

ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МЕХАНИКИ АН СССР



Б.Н.Соколов, В.Л.Турова

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ МАЯТНИКОМ
В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ПОМЕХ

ПРЕПРИНТ № 336



МОСКВА 1988 год

**ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МЕХАНИКИ
АКАДЕМИИ НАУК СССР**

Б.Н.СОКОЛОВ, В.Л.ТУРОВА

**ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ МАЯТНИКОМ
В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ПОМЕХ**

Препринт № 336

Москва 1988 год

А Н Н О Т А Ц И Я

В препринте проведено численное исследование задачи о гашении колебаний маятника, управляемого при помощи изменения скорости точки подвеса и подверженного влиянию неопределенной помехи. Задача формализуется как линейная дифференциальная игра второго порядка с выпуклым целевым множеством. Рассмотрены две постановки: с фиксированным (задача 1) и нефиксированным (задача 2) моментом окончания. Для игры с фиксированным моментом окончания проанализирована структура множества позиционного поглощения, найдены поверхности переключения игроков, определяющие игровой синтез оптимального управления, промоделированы траектории маятника. Для задачи 2 построены сечения множества позиционного поглощения и проведено сравнение их с соответствующими множествами из задачи 1.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время в теории дифференциальных игр интенсивно развиваются численные методы. Это вызвано, с одной стороны, необходимостью решения практических задач оптимального управления объектами, функционирующими в условиях неопределенных помех, а с другой — потребностями самой теории, когда созданные алгоритмы и программы становятся инструментом исследования и помогают в получении новых результатов.

Наибольшее продвижение в численных методах теории дифференциальных игр получено для линейных дифференциальных игр второго и третьего порядков с фиксированным моментом окончания. Созданные в Институте математики и механики УрО АН СССР программы [1], позволяют строить множества уровня функции цены игры, поверхности переключения игроков, определяющие оптимальные стратегии, моделировать оптимальные траектории. Указанные программы применены к решению задачи о посадке самолёта в условиях сдвига ветра [2].

Препринт посвящён численному исследованию задачи об успокоении маятника, подвержённого влиянию действующей на груз помехи и управляемого при помощи изменения скорости точки подвеса. Задача формализуется как линейная дифференциальная игра второго порядка. Использование упомянутых выше программ позволяет получить полное решение игры: установить структуру множества позиционного поглощения (множества уровня функции цены игры), построить синтез оптимального управления скоростью точки подвеса, промоделировать оптимальные и неоптимальные движения маятника. Хотя рассматриваемая задача является скорее модельной, нежели практической, полученные результаты интересны тем, что имеют наглядную механическую интерпретацию и демонстрируют возможности современных численных методов теории дифференциальных игр.

Препринт примыкает к исследованиям [3-4], посвященным построению законов оптимального управления колебательными

ми системами. Особенностью по сравнению с постановками из [3] является учет влияния помех.

§ I. Постановки задач

Точка подвеса маятника перемещается вдоль горизонтальной направляющей с ограниченной по величине скоростью. На груз маятника в плоскости его движения действует ограниченная по модулю сила, интерпретируемая как сила ветра. Движение рассматривается на промежутке времени $[0, T]$.

Задача 1 (с фиксированным моментом окончания). Управляя скоростью точки подвеса, требуется минимизировать гарантированное значение полной энергии маятника в заданный момент времени T .

Задача 2 (с нефиксированным моментом окончания). Управляя скоростью точки подвеса, минимизировать гарантированное значение полной энергии маятника к заданному моменту времени T .

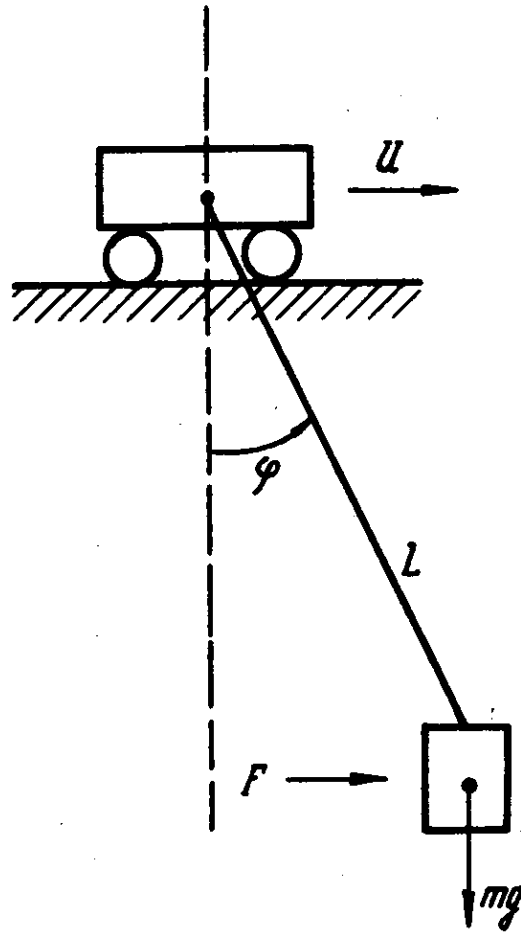
Перейдем к математической постановке сформулированных задач. Движение маятника в предположении малости колебаний под действием силы тяжести, силы ветра и силы инерции, обусловленной перемещением точки подвеса, описывается уравнениями

$$\dot{\varphi} = \omega$$

$$I \dot{\omega} = -mgL\varphi - mL\dot{u} + LF \quad (I.I)$$

$$|u| \leq u_0, \quad |F| \leq F_0.$$

Здесь φ - угол отклонения маятника от вертикали (фиг. I), отсчитываемый против часовой стрелки, ω - угловая скорость, L - длина подвеса, m - масса груза, I - момент инерции маятника относительно подвеса, u - скорость точки



Фиг. I. Маятник с подвижной точкой подвеса

подвеса, F - сила ветра, g - ускорение силы тяжести, t - время. Значения u_0 , F_0 - ограничения соответственно на скорость точки подвеса и величину силы ветра.

Обозначим

$$T_0 = \left(\frac{I}{mgL} \right)^{1/2}$$

и перейдем к безразмерным (штрихованным) переменным по формулам

$$t = T_0 t', \quad u = u_0 u', \quad \varphi = u_0 T_0^{-1} g^{-1} \varphi',$$

$$T = T_0 T', \quad F = m u_0 T_0^{-1} v'.$$

После перехода уравнения (I.I) упростятся и примут вид

$$\frac{d\varphi'}{dt'} = \omega'$$
$$\frac{d\omega'}{dt'} = -\varphi' + \frac{du'}{dt'} + v'$$

$$|u'| \leq 1, \quad |v'| \leq v_0 = F_0 T_0 m^{-1} u_0^{-1}.$$

Штрихи далее будем опускать.

Введем новую переменную ψ по формуле

$$\psi = \omega + u$$

Отметим, что величина $u_0(\omega + u)$ равна абсолютной скорости груза, поэтому переменная ψ имеет смысл его абсолютной безразмерной скорости.

Запишем уравнения движения в переменных φ , ψ

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= \varphi - u \\ \dot{\psi} &= -\varphi + v\end{aligned}\tag{I.2}$$

$$|u| \leq 1, \quad |v| \leq v_0.$$

Выражение для полной энергии маятника в момент времени t складывается из кинетической и потенциальной энергии груза и имеет в новых переменных вид

$$E(t) = \frac{1}{2} m u_0^2 (\varphi^2(t) + \psi^2(t)).$$

Для задачи I рассмотрим показатель качества

$$\Gamma(\varphi(T), \psi(T)) = (\varphi^2(T) + \psi^2(T))^{1/2},\tag{I.3}$$

имеющий смысл квадратного корня из безразмерной полной энергии маятника в момент T . Цель первого игрока, распоряжающегося скоростью u точки подвеса, состоит в минимизации показателя $\Gamma(\varphi(T), \psi(T))$; интересы второго игрока, распоряжающегося параметром v , противоположны. Требуется построить управление $u(t, \varphi, \psi)$ скоростью точки подвеса, доставляющее наименьшее гарантированное значение показателю (I.3).

В задаче 2 цель первого игрока состоит в минимизации величины

$$\min_{t \in [0, T]} \Gamma(\varphi(t), \psi(t)) = \min_{t \in [0, T]} (\varphi^2(t) + \psi^2(t))^{1/2},$$

интересы второго игрока противоположны. Момент окончания игры, следовательно, не фиксирован. Строгая формальная постановка задач I,2 соответствует подходу, принятому в [5].

В препринте получено полное решение задачи с фиксированным моментом окончания: установлена структура множеств уровня функции цены игры, найдены оптимальные стратегии обоих игроков и промоделированы траектории маятника в силу этих стратегий. Для задачи с нефиксированным временем окончания проведено построение множеств уровня функции цены игры и сравнение их с соответствующими множествами в задаче I. Построение оптимального управления скоростью точки подвеса для задачи 2 не рассматривается.

§ 2. Численное решение задачи I

I. Множества уровня функции цены игры. Пусть $V(t, \varphi, \psi)$ - функция цены игры [5]. Множество уровня

$$W_c = \{(t, \varphi, \psi) \in [0, T] \times R^2 : V(t, \varphi, \psi) \leq c\}$$

является максимальным и -стабильным мостом [5] по отношению к целевому множеству

$$M_c = \{(\varphi, \psi) \in R^2 : \Gamma(\varphi, \psi) \leq c\}$$

и представляет собой совокупность всех начальных позиций (t, φ, ψ) , начиная из которых первый игрок обеспечивает приведение системы (I.2) на M_c в момент T . Символом $W_c(t)$ обозначим сечение множества W_c в момент t . Имеем

$$W_c(t) = \{(\varphi, \psi) \in R^2 : (t, \varphi, \psi) \in W_c\}.$$

О геометрии максимального u -стабильного моста можно судить по набору его сечений. Для построения сечений $W_c(t)$ в задаче I использовалась стандартная программа из [1]. Указанная программа осуществляет преобразование от переменных φ, ψ к переменным ξ_1, ξ_2 по формуле

$$\begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{bmatrix} = X(T, t) \begin{bmatrix} \varphi(t) \\ \psi(t) \end{bmatrix}, \quad (I.4)$$

где $X(T, t)$ - фундаментальная матрица решений системы

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \psi \\ \dot{\psi} &= -\varphi, \end{aligned}$$

то есть

$$X(T, t) = \begin{bmatrix} \cos(T-t) & \sin(T-t) \\ -\sin(T-t) & \cos(T-t) \end{bmatrix}.$$

После перехода к новым переменным уравнения (I.2) приводятся к виду без фазовой переменной в правой части

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1(t) &= -\cos(T-t)u + \sin(T-t)v \\ \dot{\xi}_2(t) &= \sin(T-t)u + \cos(T-t)v \end{aligned} \quad (I.5)$$

$$|u| \leq 1, \quad |v| \leq v_0.$$

Поскольку $X(T, T) = E$, то $\xi_1(T) = \varphi(T)$, $\xi_2(T) = \psi(T)$; следовательно, показатель качества сохраняется.

