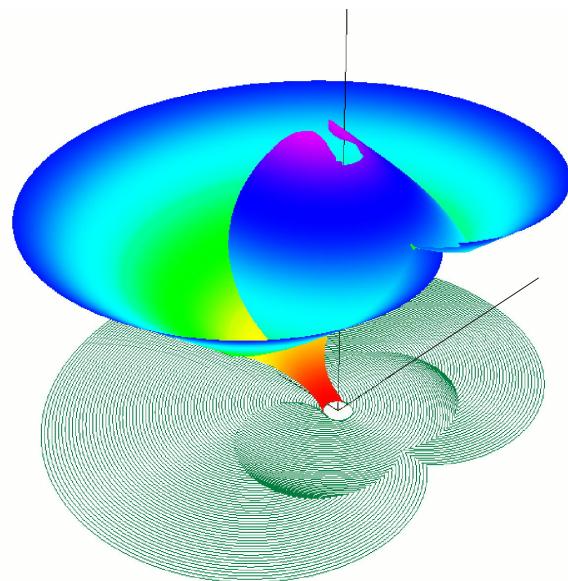


Рис. 11: График функции цены; $\nu = 0.3$, $r = 0.3$.

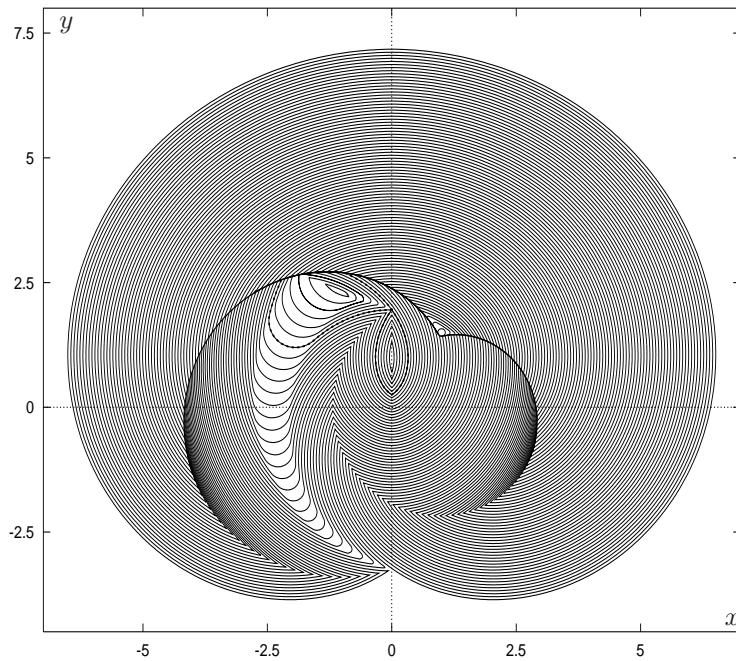


Рис. 12: Нетривиальная структура фронтов при сдвинутом целевом множестве; $\nu = 0.3$, $\tau_f = 9.5$, $\Delta = 0.01$, $\delta = 0.08$. Целевое множество — круг радиусом $r = 0.075$ с центром в точке $(1, 1.5)$.

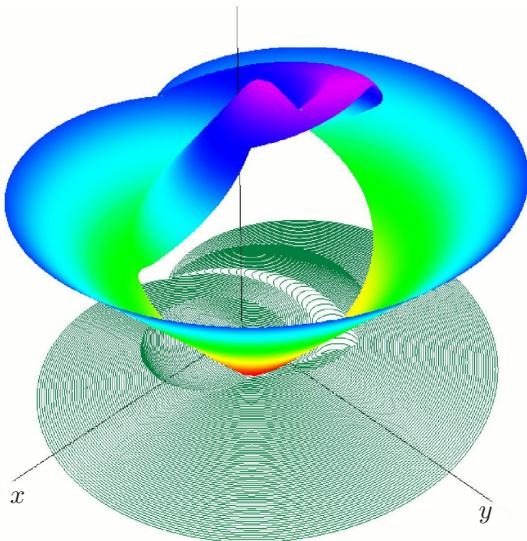


Рис. 13: График функции цены игры при сдвинутом целевом множестве; $\nu = 0.3$, $r = 0.075$.

2. Исследования Дж. Бреквелла и Э. Мерца

Дж. Бреквелл и Э. Мерц продолжили изучение игры шофер-убийца в постановке Р. Айзекса. Их результаты частично и очень кратко описаны в работах [8,9]. Полное решение представлено в диссертации Э. Мерца [10]. Титульный лист диссертации показан на рис. 14.

Э. Мерц разбил двумерную область параметров задачи на 20 подобластей. Для каждой из них он исследовал качественную структуру оптимальных движений и тип сингулярных линий. Все описанные Р. Айзексом для дифференциальных игр на плоскости сингулярные линии (рассеивающие, универсальные, экивокальные,

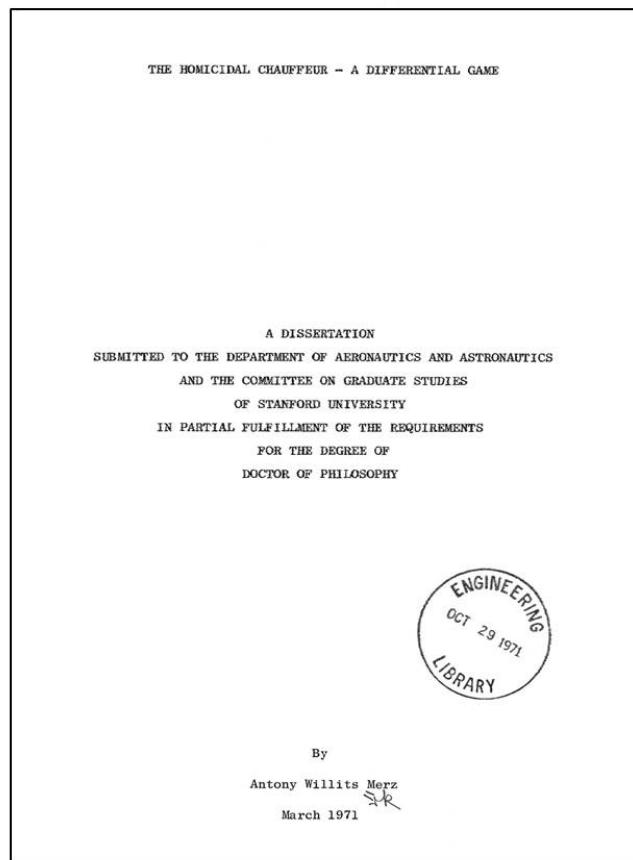
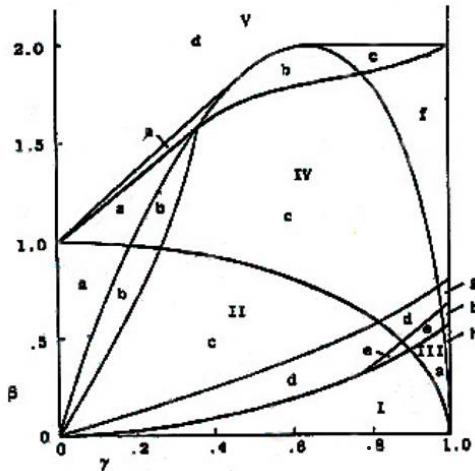


Рис. 14: Титульный лист диссертации Э. Мерца.

линии переключения) присутствуют в задаче шофер-убийца при том или ином наборе параметров. В своей диссертации Э. Мерц предложил выделить некоторые подтипы и рассматривать их отдельно. Так, он ввел понятие фокальных сингулярных линий (универсальные, но с касательным подходом оптимальных движений). Функция цены недифференцируема на фокальных линиях.

На рис. 15 даны рисунок из диссертации Э. Мерца и таблица, показывающие разбиение двумерной области параметров (Э. Мерц использовал для обозначения параметров символы γ , β) на подобласти с определенным набором сингулярных (exceptional) линий.



Region	Sub-region	Exceptional Lines Present in Each Subregion													
		S	UL	PDL _y	PDL _x	EDL _a	EDL _c	1D ⁺	1D ⁻	EL	SL	SE	FL		
I		x	x												
II	a	x	x	x						x	x	x	x		
	b	x	x	x						x	x	x	x		
	c	x	x	x						x	x	x	x		
	d	x	x	x						x	x	x	x		
	e	x	x	x						x	x	x	x		x
III	a	x	x	x			x	x	x						
	b	x	x	x			x	x	x						
IV	a		x	x	x		x	x	x	x	x	x	x		
	b		x	x	x		x	x	x	x	x	x	x		
	c		x	x	x		x	x	x	x	x	x	x		
	d		x	x	x		x	x	x	x	x	x	x		
	e		x	x	x		x	x	x	x	x	x	x		
	f		x	x	x		x	x	x	x	x	x	x		
	g		x	x	x		x	x	x	x	x	x	x		
	h		x	x	x		x	x	x	x	x	x	x		
V	a		x	x		x		x	x						
	b		x	x		x		x	x						
	c		x	x		x		x	x						
	d		x	x		x		x	x						

Рис. 15: Разбиение двумерной области параметров на подобласти.

В диссертации очень много рисунков, поясняющих тип сингулярных линий и характер оптимальных движений. Рассматривая их, нетрудно уловить закономерности перестройки структуры решения при изменении параметров.

