

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ  
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

*ПРЕПРИНТ*

*С. И. Кумков, В. С. Пацко*

**ЗАДАЧА ПРЕСЛЕДОВАНИЯ  
С НЕПОЛНОЙ  
ИНФОРМАЦИЕЙ**

Екатеринбург -- 1993

УДК 62.50

**Кумков С. И., Пацко В. С. Задача преследования с неполной информацией:** Препринт. Екатеринбург; ИММ УрО РАН, 1993. 64 с.

Рассматривается модельная задача импульсного управления с неполной информацией. Преследователь замеряет с ошибкой угловую скорость линии визирования и минимизирует промах. Ошибка замера стеснена геометрическим ограничением. В соответствие исходной задаче ставится вспомогательная дифференциальная игра, позицией в которой является информационное множество и оставшийся ресурс импульсного управления. Стратегия первого игрока служит основой для построения управления преследователя в исходной задаче, стратегия второго игрока дает "наихудший" способ формирования замеров. Приведены результаты моделирования процесса преследования на ЭВМ. Работа может быть полезна для специалистов в области теории управления и ее приложений.

Ответственный редактор доктор физ.-мат. наук **В. Н. Ушаков**

Рецензент кандидат физ.-мат. наук **М. И. Логинов**

ЛР N 020764

К  $\frac{20204 - 44(93)}{8П6(03) - 1993}$  БО

© ИММ УрО РАН, 1993

## Введение

В работе изучается модельная задача преследования с неполной информацией, прототипом которой могут служить задачи сближения в космосе (атмосфера отсутствует), когда догоняющий аппарат обладает ограниченным ресурсом импульсного изменения скорости с дозированной величиной каждого отдельного импульса. Типичным является случай, когда управление действует в плоскости, перпендикулярной вектору начальной разностной скорости. Это обеспечивает экономный расход ресурса. В процессе движения преследователь замеряет с ошибкой угловую скорость линии визирования “аппарат – цель” и старается минимизировать величину промаха. Ошибка замера стеснена геометрическим ограничением.

Близкая по содержанию задача преследования в предположении о стохастическом характере ошибки замера рассматривалась в [1, 2]. Данная работа является расширенным вариантом статьи [3].

Для решения задачи применяется подход, связанный с построением информационных множеств и управлением ими [4–13]. При математическом исследовании детально рассматривается случай плоского преследования. Полученный алгоритм может быть применен и к пространственному случаю.

Задача формализуется как дифференциальная игра с неполной информацией. Описаны три варианта построения стратегий управления. В естественном частном случае они переходят в одну и ту же стратегию, являющуюся оптимальной. Доказательство оптимальности составляет значительную часть работы.

В конце работы приведены результаты моделирования процесса преследования на ЭВМ. Они охватывают, в частности, сравнение с алгоритмом управления, использующим Калмановскую фильтрацию угловой скорости. Представлены результаты наведения по ложной точке и результаты, относящиеся к пространственному преследованию.

В разработке программ, связанных с указанным кругом вопросов, принимали участие студенты Уральского госуниверситета В.Ф.Васева, Ф.В.Зайцев, Е.В.Шмелева. Авторы признательны А.Г.Иванову за помощь при подготовке графиков моделирования.

## Основные обозначения

### Исходная задача преследования на плоскости:

- $x, z$  – оси разностной системы координат,
- $E_{НОМ}$  – номинальное начальное положение убегающего в разностной системе координат,
- $V_{НОМ}$  – номинальный начальный вектор разностной скорости,
- $e = |V_{НОМ}|$ ,
- $V_x, V_z$  – составляющие вектора разностной скорости,
- $N$  – запас импульсов преследователя,
- $\Delta \Upsilon$  – величина одного импульса,
- $v_x, v_z$  – составляющие ускорения убегающего по осям  $x$  и  $z$ ,
- $Q$  – геометрическое ограничение на ускорение убегающего,
- $\Delta$  – шаг дискретной схемы наблюдения и управления,
- $k(t_i)$  – количество импульсов преследователя с предписанным знаком, реализуемое в момент  $t_i$ ,
- $\alpha$  – угол визирования,
- $\omega$  – угловая скорость линии визирования,
- $\omega_M$  – измеряемое значение угловой скорости линии визирования,
- $\xi$  – ошибка замера,
- $c_1, c_2$  – константы в геометрическом ограничении на ошибку замера,
- $B$  – геометрическое ограничение на начальное положение разностной точки,
- $D$  – геометрическое ограничение на вектор начальной разностной скорости.

### Вспомогательная дифференциальная игра с неполной информацией:

- $\nu$  – константа, ограничивающая модуль ускорения  $v_z$ ,
- $[x_0, x^0]$  – ограничение на значение  $x(t_0)$ ,
- $A(x(t_0))$  – ограничение на значение  $\omega(t_0)$ ,
- $I_\Theta, I, I_\Phi$  – информационные множества: до замера, после замера, после действия импульсов,
- $H$  – множество неопределенности,
- $\Pi$  – пассивный прогнозируемый промах,
- $U$  – стратегия первого игрока,
- $\Omega$  – стратегия второго игрока,

$\Phi$  – функционал платы,  
 $\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}$  – наилучшие гарантированные результаты первого и второго игроков,  
 $U_S$  – стратегия поддержания симметрии прогнозируемого промаха,  
 $\widetilde{\Omega}$  – стратегия второго игрока, основанная на выборе “наихудшей” точки в информационном множестве.

**Доказательство оптимальности в частном случае:**

$\mathcal{I}_\Theta, \mathcal{I}, \mathcal{I}_\Phi$  – проекции информационных множеств на ось  $\omega$ ,  
 $\mathcal{H}$  – проекция множества неопределенности на ось  $\omega$ ,  
 $\omega_c, b$  – центр и полуширина информационного отрезка,  
 $\omega_*, \omega^*$  – левый и правый края информационного отрезка,  
 $s_c, \beta$  – центр и полуширина отрезка неопределенности,  
 $s_*, s^*$  – левый и правый края отрезка неопределенности,  
 $a = c_2 / (1 - c_1)$ ,  
 $F$  – функция гипотетического промаха.

**Результаты моделирования:**

$B^\circ$  – множество, ограничивающее разброс положения разностной точки при статистическом моделировании,  
 $D^\circ$  – множество, ограничивающее разброс начального вектора разностной скорости при статистическом моделировании,  
 RN – формирование замеров и ускорения убегающего при помощи датчика случайных чисел равномерного распределения,  
 GM – игровой способ формирования замеров и ускорения убегающего,  
 SM – управление преследователя, основанное на стратегии поддержания симметрии прогнозируемого промаха,  
 MN – управление преследователя, основанное на расчете точки максимума некомпенсируемого промаха,  
 EM – управление преследователя, основанное на эмпирическом выборе отрезка из информационного множества,  
 FK – способ управления преследователя, использующий Калмановскую фильтрацию угловой скорости,  
 RNN – формирование замеров и ускорения убегающего при помощи датчика случайных чисел нормального распределения,  
 $V_E$  – скорость убегающего в абсолютной системе координат,  
 $V_P$  – скорость преследователя в абсолютной системе координат.

## Глава 1

### Содержательное описание задачи преследования на плоскости

#### § 1. Управляющие воздействия, неполнота информации, предположение о слабой управляемости

Рассмотрим задачу преследования на плоскости одной материальной точки другой с неполной информацией догоняющего  $P$  об убегающем  $E$ . Совместим начало разностной системы координат с преследователем. Условимся, что в начальный момент  $t_0$  заданы номинальное (расчетное) положение  $E_{НОМ}$  убегающего в разностной системе, а также номинальный вектор  $V_{НОМ}$  разностной скорости. Будем считать, что вектор  $V_{НОМ}$ , приложенный к точке  $E_{НОМ}$ , направлен на точку  $P$ , т. е. к началу координат. Ось  $x$  разностной системы направим противоположно вектору  $V_{НОМ}$  (рис. 1), ось  $z$  ортогональна оси  $x$ . Направления осей неизменны по  $t$ . Истинное положение  $E$  в начальный момент может отличаться от номинального, истинный вектор начальной разностной скорости – от предварительно заданного. Модуль вектора  $V_{НОМ}$  обозначим через  $e$ .

Управляющее воздействие преследователя – импульсное. Преследователь скачком может изменять свою, а стало быть, и разностную скорость. Импульсы действуют перпендикулярно оси  $x$ , т. е. вдоль оси  $z$ . Такое направление действия импульсов обеспечивает экономное расходование ресурса в задаче минимизации промаха. Оговорена величина  $\Delta\Upsilon$  одного импульса и общее количество импульсов  $N$ . Таким образом,  $N\Delta\Upsilon$  – запас преследователя по изменению скорости. Векторное управляющее воздействие  $v$  убегающего с компонентами  $v_x, v_z$  имеет размерность ускорения и стеснено условием  $v \in Q$ , где  $Q$  – выпуклое замкнутое ограниченное множество, симметричное относительно нуля.

Управление преследователя реализуется в дискретной схеме. Пусть  $k(t_i)$  – количество импульсов с предписанным знаком, поданное в момент  $t_i$  ( $k(t_i)$  – либо целое отрицательное, либо целое положительное, либо нуль). По постановке задачи должно быть выполнено ограничение  $\sum_i |k(t_i)| \leq N$ . В каждый текущий дискретный момент  $t_i$  преследователь замеряет угловую скорость  $\omega_M(t_i)$  линии визирования, проходящей через точки  $P$  и  $E$ .

Замеряемое значение и истинная угловая скорость  $\omega(t_i)$  связаны соотношением

$$\omega_M(t_i) = \omega(t_i) + \xi(t_i). \quad (1.1)$$

Здесь  $\xi(t_i)$  – ошибка замера.

Возможны постановки, где в момент  $t_i$  замеряется с ошибкой угол визирования  $\alpha(t_i)$  (рис. 1) или же одновременно угол визирования и угловая скорость линии визирования. В данной работе предполагаем, что замеряется только угловая скорость. Считаем, что ошибка замера стеснена ограничением

$$|\xi(t_i)| \leq c_1 |\omega(t_i)| + c_2, \quad 1 > c_1 \geq 0, \quad c_2 \geq 0. \quad (1.2)$$

Если  $c_1 = 0$ , то ограничение не зависит от значения истинной угловой скорости. Если равна нулю константа  $c_2$ , то соотношение (1.2) задает ограничение на относительную ошибку замера угловой скорости.

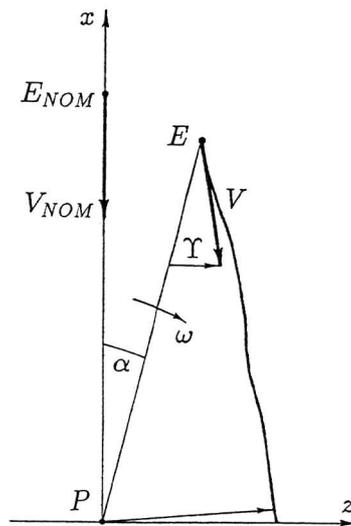


Рис. 1. Движение разностной точки. Пояснение обозначений.

Условимся, что начальное положение  $(x(t_0), z(t_0))'$  разностной точки задано неточно и удовлетворяет геометрическому ограничению

$$(x(t_0), z(t_0))' \in B. \quad (1.3)$$

Аналогично, начальный вектор разностной скорости

$$(V_x(t_0), V_z(t_0))' \in D. \quad (1.4)$$

Здесь  $B, D$  – выпуклые замкнутые ограниченные множества. Соотношения (1.1)–(1.4) известны преследователю.

Цель преследования – минимизация промаха. Под промахом понимаем минимальное значение расстояния  $\sqrt{x^2(t) + z^2(t)}$  в процессе движения. Требуется построить управление преследователя по принципу обратной связи, дающее удовлетворительное решение игровой задачи минимизации промаха в условиях неполной информации.

Исследование задачи проведем при следующем упрощающем предположении. Будем считать относительно малым изменение вектора разностной скорости, возникающее в процессе движения за счет управлений преследователя и убегающего (слабая управляемость). Предположим также относительно малым размер множества  $D$  и размах по оси  $z$  множества  $B$ .

В работе дана формализованная постановка задачи в рамках вспомогательной антагонистической дифференциальной игры двух лиц с неполной информацией. Для вспомогательной игры введены понятия наилучшего гарантированного результата и оптимальных стратегий первого и второго игроков. Предложены стратегии, переходящие в частном случае в оптимальные. Стратегии вспомогательной игры используются в исходной системе. В примере, для которого представлены результаты моделирования, взяты:  $e = 5000 \text{ м/с}$ ,  $\Delta \dot{\gamma} = 5 \text{ м/с}$ ,  $N = 70$  имп., время процесса примерно 16 с.

Главная особенность дифференциальных игр с неполной информацией состоит в том, что позицией игры является множество, а не точка, как в “обычных” дифференциальных играх. Это существенно усложняет исследование. Изучаемая задача – одна из немногих [7, 9, 10], где удается найти оптимальное (или близкое к оптимальному) решение.

**§ 2. Исходные уравнения динамики. Переход к эквивалентным координатам**

Уравнения динамики в разностных координатах  $x, z$  имеют вид

$$\begin{aligned}\ddot{z}(t) &= v_z - \Delta \Upsilon \sum_i k(t_i) \delta(t - t_i), \\ \ddot{x}(t) &= v_x, \\ \sum_i |k(t_i)| &\leq N, \quad (v_x, v_z)' \in Q.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Здесь  $\delta$  – символ дельта-функции. Подсоединим к (2.1) соотношения (1.1)–(1.4), характеризующие неполноту информации:

$$\omega_M(t_i) = \omega(t_i) + \xi(t_i), \quad |\xi(t_i)| \leq c_1 |\omega(t_i)| + c_2,\tag{2.2}$$

$$(x(t_0), z(t_0))' \in B, \quad (V_x(t_0), V_z(t_0))' \in D.\tag{2.3}$$

Перепишем систему (2.1) в координатах  $\alpha, \omega, x, V_x$ . Для этого продифференцируем дважды по  $t$  соотношение  $z(t) = x(t) \operatorname{tg} \alpha(t)$ . Получим

$$\ddot{z}(t) = \ddot{x}(t) \operatorname{tg} \alpha(t) + \frac{2\dot{x}(t)\dot{\alpha}(t)}{\cos^2 \alpha(t)} + \frac{2x(t) \operatorname{tg} \alpha(t) \dot{\alpha}^2(t)}{\cos^2 \alpha(t)} + \frac{x(t)\ddot{\alpha}(t)}{\cos^2 \alpha(t)}.$$

Отсюда

$$\ddot{\alpha}(t) = \frac{\ddot{z}(t) \cos^2 \alpha(t)}{x(t)} - \frac{\ddot{x}(t) \sin \alpha(t) \cos \alpha(t)}{x(t)} - \frac{2\dot{x}(t)\dot{\alpha}(t)}{x(t)} - 2 \operatorname{tg} \alpha(t) \dot{\alpha}^2(t).$$

В результате имеем:

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}(t) &= \omega(t), \\ \dot{\omega}(t) &= -2V_x(t)\omega(t)/x(t) - 2 \operatorname{tg} \alpha(t) \omega^2(t) - \sin \alpha(t) \cos \alpha(t) v_x/x(t) + \\ &\quad + \cos^2 \alpha(t) v_z/x(t) - (\cos^2 \alpha(t) \Delta \Upsilon/x(t)) \sum_i k(t_i) \delta(t - t_i), \\ \dot{x}(t) &= V_x(t), \\ \dot{V}_x(t) &= v_x,\end{aligned}\tag{2.4}$$

$$\sum_i |k(t_i)| \leq N, \quad (v_x, v_z)' \in Q.$$

## Глава 2

### Вспомогательная дифференциальная игра с неполной информацией

#### § 3. Уравнения динамики для вспомогательной дифференциальной игры

Переходя к описанию динамики для вспомогательной дифференциальной игры, упростим систему (2.4). Учтем при этом содержательное предположение о слабой управляемости.