Программа строит сечения $\tilde{W}_c(t)$ максимального u -стабильного моста \tilde{W}_c для игры (I.5). При этом множества $\tilde{W}_c(t)$, $W_c(t)$ связаны соотношением

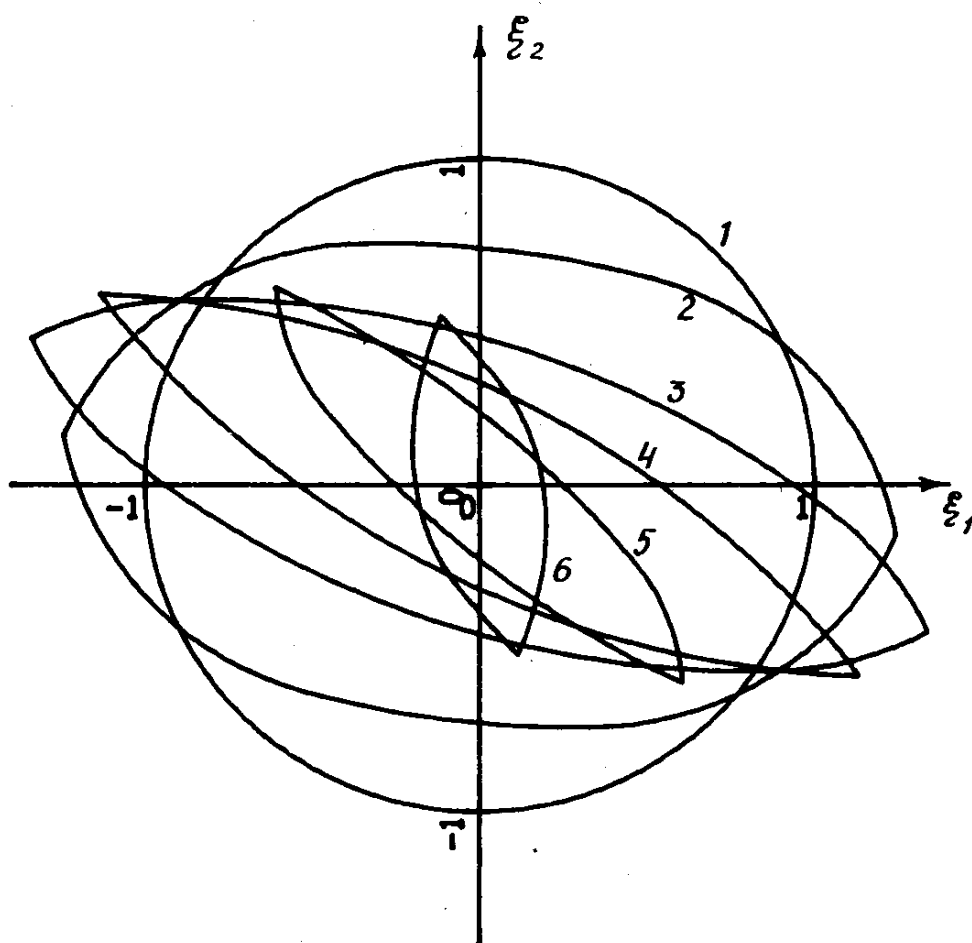
$$W_c(t) = \{(\varphi, \psi) \in R^2 : X(T, t)(\varphi, \psi)^* \in \tilde{W}_c(t)\}.$$

Здесь * - символ транспонирования. В нашем случае в силу конкретного вида матрицы $X(T, t)$ сечение $W_c(t)$ отличается от $\tilde{W}_c(t)$ поворотом на угол $T-t$ против часовой стрелки. Построения осуществляются программой в обратном времени, введённом формулой $\tau = T-t$. Ради краткости вместо $\tilde{W}_c(T-\tau)$ будем писать $\tilde{W}_c(\tau)$.

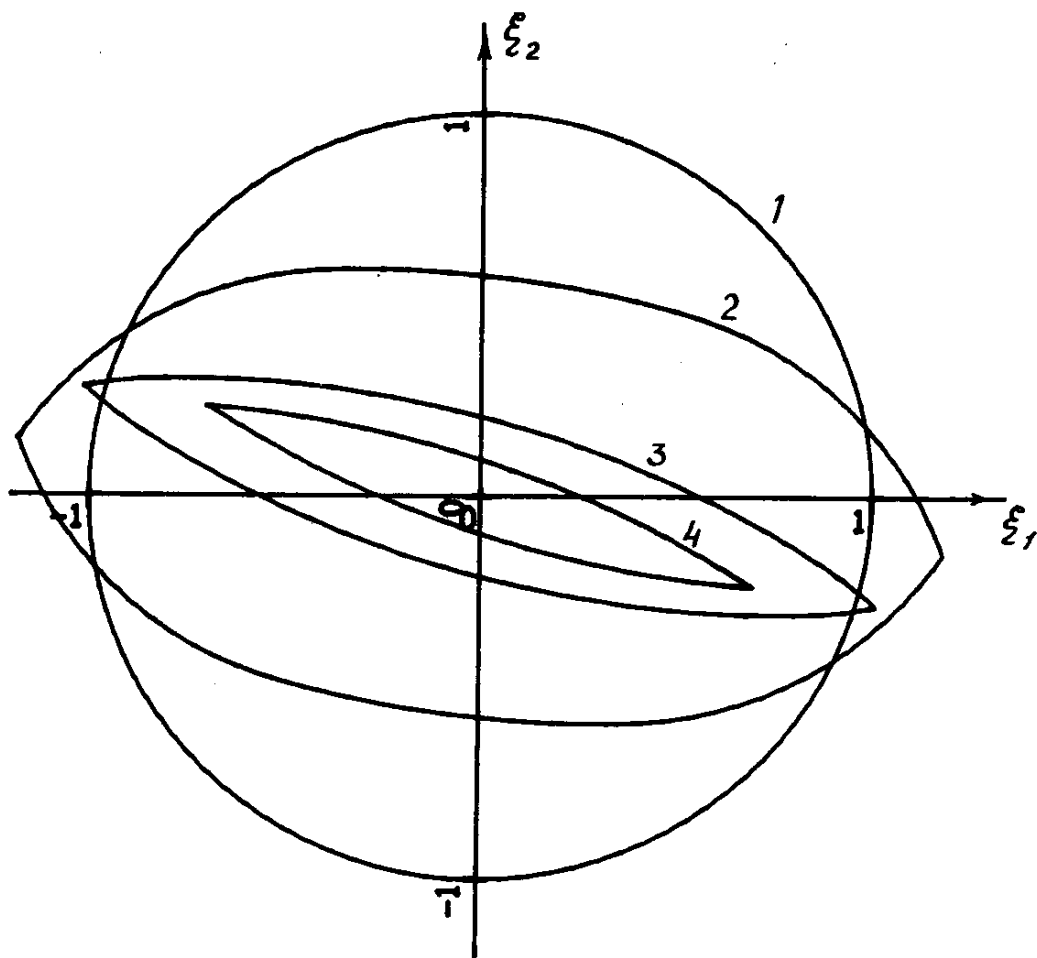
На фиг.2 показаны сечения $\tilde{W}_c(\tau_i)$ для моментов обратного времени $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = 0.3$, $\tau_3 = 0.6$, $\tau_4 = 1$, $\tau_5 = 1.5$, $\tau_6 = 2$. Параметр c равен единице, т.е. целевое множество M_c - круг единичного радиуса. Ограничение v_0 на управление второго игрока равно единице. Сечения пронумерованы в соответствии с нумерацией моментов τ_i . Для этого примера с ростом τ происходит сужение моста и в момент $\tau_* = 2.35$ наступает обрыв, т.е. $\tilde{W}_c(\tau) = \emptyset$ при $\tau \geq \tau_*$.

Расширение возможностей второго игрока, выражающееся в увеличении значения v_0 ("силы ветра"), должно приводить к сужению моста (уменьшению области состояний, откуда первый игрок успешно решает задачу приведения на множество M_c). Это продемонстрировано на фиг.3, для которой $v_0 = 1.5$, а целевое множество - прежнее. Обрыв моста здесь наступает уже при $\tau_* = 0.78$. Показаны сечения для моментов $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = 0.3$, $\tau_3 = 0.6$, $\tau_4 = 0.7$.

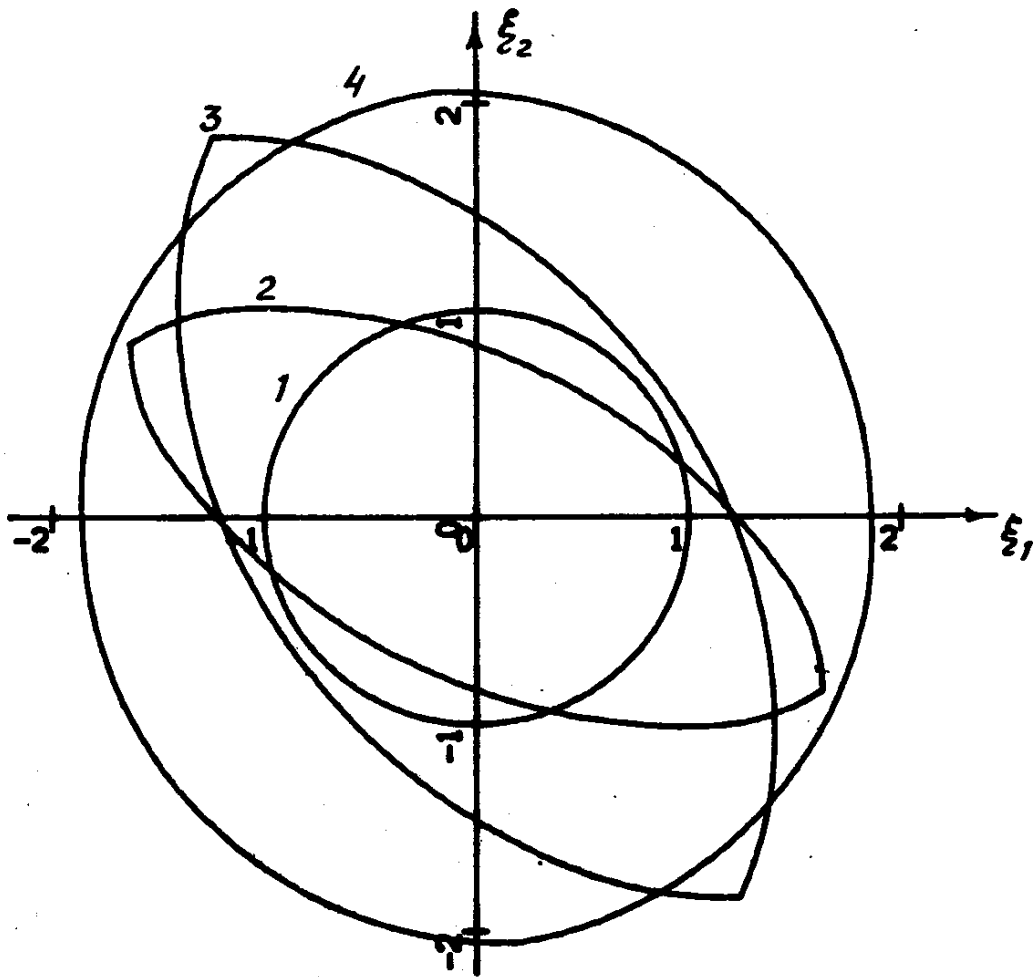
Уменьшение значения v_0 приводит, наоборот, к расширению моста. На фиг.4 представлены сечения $\tilde{W}_c(\tau_i)$ в моменты $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = 1$, $\tau_3 = 2$, $\tau_4 = 3$. При этом $v_0 = 0.5$, $c = 1$.



Фиг.2. Сечения $\tilde{W}_c(\tau_i)$ множества уровня функции
цены игры при $c=1$, $v_0=1$, для моментов
 $\tau_1=0$, $\tau_2=0.3$, $\tau_3=0.6$, $\tau_4=1$, $\tau_5=1.5$, $\tau_6=2$.



Фиг.3. Сечения $\tilde{W}_c(\tau_i)$ множества уровня функции
цены игры при $c=1$, $v_0=1.5$ для моментов
 $\tau_1=0$, $\tau_2=0.3$, $\tau_3=0.6$, $\tau_4=0.7$.