На рис. 16 для параметров, соответствующих подобласти IIe, показан характер оптимальных движений в части плоскости, примыкающей к отрицательной стороне барьера. Это та тыльная часть, где у Р. Айзекса был поставлен вопрос. Для параметров из подобласти IIe ситуация весьма сложная.

Символ PDL означает рассеивающую линию за игрока P . Из каждой ее точки выходят два оптимальных движения. Сброс движений в ту или иную сторону регулируется игроком P . Сингулярная линия SE (switch envelope) характеризуется следующим образом. Оптимальные

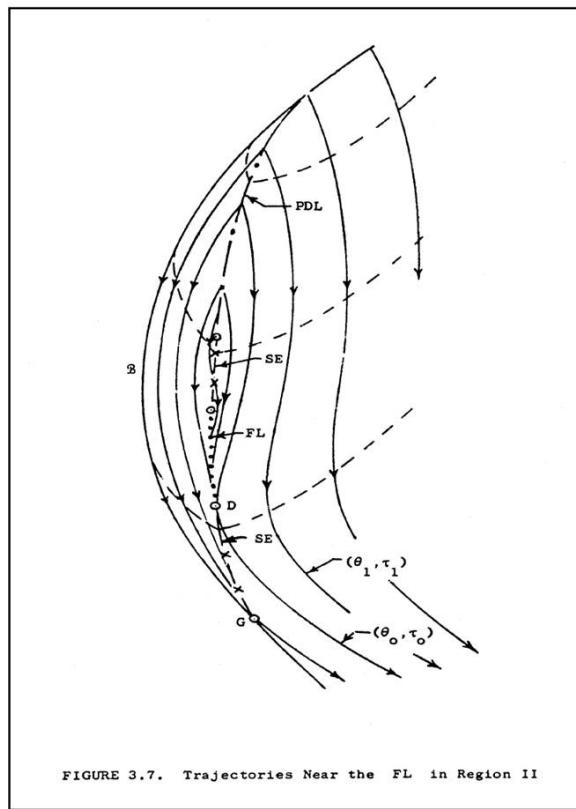


Рис. 16: Структура оптимальных движений в тыльной части для подобласти IIe.

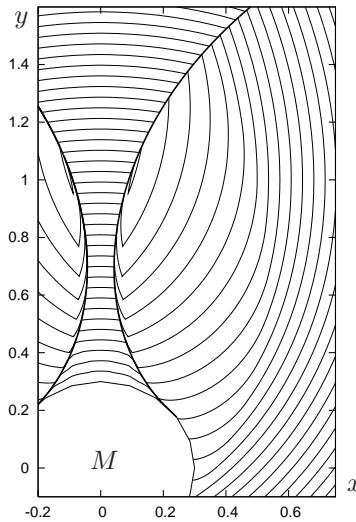


Рис. 17: Множества уровня функции цены игры для параметров из подобласти II_d; $\nu = 0.7$, $r = 0.3$; $\tau_f = 35.94$, $\Delta = 0.006$, $\delta = 0.12$.

движения подходят к ней с касанием. Далее одно движение идет по этой кривой, а другое (равноценное ему) сходит с нее под углом. Таким образом, линия SE похожа на эквивокальную сингулярную линию. Э. Мерц приводит доводы, учитывая которые, лучше рассматривать ее как самостоятельный тип сингулярной линии.

Символ FL означает фокальную линию.

Пунктиром обозначены линии границы множеств уровня функции цены (другими словами, изохроны, фронты). Функция цены не является дифференцируемой на линии, составленной из кривых PDL, SE, FL, SE.

Авторы данной работы потратили много усилий, чтобы численно построить функцию цены для параметров из подобласти II_e. Это не удалось. А именно, при счете не получается линия излома фронтов, которая должна быть по отрицательную сторону от барьера. Одно из возможных объяснений такой неудачи следующее: ситуация настолько тонкая, что она “не ловится” даже при очень “мелкой” дискретизации. Просчет множеств уровня функции цены для подобластей, где структура решения быстро меняется в зависимости от параметров, может рассматриваться как “вызов” для численных методов дифференциальных игр, разрабатываемых в разных коллективах в настоящее время.

На рис. 17 показаны результаты счета, когда в тыльной части присутствуют изломы фронтов. Но здесь взяты параметры не из

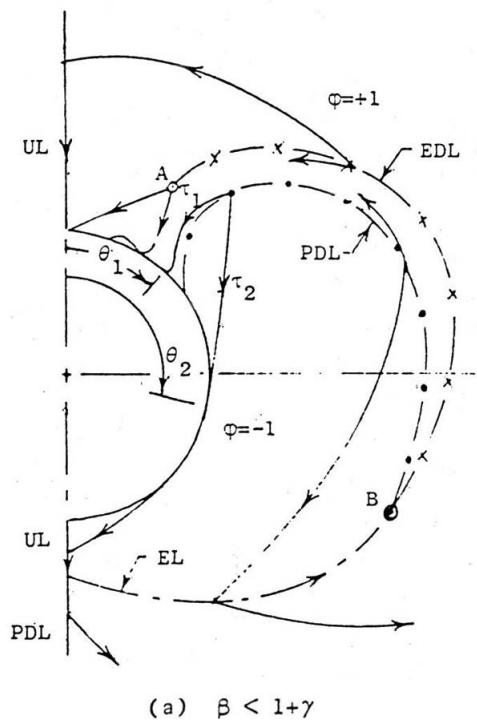


FIGURE 4.3. EDL and PDL in Region IV

Рис. 18: Структура оптимальных движений для подобласти IVc.

подобласти IIe, а из подобласти IId. Для этой подобласти исчезает фокальная сингулярная линия, хотя остается сингулярная линия SE.

Для некоторых подобластей параметров пропадает барьерная линия, на которой функция цены вне терминального множества разрывна. На рис. 18 приведена картинка из диссертации Э. Мерца, соответствующая подобласти IVc. (Э. Мерц, как и Р. Айзекс, для обозначения управления игрока P использовал символ φ . В данной работе ему соответствует символ u .) Для этой подобласти нет барьерной линии. Э. Мерцем описана очень интересная трансформация барьерной линии в две близко расположенные рассеивающие линии игроков P и E . При этом некоторые оптимальные движения идут по границе терминального множества, в одной части — вверх, в другой — вниз. Исследование такого феномена представляет большой теоретический интерес.

Численно построенные множества уровня функции цены для

параметров ν, r из подобласти IVc показаны на рис. 19. При рассматривании рис. 19 может показаться, что имеется барьерная линия, на которой функция цены разрывна. Это неверно. Происходит именно то, что объяснено на рис. 18.

Увеличенные фрагменты численных построений даны на рис. 20, 21 (масштаб по оси y для рис. 21 больше масштаба по оси x). Линия из угловых точек сверху от области сгущения фронтов — рассеивающая за игрока E . Линия из угловых точек снизу, практически идущая по нижнему краю области сгущения, — рассеивающая за игрока P .

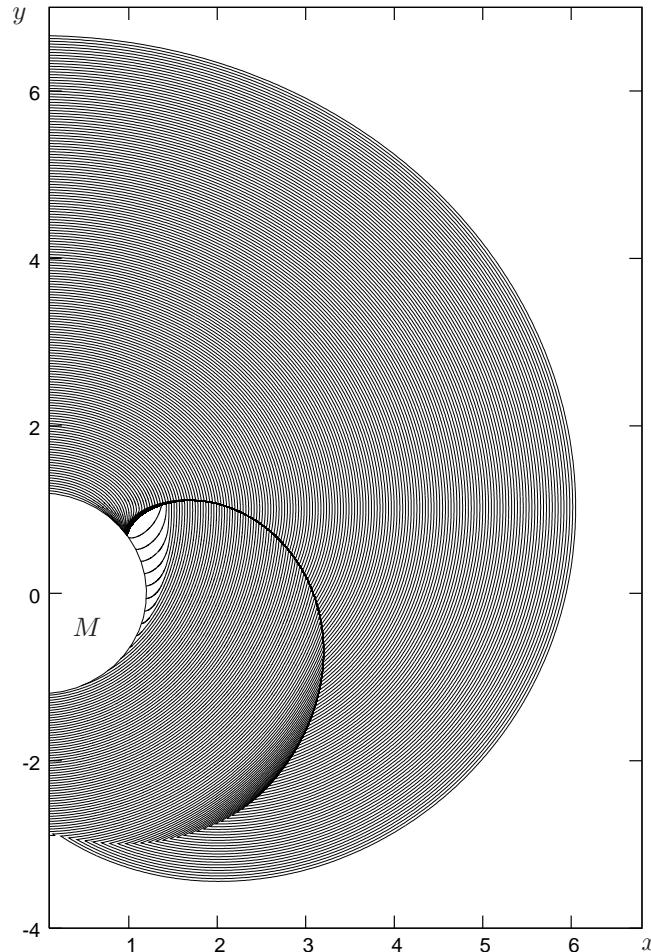


Рис. 19: Множества уровня функции цены игры; $\nu = 0.7, r = 1.2; \tau_f = 24.22, \Delta = 0.005, \delta = 0.1$.