В исследуемой задаче преследователь заинтересован в минимизации промаха. Допущение о слабой управляемости приводит к тому, что (с учетом направления вектора  $V_{НОМ}$  вдоль оси  $x$ ) подсчет промаха на конкретном движении можно приближенно заменить подсчетом модуля координаты  $z$  в момент пересечения движением оси  $z$  (рис. 1). При этом на величину промаха более существенное влияние оказывает изменение скорости по оси  $z$ , чем по оси  $x$ . Таким образом, упрощая систему (2.4), можем считать  $V_x(t_0)$  точно известным и совпадающим с  $V_{НОМx} = -e$ , а управляющее воздействие  $v_x$  — тождественно равным нулю. Изменение координаты  $x$  опишется соотношением  $x(t) = x(t_0) - e(t - t_0)$ .

Далее, предположение о слабой управляемости позволяет считать угол  $\alpha$  малым на сравнительно длительном промежутке интервала движения, начиная от начального момента. В самом деле, пусть в некоторый момент  $t_*$  угол  $\alpha$  большой. Тогда ввиду малости конуса, в котором может идти будущее движение (ось конуса близка к вертикальной), промах в конце будет заведомо значительным, причем тем больше, чем больше время до конца от момента  $t_*$ . Следовательно, если нас интересуют не слишком большие промахи, можем считать угол  $\alpha$  малым, и в упрощенной постановке вспомогательной задачи заменим  $\sin \alpha$  и  $\operatorname{tg} \alpha$  на нуль, а  $\cos \alpha$  на единицу. Поскольку измеряемой величиной является  $\omega$ , а угол  $\alpha$  не будет теперь входить в соотношение для  $\dot{\omega}$ , то уравнение  $\dot{\alpha}(t) = \omega(t)$  можно опустить. Условимся, наконец, что в упрощенной постановке  $v_z$  выбирается из отрезка  $[-\nu, \nu]$  — проекции множества  $Q$  на ось  $z$ . Окончательно получим:

$$\begin{aligned}\dot{\omega}(t) &= 2e\omega(t)/x(t) + v_z/x(t) - (\Delta\Upsilon/x(t)) \sum_i k(t_i)\delta(t - t_i), \\ x(t) &= x(t_0) - e(t - t_0),\end{aligned}\tag{3.1}$$

$$\sum_i |k(t_i)| \leq N, \quad |v_z| \leq \nu.$$

При импульсном воздействии в момент  $t_i$  координата  $\omega$  изменяется скачком на величину  $-k(t_i)\Delta\Upsilon/x(t_i)$ .

Таким образом, описана динамика вспомогательной дифференциальной игры. Соотношения неполноты информации для нее примем в виде

$$\begin{aligned} \omega_M(t_i) &= \omega(t_i) + \xi(t_i), & |\xi(t_i)| &\leq c_1 |\omega(t_i)| + c_2, \\ x(t_0) &\in [x_0, x^0], & \omega(t_0) &\in A(x(t_0)). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь  $[x_0, x^0]$  – проекция множества  $B$  на ось  $x$ ;  $A(x(t_0))$  – некоторый отрезок (оценка сверху), содержащий в себе для конкретного  $x(t_0)$  все начальные значения  $\omega(t_0)$  угловой скорости, возможные в силу ограничений (2.3).

Приведем формулу изменения координаты  $\omega$  на промежутке  $[\hat{t}, t]$ :

$$\omega(t) = \omega(\hat{t}) \frac{x^2(\hat{t})}{x^2(t)} + \frac{1}{x^2(t)} \int_{\hat{t}}^t x(\tau) v_z(\tau) d\tau - \frac{\Delta\Upsilon}{x^2(t)} \sum_{t_i \in [\hat{t}, t]} k(t_i) x(t_i). \quad (3.3)$$

Максимальное (минимальное) значение второго слагаемого достигается при  $v_z \equiv \nu$  ( $v_z \equiv -\nu$ ). Положим

$$\zeta(\hat{t}, t) = \frac{1}{x^2(t)} \int_{\hat{t}}^t x(\tau) \nu d\tau = \frac{\nu(t-\hat{t})}{x^2(t)} \left( x(\hat{t}) - \frac{e}{2}(t-\hat{t}) \right). \quad (3.4)$$

#### § 4. Информационные множества. Допустимые стратегии. Постановка вспомогательной дифференциальной игры с неполной информацией

Перейдем к формулировке вспомогательной дифференциальной игры двух лиц, в которой состоянием в момент  $t_i$  будет пара: информационное множество на плоскости  $\omega, x$  и количество оставшихся импульсов. Считаем ось  $\omega$  горизонтальной, ось  $x$  вертикальной.

**Информационные множества.** Зафиксируем параметр  $\varepsilon > 0$ . В качестве начального информационного множества  $I_\Theta(t_0)$  возьмем произвольное ограниченное замкнутое множество на плоскости  $\omega, x$  ( $x \geq \varepsilon$ ), сечение которого при любом  $x$  представляет собой отрезок.

Пусть теперь в пространстве  $\omega, x$  ( $x \geq \varepsilon$ ) задано ограниченное замкнутое множество  $I_\Theta(t_i)$ ,  $i \geq 0$ , сечение которого при любом  $x$  есть отрезок.

Таким образом,  $I_{\Theta}(t_i)$  – объединение отрезков, параллельных оси  $\omega$ . В момент  $t_i$  поступает замер  $\omega_M$ . Обозначим через  $H(t_i)$  соответствующее замеру множество неопределенности – совокупность всех точек на плоскости  $\omega, x$ , для каждой из которых замер  $\omega_M$  возможен в соответствии с формулами  $\omega_M = \omega + \xi$ ,  $|\xi| \leq c_1|\omega| + c_2$ . Множество  $H$  представляет собой вертикальную полосу. Его проекция  $\mathcal{H}$  на ось  $\omega$  описывается соотношениями

$$\mathcal{H} = \begin{cases} [(\omega_M - c_2)/(1 + c_1), (\omega_M + c_2)/(1 - c_1)], & \text{если } \omega_M \geq c_2, \\ [(\omega_M - c_2)/(1 - c_1), (\omega_M + c_2)/(1 - c_1)], & \text{если } -c_2 < \omega_M < c_2, \\ [(\omega_M - c_2)/(1 - c_1), (\omega_M + c_2)/(1 + c_1)], & \text{если } \omega_M \leq -c_2. \end{cases}$$

Размах отрезка  $\mathcal{H}$  зависит от  $\omega_M$  (рис. 2). Положим

$$I(t_i) = I_{\Theta}(t_i) \cap H(t_i).$$

Условимся, что такое пересечение не пусто.

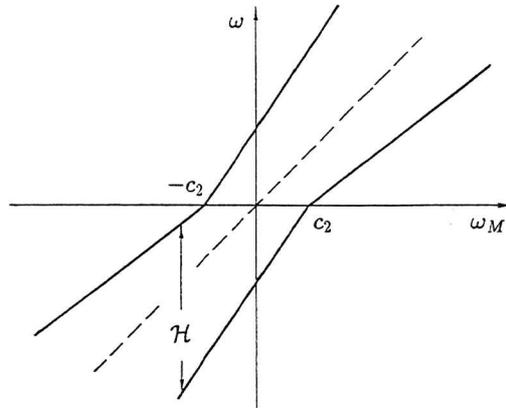


Рис. 2. Размах множества неопределенности.

В момент  $t_i$  после получения замера первый игрок, распоряжающийся выбором импульсов, может применить свое управление. Множество  $I(t_i)$  перейдет в множество  $I_{\Theta}(t_i)$ . Преобразование  $I(t_i) \rightarrow I_{\Theta}(t_i)$  есть перенос каждого отрезка (при постоянном  $x$ ) на величину  $-k(t_i)\Delta\Upsilon/x$  вдоль оси  $\omega$ .

В множестве  $I_{\oplus}(t_i)$  выделим часть  $J_{\varepsilon}(t_i)$ , лежащую строго ниже уровня  $x = \varepsilon + e(t_{i+1} - t_i)$ . Эта часть в момент  $t_{i+1}$  уйдет под уровень  $\varepsilon$ . Положим  $I_{\oplus\varepsilon}(t_i) = I_{\oplus}(t_i) \setminus J_{\varepsilon}(t_i)$ .

Определим  $I_{\ominus}(t_{i+1})$  как прогноз положения системы (3.1) на момент  $t_{i+1}$  при состоянии  $I_{\oplus\varepsilon}(t_i)$  в момент  $t_i$  и нулевом управлении первого игрока на  $(t_i, t_{i+1}]$ . При построении  $I_{\ominus}(t_{i+1})$  каждый отрезок из  $I_{\oplus\varepsilon}(t_i)$  опускается по  $x$  на величину  $e(t_{i+1} - t_i)$ . Координата по оси  $\omega$  его левого края принимает значение (см. формулы (3.3), (3.4))

$$\omega_{*\ominus}(t_{i+1}) = \omega_{*\oplus}(t_i) \frac{x^2(t_i)}{x^2(t_{i+1})} - \zeta(t_i, t_{i+1}).$$

Здесь  $\omega_{*\oplus}(t_i)$  — координата левого края рассматриваемого отрезка в момент  $t_i$ . Положение  $\omega_{\oplus}^*(t_i)$  правого края меняется на

$$\omega_{\oplus}^*(t_{i+1}) = \omega_{\oplus}^*(t_i) \frac{x^2(t_i)}{x^2(t_{i+1})} + \zeta(t_i, t_{i+1}).$$

Каждое из множеств  $I_{\ominus}(t_i)$ ,  $I(t_i)$ ,  $I_{\oplus}(t_i)$ ,  $I_{\oplus\varepsilon}(t_i)$  назовем информационным (до замера, после замера, после импульсов, после  $\varepsilon$ -отсечки). Множество  $I_{\ominus}(t_i)$  будем называть также множеством прогноза.

Таким образом, рекуррентно определена последовательность информационных множеств. Рис. 3 иллюстрирует переход от множества  $I_{\ominus}(t_i)$  к множеству  $I_{\ominus}(t_{i+1})$ .

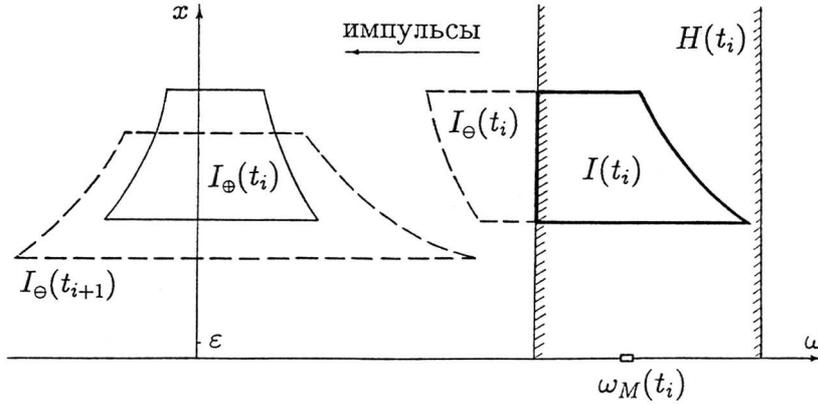


Рис. 3. Построение информационных множеств.

В дифференциальной игре с неполной информацией под движением будем понимать изменение во времени информационного множества и количества оставшихся импульсов. Первый игрок распоряжается выбором импульсного управления, второй – подбрасыванием замеров. Считаем, что импульсное управление в момент  $t_i$  применяется после замера, поступившего в этот момент. Влияние  $v_z$  учитываем при построении множества  $I_\Theta(t_i)$ . Введение параметра  $\varepsilon$  обусловлено тем, что в рассматриваемой задаче окончание связано с прохождением уровня  $x = 0$ , а система (3.1) имеет особенность при  $x = 0$ .

**Допустимые стратегии.** Позицией игры для первого игрока назовем совокупность  $(t_i, n, I)$ , где  $t_i$  – момент времени,  $n$  – количество оставшихся импульсов,  $I$  – информационное множество после замера. Допустимой стратегией первого игрока назовем правило  $U: (t_i, n, I) \rightarrow k$ , сопоставляющее позиции игры количество импульсов с определенным знаком,  $|k| \leq n$ .

Позицией игры для второго игрока условимся считать совокупность  $(t_i, n, I_\Theta)$ . Здесь  $I_\Theta$  – информационное множество до замера (множество прогноза). Допустимой стратегией второго игрока назовем правило  $\Omega: (t_i, n, I_\Theta) \rightarrow \omega_M$ , сопоставляющее позиции игры замер  $\omega_M$ . При этом потребуем, чтобы  $I_\Theta \cap H \neq \emptyset$ , где  $H$  – множество неопределенности, построенное по  $\omega_M$ .

Задав пару допустимых стратегий  $U, \Omega$ , шаг  $\Delta$  (связывающий соседние дискретные моменты времени  $t_i$  и  $t_{i+1}$ ), параметр  $\varepsilon$  и начальную позицию  $(t_0, n(t_0), I_\Theta(t_0))$ , можем говорить о движении системы во времени.

**Функционал платы.** Определим на движении вспомогательной дифференциальной игры значение платы. Для произвольной пары  $\omega, x$  ( $x > 0$ ) положим

$$\Pi(\omega, x) = \frac{|\omega| x^2}{e}. \quad (4.1)$$

Величина  $\Pi(\omega, x)$  приближенно есть пассивный прогнозируемый промах из состояния  $\omega, x$ , т. е. промах при пересечении оси  $z$  свободным движением системы (3.1). Для точного подсчета пассивного прогнозируемого промаха следовало бы помимо  $\omega, x$  задать угол  $\alpha: |\omega| x^2 / (e \cos^2 \alpha)$ . Смысл формулы понятен из того, что  $\omega x / \cos^2 \alpha$  – величина нескомпенсированной линейной скорости  $\Upsilon$  (рис. 1), а  $x/e$  – время, оставшееся до пересечения оси  $z$ . Пренебрегая малым углом  $\alpha$ , получаем формулу (4.1). Пусть

$$\widehat{\Pi}(\omega, x) = \Pi(\omega, x) + \frac{\nu}{2} \left(\frac{x}{e}\right)^2.$$

Добавка  $\nu(x/e)^2/2$  – максимально возможное увеличение промаха за счет ускорения  $v_z$ ,  $|v_z| \leq \nu$ . Произвольному множеству  $M$  в пространстве  $\omega, x$  ( $x > 0$ ) поставим в соответствие число

$$\check{\Pi}(M) = \sup_{(\omega, x) \in M} \widehat{\Pi}(\omega, x).$$

Для конкретного движения информационного множества символом  $T_\varepsilon$  обозначим совокупность моментов  $t_i$  таких, что  $J_\varepsilon(t_i) \neq \emptyset$ . Число

$$\Phi(t_0, n(t_0), I_\Theta(t_0), U, \Omega, \varepsilon, \Delta) = \max_{t_i \in T_\varepsilon} \check{\Pi}(J_\varepsilon(t_i))$$

назовем промахом, соответствующим начальной позиции  $(t_0, n(t_0), I_\Theta(t_0))$ , стратегиям  $U, \Omega$ , дискрету  $\Delta$  и параметру  $\varepsilon$ .