Фиг.4. Сечения $\tilde{W}_c(\tau_i)$ множества уровня функции
цены игры при $c=1$, $\nu_0=0.5$ для моментов
 $\tau_1=0$, $\tau_2=1$, $\tau_3=2$, $\tau_4=3$.

Введём величины $\xi_{1c}(\tau)$, $\xi_{2c}(\tau)$ по формулам

$$\xi_{1c}(\tau) = \max \{ \xi_1 : (\xi_1, \xi_2) \in \tilde{W}_c(\tau) \}$$

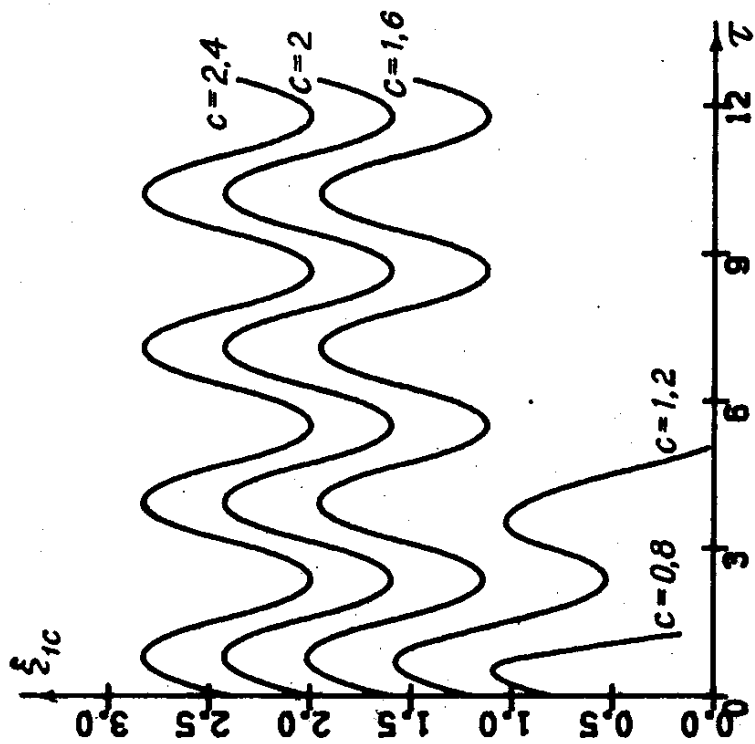
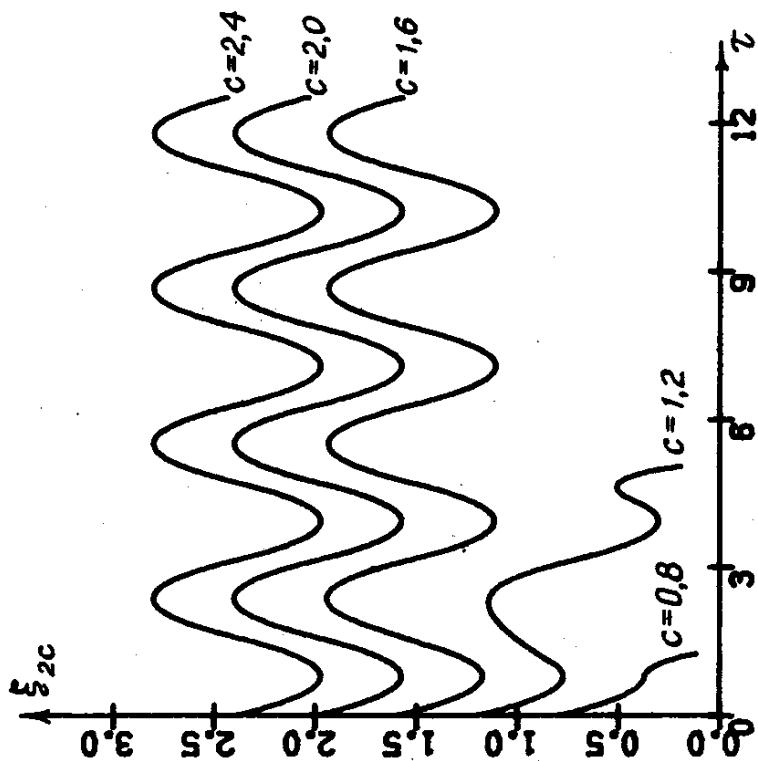
$$\xi_{2c}(\tau) = \max \{ \xi_2 : (\xi_1, \xi_2) \in \tilde{W}_c(\tau) \}.$$

Графики зависимостей ξ_{1c} , ξ_{2c} от τ также дают представление о строении моста \tilde{W}_c . Обрыв линии $\xi_{1c}(\tau)$, $\xi_{2c}(\tau)$ в некоторый момент τ_* соответствует обрыву моста в этот момент. На фиг. 5 показаны графики зависимостей величин ξ_{1c} , ξ_{2c} от τ . Значения c брались из промежутка $[0.8, 2.4]$ с шагом 0.4. Момент окончания игры равен 4π , ограничение ν_0 равно единице. Периодичность с периодом π изменения ξ_{1c} , ξ_{2c} от τ при $c \geq 2$ отражает периодичность в развитии сечений, т.е. при $c \geq 2$

$$\tilde{W}_c(\tau + \pi) = \tilde{W}_c(\tau).$$

2. П о в е р х н о с т и п е р е к л ю ч е н и я .
Известно [6, 7], что оптимальные стратегии первого и второго игроков в рассматриваемой задаче определяются поверхностями переключения в пространстве (t, ξ_1, ξ_2) . Фактически достаточно знать сечения поверхностей переключения плоскостями $t = const$. Поверхность первого игрока обозначим через Π , второго игрока - через S ; сечения поверхностей в момент t обозначим соответственно $\Pi(t)$, $S(t)$. Алгоритм построения линий $\Pi(t)$, $S(t)$ основан на обработке сечений $\tilde{W}_c(t)$ и описан в работах [2, 6]. Имеется программа, позволяющая получать набор линий $\Pi(t)$, $S(t)$ на сетке моментов времени.

Оптимальная стратегия первого игрока определяется следующим образом. Обозначим



Фиг. 5.

$$D(t) = X(T, t)B = [-\cos(T-t), \sin(T-t)]^*.$$

Здесь $B = (-1, 0)^*$ - вектор при управлении первого игрока в системе (1.2). Ту часть плоскости, куда направлен вектор $D(t)$, обозначим символом $\Pi_-(t)$, оставшуюся часть - символом $\Pi_+(t)$. Такое определение корректно, поскольку линия $\Pi(t)$ делит плоскость на две части, а прямая, параллельная вектору $D(t)$, пересекает линию $\Pi(t)$ лишь в одной точке. Для $t \in [0, T]$ положим

$$U^\circ(t, \xi) = \begin{cases} -1, & \xi \in \Pi_-(t) \\ 1, & \xi \in \Pi_+(t) \\ [-1, 1], & \xi \in \Pi(t) \end{cases}.$$

Стратегия U° является оптимальной и обладает устойчивостью по отношению к информационным помехам и погрешностям построения линий переключения [6].

Оптимальная стратегия V° второго игрока определяется аналогично с заменой линии $\Pi(t)$ на $S(t)$, а вектора $D(t)$ - на вектор

$$G(t) = X(T, t)C = [\sin(T-t), \cos(T-t)]^*.$$

Здесь $C = (0, 1)^*$ - вектор при управлении второго игрока в системе (1.2). Стратегия

$$V^\circ(t, \xi) = \begin{cases} v_0, & \xi \in S_-(t) \\ -v_0, & \xi \in S_+(t), \quad t \in [0, T] \\ [-v_0, v_0], & \xi \in S(t) \end{cases}$$

является оптимальной, но в отличие от стратегии U^o не обладает устойчивостью [8].

На фиг. 6-9 показаны линии $\Pi(\tau)$, $S(\tau)$, построенные при $\nu_0 = 1$ для моментов обратного времени $\tau = 0.7, 1, 2, 3$. Для каждого из моментов показано сечение $\tilde{W}_c(\tau)$, отвечающее $c = 2\nu_0$. Вне множества $\tilde{W}_{2\nu_0}(\tau)$ линии $\Pi(\tau)$, $S(\tau)$ имеют простую структуру (являются полупрямыми) и принадлежат рассеивающим [9] частям поверхностей Π , S . Для этих и некоторых других участков линий $\Pi(\tau)$, $S(\tau)$ в [10] получено аналитическое описание. Приведем его здесь лишь частично. Обозначим

$$Q = (1 + \nu_0^2)^{1/2}, \quad \alpha = \arcsin Q^{-1}.$$

Рассмотрим сначала $\tau \in [0, \pi/2]$. Вне множества $\tilde{W}_{2\nu_0}(\tau)$ линия $\Pi(\tau)$ описывается параметрическими уравнениями

$$\xi_1(\tau) = c \sin \tau - 2Q \sin \frac{\tau}{2} \sin\left(\frac{\tau}{2} - \alpha\right),$$

$$\xi_2(\tau) = c \cos \tau - 2Q \sin \frac{\tau}{2} \cos\left(\frac{\tau}{2} - \alpha\right),$$

а линия $S(\tau)$ - уравнениями

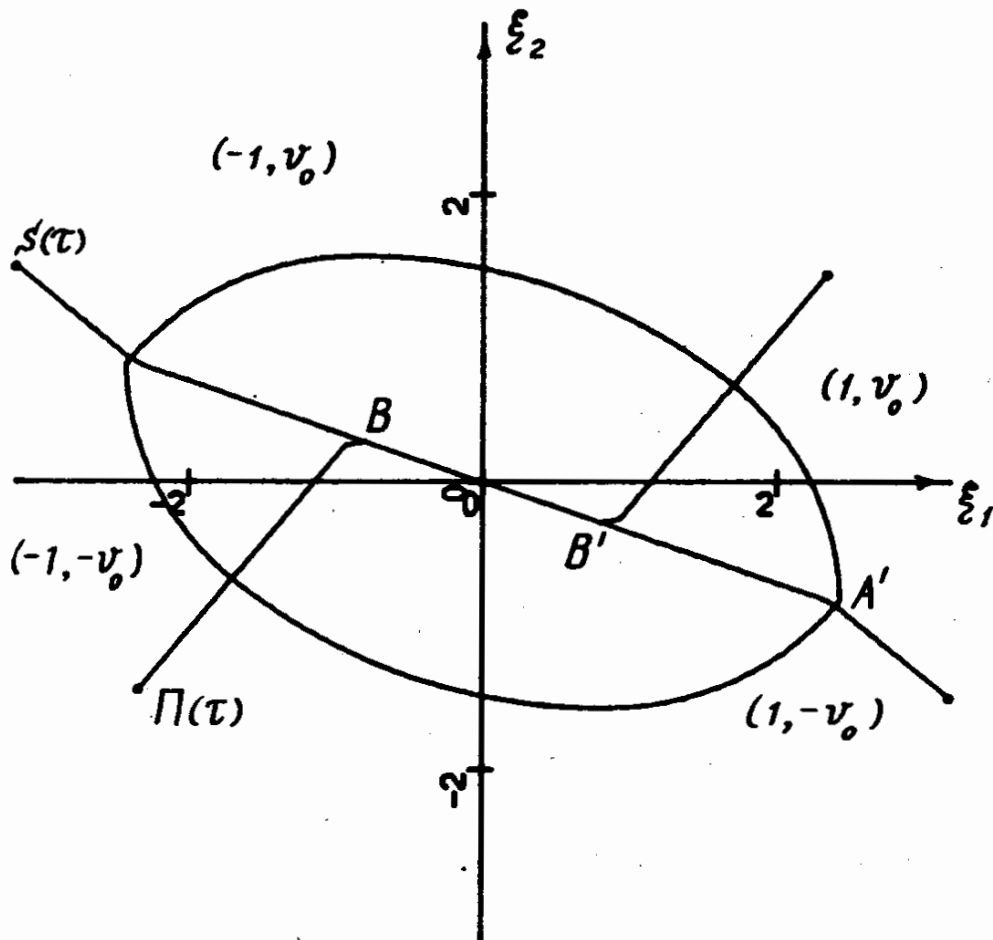
$$\xi_1(\tau) = -c \cos \tau - 2Q \sin \frac{\tau}{2} \sin\left(\frac{\tau}{2} + \alpha\right),$$

$$\xi_2(\tau) = c \sin \tau - 2Q \sin \frac{\tau}{2} \cos\left(\frac{\tau}{2} + \alpha\right).$$