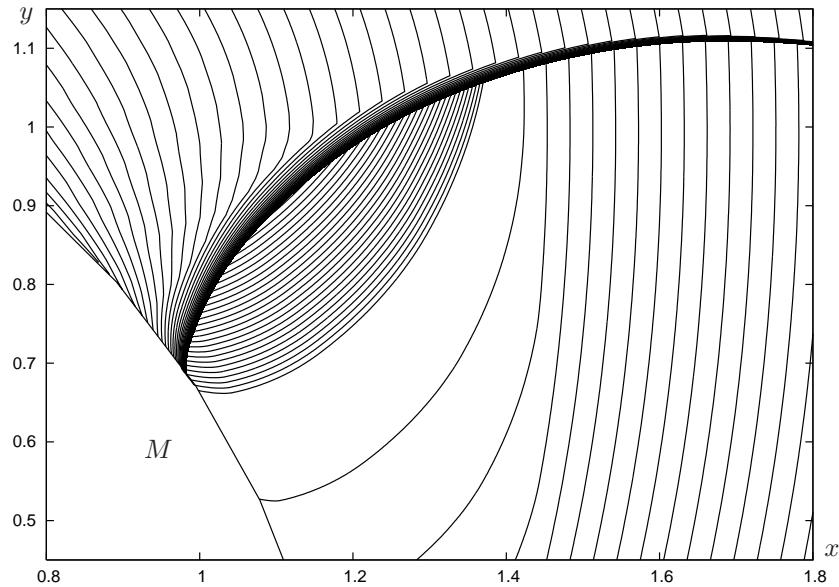


Рис. 20: Увеличенный фрагмент рис. 19. Шаг вывода фронтов вблизи $\tau_f = 24.22$ уменьшен до $\delta = 0.005$.

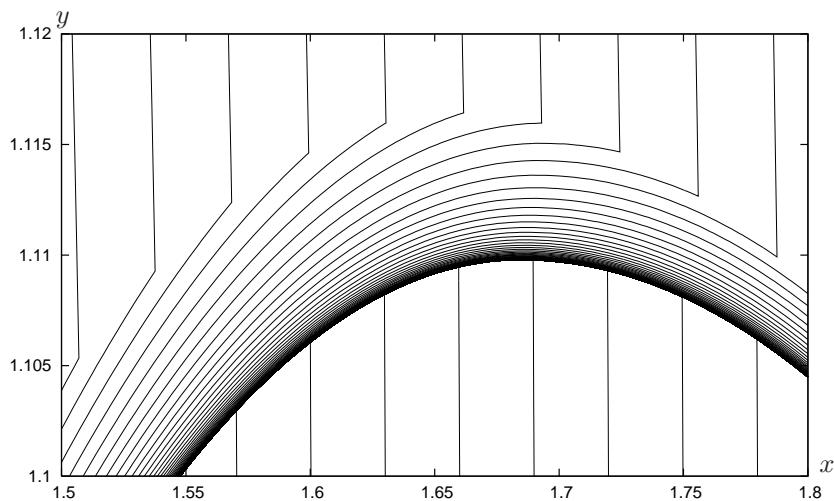


Рис. 21: Увеличенный фрагмент рис. 19.

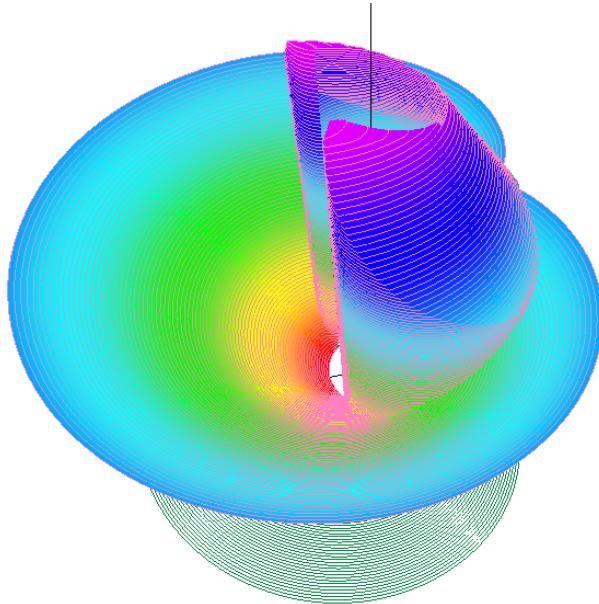


Рис. 22: График функции цены игры; $\nu = 0.7$, $r = 1.2$. Нанесены линии уровня функции цены. Видна кривая излома, соответствующая линии PDL на рис. 18.

В зоне сгущения функция цены непрерывна. Чтобы увидеть, где находится (в рассматриваемой части плоскости) точка с максимальным значением функции цены, на рис. 20 выведены дополнительные фронты. Точка максимального значения цены имеет координаты $x = 1.1$, $y = 0.92$. Значение функции цены в ней равно 24.22.

График функции цены для рассматриваемого примера показан на рис. 22. На графике нанесены линии уровня. Они помогают увидеть две кривые излома, которые соответствуют (с учетом симметрии относительно оси y) рассеивающим сингулярным линиям EDL и PDL на плоскости x , y , показанным на рис. 18. Сохраним за кривыми излома на графике функции цены обозначения EDL и PDL. Ракурс и масштаб рис. 23 подобраны так, чтобы хорошо была видна часть графика, где зарождается кривая EDL. Начало кривой обозначено буквой A . На рис. 24 показана часть графика около точки B , где заканчивается линия EDL (при перемещении по линии EDL от точки A к точке B цена игры возрастает) и одновременно начинается линия PDL. Кривая излома, являющаяся гладким продолжением линии EDL (с увеличением значения функции цены), уже не является рассеивающей. Как указано на рис. 18, она представляет собой экивокальную сингулярную линию.

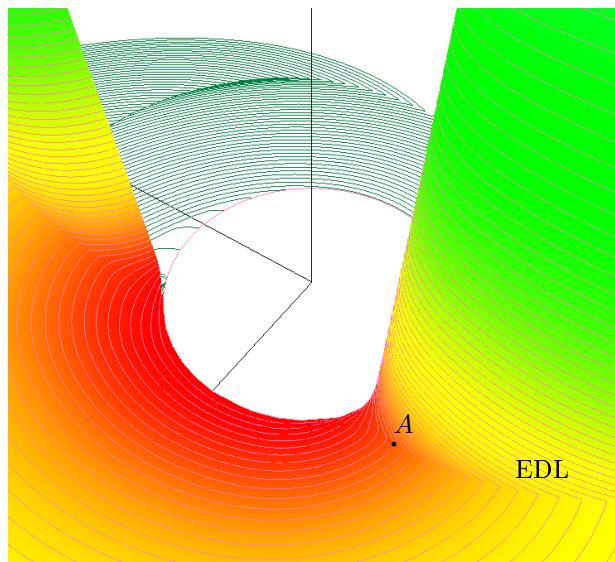


Рис. 23: Фрагмент графика функции цены для тех же параметров, что и на рис. 22. В точке A начинается кривая излома, соответствующая линии EDL на рис. 18.

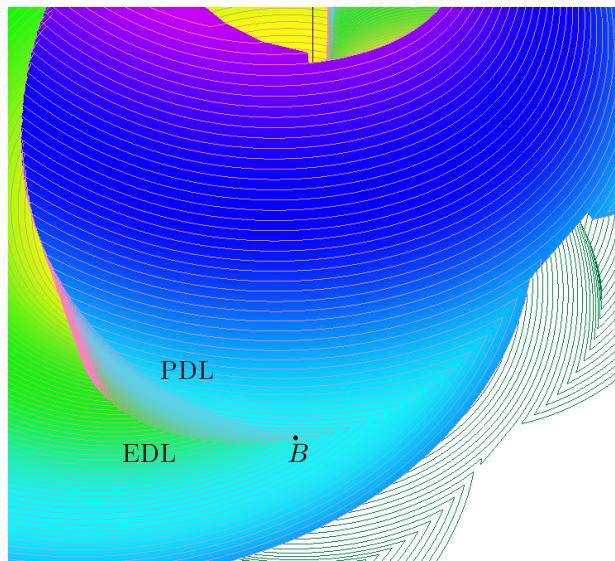


Рис. 24: Фрагмент графика функции цены для тех же параметров, что и на рис. 22. В точке B начинается кривая излома, соответствующая линии PDL на рис. 18.

3. Игра сопровождения-уклонения

В диссертации [11] Дж. Левина (выполненной под руководством Дж. Бреквелла), в совместной статье [12] Дж. Бреквелла и Дж. Левина, а также в статье [13] Дж. Левина и Г. Я. Олсдера динамика и ограничения на управления игроков те же, что и в задаче Р. Айзекса, но цели игроков другие. Теперь игрок E пытается как можно скорее привести фазовый вектор на терминальное множество M , игрок P препятствует этому. В качестве терминального множества в первых двух из указанных работ взято дополнение к открытому кругу с центром в нуле. В третьей работе терминальное множество — дополнение до открытого конуса с вершиной в нуле.

Содержательный смысл применительно к исходному описанию, где рассматривались два движущихся объекта: игрок E пытается как можно скорее выйти из геометрически связанный с текущим положением игрока P зоны обнаружения, а игрок P , наоборот, старается задержать противника как можно дольше в этой зоне. Такую задачу назвали игрой сопровождения-уклонения. При ее исследовании Дж. Бреквелл, Дж. Левин и Г. Я. Олсдер также использовали методику Р. Айзекса.