Поясним смысл величины  $\Phi$ . При заданном  $\varepsilon$  фактически считаем, что импульсное управление перестает действовать после момента  $t_i$  для части информационного множества, которая в момент  $t_{i+1}$  окажется ниже уровня  $\varepsilon$ . Одноточечные движения, развивающиеся из этой части, как бы заканчиваются, в то время как движения из части выше уровня  $\varepsilon$  продолжаются. Множество  $J_\varepsilon(t_i)$  и определяет заканчивающиеся одноточечные движения. Плата для  $J_\varepsilon(t_i)$  естественно вводится как  $\check{\Pi}(J_\varepsilon(t_i))$ . Затем берем максимум по моментам  $t_i$ , для которых  $J_\varepsilon(t_i)$  не пусто.

**Наилучшие гарантированные результаты игроков.** Гарантию первого игрока при зафиксированных  $t_0, n(t_0), I_\Theta(t_0), U, \varepsilon$  определим соотношением

$$K^{(1)}(t_0, n(t_0), I_\Theta(t_0), U, \varepsilon) = \overline{\lim}_{\Delta \rightarrow 0} \sup_{\Omega} \Phi(t_0, n(t_0), I_\Theta(t_0), U, \Omega, \varepsilon, \Delta).$$

Далее

$$\begin{aligned} L^{(1)}(t_0, n(t_0), I_\Theta(t_0), U) &= \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} K^{(1)}(t_0, n(t_0), I_\Theta(t_0), U, \varepsilon), \\ \Gamma^{(1)}(t_0, n(t_0), I_\Theta(t_0)) &= \inf_U L^{(1)}(t_0, n(t_0), I_\Theta(t_0), U). \end{aligned}$$

Аналогично за второго игрока:

$$\begin{aligned} K^{(2)}(t_0, n(t_0), I_\Theta(t_0), \Omega, \varepsilon) &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \inf_U \Phi(t_0, n(t_0), I_\Theta(t_0), U, \Omega, \varepsilon, \Delta), \\ L^{(2)}(t_0, n(t_0), I_\Theta(t_0), \Omega) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} K^{(2)}(t_0, n(t_0), I_\Theta(t_0), \Omega, \varepsilon), \\ \Gamma^{(2)}(t_0, n(t_0), I_\Theta(t_0)) &= \sup_{\Omega} L^{(2)}(t_0, n(t_0), I_\Theta(t_0), \Omega). \end{aligned}$$

Величины  $\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}$  определяют наилучшие гарантированные результаты первого и второго игроков во вспомогательной задаче. Стратегии,

на которых достигаются наилучшие гарантированные результаты, назовем оптимальными.

Отметим упрощение, возникающее в частном случае, когда  $x(t_0)$  предполагается известным точно, т. е. при  $x_0 = x^0$ . В этом случае информационное множество состоит из одного отрезка; момент окончания в игре становится зафиксированным и равным  $t_0 + x(t_0)/e$ ; при заданных  $\varepsilon$ ,  $\Delta$  существует единственный момент  $t_i$ , когда  $J_\varepsilon(t_i) \neq \emptyset$ .

### § 5. Три варианта стратегий первого игрока

Укажем три варианта построения стратегий первого игрока во вспомогательной дифференциальной игре. Стратегии не являются оптимальными. Они получены из эмпирических соображений, имеют аналоги в “обычной” теории дифференциальных игр, просты по реализации. В частном случае  $x_0 = x^0$  рассматриваемые стратегии переходят в одну и ту же стратегию, являющуюся оптимальной.

**Стратегия поддержания симметрии прогнозируемого промаха.** Обозначим через  $\partial^*I$  совокупность правых концов отрезков, из которых составлено множество  $I$ . Аналогично,  $\partial_*I$  – совокупность левых концов. Положим

$$\pi^*(I) = \max_{(\omega, x) \in \partial^*I} \left\{ \frac{\omega x^2}{e} + \frac{\nu}{2} \left( \frac{x}{e} \right)^2 \right\}, \quad (5.1)$$

$$\pi_*(I) = \min_{(\omega, x) \in \partial_*I} \left\{ \frac{\omega x^2}{e} - \frac{\nu}{2} \left( \frac{x}{e} \right)^2 \right\}. \quad (5.2)$$

Пусть  $(\omega^*, x^*)$ ,  $(\omega_*, x_*)$  – точки, на которых достигается максимум в (5.1) и минимум в (5.2). Отрезок с концами  $\pi_*(I)$ ,  $\pi^*(I)$  назовем отрезком прогнозируемого промаха, соответствующим множеству  $I$ .

Если в текущий момент первый игрок применяет управление из  $k$  импульсов, то промах для бывшей максимизирующей точки в (5.1) изменится мгновенно на величину

$$\frac{\Delta \omega x^{*2}}{e} = -\frac{k \Delta \Upsilon x^{*2}}{x^* e} = -\frac{k \Delta \Upsilon x^*}{e},$$

а для минимизирующей точки в (5.2) – на величину

$$\frac{\Delta \omega x_*^2}{e} = -\frac{k \Delta \Upsilon x_*}{e}.$$

Составим соотношение симметрии

$$\pi^* - \frac{k\Delta\Upsilon x^*}{e} = -\left(\pi_* - \frac{k\Delta\Upsilon x_*}{e}\right).$$

Разрешая его относительно целочисленного неизвестного  $k$ , получим

$$k_S = \left\lfloor \frac{(\pi^* + \pi_*)e}{(x^* + x_*)\Delta\Upsilon} \right\rfloor. \quad (5.3)$$

Здесь квадратные скобки означают целую часть.

Стратегию  $U_S$  поддержания симметрии прогнозируемого промаха определим как функцию, сопоставляющую позиции  $(t_i, n, I)$  число  $k_S$ , вычисляемое по формуле (5.3), если  $|k_S| \leq n$ , и число  $n \operatorname{sign} k_S$ , если  $|k_S| > n$ .

Стратегия  $U_S$  введена при помощи вспомогательной величины – прогнозируемого промаха и учитывает “одномерность” этой величины. Понятие прогнозируемого промаха используется очень часто как в инженерной практике, так и в теоретических работах [14, 15]. В дифференциальных играх аналогом введенной стратегии может служить стратегия, доставляющая оптимальное решение в задаче “мальчик и крокодил” [16]. Изменение отрезка прогнозируемого промаха при действии стратегии  $U_S$  схематично показано на рис. 4.

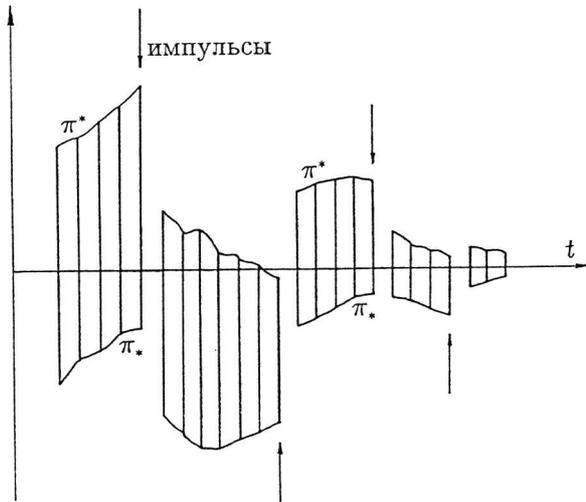


Рис. 4. Пояснение работы стратегии  $U_S$ .

Отметим, что в (5.1) или в (5.2) экстремум может достигаться не обязательно на одном элементе. Тогда в качестве  $(\omega^*, x^*)$  или  $(\omega_*, x_*)$  берем любой из них. При этом определяемое по формуле (5.3) число  $k_S$  может зависеть от выбранной экстремальной точки.

Уточним вид стратегии  $U_S$  при  $x_0 = x^0$ . В этом случае  $I$  – отрезок. Следовательно  $x_* = x^* = x$  и

$$k_S = \left[ \frac{(\omega^* + \omega_*)x^2 e}{e2x\Delta\Upsilon} \right] = \left[ \frac{(\omega^* + \omega_*)x}{2\Delta\Upsilon} \right].$$

Полусумма  $(\omega^* + \omega_*)/2$  – центр отрезка  $I$  по оси  $\omega$ , обозначим его  $\omega_c$ . Таким образом,

$$k_S = \left[ \frac{\omega_c x}{\Delta\Upsilon} \right]. \quad (5.4)$$

Поскольку  $\Delta\Upsilon/x$  – изменение  $\omega$  (по модулю) при действии одного импульса, то вычисления по формуле (5.4) можно трактовать как сравнение величины  $\omega_c$  (с учетом знака) с порогом, равным эффективности одного импульса. Рис. 5 поясняет сказанное: изображено возможное изменение информационного отрезка  $I$  при действии стратегии  $U_S$ .

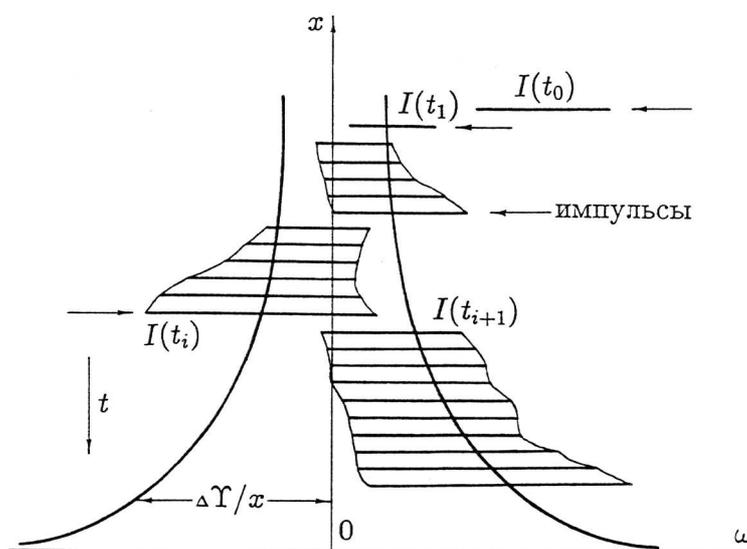


Рис. 5. Работа стратегии  $U_S$  в частном случае  $x_0 = x^0$ .

Стратегия  $U_S$  является оптимальной для случая  $x_0 = x^0$ . Доказательство приведено в следующей главе. Если  $x^0 - x_0$  мало, стратегию  $U_S$  можно считать квазиоптимальной.

**Стратегия, основанная на расчете точки максимума некомпенсированного промаха.** Для каждой позиции  $(t_i, n, I)$  введем величину

$$\bar{\pi}(n, I) = \max_{(\omega, x) \in I} \left\{ \frac{|\omega| x^2}{e} + \frac{\nu}{2} \left( \frac{x}{e} \right)^2 - \frac{n \Delta \Upsilon x}{e} \right\}. \quad (5.5)$$

Первые два слагаемых в фигурных скобках дают прогноз промаха (по модулю) при нулевом управлении первого игрока. Третье – максимально возможную компенсацию за счет управления первого игрока. В целом выражение в фигурных скобках имеет смысл некомпенсированного промаха для точки  $(\omega, x)$  и может принимать отрицательные значения. Пусть  $(\bar{\omega}, \bar{x})$  – точка из  $I$ , на которой реализуется максимум в (5.5). Выделим в  $I$  отрезок, содержащий (на своем краю) точку  $(\bar{\omega}, \bar{x})$ . Пусть  $\bar{\omega}_c$  – центр этого отрезка по координате  $\omega$ . Положим

$$\bar{k} = \left[ \frac{\bar{\omega}_c \bar{x}}{\Delta \Upsilon} \right]. \quad (5.6)$$

Значение стратегии  $\bar{U}$  в позиции  $(t_i, n, I)$  примем равным  $\bar{k}$ , если  $|\bar{k}| \leq n$ , и  $n \operatorname{sign} \bar{k}$ , если  $|\bar{k}| > n$ .

Используя стратегию  $\bar{U}$ , в каждый момент  $t_i$  выделяем из информационного множества  $I(t_i)$  отрезок, на котором реализуется максимум некомпенсированного промаха. Его центр по координате  $\omega$  сравниваем с порогом, соответствующим этому отрезку. Вырабатываемое управляющее воздействие переводит центр (с учетом дискретности импульсов) в нуль. В дифференциальных играх аналогом такой стратегии в какой-то мере может служить стратегия прицеливания по наихудшей точке, просчитываемой через множества достижимости [4]. В частном случае  $x_0 = x^0$  стратегия  $\bar{U}$  совпадает со стратегией  $U_S$  и является оптимальной.

**Стратегия эмпирической логики выбора отрезка.** Укажем еще одно, эмпирическое правило выбора отрезка из информационного множества, учитывающее относительный размах множества по  $x$ .

Пусть  $x^{**}$ ,  $x_{**}$  – максимальное и минимальное значения координаты  $x$  в информационном множестве  $I$  (более точно:  $x^{**}(I)$ ,  $x_{**}(I)$ ). Величина

$$\eta = \frac{x^{**}}{x_{**}} = \frac{e \tau^{**}}{e \tau_{**}} = \frac{\tau^{**}}{\tau_{**}}$$

имеет смысл оценки отношения максимального  $\tau^{**}$  и минимального  $\tau_{**}$  времени до конца процесса.

Задав вспомогательную эмпирическую зависимость

$$\eta \rightarrow s(\eta): \quad \eta \geq 1, \quad s(\eta) \in [0, 1], \quad s(1) = 1,$$

можем при помощи формулы

$$x(\eta) = s(\eta)(x^{**} - x_{**}) + x_{**}$$

выбирать отрезок из  $I$  как функцию от  $\eta$ . Например, если  $s(\eta) = 1/\eta$ , то при  $\eta \approx 1$  выбираем отрезок с координатой  $x$ , близкой к  $x^{**}$ , а при достаточно большом  $\eta$  – с координатой  $x$ , близкой к  $x_{**}$ .

Взяв отрезок, соответствующий  $x(\eta)$ , находим его центр  $\omega_c(\eta)$  по  $\omega$ , далее аналогично (5.6) вычисляем

$$\bar{k} = \left[ \frac{\omega_c(\eta)x(\eta)}{\Delta Y} \right], \quad (5.7)$$

определяя тем самым значение стратегии  $\bar{U}$  в рассматриваемой позиции.

В случае  $x_0 = x^0$  информационное множество состоит из одного отрезка, поэтому  $\eta = 1$  и значение  $\bar{k}$ , найденное по формуле (5.7), совпадает с результатами вычислений по формулам (5.4), (5.6).

## § 6. Стратегия второго игрока

Опишем один вариант построения стратегии второго игрока во вспомогательной дифференциальной игре. Этот способ, как и второй из сформулированных выше законов управления первого игрока, основан на выборе точки, на которой достигается максимум некомпенсируемого промаха. Отличие в том, что наихудшая точка будет выбираться не в множестве  $I$ , а в множестве  $I_\Theta$ .