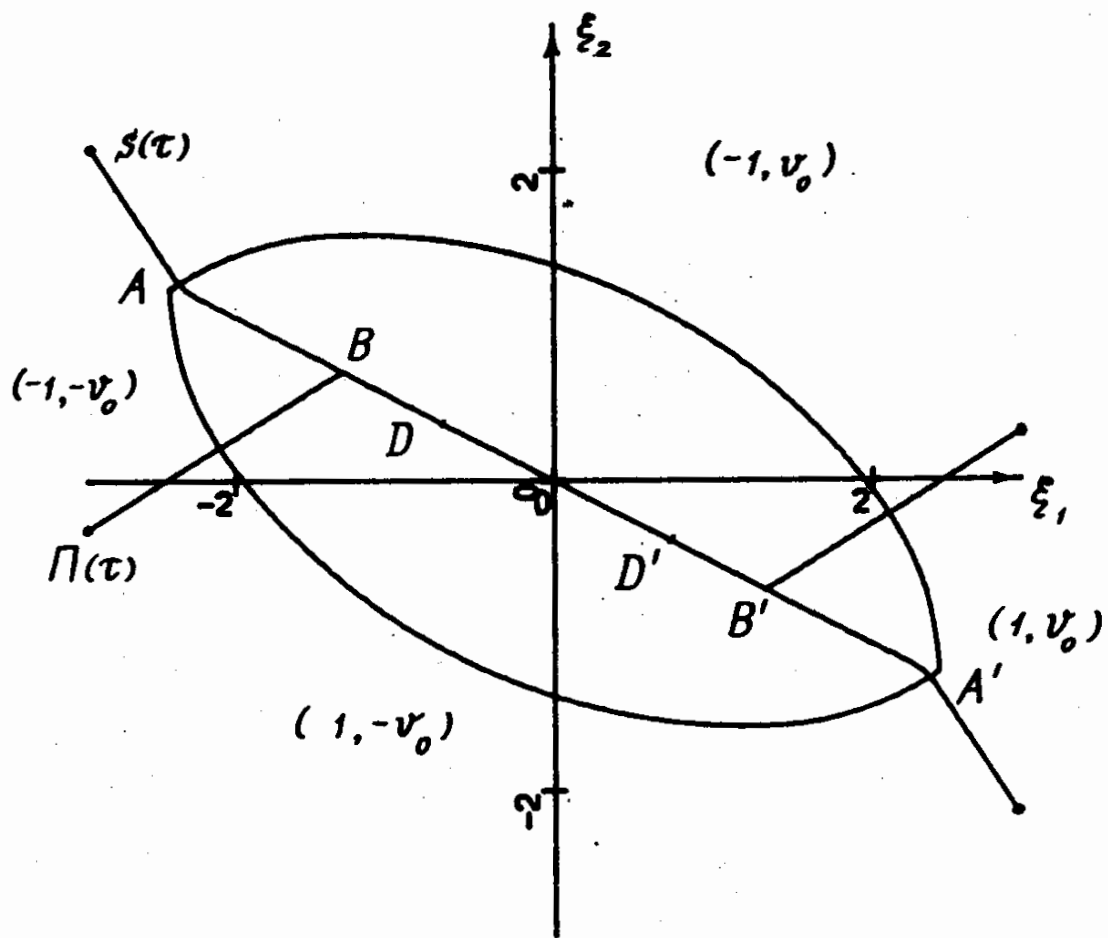
Параметр c ($c \geq 2\nu_0$) имеет как и в обозначении \tilde{W}_c смысл терминального значения показателя Γ .

При $\tau \in [\pi/2, \pi]$ параметрические уравнения

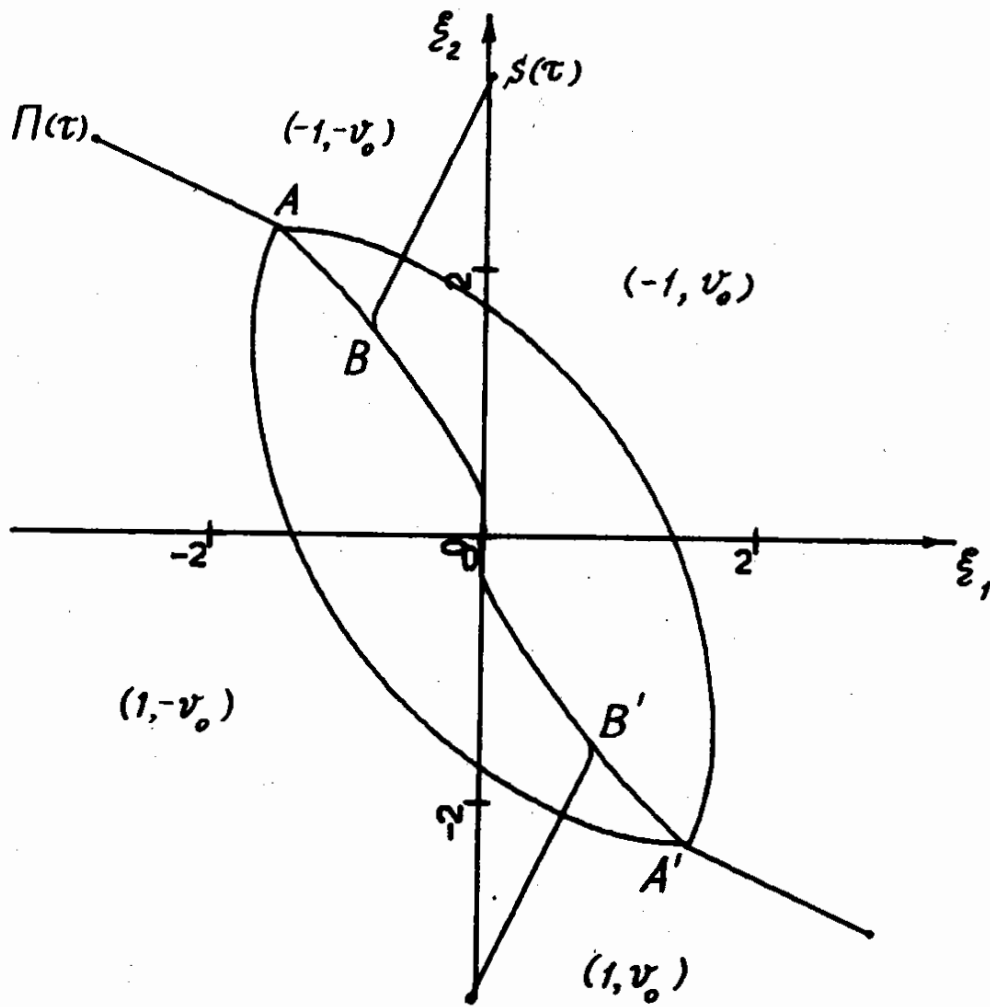
$$\xi_1(\tau) = -(c - 2\nu_0) \sin \tau + 2Q \sin\left(\alpha - \frac{\tau}{2}\right) \sin \frac{\tau}{2},$$



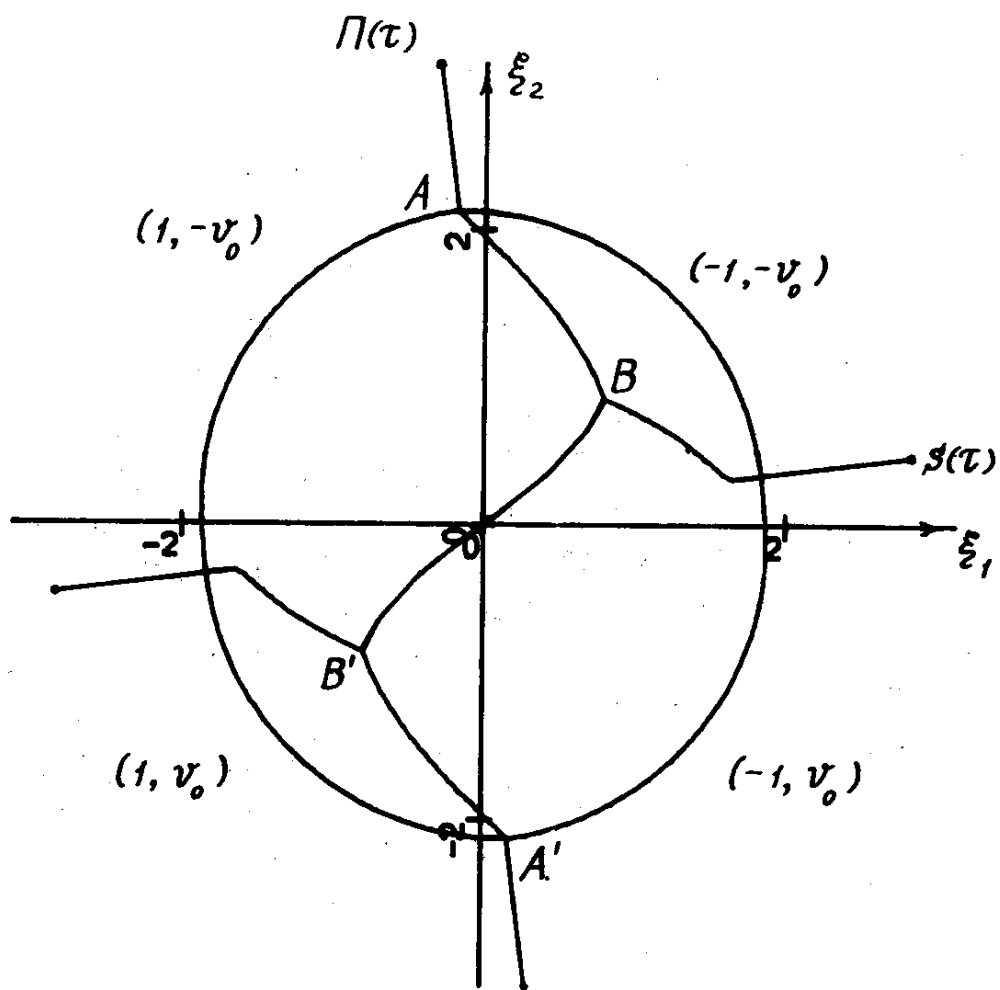
Фиг. 6. Линии переключения $\Pi(\tau)$, $S(\tau)$ для $\tau=0.7$



Фиг.7. Линии переключения $\Pi(\tau), S(\tau)$ для $\tau=1$.