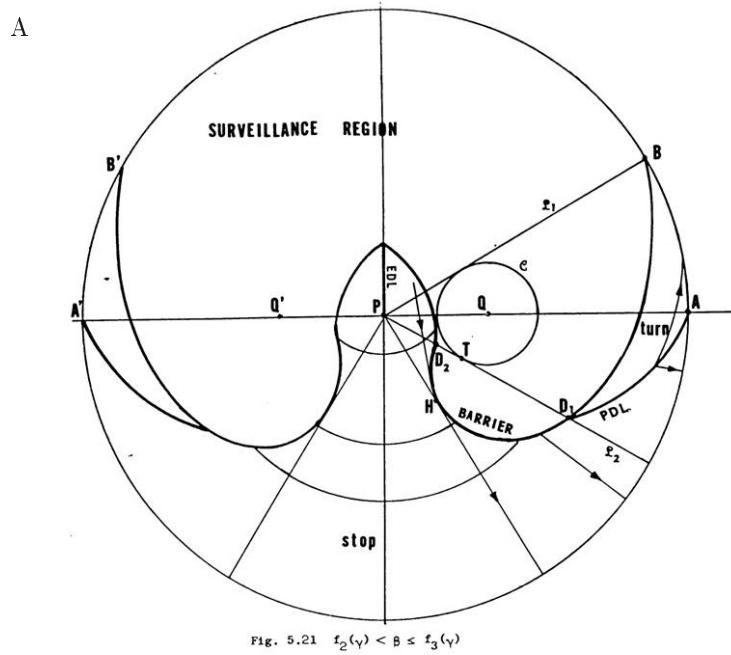
Один рисунок из диссертации Дж. Левина показан на рис. 25А, один рисунок из статьи Дж. Левина и Г. Я. Олсдера дан на рис. 25Б.

В игре сопровождения-уклонения с коническим целевым множеством легко обнаруживаются и представляют интерес ситуации перехода от конечных значений функции цены к бесконечным значениям.

На рис. 26 представлены множества уровня функции цены игры для пяти значений параметра α , задающего полурасстояние невыпуклого конуса обнаружения. Поскольку решение задачи симметрично относительно оси y , то на четырех из пяти рисунков показана только правая полуплоскость. Картинки упорядочены по уменьшению угла α .

На первом рисунке функция цены конечна в множестве, примыкающем к терминальному конусу и ограниченном кривой $a'b'c'ba$. Это множество заполнено фронтами (изохронами). Функция цены равна нулю на терминальном множестве. Вне объединения целевого множества и множества, заполненного фронтами, цена игры бесконечна.

На третьем рисунке мы видим ситуацию сгущения фронтов. Здесь цена игры бесконечна на линии fe и конечна на дуге ea . Функция цены терпит конечный разрыв на дуге be . График функции цены,



Б

JOTA: VOL. 27, NO. 1, JANUARY 1979

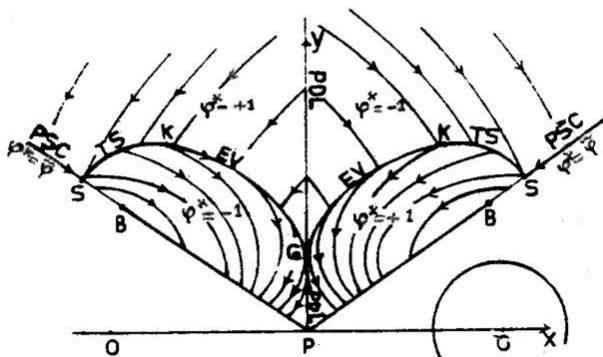


Рис. 25: (А) Рисунок из диссертации Дж. Левина. Круговая зона обнаружения. (Б) Рисунок из статьи Дж. Левина и Г. Я. Олсдера. Зона обнаружения — выпуклый конус.

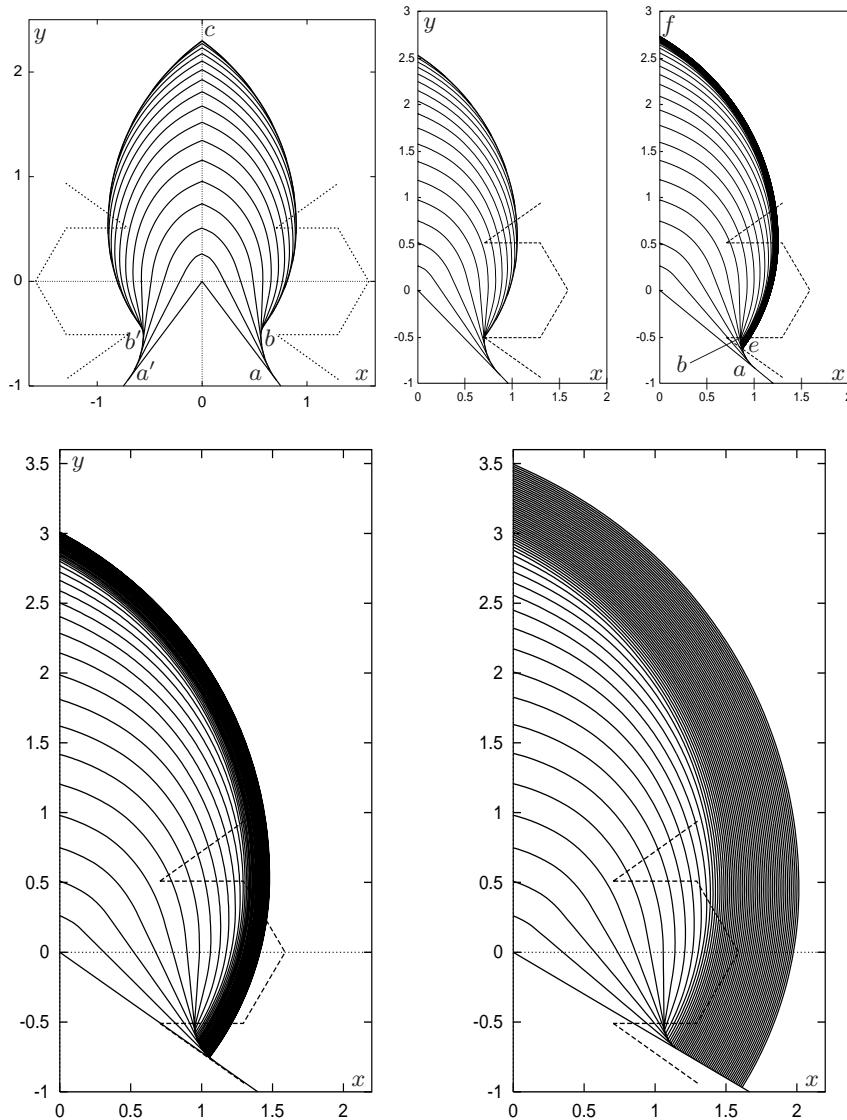


Рис. 26: Игра сопровождения-уклонения. Закономерность изменения структуры фронтов в зависимости от полураствора α невыпуклого конуса обнаружения; $\nu = 0.588$, $\Delta = 0.017$, $\delta = 0.17$.

соответствующий третьему рисунку, дан на рис. 27А.

Второй рисунок характеризует пограничную ситуацию между теми, что были на первом и третьем рисунках.

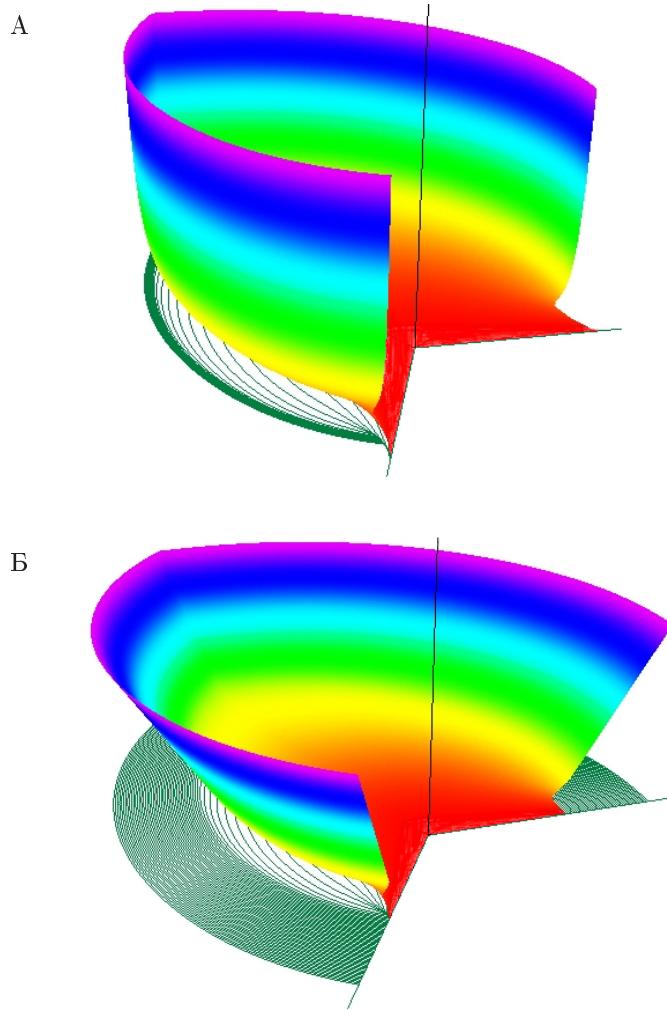


Рис. 27: Функция цены в игре сопровождения-уклонения. (А) $\nu = 0.588$, $\alpha = 130^\circ$, (Б) $\nu = 0.588$, $\alpha = 121^\circ$.

На пятом рисунке фронты с медленной скоростью распространяются вправо и в пределе при стремлении обратного времени к бесконечности заполняют (вне терминального множества) всю правую полуплоскость. Рис. 27Б дает график функции цены для этого случая.

Четвертый рисунок характеризует пограничную ситуацию по отношению к тем, что показаны на третьем и пятом рисунках.