Пусть  $(\bar{\omega}, \bar{x})$  – точка из  $I_\Theta$ , на которой достигается максимум выражения

$$\bar{\pi}(n, I_\Theta) = \max_{(\omega, x) \in I_\Theta} \left\{ \frac{|\omega| x^2}{e} + \frac{\nu}{2} \left( \frac{x}{e} \right)^2 - \frac{n \Delta Y x}{e} \right\}.$$

Выделим в множестве  $I_\Theta$  отрезок, содержащий  $(\bar{\omega}, \bar{x})$ , спроектируем его на ось  $\omega$ . Если  $\bar{\omega}$  – правый край такой проекции, то выберем  $\omega_M \leq \bar{\omega}$  так, чтобы проекция  $\mathcal{H}$  множества неопределенности  $H(\omega_M)$  на ось  $\omega$  содержала  $\bar{\omega}$  на своем правом краю. Если  $\bar{\omega}$  – левый край, то выберем  $\omega_M \geq \bar{\omega}$  так, чтобы  $\bar{\omega}$  лежала на левом краю проекции  $\mathcal{H}$ . Такое формирование замера обеспечивает попадание точки  $(\bar{\omega}, \bar{x})$  в информационное множество  $I =$

$I_\Theta \cap H$ . Символом  $\tilde{\Omega}$  обозначим стратегию второго игрока, основанную на выборе точки  $(\tilde{\omega}, \tilde{x})$ .

В частном случае  $x_0 = x^0$  точка  $(\tilde{\omega}, \tilde{x})$  совпадает с одной из крайних точек отрезка  $I_\Theta$ : той, что наиболее удалена по  $\omega$  от нуля. В следующей главе приведено доказательство оптимальности стратегии  $\tilde{\Omega}$  для случая  $x_0 = x^0$ .

### Глава 3

#### Исследование частного случая вспомогательной дифференциальной игры

Считаем  $x_0 = x^0$ . В этом случае информационное множество – параллельный оси  $\omega$  отрезок на плоскости  $\omega, x$ . Изменение во времени координаты  $x$  определено однозначно, вспомогательная дифференциальная игра становится игрой с фиксированным моментом окончания. Вместо отрезков  $I_\Theta$  (информационное множество до замера, множество прогноза),  $I$  (информационное множество после замера),  $I_\Phi$  (информационное множество после импульсов) на плоскости  $\omega, x$  удобно рассматривать их проекции  $\mathcal{I}_\Theta, \mathcal{I}, \mathcal{I}_\Phi$  на ось  $\omega$ . Проекции также будем называть информационными отрезками. Центр информационного отрезка обозначим символом  $\omega_c$ , его полуширину – символом  $b$ . Таким образом,  $\mathcal{I}_\Theta = (\omega_{c\Theta}, b_\Theta)$ ,  $\mathcal{I} = (\omega_c, b)$ ,  $\mathcal{I}_\Phi = (\omega_{c\Phi}, b_\Phi)$ . Проекцию вертикальной полосы  $H$  (множество неопределенности) на ось  $\omega$  обозначим через  $\mathcal{H}$  и назовем отрезком неопределенности.

Как было отмечено, при  $x_0 = x^0$  три стратегии первого игрока, введенные в § 5, переходят в одну и ту же стратегию. Назовем ее эталонной и обозначим  $U^*$ . Выбор импульсного управления при эталонной стратегии определяется положением центра информационного отрезка  $\mathcal{I}$  относительно порога и количеством оставшихся импульсов.

Стратегию второго игрока из § 6 при  $x_0 = x^0$  также назовем эталонной. Введем для нее обозначение  $\Omega^*$ . Содержательный смысл эталонной стратегии: замер подается так, чтобы обеспечить попадание в информационный отрезок  $\mathcal{I}$  наиболее удаленной от нуля точки  $\omega$  из отрезка прогноза  $\mathcal{I}_\Theta$  и получить при этом максимально возможную длину отрезка  $\mathcal{I}$ .

В этой главе покажем оптимальность эталонных стратегий. Соответствующая теорема опирается на леммы 2, 3. Лемма 1 является наиболее важной среди подготовительных результатов. Доказательства существенно упрощаются, если  $c_1 = 0$ .

Изучаемая задача симметрична относительно нуля по  $\omega$ . Условимся считать поэтому, что правый край информационных отрезков удален от нуля не меньше, чем левый. При необходимости заменяем рассматриваемый отрезок на симметричный ему.

Ниже часто будет встречаться величина  $c_2/(1 - c_1)$ . Обозначим ее буквой  $a$ .

**§ 7. Дополнительные сведения об информационных отрезках и отрезке неопределенности**

1) Обозначим через  $s_*$ ,  $s^*$ ,  $s_c$ ,  $\beta$  левый край отрезка неопределенности, соответственно его правый край, центр и полуширину. Приведем формулы, определяющие  $\beta$  через  $s^*$  и  $s_c$ , а также  $s_*$  и  $s_c$  через  $s^*$ . Значения  $s^*$  и  $s_c$ , используемые в формулах в качестве аргумента, считаем неотрицательными. Имеем:

$$\beta = \beta^*(s^*) = \begin{cases} (c_1 s^* + c_2)/(1 + c_1), & \text{если } s^* > 2a, \\ a, & \text{если } 0 \leq s^* \leq 2a, \end{cases}$$

$$\beta = \beta_c(s_c) = \begin{cases} c_1 s_c + c_2, & \text{если } s_c > a, \\ a, & \text{если } 0 \leq s_c \leq a, \end{cases}$$

$$s_* = p(s^*) = s^* - 2\beta^*(s^*) = \begin{cases} (s^*(1 - c_1) - 2c_2)/(1 + c_1), & \text{если } s^* > 2a, \\ s^* - 2a, & \text{если } 0 \leq s^* \leq 2a, \end{cases}$$

$$s_c = q(s^*) = s^* - \beta^*(s^*) = \begin{cases} (s^* - c_2)/(1 + c_1), & \text{если } s^* > 2a, \\ s^* - a, & \text{если } 0 \leq s^* \leq 2a. \end{cases}$$

Обратим внимание на монотонный характер указанных зависимостей.

2) Для каждого  $s \geq 0$  величина  $\beta^*(s)$  есть максимально возможная полуширина информационного отрезка  $\mathcal{I}$ , правый край которого совпадает с  $s$ . Соответственно,  $\beta_c(s)$ ,  $s \geq 0$ , – максимально возможная полуширина информационного отрезка с центром в  $s$ . При  $s \geq \beta^*(s)$  имеем  $\beta^*(s) = \beta_c(s - \beta^*(s))$ . Таким образом, для информационного отрезка  $\mathcal{I}$  с центром  $\omega_c \geq 0$  полуширина  $b$  является максимально возможной при данном правом крае  $\omega^*$  (т. е.  $b = \beta^*(\omega^*)$ ) тогда и только тогда, когда она является максимально возможной при данном центре  $\omega_c$  ( $b = \beta_c(\omega_c)$ ). Свойство максимальности отрезка  $\mathcal{I}$ , записанное через левый и правый край:  $\omega_* = p(\omega^*)$ , через центр и правый край:  $\omega_c = q(\omega^*)$ .

В случае  $\mathcal{I}(t_i) = \mathcal{H}(t_i)$  выполнено равенство  $\omega_*(t_i) = p(\omega^*(t_i))$ , в случае  $\mathcal{I}(t_i) \subset \mathcal{H}(t_i)$  – неравенство  $\omega_*(t_i) \geq p(\omega^*(t_i))$ . Если в момент  $t_i$  действуют импульсы вправо (один или несколько), то  $\omega_{*\oplus}(t_i) \geq p(\omega_{\oplus}^*(t_i))$ . При импульсах влево возможны оба неравенства  $\omega_{*\oplus}(t_i) \geq p(\omega_{\oplus}^*(t_i))$ ,  $\omega_{*\oplus}(t_i) \leq p(\omega_{\oplus}^*(t_i))$ .

3) Пусть  $\omega_{*\ominus}(t_i) \leq p(\omega_{\oplus}^*(t_i))$ . Покажем, что для краев  $\omega_{*\ominus}(t_{i+1}), \omega_{\oplus}^*(t_{i+1})$  отрезка прогноза  $\mathcal{I}_{\ominus}(t_{i+1})$  будет выполнено соотношение  $\omega_{*\ominus}(t_{i+1}) \leq p(\omega_{\oplus}^*(t_{i+1}))$ .

В самом деле,

$$\omega_{*\ominus}(t_{i+1}) = \omega_{*\ominus}(t_i) \frac{x^2(t_i)}{x^2(t_{i+1})} - \zeta(t_i, t_{i+1}), \quad \omega_{\oplus}^*(t_{i+1}) = \omega_{\oplus}^*(t_i) \frac{x^2(t_i)}{x^2(t_{i+1})} + \zeta(t_i, t_{i+1}).$$

Представим формулу для  $p(s)$  в виде  $p(s) = \varphi s - \psi$ ; константы  $\varphi$  и  $\psi$  удовлетворяют соотношениям  $0 \leq \varphi \leq 1$ ,  $\psi \geq 0$  и зависят от того, где лежит  $s$ : в области  $s > 2a$  или на промежутке  $0 \leq s \leq 2a$ . Обозначим через  $\varphi_i, \psi_i$  величины, соответствующие положению точки  $\omega_{\oplus}^*(t_i)$ , и через  $\varphi_{i+1}, \psi_{i+1}$  – положению точки  $\omega_{\oplus}^*(t_{i+1})$ . Тогда

$$\begin{aligned} p(\omega_{\oplus}^*(t_{i+1})) &= \varphi_{i+1} \omega_{\oplus}^*(t_i) \frac{x^2(t_i)}{x^2(t_{i+1})} + \varphi_{i+1} \zeta(t_i, t_{i+1}) - \psi_{i+1} = \\ &= \left( \varphi_{i+1} \omega_{\oplus}^*(t_i) + \varphi_i \omega_{\oplus}^*(t_i) - \varphi_i \omega_{\oplus}^*(t_i) + \psi_i - \psi_i \right) \frac{x^2(t_i)}{x^2(t_{i+1})} + \varphi_{i+1} \zeta(t_i, t_{i+1}) - \psi_{i+1} = \\ &= p(\omega_{\oplus}^*(t_i)) \frac{x^2(t_i)}{x^2(t_{i+1})} + \left( \omega_{\oplus}^*(t_i) (\varphi_{i+1} - \varphi_i) + \psi_i \right) \frac{x^2(t_i)}{x^2(t_{i+1})} + \varphi_{i+1} \zeta(t_i, t_{i+1}) - \psi_{i+1}. \end{aligned}$$

Установим, что  $(\omega_{\oplus}^*(t_i) (\varphi_{i+1} - \varphi_i) + \psi_i) x^2(t_i) / x^2(t_{i+1}) - \psi_{i+1} \geq 0$ . Действительно, это очевидно при  $\varphi_{i+1} = \varphi_i$ ,  $\psi_{i+1} = \psi_i$ . С учетом соотношения  $\omega_{\oplus}^*(t_{i+1}) > \omega_{\oplus}^*(t_i)$  нарушение указанных равенств возможно лишь при  $\omega_{\oplus}^*(t_i) \leq 2a = 2c_2 / (1 - c_1)$ ,  $\omega_{\oplus}^*(t_{i+1}) > 2c_2 / (1 - c_1)$ . В этом случае  $\varphi_i = 1$ ,  $\psi_i = 2c_2 / (1 - c_1)$ ,  $\varphi_{i+1} = (1 - c_1) / (1 + c_1)$ ,  $\psi_{i+1} = 2c_2 / (1 + c_1)$ . Таким образом,

$$\begin{aligned} & \left( \omega_{\oplus}^*(t_i) (\varphi_{i+1} - \varphi_i) + \psi_i \right) \frac{x^2(t_i)}{x^2(t_{i+1})} - \psi_{i+1} \geq \\ & \geq \left( \frac{2c_2}{1 - c_1} \left( \frac{1 - c_1}{1 + c_1} - 1 \right) + \frac{2c_2}{1 - c_1} \right) \frac{x^2(t_i)}{x^2(t_{i+1})} - \frac{2c_2}{1 + c_1} = \frac{2c_2}{1 + c_1} \frac{x^2(t_i)}{x^2(t_{i+1})} - \frac{2c_2}{1 + c_1} \geq 0. \end{aligned}$$

Учитывая полученное неравенство, а также неравенство  $p(\omega_{\oplus}^*(t_i)) \geq \omega_{*\ominus}(t_i)$ , имеем

$$p(\omega_{\oplus}^*(t_{i+1})) \geq \omega_{*\ominus}(t_i) \frac{x^2(t_i)}{x^2(t_{i+1})} + \varphi_{i+1} \zeta(t_i, t_{i+1}) \geq$$

$$\geq \omega_{*\ominus}(t_i) \frac{x^2(t_i)}{x^2(t_{i+1})} - \zeta(t_i, t_{i+1}) = \omega_{*\ominus}(t_{i+1}).$$

Итак, если  $\omega_{*\ominus}(t_i) \leq p(\omega_{*\ominus}^*(t_i))$ , то  $\omega_{*\ominus}(t_{i+1}) \leq p(\omega_{*\ominus}^*(t_{i+1}))$ . При этом, за исключением вырожденного случая  $c_2 = 0$ ,  $\nu = 0$ , реализуется строгое неравенство. Последнее означает, что при любом замере в момент  $t_{i+1}$  образование отрезка  $\mathcal{I}(t_{i+1})$  происходит с высечкой отрезка  $\mathcal{I}_{\ominus}(t_{i+1})$ .

В дальнейшем при описании движения в силу дискретной схемы будет удобно в некоторых случаях говорить об информационных отрезках не только в моменты  $t_i$ , но и в промежуточные моменты из интервалов  $(t_i, t_{i+1})$ . В соответствии с процедурой прогноза имеем, что на интервале  $(t_i, t_{i+1})$  скорость изменения левого (правого) края информационного отрезка описывается соотношением  $\dot{\omega}_*(t) = 2e\omega_*(t)/x(t) - \nu/x(t)$  ( $\dot{\omega}^*(t) = 2e\omega^*(t)/x(t) + \nu/x(t)$ ). В качестве  $\mathcal{I}_{\ominus}(t) = \mathcal{I}(t) = \mathcal{I}_{\oplus}(t)$  при  $t \in (t_i, t_{i+1})$  договоримся брать прогноз развития информационного отрезка от момента  $t_i$  до момента  $t$ .

Условимся применять нижние индексы  $\ominus, \oplus$  для обозначения пределов по  $t$  слева и справа. Это не приведет к противоречию с оговоренным ранее использованием индексов  $\ominus, \oplus$ .

## § 8. Эталонное движение. Функция гипотетического промаха

Определим движение  $t \rightarrow (n(t), \mathcal{I}(t))$ , которое назовем эталонным. Содержательно это есть изменение информационного отрезка (с учетом симметрии относительно нуля по  $\omega$ ) в схеме непрерывного наблюдения при действии стратегий  $U^*$ ,  $\Omega^*$ : выбор импульсного управления определяется при помощи порога  $\Delta \Upsilon/x(t)$ ; замер формируется так, чтобы правый край текущего множества неопределенности совпадал с правым краем информационного отрезка. Компонента  $n(\cdot)$  характеризует расход импульсов. Описывая эталонное движение, будем использовать прежние обозначения:  $\omega_*$ ,  $\omega^*$  для левого, правого краев и т. д.