Фиг. 8. Линии переключения $\Pi(\tau)$, $S(\tau)$ для $\tau=2$



Фиг.9. Линии переключения $P(\tau), S(\tau)$ для $\tau=3$

$$\xi_2(\tau) = -(c - 2\nu_0) \cos \tau + 2Q \sin\left(\alpha - \frac{\tau}{2}\right) \cos \frac{\tau}{2}$$

описывают расположенные вне множества $\tilde{W}_{2\nu_0}(\tau)$ участки линии $\Pi(\tau)$, а уравнения

$$\xi_1(\tau) = -(c+2) \cos \tau - 2Q \sin\left(\frac{\tau}{2} + \alpha\right) \sin \frac{\tau}{2},$$

$$\xi_2(\tau) = (c+2) \sin \tau - 2Q \sin\left(\frac{\tau}{2} + \alpha\right) \cos \frac{\tau}{2}$$

аналогичные участки линии $S(\tau)$.

При $c \geq 2\nu_0$ сечения $\tilde{W}_c(\tau)$ являются периодическими по τ с периодом π [10]. Вследствие этого участки линий $\Pi(\tau)$, $S(\tau)$, лежащие вне множества $\tilde{W}_{2\nu_0}(\tau)$, также будут периодическими по τ с периодом π . Таким образом, приведенные выше уравнения дают описание линий $\Pi(\tau)$, $S(\tau)$ вне множества $\tilde{W}_{2\nu_0}(\tau)$ для всех $\tau \in [0, +\infty]$. Вывод этих уравнений проделан в [10] и опирается на следующее свойство: для всех позиций (t, ξ_1, ξ_2) , лежащих вне u -стабильного моста $\tilde{W}_{2\nu_0}$, цена игры в задаче I совпадает с программным максимумом. Аналитическое описание поверхностей Π , S внутри "трубки" $\tilde{W}_{2\nu_0}$ затруднено из-за невыполнения указанного свойства. Поверхности Π , S внутри $\tilde{W}_{2\nu_0}$ могут содержать экивокальные участки [9]. Экивокальные поверхности являются наиболее интересными и сложными сингулярными поверхностями функции цены игры; на них оптимальные движения распадаются: одно идет по поверхности, другое сходит с нее. Аналитическое описание экивокальных поверхностей, как правило, невозможно.

На фиг. 6-9 линия BOB' является сечением совпадающей части поверхностей Π , S . Как показано в [10], при $\tau < \pi/2 - \alpha$ линия BOB' не содержит экивокальных участков и является отрезком прямой, для которого имеется анали-

тическое описание. Этому случаю отвечает фиг.6, поскольку для нее $\tau = 0.7$ и

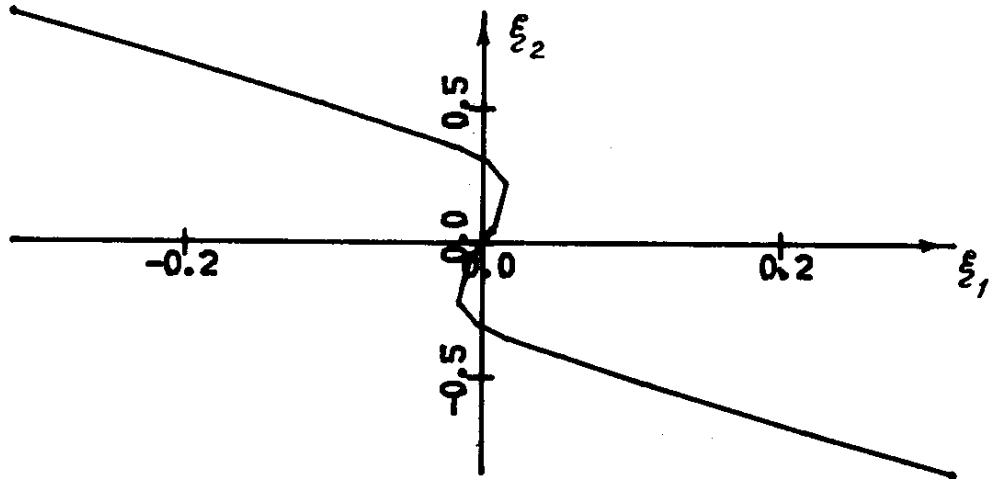
$$\alpha = \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

При $\tau \geq \frac{\pi}{2} - \alpha$ линия BOB' содержит эквивокальные участки. Если к тому же $\tau \geq \max(\frac{\pi}{2}, \pi - 2\alpha)$, то кривая BOB' целиком эквивокальная (фиг.8,9). При $\frac{\pi}{2} - \alpha \leq \tau < \max(\frac{\pi}{2}, \pi - 2\alpha)$ имеется примыкающий к началу координат участок DOD' (фиг.7) кривой BOB' , принадлежащий сечению рассеивающей поверхности. Участок DOD' является отрезком прямой и имеет аналитическое описание [10]. Линии $AB, A'B'$ при $\tau < \min(\frac{\pi}{2}, \pi - 2\alpha)$ также являются отрезками прямых, имеют аналитическое описание и принадлежат рассеивающей части поверхности S . Этому случаю соответствует фиг.6,7.

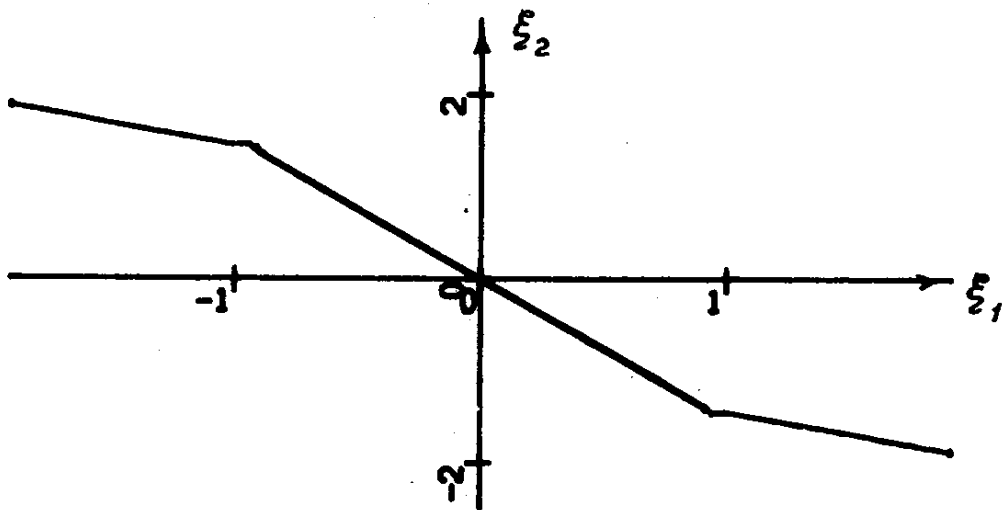
Классификация линий $\Pi(\tau), S(\tau)$ на эквивокальные и рассеивающие была проделана также на ЭВМ. Результаты вычислений согласуются с теоретическими выводами из работы [10]. Отметим, что в алгоритмах построения линий $\Pi(\tau), S(\tau)$ информация о типе линий не используется, поэтому затраты на построение "простых" рассеивающих участков и "сложных" эквивокальных равноценны. На фиг.10а в увеличенном масштабе показан примыкающий к началу координат эквивокальный участок на совпадающей части кривых $\Pi(\tau), S(\tau)$, отвечающих $\tau = 2$. Для сравнения на фиг.10б изображен участок кривой $\Pi(\tau), \tau = 2$, в задаче оптимального управления (без учёта помех).

В скобках на фиг.6-9 указаны значения управлений первого и второго игроков в соответствующей части плоскости.

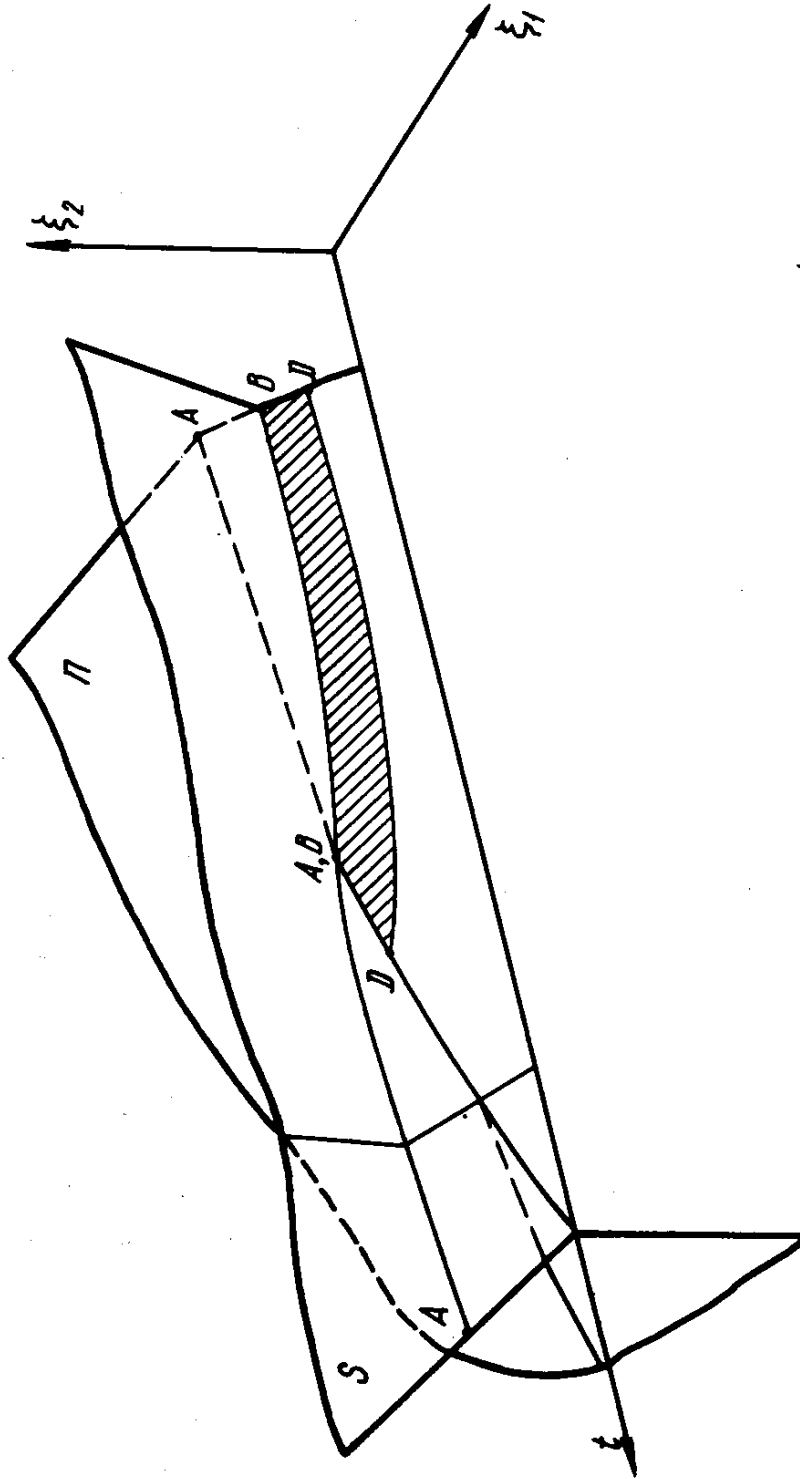
По набору сечений $\Pi(\tau), S(\tau)$ можно представить картину оптимального синтеза в пространстве переменных (t, ξ_1, ξ_2) - фиг.11. Штриховкой отмечена эквивокальная часть поверхностей Π, S . Изображена лишь одна из двух симметричных относительно t частей поверхностей Π, S .



Фиг. 10а



Фиг. 10б



Фиг. II. Поверхности переключения П, S первого и второго игроков.

§ 3. Игра с нефиксированным моментом окончания

Построение оптимального синтеза в игре с нефиксированным моментом окончания является сложной задачей даже в двумерном случае. В этом параграфе речь пойдёт лишь о построении множеств уровня функции цены игры для задачи 2.