4. Акустическая задача шофер-убийца

Вернемся к задачам, где игрок P минимизирует, а игрок E максимизирует время перевода на терминальное множество M . В работах [14,15] П. Кардалиге, М. Квинкампуа и П. Сент-Пьер рассмотрели “акустический” вариант игры шофер-убийца, предложенный Пьером Бернаром [16]. Предполагается, что в системе (3) ограничение ν на управление игрока E зависит от состояния (x, y) . А именно,

$$\nu(x, y) = \nu^* \min \left\{ 1, \sqrt{x^2 + y^2} / s \right\}, \quad s > 0.$$

Здесь ν^* , s — параметры задачи.

Прикладной аспект: объект E не должен сильно “шуметь”, если расстояние между ним и объектом P меньше заданного числа s .

П. Кардалиге, М. Квинкампуа и П. Сент-Пьер исследовали акустическую задачу при помощи разработанного ими метода численного решения дифференциальных игр, восходящего к теории выживаемости [17]. Было обнаружено, что в акустической задаче можно так подобрать параметры, что внутри множества состояний, где цена игры конечна, образуется “дырка”, для любой точки которой цена игры бесконечна. Особенно легко сконструировать такую ситуацию в случае, когда терминальное множество имеет вид прямоугольника, вытянутого вдоль горизонтальной оси.

На рис. 28, 29 показан пример акустической задачи с дыркой. Изображены множества уровня функции цены и график функции цены. Вне множества, заполненного фронтами, значение функции цены равно бесконечности. Аккуратное теоретическое описание возникающей дырки и просчет (аналитический или численный) функции цены вблизи границы дырки представляется весьма сложной задачей.

Подчеркнем, что вышеописанная дырка отделена от терминального множества. На рис. 30 показаны множества уровня для другого набора параметров. Соответствующий график функции цены представлен на рис. 31. Здесь также возникает дырка с бесконечным значением функции цены. Но эта дырка примыкает к терминальному множеству M . Ее легко просчитать, используя барьерные линии, выпущенные из некоторых точек на границе ∂M .

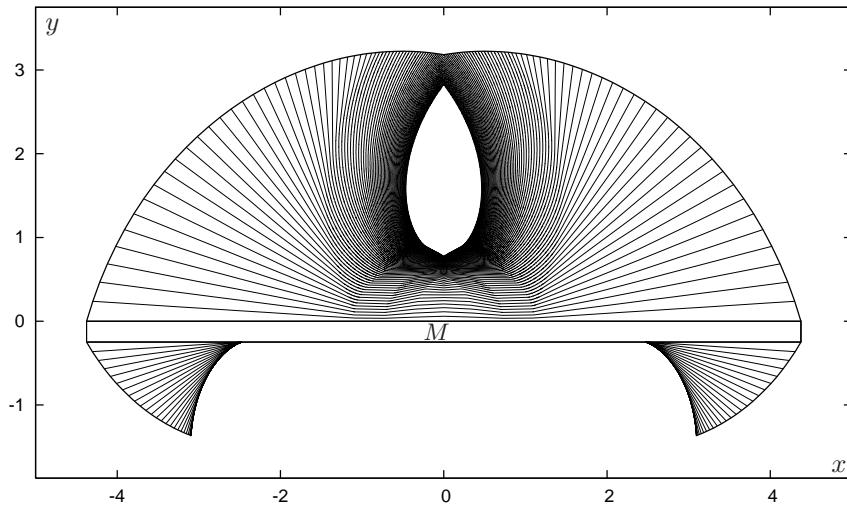


Рис. 28: Множества уровня функции цены в акустической задаче; $\nu^* = 1.5$, $s = 0.9375$; $\Delta = 0.00625$, $\delta = 0.0625$.

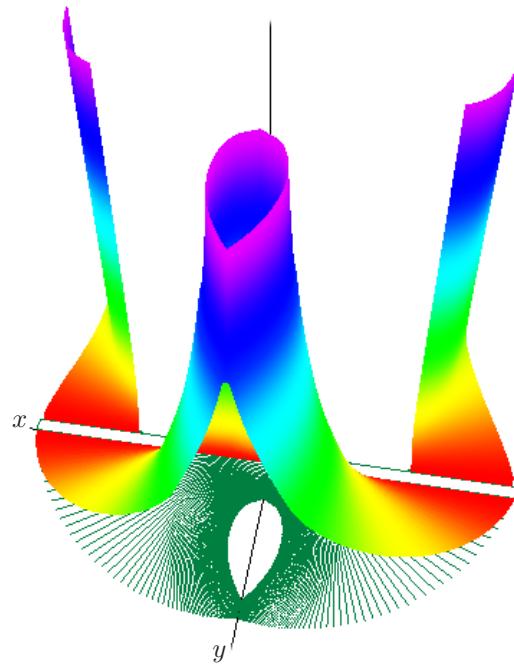


Рис. 29: График функции цены в акустической задаче; $\nu^* = 1.5$, $s = 0.9375$.

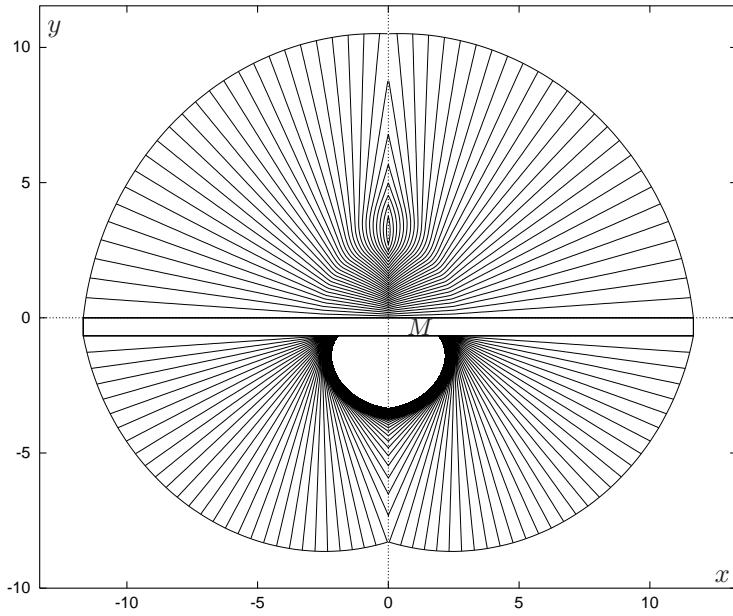


Рис. 30: Множества уровня функции цены в акустической задаче; $\nu^* = 1.4$, $s = 2.5$; $\Delta = 1/30$, $\delta = 1/6$.

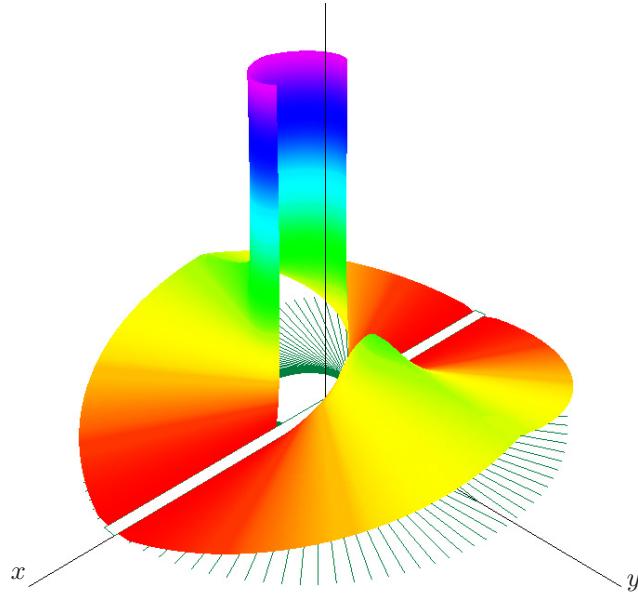


Рис. 31: График функции цены в акустической задаче; $\nu^* = 1.4$, $s = 2.5$.

5. Игра с более подвижным игроком P

Модель динамики игрока P — простейшая среди используемых в математической литературе для описания движения автомобиля (или самолета в горизонтальной плоскости). В этой модели траекториями являются линии ограниченной кривизны. В статье [18] Андрея Андреевича Маркова 1889 г. рассмотрены 4 задачи, связанные с оптимизацией на линиях ограниченной кривизны. Первая из них (рис. 32) может быть истолкована как задача управления по быстродействию автомобилем с динамикой игрока P . Подобную интерпретацию допускает и основная теорема статьи [19] Лестера Э. Дубинса, опубликованной в 1957 г. (рис. 33). Слово “автомобиль” не используется ни А. А. Марковым, ни Л. Дубинсом. В статье А. А. Маркова в качестве прикладного аспекта упоминаются проблемы прокладки железных дорог. В современных работах по теоретической робототехнике [20] объект с классической динамикой игрока P называют “автомобиль Дубинса”.

Следующей по сложности является модель автомобиля из статьи Джеймса А. Ридса и Лоуренса А. Шеппа [21]:

$$\begin{aligned}\dot{x}_p &= w \sin \theta \\ \dot{y}_p &= w \cos \theta \\ \dot{\theta} &= u, \quad |u| \leq 1, \quad |w| \leq 1.\end{aligned}$$

Управление u определяет угловую скорость перемещения. При помощи управления w скачком изменяется величина линейной скорости. В частности, автомобиль мгновенно может изменить направление своего движение на противоположное. Безынерционное изменение величины линейной скорости есть математическая идеализация. Но, цитируя [21, с. 373], “для медленно передвигающихся объектов это представляется разумным компромиссом, чтобы достичь удобства вычислений”.