Предположим, что  $\omega^*(\hat{t}) \geq 0$  в некоторый исходный момент  $\hat{t}$  и  $\omega_*(\hat{t}) \geq p(\omega^*(\hat{t}))$ . Пусть  $t \rightarrow \omega^*(t)$  – кусочно-непрерывная функция, описывающая изменение правого края отрезка  $\mathcal{I}$ ,  $t \rightarrow \omega_*(t)$  – аналогичная функция для левого края. Моменты разрыва функций  $\omega^*(\cdot)$ ,  $\omega_*(\cdot)$  совпадают. Пусть далее на участках непрерывности выполнены условия 1) – 3):

- 1)  $\dot{\omega}^*(t) = 2e\omega^*(t)/x(t) + \nu/x(t)$ ,

$$2) \omega_*(t) \geq p(\omega^*(t)),$$

$$3) \text{ если } \omega_*(t) > p(\omega^*(t)), \text{ то } \dot{\omega}_*(t) = 2e\omega_*(t)/x(t) - \nu/x(t).$$

Для моментов разрыва оговорим условия 4) – 6):

4) если  $t \geq \hat{t}$  – момент разрыва, то скачок  $\Delta\omega^*(t) = \omega_{\oplus}^*(t) - \omega^*(t)$  совпадает с  $-k(t)\Delta\Upsilon/x(t)$  при некотором целом положительном  $k(t) \leq n(t)$ , т. е. разрыв  $\omega^*(\cdot)$  соответствует  $k(t)$  импульсам влево. Новое значение (предел справа) левого края вычисляется по формуле

$$\omega_{*\oplus}(t) = \max\{\omega_*(t) + \Delta\omega^*(t), p(\omega_{\oplus}^*(t))\}.$$

5) разрывы при  $t > \hat{t}$  происходят в моменты, когда центр отрезка  $\mathcal{I}$  находится на пороге  $\Delta\Upsilon/x(t)$ . Скачок соответствует одному импульсу влево.

6) разрыв в момент  $\hat{t}$  происходит, когда центр отрезка  $\mathcal{I}$  лежит на или за порогом  $\Delta\Upsilon/x(t)$ . Число  $k(\hat{t})$  определяется как минимальное целое положительное  $k$  такое, что

$$\omega_{c\oplus}(\hat{t}) = \max\left\{\omega_c(\hat{t}) - \frac{k\Delta\Upsilon}{x(\hat{t})}, q\left(\omega^*(\hat{t}) - \frac{k\Delta\Upsilon}{x(\hat{t})}\right)\right\} < \frac{\Delta\Upsilon}{x(\hat{t})}.$$

Иными словами,  $k(\hat{t})$  есть минимальное  $k$ , для которого новый центр  $\omega_{c\oplus}(\hat{t})$  оказывается под порогом  $\Delta\Upsilon/x(\hat{t})$ . Если искомое  $k$  превышает  $n(\hat{t})$ , полагаем  $k(\hat{t}) = n(\hat{t})$ .

Зададим компоненту  $n(\cdot)$ :

7) функция  $t \rightarrow n(t)$  кусочно-постоянна и определяется формулой  $n(t) = n(\hat{t}) - \sum_{t_j < t} k(t_j)$ , где  $t_j \geq \hat{t}$  – моменты разрыва функции  $\omega^*(\cdot)$ .

Пару  $(n(\cdot), \mathcal{I}(\cdot))$ , удовлетворяющую 1) – 7), назовем эталонным движением, выходящим из позиции  $(\hat{t}, n(\hat{t}), \mathcal{I}(\hat{t}))$ .

Производная  $\frac{d}{dt}p(\omega^*(t))$  вдоль эталонного движения существует на участках непрерывности функции  $\omega^*(\cdot)$  для всех  $t$ , за исключением ситуаций, когда  $\omega^*(t) = 2a = 2c_2/(1 - c_1)$  (на каждом участке непрерывности не более одного такого момента). Имеем

$$\frac{d}{dt}p(\omega^*(t)) \geq \frac{2e}{x(t)} \left( p(\omega^*(t)) + \frac{2c_2}{1 + c_1} \right) + \frac{\nu}{x(t)} \frac{(1 - c_1)}{(1 + c_1)}.$$

Следовательно, если на некотором интервале  $\omega_*(t) = p(\omega^*(t))$ , то

$$\dot{\omega}_*(t) = \frac{d}{dt}p(\omega^*(t)) \geq \frac{2e}{x(t)}\omega_*(t) - \frac{\nu}{x(t)}.$$

При этом в случае  $c_2 > 0$  или  $\nu > 0$  реализуется строгое неравенство.

Итак, на участках непрерывности эталонного движения правый край информационного отрезка уходит вправо с максимально возможной скоростью, левый стремится влево с максимальной скоростью, допускаемой ограничением  $\omega_*(t) \geq p(\omega^*(t))$ .

Пусть  $K = [\omega_*, \omega^*]$  – произвольный отрезок. Символом  $Y(K)$  обозначим отрезок, правый край которого совпадает с  $\omega^*$ , а левый определяется как  $\max\{\omega_*, p(\omega^*)\}$ . Таким образом,  $Y(K)$  – усечение отрезка  $K$ .

Подчеркнем, что на эталонном движении равенство  $\mathcal{I}(t) = Y(\mathcal{I}(t))$  выполнено при любом  $t$ . Отметим также различие в описании скачка информационного отрезка в момент действия импульсов в случае движения в силу дискретной схемы управления и в случае эталонного движения. А именно, пусть в момент  $t$  действует  $k$  импульсов влево и  $\mathcal{G}(t)$  – результат переноса отрезка  $\mathcal{I}(t)$  на величину  $-k(t)\Delta\Gamma/x(t)$ . В случае дискретной схемы управления имеем  $\mathcal{I}_{\oplus}(t) = \mathcal{G}(t)$ , в случае эталонного движения  $\mathcal{I}_{\oplus}(t) = Y(\mathcal{G}(t))$ . Изменение полуширины: в первом случае  $b_{\oplus}(t) = b(t)$ , во втором  $b_{\oplus}(t) = \min\{b(t), \beta^*(\omega_{\oplus}^*(t))\}$ .

В соответствие эталонному движению, выходящему из позиции  $(\hat{t}, n, \mathcal{I})$  (считаем  $\omega_*(\hat{t}) \geq p(\omega^*(\hat{t}))$ , т. е.  $\mathcal{I} = Y(\mathcal{I})$ ), поставим значение  $F(\hat{t}, n, \mathcal{I})$  функции гипотетического промаха. Это значение определим как максимальный прогнозируемый промах, просчитываемый на эталонном движении в момент  $t_f$  последнего импульса:

$$F(\hat{t}, n, \mathcal{I}) = \frac{\omega_{\oplus}^*(t_f)x^2(t_f)}{e} + \frac{\nu}{2} \left( \frac{x(t_f)}{e} \right)^2. \quad (8.1)$$

## § 9. Некоторые свойства движений системы (3.1), эталонного движения и функции гипотетического промаха

1. Пусть  $\omega^{(1)}(\cdot)$ ,  $\omega^{(2)}(\cdot)$  – решения дифференциального уравнения (3.1) на промежутке  $[\hat{t}, t']$  в силу управляющих воздействий

$$k^{(1)}(\cdot): k^{(1)}(t_{i_s}) > 0, \quad s = \overline{1, d}; \quad k^{(1)}(t_i) = 0, \quad t_i \notin \{t_{i_s}\},$$

$$k^{(2)}(\cdot): k^{(2)}(t') = \sum_{s=1}^d k^{(1)}(t_{i_s}); \quad k^{(2)}(t_i) = 0, \quad t_i \neq t',$$

$$v_z^{(1)}(\cdot) = v_z^{(2)}(\cdot),$$

выходящие из состояния  $\omega^{(1)}(\hat{t}) = \omega^{(2)}(\hat{t})$ . Тогда  $\omega^{(1)}(t') \leq \omega^{(2)}(t')$ . При этом равенство реализуется лишь в случае  $d = 1$ ,  $t_d = t'$ .

2. Пусть  $\hat{t} < t'$ . Тогда

$$\beta_c \left( \frac{\Delta \Upsilon}{x(t')} \right) < \beta_c \left( \frac{\Delta \Upsilon}{x(\hat{t})} \right) \frac{x^2(\hat{t})}{x^2(t')}.$$

3. Пусть на эталонном движении для некоторого момента  $t' > t_0$  выполнено неравенство  $\omega_*(t') > p(\omega^*(t'))$ . Тогда  $\omega_*(t) > p(\omega^*(t))$  при  $t \in [t_0, t')$ . До момента  $t'$  на промежутках без импульсов скорость развития полуширины  $b(t)$  описывается соотношением  $\dot{b}(t) = 2eb(t)/x(t) + \nu/x(t)$ . В моменты действия импульсов  $b_{\oplus}(t) = b(t)$ .

4. Пусть для движения в силу дискретной схемы при произвольной стратегии  $U$  первого игрока и стратегии  $\Omega^*$  второго на промежутке  $(\hat{t}, t')$  нет импульсов. Предположим, что  $\omega_*(t') > p(\omega^*(t'))$ . Тогда  $\omega_*(t) > p(\omega^*(t))$  при  $t \in (\hat{t}, t')$  и скорость развития полуширины  $b(t)$  на  $(\hat{t}, t')$  описывается соотношением  $\dot{b}(t) = 2eb(t)/x(t) + \nu/x(t)$ .

5. Пусть в позиции  $(t, n(t), \mathcal{I}(t))$  реализуется  $k(t)$  импульсов эталонного движения. Тогда множество  $\mathcal{I}_{\oplus}(t)$ , задаваемое формулами

$$\mathcal{I}_{\oplus}(t) = (\omega_{c\oplus}(t), b_{\oplus}(t)), \quad \omega_{c\oplus}(t) = \omega_{\oplus}^*(t) - b_{\oplus}(t),$$

$$\omega_{\oplus}^*(t) = \omega^*(t) - k(t) \frac{\Delta \Upsilon}{x(t)}, \quad b_{\oplus}(t) = \min\{b(t), \beta^*(\omega_{\oplus}^*(t))\},$$

можно определить последовательно через множества  $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \dots, \mathcal{I}_{k(t)}$ , где  $\mathcal{I}_i = (\omega_{ci}, b_i)$ ,  $\omega_{ci} = \omega_i^* - b_i$ ,  $\omega_i^* = \omega_{i-1}^* - \Delta \Upsilon/x(t)$ ,  $b_i = \min\{b_{i-1}, \beta^*(\omega_i^*)\}$ ,  $\omega_0^* = \omega^*(t)$ ,  $b_0 = b(t)$ . А именно:  $\mathcal{I}_{\oplus}(t) = \mathcal{I}_{k(t)}$ .

6. Пусть для двух эталонных движений на промежутке  $[\hat{t}, t')$  нет импульсов и  $\omega_c^{(1)}(t) < \omega_c^{(2)}(t)$ ,  $t \in [\hat{t}, t')$ ,  $\omega_c^{(1)}(t') = \omega_c^{(2)}(t')$ . Тогда  $b^{(1)}(t') \geq b^{(2)}(t')$ .

7. Пусть для двух эталонных движений на промежутке  $[\hat{t}, t')$  нет импульсов и  $\omega_c^{(1)}(\hat{t}) < \omega_c^{(2)}(\hat{t})$ ,  $\omega^{(1)*}(\hat{t}) < \omega^{(2)*}(\hat{t})$ . Тогда  $\omega_c^{(1)}(t) < \omega_c^{(2)}(t)$ ,  $t \in [\hat{t}, t')$ .

8. Пусть в момент  $t$  для двух эталонных движений  $\omega_c^{(1)}(t) \geq \omega_c^{(2)}(t)$ ,  $b^{(1)}(t) \geq b^{(2)}(t)$ ,  $k^{(1)}(t) = k^{(2)}(t)$ . Тогда (после действия импульсов)  $\omega_{c\oplus}^{(1)}(t) \geq \omega_{c\oplus}^{(2)}(t)$ ,  $b_{\oplus}^{(1)}(t) \geq b_{\oplus}^{(2)}(t)$ .

9. Вдоль эталонного движения функция  $F$  гипотетического промаха есть константа.

Следующее свойство можно назвать свойством монотонности функции гипотетического промаха. Сформулируем его в виде леммы. Положим  $F^{(i)} = F(t, n^{(i)}(t), \mathcal{I}^{(i)}(t))$ ,  $i = 1, 2$ .

**Лемма 1.** Пусть в момент  $t$  две позиции  $(t, n^{(1)}(t), \mathcal{I}^{(1)}(t))$ ,  $(t, n^{(2)}(t), \mathcal{I}^{(2)}(t))$  таковы, что  $n^{(1)}(t) = n^{(2)}(t)$ ,  $\omega_c^{(1)}(t) \geq \omega_c^{(2)}(t)$ ,  $b^{(1)}(t) \geq b^{(2)}(t)$ . Справедлива оценка

$$F^{(2)} \leq F^{(1)} \leq F^{(2)} + \frac{(\omega^{(1)*}(t) - \omega^{(2)*}(t))x^2(t)}{e}. \quad (9.1)$$

Неравенство  $F^{(2)} \leq F^{(1)}$  выполнено также в случае  $n^{(1)}(t) \leq n^{(2)}(t)$ ,  $\mathcal{I}^{(1)}(t) \supset \mathcal{I}^{(2)}(t)$ .

В следующих двух утверждениях говорится о значениях  $F(t, n(t), \mathcal{I}(t))$ ,  $F(t, n(t) - 1, Y(\mathcal{I}_\oplus(t)))$  функции  $F$  до и после одного импульса.

10. Пусть позиция  $(t, n(t), \mathcal{I}(t))$  произвольна и действует один импульс вправо. Тогда значение функции  $F$  после импульса не убывает.

11. Пусть позиция  $(t, n(t), \mathcal{I}(t))$  такова, что  $\omega_c(t) < \Delta\Upsilon/x(t)$  (центр под порогом), и действует один импульс влево. Тогда значение функции  $F$  после импульса не убывает.

## § 10. Доказательство утверждений 1 – 9

1. Доказывается при помощи формулы (3.3). Имеем

$$\omega^{(1)}(t') = \omega^{(1)}(\hat{t}) \frac{x^2(\hat{t})}{x^2(t')} + \frac{1}{x^2(t')} \int_{\hat{t}}^{t'} x(\tau) v_z^{(1)}(\tau) d\tau - \frac{\Delta\Upsilon}{x^2(t')} \sum_{s=1}^d k^{(1)}(t_{i_s}) x(t_{i_s}),$$

$$\omega^{(2)}(t') = \omega^{(2)}(\hat{t}) \frac{x^2(\hat{t})}{x^2(t')} + \frac{1}{x^2(t')} \int_{\hat{t}}^{t'} x(\tau) v_z^{(2)}(\tau) d\tau - \frac{\Delta\Upsilon}{x^2(t')} k^{(2)}(t') x(t').$$

Следовательно,

$$\omega^{(2)}(t') - \omega^{(1)}(t') = \frac{\Delta\Upsilon}{x(t')} \left[ -k^{(2)}(t') + \sum_{s=1}^d k^{(1)}(t_{i_s}) \frac{x(t_{i_s})}{x(t')} \right] \geq 0.$$

Равенство реализуется лишь в случае  $d = 1$ ,  $t_d = t'$ .

2. Пусть  $\Delta\Upsilon/x(t') \leq a = c_2/(1 - c_1)$ . Тогда  $\Delta\Upsilon/x(\hat{t}) < a$ . Поэтому  $\beta_c(\Delta\Upsilon/x(t')) = \beta_c(\Delta\Upsilon/x(\hat{t})) = a$ . Доказываемое неравенство следует из того, что  $x(\hat{t})/x(t') > 1$ .