Обозначим символом W_c множество уровня функции цены игры в задаче 2. Множество W_c есть максимальный u -стабильный мост, построенный от круга

$$M_c = \{(\varphi, \psi) \in R^2 : \Gamma(\varphi, \psi) \leq c\}.$$

Пусть $W_c(t)$ - сечение множества W_c в момент t . Сечение $W_c(t)$ представляет собой максимальную совокупность точек (φ, ψ) на плоскости, откуда первый игрок гарантирует приведение системы (I.2) на множество M_c за время, меньшее или равное $T-t$. Очевидно, что $W_c(t_*) \supset W_c(t^*)$ при $t_* < t^*$. Множества $W_c(t)$, в отличие от аналогичных множеств в задаче I, невыпуклы, что усложняет процедуру их построения. Поскольку момент окончания игры не фиксирован, отсутствует возможность использовать преобразование (I.3) для перехода к эквивалентной системе (I.5) без фазовой переменной в правой части. Все построения поэтому ведутся в исходном пространстве переменных (φ, ψ) . Алгоритм описан в [11]. Основным моментом алгоритма является понятие фронта $R(t)$, представляющего собой множество всех точек на $W_c(t)$, для которых время перевода на M_c в точности равно $T-t$. По смыслу ясно, что $R(t)$ принадлежит границе множества $W_c(t)$. Построение $W_c(t)$ ведётся в обратном времени $\tau (\tau = T-t)$. Как и выше, вместо $W_c(T-\tau)$ ради краткости будем писать $W_c(\tau)$.

Поясним последовательность построений сечения $W_c(\tau)$. Предположим, что промежуток $[0, \tau]$ разбит на равные части с шагом Δ . Сначала на границе множества M_c выделяем

допустимую зону [9] L_1 . К линии L_1 пристраиваем множество $Q_c(\Delta, L_1)$, для каждой точки которого оптимальное гарантированное время перевода на L_1 (а значит и на M_c) меньше или равно Δ . Полагаем $\mathcal{W}_c(\Delta) = M_c \cup Q_c(\Delta, L_1)$. На границе $\mathcal{W}_c(\Delta)$ выделяем фронт $R(\Delta)$, а на $R(\Delta)$ - допустимую зону L_2 . Построения от линии L_2 аналогичны построениям от L_1 . В результате получаем множество $Q_c(\Delta, L_2)$. Полагаем $\mathcal{W}_c(2\Delta) = \mathcal{W}_c(\Delta) \cup Q_c(\Delta, L_2)$. На k -том шаге попятной процедуры будем иметь цепочку вложенных друг в друга множеств

$$M_c \subset \mathcal{W}_c(\Delta) \subset \mathcal{W}_c(2\Delta) \subset \dots \subset \mathcal{W}_c(k\Delta).$$

Процесс наращивания цепочки прекращаем при $k\Delta = \tau$.
на фиг.12б показаны просчитанные на ЭВМ сечения

$$\mathcal{W}_c(\tau_i), \quad \tau_i = 0.4 i, \quad i = \overline{0,8},$$

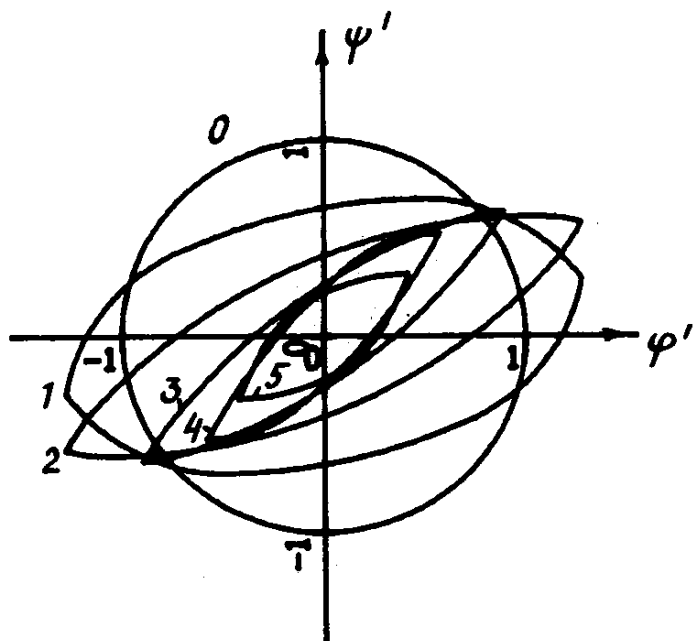
максимального \mathcal{U} -стабильного моста в задаче 2. Расчеты проводились при $\nu_0 = 1, c = 1$. Рядом с каждым множеством проставлен номер соответствующего момента. Для сравнения на фиг.12а приведены построенные в координатах (φ, ψ) сечения

$$\mathcal{W}_c(\tau_i) = \{(\varphi, \psi) \in R^2 : X(T, T - \tau_i)(\varphi, \psi)^* \in \tilde{\mathcal{W}}_c(\tau_i)\},$$

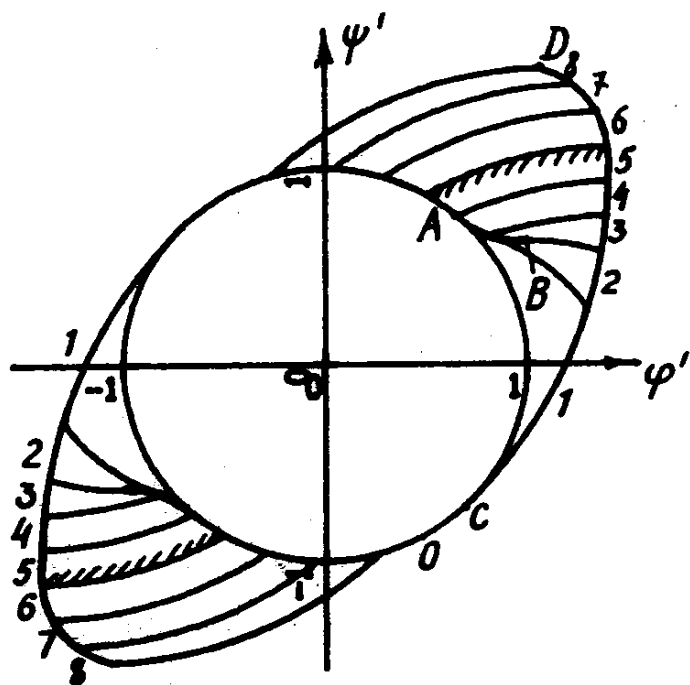
$$\tau_i = 0.4 i, \quad i = \overline{0,5},$$

максимального \mathcal{U} -стабильного моста в задаче I. Множества

$\mathcal{W}_c(\tau_i)$, $i = 6, 7, 8$ не показаны, т.к. являются пустыми. Видно, что



Фиг. 12а



Фиг. 12б

$$\bigcup_{0 \leq j \leq i} W_c(\tau_j) \subset W_c(\tau_i), \quad i = \overline{1,5}.$$

Множество $W_c(\tau_5)$ существенно шире объединения $\bigcup W_c(\tau_i)$, $i = \overline{0,5}$.

Сечения $W_c(\tau)$ можно использовать для решения игровой задачи быстрогодействия, где платой является время перевода на заданный круг M_c с центром в нуле. Пусть в момент $t_0 = 0$ дана начальная точка $x_0 \in R^2$. Если при некотором τ^0 точка x_0 лежит на фронте $R(\tau^0)$, то оптимальное гарантированное время перевода на M_c равно τ^0 , а $W_c(\tau^0)$ является множеством всех точек на плоскости, для каждой из которых оптимальное гарантированное время перевода на M_c (цена игры в задаче быстрогодействия) меньше или равно τ^0 . В точках плоскости, лежащих вне множества $W_c(\tau^0)$, цена игры больше τ^0 .

На фиг. 126 штриховкой отмечен состоящий из двух симметричных кусков фронт $R(\tau)$ для $\tau = 2$. Линии AB , CD являются линиями разрыва функции цены игры в задаче быстрогодействия (барьерами).

§ 4. Моделирование траекторий маятника

В этом параграфе будут приведены результаты численного моделирования траекторий маятника, обладающего следующими физическими параметрами:

$$L = 4 \text{ м}, \quad m = 171.5 \text{ кг}, \quad u_0 = 0.5 \text{ м/с}.$$

Ограничение на максимальную скорость ветра составляет 7 м/с . Движение маятника рассматривается на промежутке $[0, 3] \text{ с}$.

В безразмерных переменных принятой максимальной скорости ветра соответствует ограничение $v_0 = 0.234$, а моменту окончания $T = 3 \text{ с}$ отвечает значение $T' = 4.75$. В качестве целевого множества рассмотрим круг радиуса $c = 0.1$ с центром в нуле.

Такое значение терминального показателя соответствует полной энергии маятника, равной приблизительно 2.14 Дж.

На фиг. 13 показаны сечения $W_{0,1}(\tau_i)$ для моментов

$$\tau_1 = 0, \quad \tau_2 = 1.75, \quad \tau_3 = 2.75, \quad \tau_4 = 3.75, \quad \tau_5 = 4.75.$$

По осям отложены безразмерные переменные φ' , ψ' .

Фазовые траектории движения маятника представлены на фиг. 14. Начальная точка для траекторий взята на границе сечения $W_{0,1}(\tau_5)$. В физических переменных φ , ψ она соответствует начальному углу отклонения от вертикали $\varphi_0 \approx 10$ град и начальной абсолютной скорости $\psi_0 \approx -0.36$ м/с.

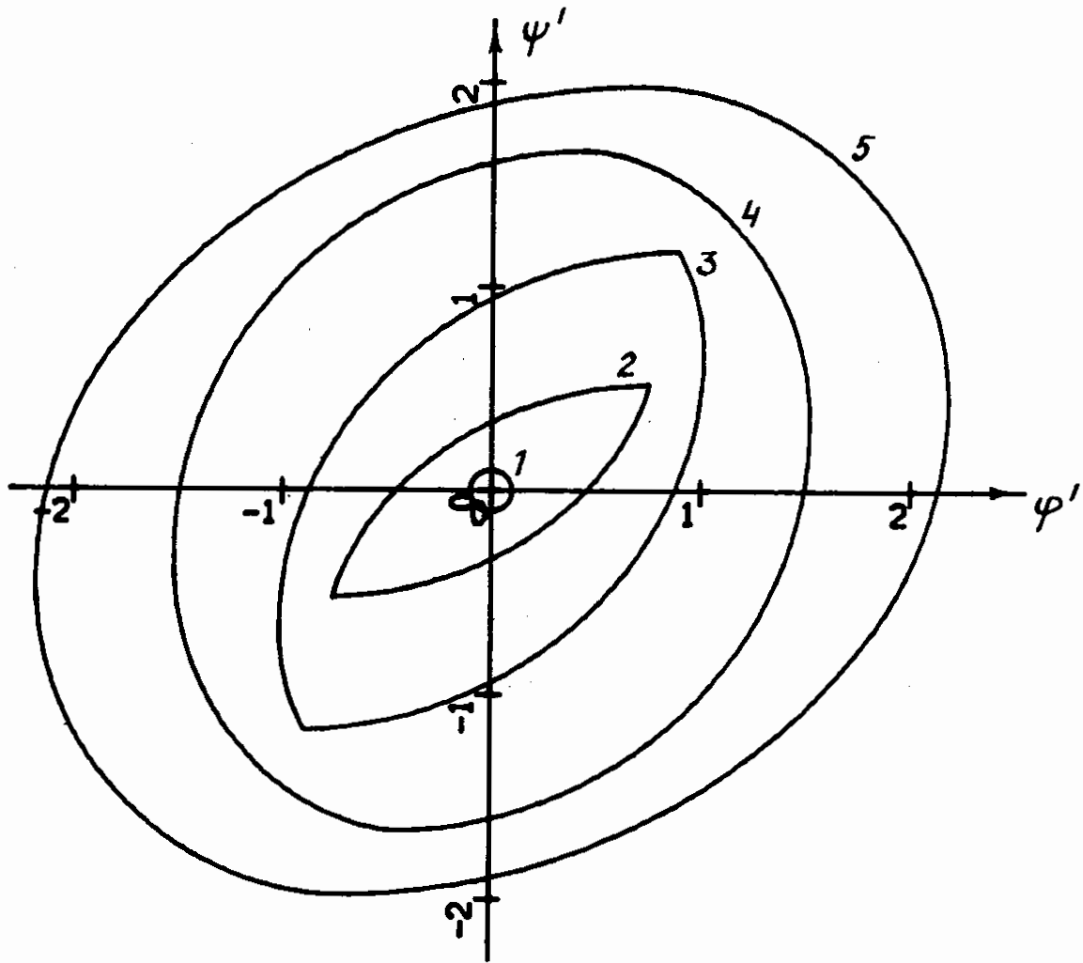
Т.е. начальная энергия маятника составляет около III Дж.