Естественно рассмотреть задачи, где диапазон изменения управления w имеет вид $[a, 1]$. При этом $a \in [-1, 1]$ — параметр задачи. Если $a = 1$, получаем автомобиль Дубинса, в случае $a = -1$ — автомобиль Ридса и Шеппа.

Заменим в (2) автомобиль Дубинса автомобилем Ридса — Шеппа. Переходя к относительным координатам, получим

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -yu + v_x \\ \dot{y} &= xu - w + v_y \\ |u| &\leq 1, \quad w \in [a, 1], \quad v = (v_x, v_y)', \quad |v| \leq \nu.\end{aligned}\tag{4}$$

Управлениями u, w распоряжается игрок P , управлением v — игрок E .

Нѣсколько примѣровъ рѣшенія особаго рода задачъ о наибольшихъ и наименьшихъ величинахъ.

A. A. Маркова.

ЗАДАЧА 1.

Междуданными точками A и B (см. фиг. 1-ю) провести кратчайшую кривую линію при слѣдующихъ двухъ условіяхъ: 1) радиусъ кривизны нашей кривой повсюду долженъ быть не менѣе данной величины ρ , 2) въ точкѣ A касательная къ нашей кривой должна имѣть данное направлѣніе AC .

РѢШЕНИЕ.

Пусть M одна изъ точекъ нашей кривой, а прямая NMT соотвѣтствующая касательной.

Рис. 32: Фрагмент первой страницы статьи А. А. Маркова.

AMERICAN
JOURNAL OF MATHEMATICS

FOUNDED BY THE JOHNS HOPKINS UNIVERSITY

Volume LXXIX, Number 3
JULY, 1957

ON CURVES OF MINIMAL LENGTH WITH A CONSTRAINT ON
AVERAGE CURVATURE, AND WITH PRESCRIBED INITIAL
AND TERMINAL POSITIONS AND TANGENTS.*¹

By L. E. DUBINS.

We have now established our main result:

THEOREM I. *Every planar R -geodesic is necessarily a continuously differentiable curve which is either (1) an arc of a circle of radius R , followed by a line segment, followed by an arc of a circle of radius R ; or (2) a sequence of three arcs of circles of radius R ; or (3) a subpath of a path of type (1) or (2).*

Рис. 33: Два фрагмента из статьи Л. Дубинса.

Отметим, что Дж. Бреквелл и Дж. Левин исследовали игру сопровождения-уклонения [11,12] с круговой зоной обнаружения в

предположении, что в каждый момент времени игрок P либо движется с единичной линейной скоростью, либо остается неподвижным. Таким образом, они рассматривали динамику типа (4) при $a = 0$.

Игра шофер-убийца, где игрок P управляет автомобилем с изменяемой мгновенно величиной линейной скорости, изучалась [22] авторами данной работы. Было проведено численное исследование зависимости характера решения от параметра a , задающего левый край ограничения величины линейной скорости.

На рис. 34 представлены множества уровня функции цены игры, соответствующие одному и тому же моменту времени $\tau = 3$, но разным значениям параметра a от -1 до 1 . Для всех вычислений радиус r целевого множества и ограничение ν на управление игрока E были взяты равными 0.3 . При $a = -1$ игрок P управляет автомобилем Ридса – Шеппа и получаемое множество уровня симметрично относительно обеих осей координат. Если $a = 1$, имеем множество уровня для классической игры шофер-убийца.

На рис. 35 показаны множества уровня функции цены для $a = -0.1$, $\nu = 0.3$, $r = 0.3$. Структура фронтов хорошо видна на рис. 36,

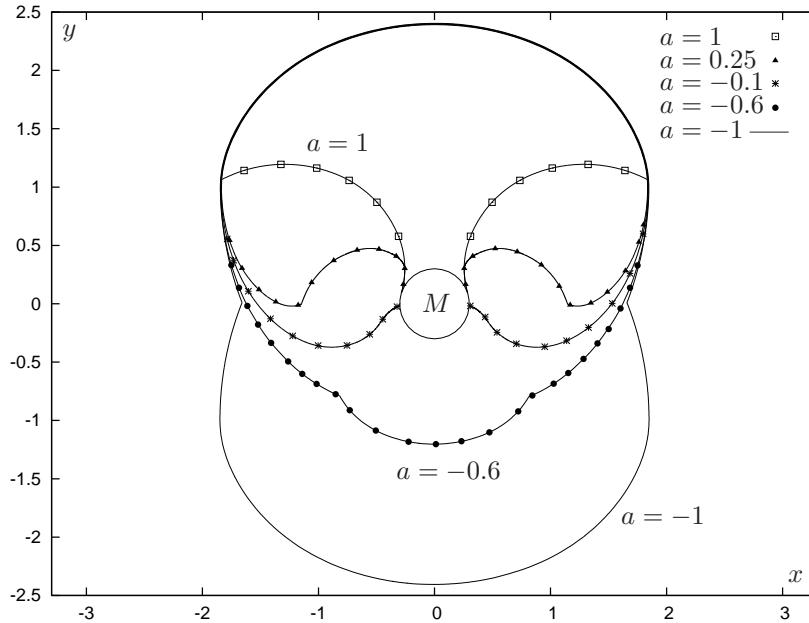


Рис. 34: Игра шофер-убийца с усложненной динамикой игрока P . Зависимость множеств уровня функции цены от параметра a для момента $\tau = 3$; $\nu = 0.3$, $r = 0.3$.

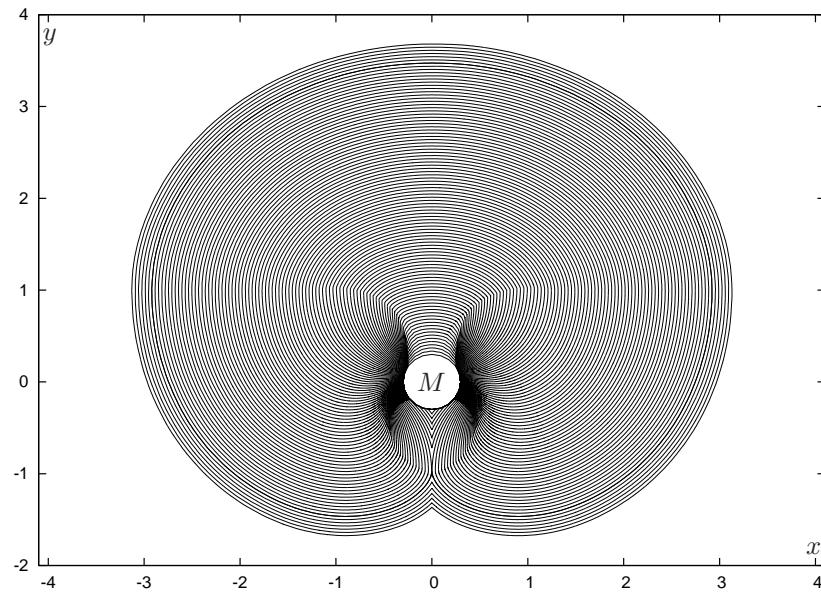


Рис. 35: Множества уровня функции цены в игре шофер-убийца с усложненной динамикой игрока P ; $a = -0.1$, $\nu = 0.3$, $r = 0.3$; $\tau_f = 4.89$, $\Delta = 0.002$, $\delta = 0.05$.

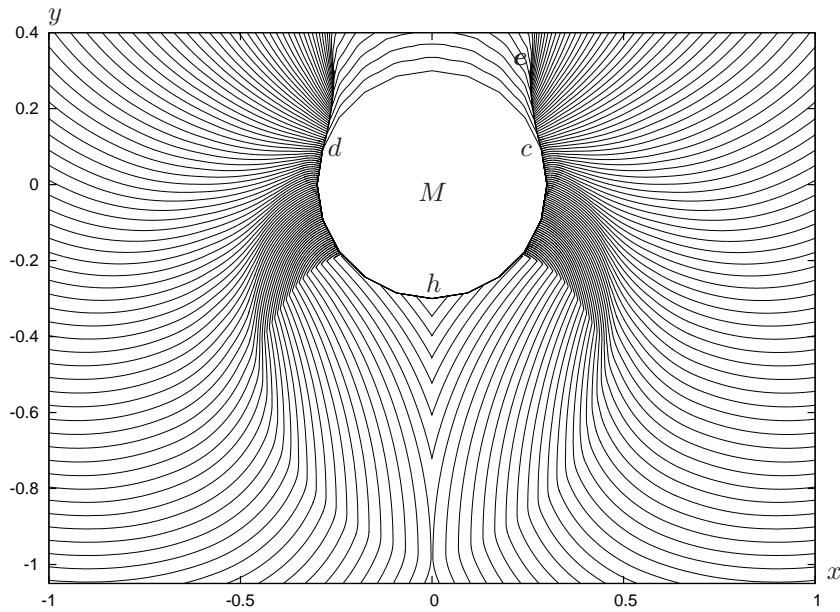


Рис. 36: Увеличенный фрагмент рис. 35.

где дан увеличенный фрагмент рис. 35. Построенные в обратном времени множества уровня функции цены доведены до момента $\tau_f = 4.89$. Именно такое значение функции цены имеем для последнего внешнего фронта и для последнего внутреннего фронта, примыкающего к нижней части границы терминального круга M . Цена игры разрывна на дуге dhc . Она терпит разрыв также вне M на двух коротких барьерных линиях, отходящих по касательной с границы M . Правая из них обозначена через ce .