Пусть  $\Delta\Upsilon/x(t') > a$ . Тогда  $\beta_c(\Delta\Upsilon/x(t')) = c_1\Delta\Upsilon/x(t') + c_2$ . Если  $\Delta\Upsilon/x(\hat{t}) < a$ , то  $\beta_c(\Delta\Upsilon/x(\hat{t})) = a$ . Если  $\Delta\Upsilon/x(\hat{t}) \geq a$ , то  $\beta_c(\Delta\Upsilon/x(\hat{t})) = c_1\Delta\Upsilon/x(\hat{t}) + c_2$ . Нужное неравенство вытекает из соотношения

$$\begin{aligned}
c_1 \frac{\Delta \Upsilon}{x(t')} + c_2 &= \left( c_1 \frac{\Delta \Upsilon}{x(t')} + c_2 \right) \frac{x^2(\hat{t})}{x^2(t)} < \\
< c_1 \frac{\Delta \Upsilon}{x(t')} \frac{x^2(\hat{t})}{x(\hat{t})x(t')} + c_2 \frac{x^2(\hat{t})}{x^2(t')} &= \left( c_1 \frac{\Delta \Upsilon}{x(\hat{t})} + c_2 \right) \frac{x^2(\hat{t})}{x^2(t')}.
\end{aligned}$$

Пояснений при этом требует лишь случай  $\Delta \Upsilon/x(\hat{t}) < a$ . Для него, с учетом равенства  $a = c_1 a + c_2$ , имеем

$$\begin{aligned}
\beta_c \left( \frac{\Delta \Upsilon}{x(t')} \right) &= c_1 \frac{\Delta \Upsilon}{x(t')} + c_2 < \left( c_1 \frac{\Delta \Upsilon}{x(\hat{t})} + c_2 \right) \frac{x^2(\hat{t})}{x^2(t')} < \\
< (c_1 a + c_2) \frac{x^2(\hat{t})}{x^2(t')} &= a \frac{x^2(\hat{t})}{x^2(t')} = \beta_c \left( \frac{\Delta \Upsilon}{x(\hat{t})} \right) \frac{x^2(\hat{t})}{x^2(t')}.
\end{aligned}$$

3. Покажем, что  $\omega_*(t) > p(\omega^*(t))$  при  $t \in [t_0, t']$ . Предполагая противное, обозначим через  $t^\circ$  максимальный из моментов, для которых реализуется равенство  $\omega_*(t) = p(\omega^*(t))$ . Таким образом,  $\omega_*(t^\circ) = p(\omega^*(t^\circ))$  и  $\omega_*(t) > p(\omega^*(t))$ ,  $t \in (t^\circ, t']$ .

Момент  $t^\circ$  существует. Действительно, имеем конечное число участков непрерывности  $\omega^*(\cdot)$ . Берем ближайший к  $t'$ , содержащий точки с равенством  $\omega_*(t) = p(\omega^*(t))$ . В пределах выделенного участка находим точную верхнюю грань моментов, для которых  $\omega_*(t) = p(\omega^*(t))$ . Точная верхняя грань достигается в силу замкнутости рассматриваемого промежутка справа.

Предположим, что  $t^\circ$  – внутренняя точка промежутка непрерывности. Пусть  $t^\sharp > t^\circ$  – некоторый момент того же промежутка. На интервале  $(t^\circ, t^\sharp)$  имеем  $\dot{\omega}_*(t) = 2e\omega_*(t)/x(t) - \nu/x(t)$ , в то же время  $\frac{d}{dt}p(\omega^*(t)) \geq 2ep(\omega^*(t))/x(t)$ . Поэтому, с учетом условия  $\omega_*(t^\circ) = p(\omega^*(t^\circ))$ , получим в момент  $t^\sharp$  соотношение  $\omega_*(t^\sharp) \leq p(\omega^*(t^\sharp))$ . Пришли к противоречию. Допустим теперь, что  $t^\circ$  – правый край промежутка непрерывности. Вследствие монотонности зависимости  $\omega \rightarrow p(\omega)$  получим  $\omega_{*\oplus}(t^\circ) = p(\omega_{*\oplus}^*(t^\circ))$ , что приведет к  $\omega_*(t) \leq p(\omega^*(t))$  для  $t$  близких к  $t^\circ$  справа. Противоречие.

Доказательство второй части, связанной с полушириной  $b(t)$ , вытекает непосредственно из определения эталонного движения и формулы  $b(t) = (\omega^*(t) - \omega_*(t))/2$ .

4. Неравенство  $\omega_*(t) > p(\omega^*(t))$  при  $t \in (\hat{t}, \hat{t}')$  доказывается от противного с учетом динамики развития информационного отрезка на интервалах  $(t_i, t_{i+1})$  между двумя соседними дискретными моментами и с учетом правила перехода от  $\mathcal{I}_\Theta(t_i)$  к  $\mathcal{I}(t_i)$ , когда действует стратегия  $\Omega^*$ . При выполнении соотношения  $\omega_*(t) > p(\omega^*(t))$ ,  $t \in (\hat{t}, \hat{t}')$ , в силу определения стратегии  $\Omega^*$  имеем  $\mathcal{I}(t_i) = \mathcal{I}_\Theta(t_i)$  для любых  $t \in (\hat{t}, \hat{t}']$ . Поэтому скорость изменения полуширины  $b(t)$  на промежутке  $(\hat{t}, \hat{t}')$  такая же, как и на каждом интервале  $(t_i, t_{i+1})$ , т. е.  $\dot{b}(t) = 2eb(t)/x(t) + \nu/x(t)$ .

5. Доказательство следует из монотонности  $\beta^*(\omega)$  по  $\omega$ . В самом деле,  $\mathcal{I}_{k(t)} = (\omega_{ck(t)}, b_{k(t)})$  – множество, получаемое в результате последовательных переходов. Очевидно, что  $\omega_{k(t)}^* = \omega_\Phi^*(t)$ . Далее,

$$\begin{aligned} b_{k(t)} &= \min\{b(t); \beta^*(\omega_i^*), i = \overline{1, k(t)}\} = \min\{b(t), \beta^*(\omega_{k(t)}^*)\} = \\ &= \min\{b(t), \beta^*(\omega_\Phi^*(t))\} = b_\Phi(t). \end{aligned}$$

Поэтому  $\mathcal{I}_\Phi(t) = \mathcal{I}_{k(t)}$ .

6. Предположим противное:  $b^{(1)}(t') < b^{(2)}(t')$ . Тогда с учетом  $\omega_c^{(1)}(t') = \omega_c^{(2)}(t')$  имеем  $b^{(1)}(t') < b^{(2)}(t') \leq \beta_c(\omega_c^{(2)}(t')) = \beta_c(\omega_c^{(1)}(t'))$ , т. е.  $b^{(1)}(t') < \beta_c(\omega_c^{(1)}(t'))$  или, что то же самое,  $b^{(1)}(t') < \beta^*(\omega^{(1)*}(t'))$ . Следовательно,  $\dot{\omega}_c^{(1)}(t) = 2e\omega_c^{(1)}(t)/x(t)$  в некоторой малой окрестности  $t'$  (свойство 3).

Пусть  $b^{(2)}(t) < \beta^*(\omega^{(2)*}(t))$  при  $t < t'$ . Тогда  $\dot{\omega}_c^{(2)}(t) = 2e\omega_c^{(2)}(t)/x(t)$  вблизи  $t'$ . Из  $\omega_c^{(1)}(t') = \omega_c^{(2)}(t')$  следует  $\omega_c^{(1)}(t) = \omega_c^{(2)}(t)$  вблизи  $t'$ , что противоречит  $\omega_c^{(1)}(t) < \omega_c^{(2)}(t)$  при  $t < t'$ . Пусть существует момент  $t^\flat \in [\hat{t}, t')$ , для которого  $b^{(2)}(t^\flat) = \beta^*(\omega^{(2)*}(t^\flat))$ . Тогда  $b^{(2)}(t) = \beta^*(\omega^{(2)*}(t))$  для любого  $t \in [t^\flat, t']$  (свойство 3). Если  $\omega^{(2)*}(t') \leq 2a$ , то  $\omega^{(2)*}(t) < 2a$  при  $t \in [\hat{t}, t']$  и  $\dot{\omega}_c^{(2)}(t) = \dot{\omega}^{(2)*}(t) = 2e(\omega_c^{(2)}(t) + a)/x(t) + \nu/x(t)$ . Приходим к противоречию с  $\omega_c^{(1)}(t') = \omega_c^{(2)}(t')$ ,  $\omega_c^{(1)}(t) < \omega_c^{(2)}(t)$  при  $t < t'$ . Пусть  $\omega^{(2)*}(t') > 2a$ . Тогда

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_c^{(2)}(t) &= \frac{\dot{\omega}^{(2)*}(t)}{1+c_1} = \frac{2e\omega^{(2)*}(t)}{x(t)(1+c_1)} + \frac{\nu}{x(t)(1+c_1)} = \\ &= \frac{2e(\omega_c^{(2)}(t)(1+c_1) + c_2)}{x(t)(1+c_1)} + \frac{\nu}{x(t)(1+c_1)} = \end{aligned}$$

$$= \frac{2e}{x(t)}\omega_c^{(2)}(t) + \frac{2ec_2}{x(t)(1+c_1)} + \frac{\nu}{x(t)(1+c_1)}$$

вблизи  $t'$ . Снова пришли к противоречию.

7. Предположим от противного существование  $t^\circ \in [\hat{t}, t']$ , для которого  $\omega_c^{(1)}(t^\circ) \geq \omega_c^{(2)}(t^\circ)$ . Возьмем первый такой момент  $t^\flat$  после  $\hat{t}$ . Для него  $\omega_c^{(1)}(t^\flat) = \omega_c^{(2)}(t^\flat)$ . В силу свойства 6 имеем  $b^{(1)}(t^\flat) \geq b^{(2)}(t^\flat)$ . Следовательно,  $\omega^{*(1)}(t^\flat) \geq \omega^{*(2)}(t^\flat)$ . С другой стороны, в силу условия  $\omega^{(1)*}(\hat{t}) < \omega^{(2)*}(\hat{t})$  получаем  $\omega^{(1)*}(t) < \omega^{(2)*}(t)$ ,  $t \in [\hat{t}, t']$ . Пришли к противоречию.

8. Очевидно  $\omega^{(1)*}(t) \geq \omega^{(2)*}(t)$ . Имеем

$$\omega_{\oplus}^{(1)*}(t) = \omega^{(1)*}(t) - k^{(1)}(t) \frac{\Delta \Upsilon}{x(t)} \geq \omega^{(2)*}(t) - k^{(2)}(t) \frac{\Delta \Upsilon}{x(t)} = \omega_{\oplus}^{(2)*}(t).$$

Докажем неравенство  $b_{\oplus}^{(1)}(t) \geq b_{\oplus}^{(2)}(t)$ . Пусть  $b_{\oplus}^{(1)}(t) < \beta^*(\omega_{\oplus}^{(1)*}(t))$ . Тогда  $b_{\oplus}^{(1)}(t) = b^{(1)}(t) \geq b^{(2)}(t) \geq b_{\oplus}^{(2)}(t)$ . Пусть  $b_{\oplus}^{(1)}(t) = \beta^*(\omega_{\oplus}^{(1)*}(t))$ . Тогда  $b_{\oplus}^{(1)}(t) = \beta^*(\omega_{\oplus}^{(1)*}(t)) \geq \beta^*(\omega_{\oplus}^{(2)*}(t)) \geq b_{\oplus}^{(2)}(t)$ .

Перейдем к доказательству неравенства  $\omega_{c\oplus}^{(1)}(t) \geq \omega_{c\oplus}^{(2)}(t)$ . Предположим вначале, что  $b_{\oplus}^{(2)}(t) = \beta^*(\omega_{\oplus}^{(2)*}(t))$ . Получим  $\omega_{c\oplus}^{(1)}(t) \geq q(\omega_{\oplus}^{(1)*}(t)) \geq q(\omega_{\oplus}^{(2)*}(t)) = \omega_{c\oplus}^{(2)}(t)$ . Пусть  $b_{\oplus}^{(2)}(t) < \beta^*(\omega_{\oplus}^{(2)*}(t))$ . Следовательно,  $b_{\oplus}^{(2)}(t) = b^{(2)}(t)$ . Учитывая  $b^{(1)}(t) \geq b_{\oplus}^{(1)}(t)$ , имеем

$$\begin{aligned} \omega_{c\oplus}^{(1)}(t) &= \omega_{\oplus}^{(1)*}(t) - b_{\oplus}^{(1)}(t) \geq \omega^{(1)*}(t) - k^{(1)}(t) \frac{\Delta \Upsilon}{x(t)} - b^{(1)}(t) = \\ &= \omega_c^{(1)}(t) - k^{(1)}(t) \frac{\Delta \Upsilon}{x(t)} \geq \omega_c^{(2)}(t) - k^{(2)}(t) \frac{\Delta \Upsilon}{x(t)} = \\ &= \omega^{(2)*}(t) - k^{(2)}(t) \frac{\Delta \Upsilon}{x(t)} - b^{(2)}(t) = \omega_{\oplus}^{(2)*}(t) - b_{\oplus}^{(2)}(t) = \omega_{c\oplus}^{(2)}(t). \end{aligned}$$

9. Следует непосредственно из определения эталонного движения и функции гипотетического промаха.

§ 11. Доказательство леммы 1 и утверждений 10, 11

Доказательство леммы 1. Обозначим рассматриваемый момент через  $\hat{t}$ . Установим справедливость неравенства

$$F^{(1)} \leq F^{(2)} + \frac{(\omega^{(1)*}(\hat{t}) - \omega^{(2)*}(\hat{t}))x^2(\hat{t})}{e}.$$

Начиная с момента  $\hat{t}$ , пронумеруем по порядку импульсы первого эталонного движения. Символом  $t_s^{(1)}$  обозначим момент  $s$ -го импульса,  $s \leq n^{(1)}(\hat{t})$ . Считаем  $t_s^{(1)} = \hat{t}$  для  $s \leq k^{(1)}(\hat{t})$ . Аналогично, пусть  $t_s^{(2)}$ ,  $s \leq n^{(2)}(\hat{t})$ , — момент  $s$ -го импульса на втором эталонном движении и  $t_s^{(2)} = \hat{t}$  для  $s \leq k^{(2)}(\hat{t})$ .

Правило чередования импульсов первого и второго движений описывается предложением: при любом  $s \leq n^{(1)}(\hat{t}) = n^{(2)}(\hat{t})$  справедливо неравенство  $t_s^{(1)} \leq t_s^{(2)}$ . Отсюда вытекает требуемая оценка. Действительно,  $t_s^{(1)} \leq t_s^{(2)}$  влечет  $x(t_s^{(1)}) \geq x(t_s^{(2)})$ . Используя (8.1), (3.3) и (3.4), получаем

$$\begin{aligned} F^{(1)} - F^{(2)} &= \frac{\omega^{(1)*}(\hat{t})x^2(\hat{t})}{e} - \sum_{s=1}^{n^{(1)}(\hat{t})} \frac{\Delta \Upsilon x(t_s^{(1)})}{e} + \frac{\nu}{2} \left( \frac{x(\hat{t})}{e} \right)^2 - \\ &\quad - \frac{\omega^{(2)*}(\hat{t})x^2(\hat{t})}{e} + \sum_{s=1}^{n^{(2)}(\hat{t})} \frac{\Delta \Upsilon x(t_s^{(2)})}{e} - \frac{\nu}{2} \left( \frac{x(\hat{t})}{e} \right)^2 = \\ &= \frac{(\omega^{(1)*}(\hat{t}) - \omega^{(2)*}(\hat{t}))x^2(\hat{t})}{e} - \frac{\Delta \Upsilon}{e} \sum_{s=1}^{n^{(1)}(\hat{t})=n^{(2)}(\hat{t})} (x(t_s^{(1)}) - x(t_s^{(2)})) \leq \\ &\leq \frac{(\omega^{(1)*}(\hat{t}) - \omega^{(2)*}(\hat{t}))x^2(\hat{t})}{e}. \end{aligned}$$

Перейдем к доказательству предложения о характере чередования импульсов. Требуется установить, что  $t_s^{(1)} \leq t_s^{(2)}$  при любом  $s \leq n^{(1)}(\hat{t}) = n^{(2)}(\hat{t})$ .