Цифрой 1 обозначена траектория в силу оптимальных стратегий U^0 , V^0 обоих игроков, формируемых при помощи поверхностей переключения. Цифрой 2 отмечена траектория в силу оптимальной стратегии второго игрока и неоптимальной \tilde{U} - первого (первый игрок использует линии переключения, построенные в предположении отсутствия помехи, т.е. при $v_0 = 0$). Видно, что отказ от оптимального управления скоростью точки подвеса приводит к ухудшению результата (энергия маятника в момент окончания процесса управления в три раза больше заданного значения 2.14 Дж). Кроме того, оптимальная ветровая помеха вызвала скользкий режим на траектории 2.

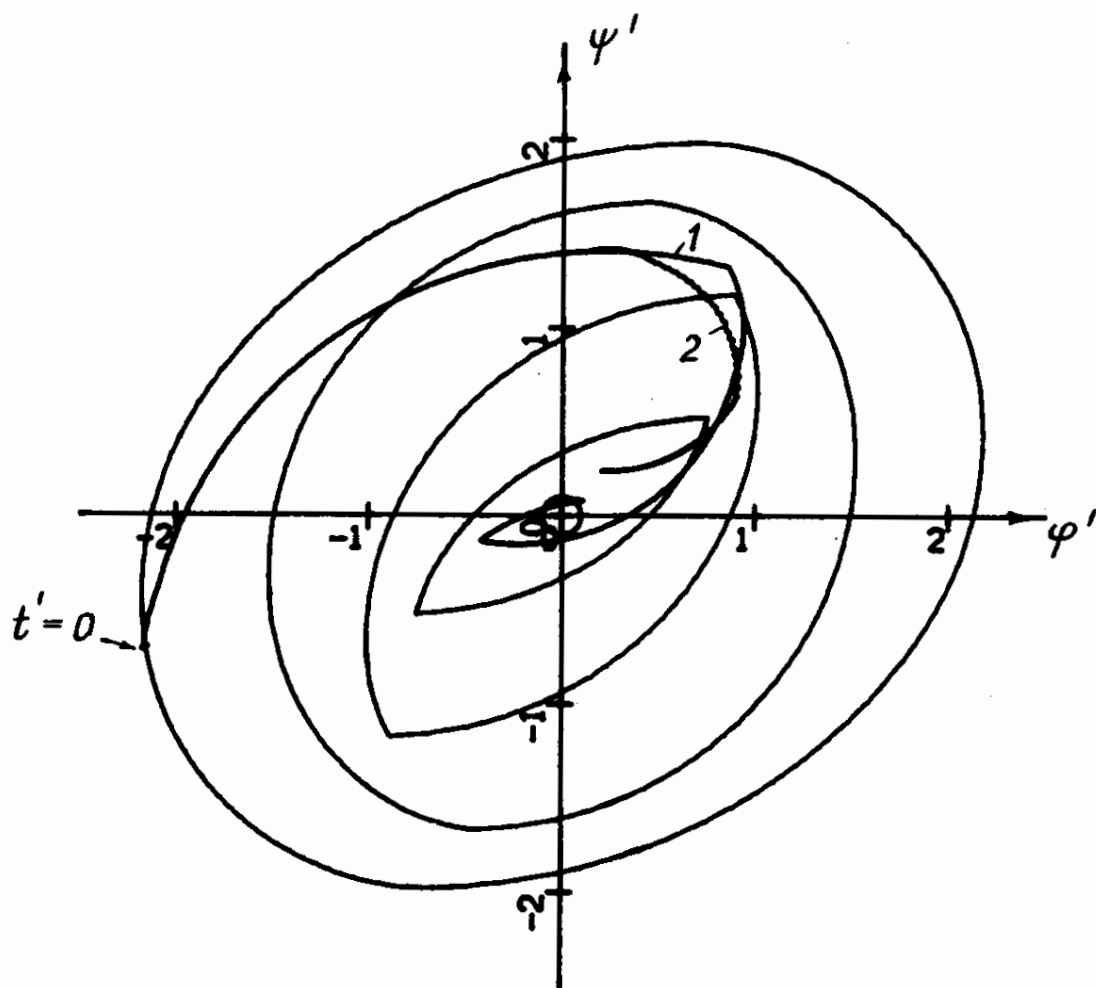
На фиг. 15а,б показаны графики зависимостей $\varphi(t)$, $\psi(t)$ для оптимальной (1) и неоптимальной (2) траекторий. По осям отложены физические (размерные) величины. Реализации стратегий вдоль траекторий 1,2 приведены на фиг. 16а,б.

На фиг. 17а,б представлены для сравнения сечения множества уровня функции цены игры в задачах 1,2. Целевое множество и ограничение v_0 - прежние. По осям отложены безразмерные величины φ' , ψ' . Нумерация сечений отвечает нумерации моментов $\tau_i = 0.2i$, $i = \overline{0,5}$. Видно, что строгое вложение

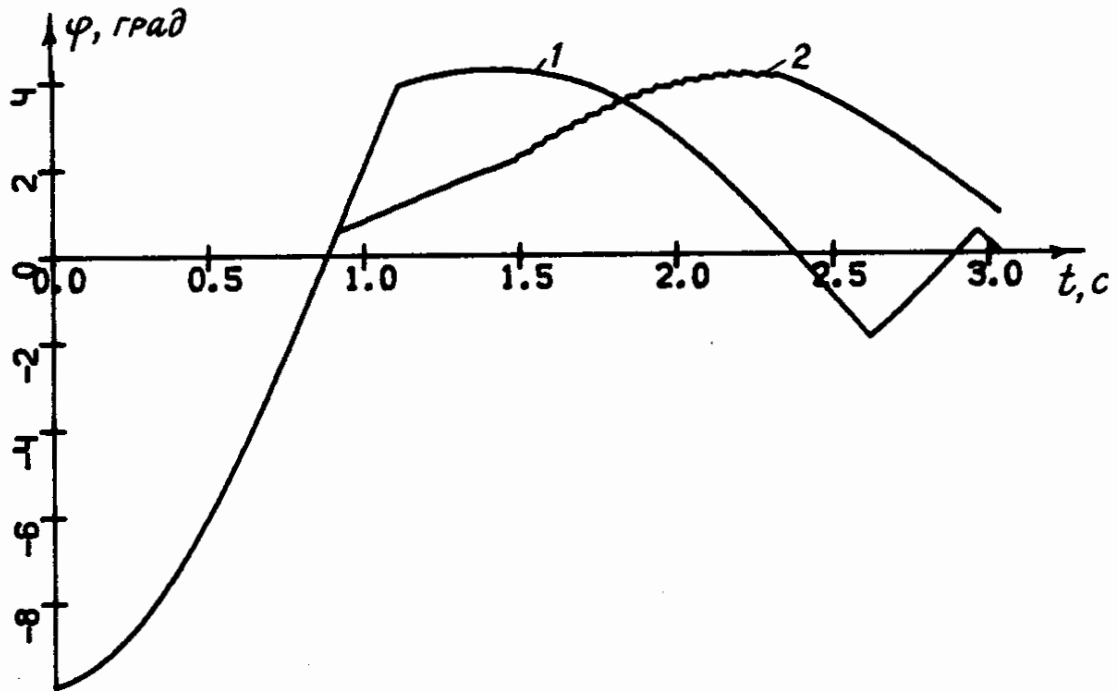
$$\bigcup_{0 \leq j \leq i} W_{0,1}(\tau_j) \subset W_{0,1}(\tau_i) \quad \text{справедливо для всех } i = \overline{1,5}.$$



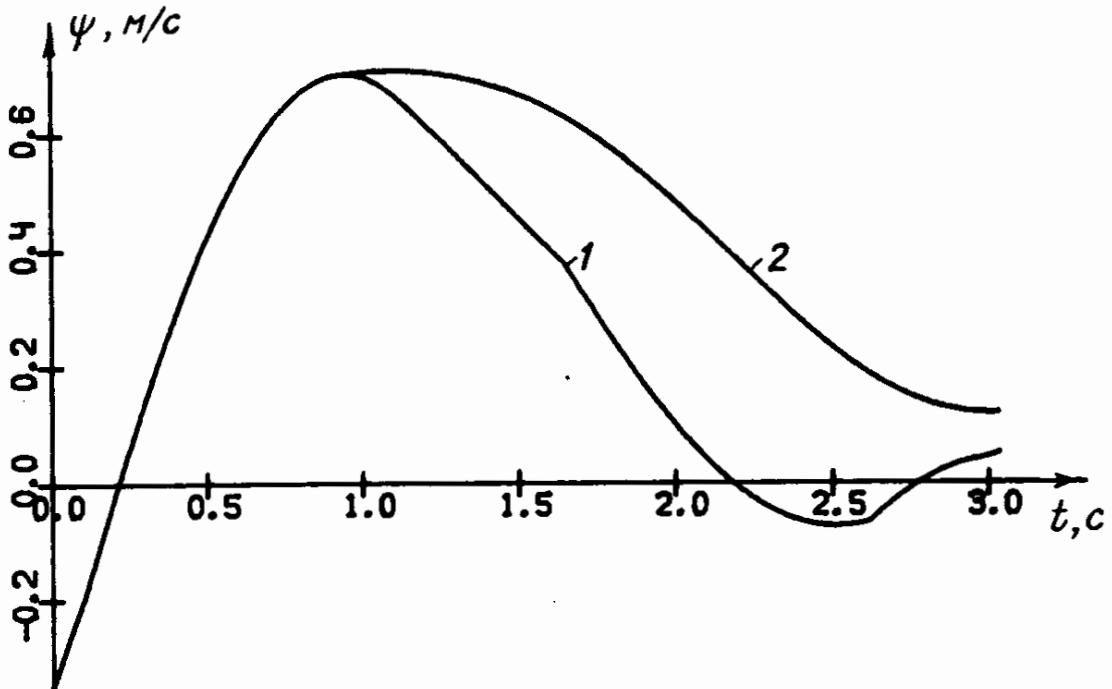
Фиг.13. Сечения $W_c(\tau_i)$ при $c=0.1$, $\nu_0=0.234$
для моментов $\tau_1=0$, $\tau_2=1.75$, $\tau_3=2.75$, $\tau_4=3.75$,
 $\tau_5=4.75$.