6. Оптимальные стратегии

Одним из наиболее трудных вопросов при численном решении игр типа шофер-убийца (где функция цены игры разрывна) является вопрос о построении оптимальных стратегий игроков. Продемонстрируем такое построение на последнем примере из предыдущего раздела.

Мы строим ε -оптимальные стратегии, используя правило экстремального прицеливания [23,24,25]. Выбираемое управляющее воздействие остается постоянным в течение очередного шага дискретной схемы управления. Шаг дискретной схемы является параметром процедуры. Стратегию игрока P (E) определяем, используя прицеливание на ближайшую точку (отталкивание от ближайшей точки) соответствующего фронта. При этом, если движение попадает в заданный слой на положительной (отрицательной) стороне линии разрыва функции цены, то на очередном шаге дискретной схемы применяем управление игрока P (E), отталкивающее от линии разрыва.

Выберем две начальные точки $a = (0.3, -0.4)$ и $b = (0.29, 0.1)$. Первая из них находится в правой полуплоскости ниже области сгущения фронтов, вторая — близко от барьера линии на ее отрицательной стороне. Значения цены в точках a и b : $V(a) = 4.225$, $V(b) = 1.918$.

На рис. 37 показаны траектории в силу ε -оптимальных стратегий игроков при шаге выбора управлений равном 0.01. Получаемое время перевода на множество M составляет 4.230 для точки a и 1.860 для точки b . На увеличенном фрагменте (рис. 37B) траектории из начальной точки b виден скользящий режим движения по отрицательной стороне барьера.

Траектории при оптимальном поведении игрока P и неоптимальном поведении игрока E даны на рис. 38. Управление игрока E формировалось при помощи датчика случайных чисел (случайный перебор вершин многоугольника, аппроксимирующего круговое ограничение на управление игрока E). Время перевода на множество M из начальной точки a равно 2.590, из точки b оно составляет 0.300. Видно, как во втором случае траектория протыкает барьерную линию. В такой момент значение функции цены, просчитываемое вдоль движения, уменьшается скачком.

Траектории при оптимальном поведении игрока E и неоптимальном поведении игрока P представлены на рис. 39. Компонента u управления игрока P выбиралась оптимально (на основе правила экстремального прицеливания), а компонента w — неоптимально.

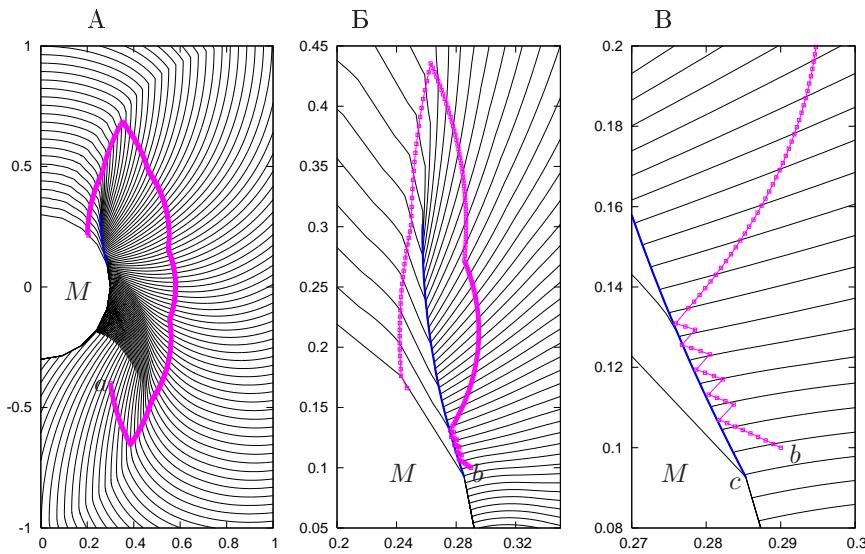


Рис. 37: Игра шофер-убийца с усложненной динамикой игрока P . Результаты моделирования оптимальных движений. (А) Начальная точка $a = (0.3, -0.4)$. (Б) Начальная точка $b = (0.29, 0.1)$. (В) Увеличенный фрагмент траектории из точки b .

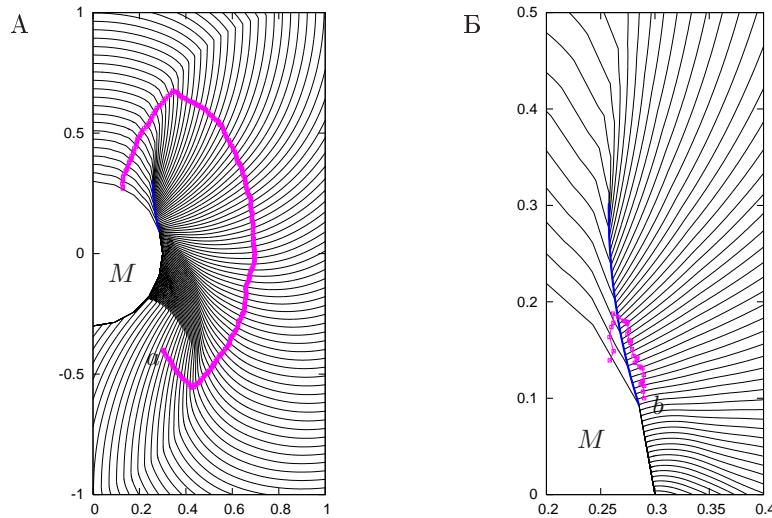


Рис. 38: Моделирование движений. Игрок P действует оптимально, управление игрока E формируется случайным образом. (А) Начальная точка $a = (0.3, -0.4)$. (Б) Начальная точка $b = (0.29, 0.1)$.

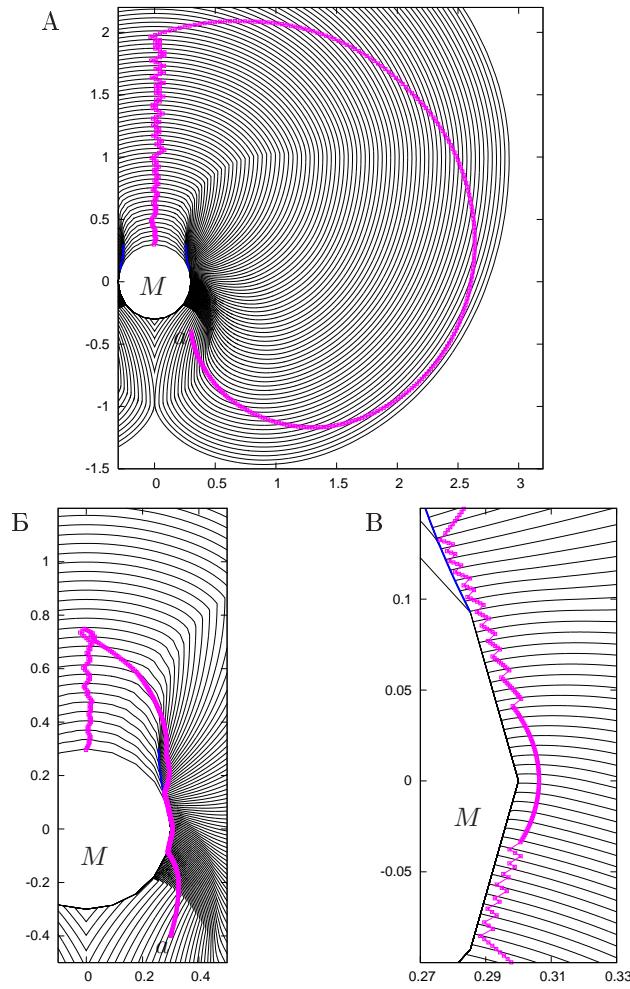


Рис. 39: Моделирование движений. Оптимальное поведение игрока E и неоптимальное управление w игрока P . Начальная точка $a = (0.3, -0.4)$.
(A) $w \equiv 1$. (Б) $w = -0.1$ до попадания траектории на вертикальную ось, $w = 1$ после схода с оси. (В) Увеличенный фрагмент траектории слева.

Для рис. 39А значение w тождественно равно 1. Время перевода на терминальное множество составляет 7.36. Для рис. 39Б и В управление $w = -1$ до попадания траектории на вертикальную ось, после этого $w = 1$. Рис. 39В демонстрирует увеличенный фрагмент траектории на рис. 39Б. Траектория проходит очень близко от терминального множества M . Время попадания на множество M равно 5.06.

7. Игра шофер-убийца как тестовый пример

В настоящее время интенсивно разрабатываются вычислительные методы и алгоритмы решения антагонистических дифференциальных игр. Часто игра шофер-убийца используется как тестовый или демонстрационный пример. Укажем некоторые [6,26,27,28,29,30] из таких работ.

В относительных координатах игра имеет второй порядок по фазовым переменным. Стало быть, для решения задачи можно применять как алгоритмы общего вида, так и учитывающие специфику плоскости. При этом нетривиальность динамики обусловлена тем, что управление u входит в правую часть двумерной системы в виде сомножителя при фазовых переменных, а ограничение на управление v может зависеть от фазового состояния. В модификации, приведенной в разделе 5, управление игрока P является двумерным. Терминальное множество в задаче, обсуждаемой в разделе 3, не обязательно выпуклое.