Предположим противное:  $t_{\bar{s}}^{(1)} > t_{\bar{s}}^{(2)}$  для некоторого номера  $\bar{s}$ . Если таких номеров более одного, считаем номер  $\bar{s}$  наименьшим, т. е.  $t_{\bar{s}}^{(1)} \leq t_{\bar{s}}^{(2)}$ ,  $s < \bar{s}$ .

1) Из предположений леммы следует  $k^{(1)}(\hat{t}) \geq k^{(2)}(\hat{t})$ . Поэтому  $t_{\bar{s}}^{(2)} > \hat{t}$ . Отметим также, что  $t_{\bar{s}}^{(2)}$  не может быть одновременно моментом импульса первого движения. Покажем, что  $\bar{s} > 1$ . В самом деле, пусть  $\bar{s} = 1$ . Тогда, с учетом  $t_{\bar{s}}^{(1)} > t_{\bar{s}}^{(2)} > \hat{t}$ , это означает, что второе движение при  $t > \hat{t}$  выходит на порог раньше первого. Такое невозможно, ибо  $\omega_c^{(1)}(\hat{t}) \geq \omega_c^{(2)}(\hat{t})$ ,  $b^{(1)}(\hat{t}) \geq b^{(2)}(\hat{t})$  (свойство 7 с несложными дополнительными рассуждениями).

2) Поскольку  $t_{\frac{s}{s-1}}^{(1)} \leq t_{\frac{s}{s-1}}^{(2)}$  и  $t_{\frac{s}{s}}^{(2)} > t_{\frac{s}{s-1}}^{(2)}$ , то ближайшим к  $t_{\frac{s}{s}}^{(2)}$  слева моментом импульса является импульс на втором движении. Имеем  $n_{\oplus}^{(1)}(t_{\frac{s}{s-1}}^{(2)}) = n_{\oplus}^{(2)}(t_{\frac{s}{s-1}}^{(2)})$ .

Момент  $t_{\frac{s}{s-1}}^{(2)}$  не может совпадать с  $\hat{t}$ . В самом деле, при совпадении получили бы  $k^{(1)}(\hat{t}) = k^{(2)}(\hat{t})$  и из неравенств  $\omega_c^{(1)}(\hat{t}) \geq \omega_c^{(2)}(\hat{t})$ ,  $b^{(1)}(\hat{t}) \geq b^{(2)}(\hat{t})$  вытекало бы  $\omega_{c\oplus}^{(1)}(\hat{t}) \geq \omega_{c\oplus}^{(2)}(\hat{t})$ ,  $b_{\oplus}^{(1)}(\hat{t}) \geq b_{\oplus}^{(2)}(\hat{t})$  (свойство 8). В таком случае ближайший справа к  $\hat{t} = t_{\frac{s}{s-1}}^{(2)}$  выход на порог был бы выходом первого движения (свойство 7), что противоречит определению моментов  $t_{\frac{s}{s}}^{(2)}$ ,  $t_{\frac{s}{s-1}}^{(2)}$ .

Обозначим для краткости  $t^{\sharp} = t_{\frac{s}{s-1}}^{(2)}$ . Покажем, что  $\omega_{\oplus}^{(2)*}(t^{\sharp}) > \omega_{\oplus}^{(1)*}(t^{\sharp})$ . В самом деле, пусть  $\omega_{\oplus}^{(2)*}(t^{\sharp}) \leq \omega_{\oplus}^{(1)*}(t^{\sharp})$ . Если  $b_{\oplus}^{(2)}(t^{\sharp}) = \beta^*(\omega_{\oplus}^{(2)*}(t^{\sharp}))$ , то  $b^{(2)}(t) = \beta^*(\omega^{(2)*}(t))$  для  $t > t^{\sharp}$  (свойство 3) и  $\omega_c^{(2)}(t) = q(\omega^{(2)*}(t)) \leq q(\omega^{(1)*}(t)) \leq \omega_c^{(1)}(t)$  при  $t \in (t^{\sharp}, t_{\frac{s}{s}}^{(2)})$ . Таким образом, первое движение выходит при  $t > t^{\sharp}$  на порог не позже второго, что противоречит определению момента  $t_{\frac{s}{s}}^{(2)}$ . Если  $b_{\oplus}^{(2)}(t^{\sharp}) < \beta^*(\omega_{\oplus}^{(2)*}(t^{\sharp}))$ , то  $\omega_{c\oplus}^{(2)}(t^{\sharp}) = 0$  и значит  $\omega_c^{(2)}(t) = 0$  до момента  $\bar{t}$ , когда впервые  $b^{(2)}(\bar{t}) = \beta^*(\omega^{(2)*}(\bar{t}))$ . В случае  $\bar{t} < t_{\frac{s}{s}}^{(2)}$  приходим к предыдущему варианту. В случае  $\bar{t} \geq t_{\frac{s}{s}}^{(2)}$  имеем, очевидно,  $\omega_c^{(1)}(t_{\frac{s}{s}}^{(2)}) \geq 0 = \omega_c^{(2)}(t_{\frac{s}{s}}^{(2)})$ .

3) Из неравенства  $\omega_{\oplus}^{(2)*}(t^{\sharp}) > \omega_{\oplus}^{(1)*}(t^{\sharp})$  получаем  $b^{(2)}(t^{\sharp}) = \omega_{\oplus}^{(2)*}(t^{\sharp}) > \omega_{\oplus}^{(1)*}(t^{\sharp}) \geq b^{(1)}(t^{\sharp})$ , т. е.  $b^{(2)}(t^{\sharp}) > b^{(1)}(t^{\sharp})$ . Таким образом, указан момент, когда  $b^{(2)}(t) > b^{(1)}(t)$ , хотя в начальный момент  $b^{(1)}(\hat{t}) \geq b^{(2)}(\hat{t})$ .

4) Пусть  $t^{\flat} < t^{\sharp}$  – момент, когда впервые  $b_{\oplus}^{(2)}(t^{\flat}) \geq b_{\oplus}^{(1)}(t^{\flat})$  и  $b^{(2)}(t) > b^{(1)}(t)$  при  $t$  близких к  $t^{\flat}$  справа. Тогда  $b_{\oplus}^{(1)}(t^{\flat}) = \beta^*(\omega_{\oplus}^{(1)*}(t^{\flat}))$  и  $b^{(1)}(t) = \beta^*(\omega^{(1)*}(t))$  для  $t > t^{\flat}$  (свойство 3 с учетом  $b^{(1)}(\hat{t}) \geq b^{(2)}(\hat{t})$ ).

Имеем  $\omega_{\oplus}^{(2)*}(t^{\flat}) > \omega_{\oplus}^{(1)*}(t^{\flat})$ ,  $\omega_{c\oplus}^{(2)}(t^{\flat}) > \omega_{c\oplus}^{(1)}(t^{\flat})$ . Действительно, пусть  $\omega_{\oplus}^{(2)*}(t^{\flat}) \leq \omega_{\oplus}^{(1)*}(t^{\flat})$ . Тогда  $\omega^{(2)*}(t) \leq \omega^{(1)*}(t)$  для  $t$  близких к  $t^{\flat}$ ,  $t > t^{\flat}$ , и значит  $b^{(2)}(t) \leq \beta^*(\omega^{(2)*}(t)) \leq \beta^*(\omega^{(1)*}(t)) = b^{(1)}(t)$ , что противоречит  $b^{(2)}(t) > b^{(1)}(t)$ . Из  $\omega_{\oplus}^{(2)*}(t^{\flat}) > \omega_{\oplus}^{(1)*}(t^{\flat})$  и  $b^{(1)}(t) = \beta^*(\omega^{(1)*}(t))$  следует  $\omega_{c\oplus}^{(2)}(t^{\flat}) \geq q(\omega_{\oplus}^{(2)*}(t^{\flat})) > q(\omega_{\oplus}^{(1)*}(t^{\flat})) = \omega_{c\oplus}^{(1)}(t^{\flat})$ .

5) Покажем, что

$$\omega_{\oplus}^{(1)*}(t^{\flat}) \geq b_{\oplus}^{(2)}(t^{\flat}). \quad (11.1)$$

Для момента  $t^{\flat}$  выполнены неравенства

$$b^{(1)}(t^{\flat}) \geq b^{(2)}(t^{\flat}) \geq b_{\oplus}^{(2)}(t^{\flat}). \quad (11.2)$$

Пусть  $t^{\flat} > \hat{t}$ . Если  $t^{\flat}$  – момент импульса на первом движении, то

$\omega_{\oplus}^{(1)*}(t^b) = b^{(1)}(t^b)$ . С учетом (11.2) отсюда следует (11.1). Если  $t^b$  не является моментом импульса первого движения, то  $\omega_{\oplus}^{(1)*}(t^b) = \omega^{(1)*}(t^b) \geq b^{(1)}(t^b)$ . Вновь с учетом (11.2) получаем (11.1).

Пусть  $t^b = \hat{t}$ . Из неравенства  $b^{(2)}(t) > b^{(1)}(t)$ , справедливого для  $t > t^b = \hat{t}$  близких к  $\hat{t}$ , следует  $k^{(1)}(\hat{t}) > k^{(2)}(\hat{t})$ . Рассмотрим последний импульс из серии  $k^{(1)}(\hat{t})$ . Обозначим для краткости через  $b_a^{(1)} = b_{k^{(1)}(\hat{t})-1}^{(1)}$  (см. свойство 5) полуширину перед последним импульсом, соответственно пусть  $\omega_a^{(1)*} = \omega_{k^{(1)}(\hat{t})-1}^{(1)*} = \omega^{(1)*}(\hat{t}) - (k^{(1)}(\hat{t}) - 1)\Delta\Upsilon/x(\hat{t})$ ,  $\omega_{ca}^{(1)} = \omega_a^{(1)*} - b_a^{(1)}$ . Имеем  $\omega_{ca}^{(1)} \geq \Delta\Upsilon/x(\hat{t})$ , в то время как  $\omega_{\oplus}^{(2)}(\hat{t}) < \Delta\Upsilon/x(\hat{t})$  (центр первого движения перед последним импульсом в момент  $\hat{t}$  лежит на или за порогом, центр второго после действия всех импульсов – под порогом). Неравенство  $\omega_{ca}^{(1)} \geq \Delta\Upsilon/x(\hat{t})$  влечет за собой  $\omega_{\oplus}^{(1)*}(\hat{t}) = \omega_a^{(1)*} - \Delta\Upsilon/x(\hat{t}) = \omega_{ca}^{(1)} + b_a^{(1)} - \Delta\Upsilon/x(\hat{t}) \geq b_a^{(1)}$ . Покажем, что  $b_a^{(1)} \geq b_{\oplus}^{(2)}(\hat{t})$ . Действительно, пусть  $b_a^{(1)} < \beta^*(\omega_a^{(1)*})$ . Тогда  $b_a^{(1)} = b^{(1)}(\hat{t}) \geq b^{(2)}(\hat{t}) \geq b_{\oplus}^{(2)}(\hat{t})$ . Если  $b_a^{(1)} = \beta^*(\omega_a^{(1)*})$ , то из неравенства  $\beta_c(\omega_{ca}^{(1)}) \geq \beta_c(\omega_{\oplus}^{(2)}(\hat{t}))$  получаем  $b_a^{(1)} = \beta^*(\omega_a^{(1)*}) = \beta_c(\omega_{ca}^{(1)}) \geq \beta_c(\omega_{\oplus}^{(2)}(\hat{t})) \geq b_{\oplus}^{(2)}(\hat{t})$ . Таким образом,  $\omega_{\oplus}^{(1)*}(\hat{t}) \geq b_a^{(1)} \geq b_{\oplus}^{(2)}(\hat{t})$ . Неравенство (11.1) доказано для случая  $t^b = \hat{t}$ .

6) Рассмотрим ближайший к  $t^b$  момент импульса  $t^\circ > t^b$ . Из неравенства  $\omega_{\oplus}^{(2)*}(t^b) > \omega_{\oplus}^{(1)*}(t^b)$  получаем  $\omega^{(2)*}(t^\circ) > \omega^{(1)*}(t^\circ)$ . Отсюда с учетом соотношения  $b^{(1)}(t) = \beta^*(\omega^{(1)*}(t))$ ,  $t > t^b$ , имеем  $\omega_{\oplus}^{(2)*}(t^\circ) \geq q(\omega^{(2)*}(t^\circ)) > q(\omega^{(1)*}(t^\circ)) = \omega_{\oplus}^{(1)*}(t^\circ)$ . Следовательно,  $t^\circ$  – момент импульса на втором движении. Первое движение в момент  $t^\circ$  ниже порога.

Из  $b^{(2)}(t) > b^{(1)}(t)$  для  $t > t^b$  близких к  $t^b$  и  $b^{(1)}(t) = \beta^*(\omega^{(1)*}(t))$  при  $t \in (t^b, t^\circ]$ ,  $\omega^{(2)*}(t^\circ) > \omega^{(1)*}(t^\circ)$  вытекает  $b^{(2)}(t^\circ) > b^{(1)}(t^\circ)$ . Действительно, если  $b^{(2)}(t^\circ) < \beta^*(\omega^{(2)*}(t^\circ))$ , то опираемся на свойство 3. Пусть  $b^{(2)}(t^\circ) = \beta^*(\omega^{(2)*}(t^\circ))$ . Соотношения  $b^{(1)}(t) = \beta^*(\omega^{(1)*}(t))$ ,  $b^{(2)}(t) > b^{(1)}(t)$  влекут за собой  $\omega^{(2)*}(t) > 2a$ . Тем более  $\omega^{(2)*}(t^\circ) > 2a$ . Но тогда  $b^{(2)}(t^\circ) = \beta^*(\omega^{(2)*}(t^\circ)) > \beta^*(\omega^{(1)*}(t^\circ)) = b^{(1)}(t^\circ)$ .

7) Неравенство (11.1) влечет за собой  $\omega^{(1)*}(t^\circ) \geq b^{(2)}(t^\circ)$  и поэтому  $\omega_{\oplus}^{(1)*}(t^\circ) = \omega^{(1)*}(t^\circ) \geq b^{(2)}(t^\circ) = \omega_{\oplus}^{(2)*}(t^\circ)$ .

Покажем, что  $b_{\oplus}^{(2)}(t^\circ) = \beta^*(\omega^{(2)*}(t^\circ))$ . От противного: пусть  $b_{\oplus}^{(2)}(t^\circ) < \beta^*(\omega_{\oplus}^{(2)*}(t^\circ))$ . Тогда  $b_{\oplus}^{(2)}(t^\circ) = b^{(2)}(t^\circ)$  и значит  $b_{\oplus}^{(2)}(t^\circ) = b^{(2)}(t^\circ) > b^{(1)}(t^\circ) = b_{\oplus}^{(1)}(t^\circ)$ . С другой стороны,  $b_{\oplus}^{(1)}(t^\circ) = \beta^*(\omega_{\oplus}^{(1)*}(t^\circ)) \geq \beta^*(\omega_{\oplus}^{(2)*}(t^\circ)) \geq b_{\oplus}^{(2)}(t^\circ)$ . Пришли к противоречию.