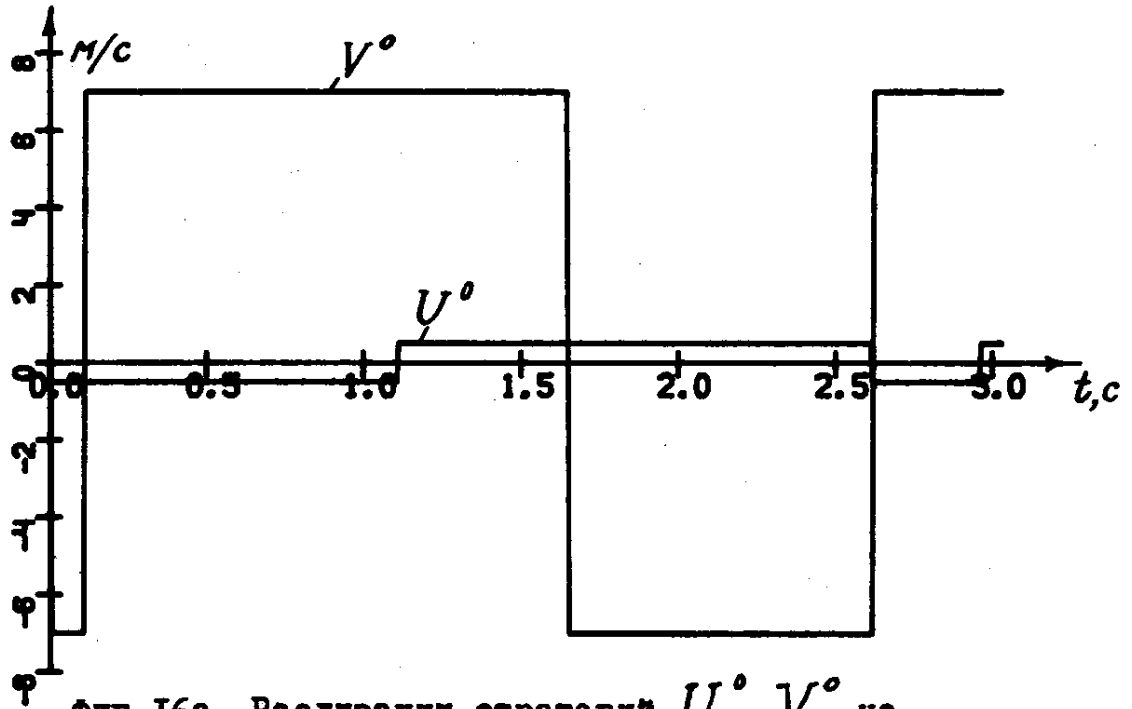
Фиг. I4. Фазовые траектории маятника



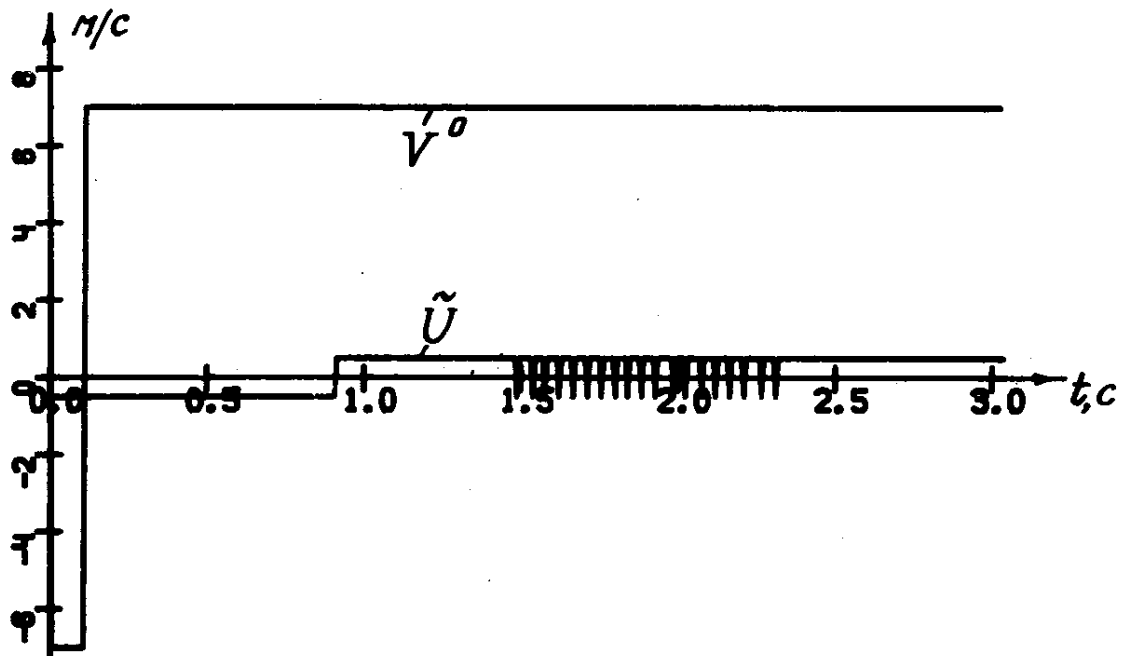
Фиг.15а. Графики $\varphi(t)$ для траекторий 1, 2



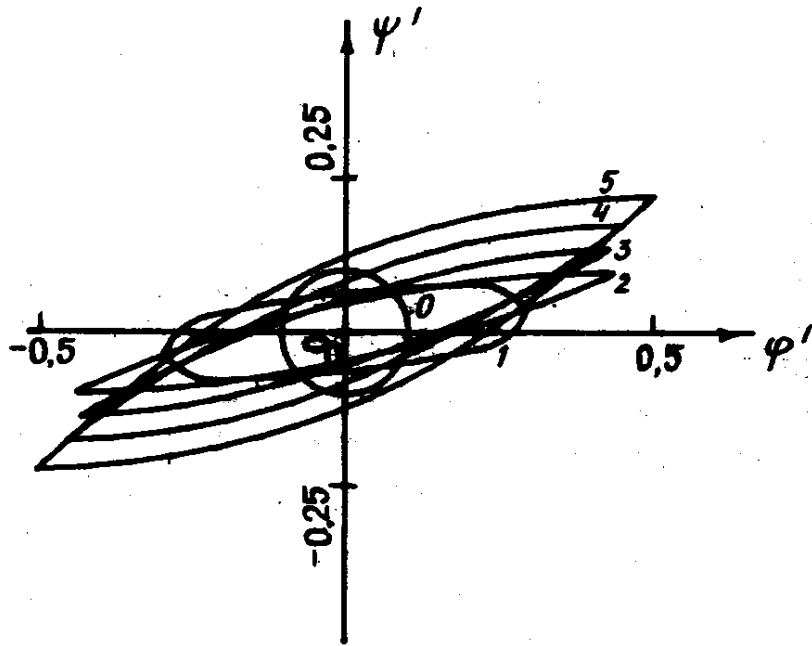
Фиг.15б. Графики $\psi(t)$ для траекторий 1, 2



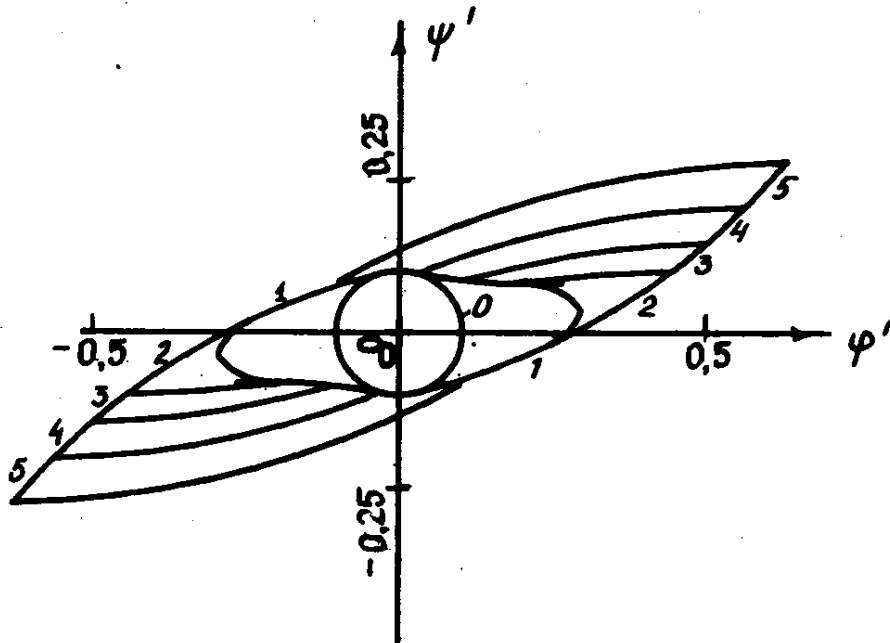
Фиг.16а. Реализации стратегий U^0, V^0 на траектории 1.



Фиг.16б. Реализации стратегий \tilde{U}, V^0 на траектории 2



Фиг.17а. Сечения $W_{0,1}(\tau_i)$ в задаче 1



Фиг.17б. Сечения $W_{0,1}(\tau_i)$ в задаче 2

ВЫВОДЫ

Получено численное решение задачи о гашении колебаний маятника, подверженного влиянию помех.

Для задачи с фиксированным моментом окончания построены и проанализированы сечения множества уровня функции цены игры, найдены поверхности переключения игроков, определяющие игровой синтез оптимального управления скоростью точки подвеса, проведено моделирование траекторий маятника в силу полученных способов управления. В задаче с нефиксированным моментом окончания построены сечения множества уровня функции цены игры и проведено сравнение их с аналогичными множествами для задачи I.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Алгоритмы и программы решения линейных дифференциальных игр. Сб. статей. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1984.
2. Боткин Н.Д., Пацко В.С., Кейн В.М. Модельная задача об управлении боковым движением самолёта. - ПММ, 1984, т.48, № 4, с.560.
3. Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н. Управление колебаниями. М.: Наука, 1980.
4. Соколов Б.Н. Синтез оптимального управления энергией маятника. - Изв. АН СССР. МТТ, 1985, №2, с.54.
5. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
6. Боткин Н.Д., Пацко В.С. Универсальная стратегия в дифференциальной игре с фиксированным моментом окончания. - Проблемы управления и теории информации, 1982, т. II, № 6, с.419.
7. Боткин Н.Д., Пацко В.С. Позиционное управление в линейной дифференциальной игре. - Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1984, № 4, с.78.
8. Зарх М.А. Универсальная оптимальная стратегия второго игрока в линейной дифференциальной игре. - Деп. в ВИНТИ 25.10.85, № 7438-В85.
9. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967.
10. Соколов Б.Н., Турова В.Л. Синтез оптимального управления маятником при наличии активных помех. - Изв. АН СССР. МТТ, 1988, № 5, с.
11. Турова В.Л. Построение множества позиционного поглощения в линейной дифференциальной игре с нефиксированным моментом окончания. - В кн.: Управление с гарантированным результатом. Свердловск, 1987, с.92.

О Г Л А В Л Е Н И Е

В В Е Д Е Н И Е	3
§ 1. Постановки задач	4
§ 2. Численное решение задачи I	8
§ 3. Игра с нефиксированным моментом окончания	26
§ 4. Моделирование траекторий маятника	29
В Ы В О Д Ы	36
Л И Т Е Р А Т У Р А	37

Борис Николаевич Соколов
Варвара Леонидовна Турова

Оптимальное управление маятником в условиях
неопределенных помех

Подписано к печати 1-05.88. № Т-02641. Заказ № 46-88

Тираж - 200 экз.

Отпечатано на ротапринтере Института проблем механики АН СССР
117526, Москва, пр-т Вернадского 101