Наряду с антагонистическими постановками игры шофер-убийца известны некоторые близкие неантагонистические постановки, представляющие интерес для численного исследования. В этой связи отметим игру шофер-убийца с двумя целевыми множествами [31], в которой каждый из игроков P и E старается привести систему на свое целевое множество прежде своего оппонента. Дифференциальные игры с двумя целевыми множествами были введены в книге [32]. Прикладной интерпретацией таких игр может быть поединок между двумя самолетами или кораблями [33,34,35].

Заключение

Игра Р. Айзекса шофер-убийца важна для приложений и открывает широкое поле для математического исследования. Полное решение получено Э. Мерцем в его диссертации, выполненной под руководством Дж. Бреквелла. Настоящая работа носит характер обзора. Помимо классической задачи рассмотрены постановки, где изменены цели игроков или усложнено описание динамики. Приведены результаты численного построения множеств уровня функции цены игры и графиков функции цены.

Литература

- [1] ISAACS R. Games of pursuit. Scientific report of the RAND Corporation. Santa Monica. 1951.
- [2] ISAACS R. *Differential games*. NY: John Wiley. 1965.
- [3] АЙЗЕКС Р. *Дифференциальные игры*. М.: Мир. 1967.
- [4] BREITNER M. The genesis of differential games in light of Isaacs' contributions. *J. Opt. Theory Appl.* 2005. Vol. 124(3). P. 523–559.
- [5] PATSKO V. S., TUROVA V. L. Homicidal chauffeur game: history and modern studies. Scientific report of the Institute of Mathematics and Mechanics (Ural Branch of the Russian Academy of Sciences). Ekaterinburg. 2008.
- [6] PATSKO V. S., TUROVA V. L. Level sets of the value function in differential games with the homicidal chauffeur dynamics. *Int. Game Theory Review*. 2001. Vol. 3(1). P. 67–112.
- [7] AVERBUKH V.L., ISMAGILOV T.R., PATSKO V.S., РУКХТЕЕВ О.А., TUROVA V. L. Visualization of value function in time-optimal differential games. In: A. Handlovicová, M. Komorníková, K. Mikula, D. Ševčovič (eds.), *Algoritmy 2000, 15th Conference on Scientific Computing*. Vysoke Tatry – Podbanske, Slovakia, September 10–15, 2000. P. 207–216.
- [8] BREAKWELL J. V., MERZ A. W. Toward a complete solution of the homicidal chauffeur game. *Proc. of the 1st Int. Conf. on the Theory and Application of Differential Games*, Amherst, Massachusetts, 1969. P. III-1–III-5.
- [9] MERZ A. W. The homicidal chauffeur. *AIAA Journal*. 1974. Vol. 12(3). P. 259–260. Русский перевод: МЕРЦ. Об игровой задаче «шофер-убийца». *Ракетная техника и космонавтика (Журн. amer. инст. аэрон. и космон.)*. 1974. Т. 12(3). С. 5–7.
- [10] MERZ A. W. The homicidal chauffeur — a differential game: PhD thesis. Stanford University, 1971.
- [11] LEWIN J. Decoy in pursuit-evasion games: PhD thesis. Stanford University, 1973.
- [12] LEWIN J., BREAKWELL J. V. The surveillance-evasion game of degree. *J. Opt. Theory Appl.* 1975. Vol. 16(3–4). P. 339–353.

- [13] LEWIN J., OLSDER G. J. Conic surveillance evasion. *J. Opt. Theory Appl.* 1979. Vol. 27(1). P. 107–125.
- [14] CARDALIAGUET P., QUINCAMPOIX M., SAINT-PIERRE P. Numerical methods for optimal control and differential games. Ceremade CNRS URA 749. University of Paris - Dauphine. 1995.
- [15] CARDALIAGUET P., QUINCAMPOIX M., SAINT-PIERRE P. Set-valued numerical analysis for optimal control and differential games. In: M. Bardi, T. E. S. Raghavan, and T. Parthasarathy (eds.), *Stochastic and Differential Games: Theory and Numerical Methods, Annals of the Int. Soc. of Dynamic Games*. Boston: Birkhäuser. 1999. Vol. 4. P. 177–247.
- [16] BERNHARD P., LARROUTUROU B. Etude de la barriere pour un probleme de fuite optimale dans le plan. Rapport de Recherche. Sophia-Antipolis: INRIA. 1989.
- [17] AUBIN J.-P. *Viability theory*. Basel: Birkhäuser. 1991.
- [18] МАРКОВ А. А. Несколько примеров решения особого рода задач о наибольших и наименьших величинах. *Сообщения Харьковского математического общества*. 1889. Сеп. 2. Т. 1. №№ 5, 6. С. 250–276.
- [19] DUBINS L. E. On curves of minimal length with a constraint on average curvature and with prescribed initial and terminal positions and tangents. *Amer. J. Math.* 1957. Vol. 79. P. 497–516.
- [20] LAUMOND J.-P. (ed.) *Robot motion planning and control. Lect. Notes in Contr. and Inform. Sci.* Vol. 229. NY: Springer. 1998.
- [21] REEDS J. A., SHEPP L. A. Optimal paths for a car that goes both forwards and backwards. *Pacific J. Math.* 1990. Vol. 145(2). P. 367–393.
- [22] PATSKO V. S., TUROVA V. L. Numerical investigation of the value function for the homicidal chauffeur problem with a more agile pursuer. In: P. Bernhard, V. Gaitsgory, O. Pourtallier (eds.), *Advances in Dynamic Games and Their Applications: Analytical and Numerical Developments, Annals of the Int. Soc. of Dynamic Games*. Boston: Birkhäuser. 2009. Vol. 10. P. 231–258.
- [23] КРАСОВСКИЙ Н. Н. *Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата*. М.: Наука. 1985.
- [24] КРАСОВСКИЙ Н. Н., СУББОТИН А. И. *Позиционные дифференциальные игры*. М.: Наука. 1974.

- [25] KRASOVSKII N. N., SUBBOTIN A. I. *Game-theoretical control problems*. NY: Springer. 1988.
- [26] BARDI M., FALCONE M., SORAVIA P. Numerical methods for pursuit-evasion games via viscosity solutions. In: M. Bardi, T. E. S. Raghavan, T. Parthasarathy (eds.), *Stochastic and Differential Games: Theory and Numerical Methods, Annals of the Int. Soc. of Dynamic Games*. Boston: Birkhäuser. 1999. Vol. 4. P. 105–175.
- [27] MEYER A., BREITNER M. H., KRIESELL M. A pictured memorandum on synthesis phenomena occurring in the homicidal chauffeur game. In: G. Martin-Herran, G. Zaccour (eds.), *Proceedings of the Fifth International ISDG Workshop. International Society of Dynamic Games*. Segovia. 2005. P. 17–32.
- [28] МИХАЛЕВ Д. К., УШАКОВ В. Н. О двух алгоритмах приближенного построения множества позиционного поглощения в игровой задаче сближения. *AuT*. 2007. № 11. С. 178–194.
- [29] MITCHELL I. Application of level set methods to control and reachability problems in continuous and hybrid systems: PhD Thesis. Stanford University, 2002.
- [30] RAIPIO T., EHTAMO H. On numerical solution of a class of pursuit-evasion games. In: J. A. Filar, K. Mizukami and V. Gaitsgory (eds.), *Advances in Dynamic Games and Applications, Annals of the Int. Soc. of Dynamic Games*. Boston: Birkhäuser. 2000. Vol. 5. P. 177–192.
- [31] GETZ W. M., PACTER M. Two-target pursuit-evasion differential games in the plane. *J. Opt. Theory Appl.* 1981. Vol. 34(3). P. 383–403.
- [32] BLAQUIERE A., GERARD F., LEITMANN G. *Quantitative and qualitative differential games*. New York: Academic Press. 1969.
- [33] DAVIDOVITZ A., SHINAR J. Two-target game model of an air combat with fire-and-forget all-aspect missiles. *J. Opt. Theory Appl.* 1989. Vol. 63(2). P. 133–165.
- [34] MERZ A. W. To pursue or to evade — that is the question. *J. of Guidance, Control, and Dynamics*. 1985. Vol. 8(2). P. 161–166.
- [35] OLSDER G. J., BREAKWELL J. V. Role determination in aerial dogfight. *Int. J. of Game Theory*. 1974. Vol. 3. P. 47–66.

Оглавление

Введение	3
1. Классическая постановка Р. Айзекса	9
2. Исследования Дж. Бреквелла и Э. Мерца	15
3. Игра сопровождения-уклонения.	24
4. Акустическая задача шофер-убийца	28
5. Игра с более подвижным игроком P	31
6. Оптимальные стратегии.	36
7. Игра шофер-убийца как тестовый пример.	39
Заключение.	39
Литература	40

Научное издание

Валерий Семенович Пацко
Варвара Леонидовна Турова

ИГРА ШОФЕР-УБИЙЦА:
ИСТОРИЯ И СОВРЕМЕННЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Научные доклады

Рекомендовано к изданию Ученым советом
Института математики и механики
и НИСО УрО РАН

Ответственный за выпуск *А. Г. Иванов*

НИСО УрО РАН N 17(09)
Подписано в печать 15.08.09. Формат 60 × 84/16.
Бумага типографская. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 2,75. Уч-изд. л. 3,1. Тираж 200. Заказ 152.

Подготовлено в Институте математики и механики УрО РАН.
620219, Екатеринбург, ГСП-384, ул. С. Ковалевской, 16,
Институт математики и механики УрО РАН

Отпечатано в типографии
«Уральский центр академического обслуживания»
620219, Екатеринбург, ул. Первомайская, 91