Отметим, наконец, что следствием  $b^{(2)}(t^\circ) > b^{(1)}(t^\circ)$  является также  $b_{\oplus}^{(1)}(t^\circ) = b^{(1)}(t^\circ) < b^{(2)}(t^\circ) = \omega_{\oplus}^{(2)*}(t^\circ)$ .

Таким образом,  $\omega_{\oplus}^{(1)*}(t^\circ) \geq \omega_{\oplus}^{(2)*}(t^\circ)$ ,  $b^{(1)}(t) = \beta^*(\omega^{(1)*}(t))$  при  $t > t^b$ ,  $b^{(2)}(t) = \beta^*(\omega^{(2)*}(t))$  при  $t > t^\circ$ ,  $b_{\oplus}^{(1)}(t^\circ) < \omega_{\oplus}^{(2)*}(t^\circ)$ .

8) Если  $\omega_{\oplus}^{(1)*}(t^\circ) = \omega_{\oplus}^{(2)*}(t^\circ)$ , то первое и второе движения совпадают при  $t > t^\circ$  по крайней мере до момента  $t_{\frac{1}{3}}^{(1)}$ .

Если  $\omega_{\oplus}^{(1)*}(t^\circ) > \omega_{\oplus}^{(2)*}(t^\circ)$ , то следующим за  $t^\circ$  будет выход на порог первого движения. Пусть  $\check{t}$  – момент выхода. Второе движение в момент  $\check{t}$  ниже порога. Имеем  $b^{(2)}(\check{t}) \leq b^{(1)}(\check{t})$ . Из  $b_{\oplus}^{(1)}(t^\circ) < \omega_{\oplus}^{(2)*}(t^\circ)$  получим  $b^{(1)}(\check{t}) < \omega^{(2)*}(\check{t})$  и значит  $\omega_{\oplus}^{(2)*}(\check{t}) = \omega^{(2)*}(\check{t}) > b^{(1)}(\check{t}) = \omega_{\oplus}^{(1)*}(\check{t})$ . Неравенство  $b^{(2)}(\check{t}) \leq b^{(1)}(\check{t})$  влечет за собой  $b_{\oplus}^{(2)}(\check{t}) = b^{(2)}(\check{t}) \leq b^{(1)}(\check{t}) = \omega_{\oplus}^{(1)*}(\check{t})$ .

Таким образом,  $\omega_{\oplus}^{(2)*}(\check{t}) > \omega_{\oplus}^{(1)*}(\check{t})$ ,  $b_{\oplus}^{(2)}(\check{t}) \leq \omega_{\oplus}^{(1)*}(\check{t})$ ,  $b^{(1)}(t) = \beta^*(\omega^{(1)*}(t))$  при  $t > t^b$ ,  $b^{(2)}(t) = \beta^*(\omega^{(2)*}(t))$  при  $t > t^\circ$ .

Продолжая анализ ситуаций выхода движений на порог, приходим к выводу, что движения либо совпадают, начиная с некоторого момента и вплоть до момента  $t_{\frac{1}{3}}^{(1)}$ , либо происходит чередование вплоть до  $t_{\frac{1}{3}}^{(1)}$  моментов выхода первого и второго движений на порог. В обоих случаях получаем противоречие с тем, что на  $(t_{\frac{1}{3}-1}^{(2)}, t_{\frac{1}{3}}^{(2)})$  нет импульсов первого движения.

Доказательство правого неравенства оценки (9.1) закончено. Доказательство левого неравенства опускаем. Опускаем также доказательство второго утверждения леммы 1.

**Доказательство утверждений 10, 11.** Утверждение 10 является прямым следствием леммы 1 и того, что при импульсе вправо  $b_{\oplus}(t) = b(t)$ .

Доказательство утверждения 11 также сведем к свойству монотонности функции  $F$ . Обозначим рассматриваемый момент времени через  $\hat{t}$ . При импульсе влево величина  $\omega_{\oplus}^*(\hat{t})$  подсчитывается (с учетом возможного перевертывания информационного отрезка в силу симметрии задачи относительно нуля) по формуле

$$\omega_{\oplus}^*(\hat{t}) = - \left( \omega_*(\hat{t}) - \frac{\Delta \Upsilon}{x(\hat{t})} \right) = \frac{\Delta \Upsilon}{x(\hat{t})} - \omega_c(\hat{t}) + b(\hat{t}).$$

1) Пусть  $\omega_{\oplus}^*(\hat{t}) \geq \omega^*(\hat{t})$ . Тогда  $b_{\oplus}(\hat{t}) = b(\hat{t})$  и значит  $\omega_{c\oplus}(\hat{t}) \geq \omega_c(\hat{t})$ . Кроме того,  $n_{\oplus}(\hat{t}) = n(\hat{t}) - 1$ . Значение  $F$  не убывает.

2) Пусть  $\omega_{\oplus}^*(\hat{t}) < \omega^*(\hat{t})$ . Вначале покажем, что  $\omega_{c\oplus}(\hat{t}) < \omega_c(\hat{t})$ . Если  $b(\hat{t}) \leq \beta^*(\omega_{\oplus}^*(\hat{t}))$ , то  $b_{\oplus}(\hat{t}) = b(\hat{t})$  и поэтому  $\omega_{c\oplus}(\hat{t}) < \omega_c(\hat{t})$ . Если  $b(\hat{t}) > \beta^*(\omega_{\oplus}^*(\hat{t}))$ , то

$b_{\oplus}(\hat{t}) = \beta^*(\omega_{\oplus}^*(\hat{t}))$ . Следовательно,  $\omega_{c_{\oplus}}(\hat{t}) = q(\omega_{\oplus}^*(\hat{t})) < q(\omega^*(\hat{t})) \leq \omega_c(\hat{t})$ .

Символом 1 обозначим эталонное движение, выходящее из позиции  $(\hat{t}, n(\hat{t}), \mathcal{I}(\hat{t}))$ , символом 2 – из позиции  $(\hat{t}, n(\hat{t}) - 1, Y(\mathcal{I}_{\oplus}(\hat{t})))$ . Неравенства  $\omega^*(\hat{t}) > \omega_{\oplus}^*(\hat{t})$ ,  $\omega_c(\hat{t}) > \omega_{c_{\oplus}}(\hat{t})$  дают (свойство 7), что первое движение выходит на порог раньше второго. Пусть  $t^\circ$  – момент выхода. Второе движение в момент  $t^\circ$  ниже порога.

Имеем  $\omega^{(1)*}(t^\circ) > \omega^{(2)*}(t^\circ)$ . С учетом  $b(\hat{t}) \geq b_{\oplus}(\hat{t})$  получаем также  $b^{(1)}(t^\circ) \geq b^{(2)}(t^\circ)$ . В самом деле, если  $b^{(1)}(t^\circ) < \beta^*(\omega^{(1)*}(t^\circ))$ , то неравенство  $b^{(1)}(t^\circ) \geq b^{(2)}(t^\circ)$  следует из свойства 3. Если  $b^{(1)}(t^\circ) = \beta^*(\omega^{(1)*}(t^\circ))$ , то  $b^{(1)}(t^\circ) = \beta^*(\omega^{(1)*}(t^\circ)) \geq \beta^*(\omega^{(2)*}(t^\circ)) \geq b^{(2)}(t^\circ)$ .

Поскольку  $\omega_{\oplus}^*(\hat{t}) = \Delta Y/x(\hat{t}) - \omega_c(\hat{t}) + b(\hat{t}) > b(\hat{t})$ , то  $\omega^{(2)*}(t^\circ) > b^{(1)}(t^\circ)$  и поэтому  $\omega_{\oplus}^{(2)*}(t^\circ) = \omega^{(2)*}(t^\circ) > b^{(1)}(t^\circ) = \omega_{\oplus}^{(1)*}(t^\circ)$ .

Покажем, что  $b_{\oplus}^{(2)}(t^\circ) \geq b_{\oplus}^{(1)}(t^\circ)$ . В случае  $b^{(2)}(t^\circ) < \beta^*(\omega^{(2)*}(t^\circ))$  имеем  $b^{(2)}(\hat{t}) < \beta^*(\omega^{(2)*}(\hat{t}))$  (свойство 3), т. е.  $b_{\oplus}(\hat{t}) < \beta^*(\omega_{\oplus}^*(\hat{t}))$  и значит  $b_{\oplus}(\hat{t}) = b(\hat{t})$ . Следовательно,  $b^{(2)}(\hat{t}) = b^{(1)}(\hat{t})$ . Поскольку  $b^{(2)}(t)$  развивалось на  $(\hat{t}, t^\circ)$  с максимальной скоростью, то  $b^{(2)}(t^\circ) \geq b^{(1)}(t^\circ)$ . В результате  $b^{(2)}(t^\circ) = b^{(1)}(t^\circ)$  и поэтому  $b_{\oplus}^{(2)}(t^\circ) = b^{(2)}(t^\circ) = b^{(1)}(t^\circ) \geq b_{\oplus}^{(1)}(t^\circ)$ . В случае  $b^{(2)}(t^\circ) = \beta^*(\omega^{(2)*}(t^\circ))$  имеем  $b_{\oplus}^{(2)}(t^\circ) = b^{(2)}(t^\circ) = \beta^*(\omega^{(2)*}(t^\circ)) = \beta^*(\omega_{\oplus}^{(2)*}(t^\circ)) \geq \beta^*(\omega_{\oplus}^{(1)*}(t^\circ)) \geq b_{\oplus}^{(1)}(t^\circ)$ .

Предполагая  $b_{\oplus}^{(1)}(t^\circ) < \beta^*(\omega_{\oplus}^{(1)*}(t^\circ))$ , получаем  $b_{\oplus}^{(1)}(t^\circ) = b^{(1)}(t^\circ)$  и значит  $b_{\oplus}^{(1)}(t^\circ) = b^{(1)}(t^\circ) \geq b^{(2)}(t^\circ) = b_{\oplus}^{(2)}(t^\circ)$ . Таким образом,  $b_{\oplus}^{(2)}(t^\circ) = b_{\oplus}^{(1)}(t^\circ)$ . Отсюда с учетом  $\omega_{\oplus}^{(2)*}(t^\circ) > \omega_{\oplus}^{(1)*}(t^\circ)$  имеем  $\omega_{c_{\oplus}}^{(2)}(t^\circ) > \omega_{c_{\oplus}}^{(1)}(t^\circ)$ . Если  $b_{\oplus}^{(1)}(t^\circ) = \beta^*(\omega_{\oplus}^{(1)*}(t^\circ))$ , то  $\omega_{c_{\oplus}}^{(2)}(t^\circ) \geq q(\omega_{\oplus}^{(2)*}(t^\circ)) > q(\omega_{\oplus}^{(1)*}(t^\circ)) = \omega_{c_{\oplus}}^{(1)}(t^\circ)$ .

Итак,  $n_{\oplus}^{(2)}(t^\circ) = n_{\oplus}^{(1)}(t^\circ)$ ,  $b_{\oplus}^{(2)}(t^\circ) \geq b_{\oplus}^{(1)}(t^\circ)$ ,  $\omega_{c_{\oplus}}^{(2)}(t^\circ) > \omega_{c_{\oplus}}^{(1)}(t^\circ)$ . Поэтому  $F_{\oplus}^{(2)}(t^\circ) \geq F_{\oplus}^{(1)}(t^\circ)$ . С учетом  $F_{\oplus}^{(2)}(t^\circ) = F_{\oplus}(\hat{t})$  и  $F_{\oplus}^{(1)}(t^\circ) = F(\hat{t})$  получаем требуемое неравенство  $F_{\oplus}(\hat{t}) \geq F(\hat{t})$ .

## § 12. Оптимальность стратегий $U^*$ , $\Omega^*$

**Лемма 2.** Для любой начальной позиции  $(t_0, n(t_0), \mathcal{I}_{\ominus}(t_0))$ , любой стратегии  $U$  первого игрока, любых  $\varepsilon$  и  $\Delta$  справедливо неравенство

$$\Phi(t_0, n(t_0), \mathcal{I}_{\ominus}(t_0), U, \Omega^*, \varepsilon, \Delta) \geq F(t_0, n(t_0), Y(\mathcal{I}_{\ominus}(t_0))). \quad (12.1)$$

**Доказательство.** Говоря о реальном движении, подразумеваем движение в силу дискретной схемы и стратегий  $U$ ,  $\Omega^*$ . Символы, относящиеся к

реальному движению, отмечаем чертой сверху. Волна будет сопровождать символы вспомогательных эталонных движений. Основная идея – доказательство неубывания функции  $F$  вдоль реального движения.

Выделим моменты  $\tau_s$ ,  $s = \overline{1, m}$ , действия импульсов на реальном движении.

А. При действии импульсов множество  $\overline{\mathcal{I}}(\tau_s)$  переходит в  $\overline{\mathcal{I}}_{\oplus}(\tau_s)$ . Из свойств 9 – 11 следует, что

$$F(\tau_s, \overline{n}_{\oplus}(\tau_s), Y(\overline{\mathcal{I}}_{\oplus}(\tau_s))) \geq F(\tau_s, \overline{n}(\tau_s), \overline{\mathcal{I}}(\tau_s)), \quad s = \overline{1, m}. \quad (12.2)$$

Установим неравенство

$$F(\tau_{s+1}, \overline{n}(\tau_{s+1}), \overline{\mathcal{I}}(\tau_{s+1})) \geq F(\tau_s, \overline{n}_{\oplus}(\tau_s), Y(\overline{\mathcal{I}}_{\oplus}(\tau_s))), \quad s = \overline{1, m-1}. \quad (12.3)$$

Положим  $\tilde{n}(\tau_s) = \overline{n}_{\oplus}(\tau_s)$ ,  $\tilde{\mathcal{I}}(\tau_s) = (\tilde{\omega}_c(\tau_s), \tilde{b}(\tau_s)) = Y(\overline{\mathcal{I}}_{\oplus}(\tau_s))$ . Выпустим из позиции  $(\tau_s, \tilde{n}(\tau_s), \tilde{\mathcal{I}}(\tau_s))$  эталонное движение и доведем его до момента  $\tau_{s+1}$ . Покажем, что  $F(\tau_{s+1}, \tilde{n}(\tau_{s+1}), \tilde{\mathcal{I}}(\tau_{s+1})) \geq F(\tau_{s+1}, \overline{n}(\tau_{s+1}), \overline{\mathcal{I}}(\tau_{s+1}))$  (кратко:  $\tilde{F} \geq \overline{F}$ ). Отсюда, поскольку  $F(\tau_{s+1}, \tilde{n}(\tau_{s+1}), \tilde{\mathcal{I}}(\tau_{s+1})) = F(\tau_s, \overline{n}_{\oplus}(\tau_s), Y(\overline{\mathcal{I}}_{\oplus}(\tau_s)))$ , будет следовать (12.3).

Пусть  $g_s \geq 0$  – количество импульсов рассматриваемого эталонного движения на  $[\tau_s, \tau_{s+1}]$ . В соответствие позиции  $(\tau_{s+1}, \overline{n}(\tau_{s+1}), \overline{\mathcal{I}}(\tau_{s+1}))$  поставим позицию  $(\tau_{s+1}, \tilde{\tilde{n}}(\tau_{s+1}), \tilde{\tilde{\mathcal{I}}}(\tau_{s+1}))$ , где  $\tilde{\tilde{n}}(\tau_{s+1}) = \tilde{n}(\tau_{s+1}) + g_s = \overline{n}_{\oplus}(\tau_s)$ , правый край  $\tilde{\tilde{\omega}}^*(\tau_{s+1})$  отрезка  $\tilde{\tilde{\mathcal{I}}}(\tau_{s+1})$  получен переносом вправо на  $g_s$  импульсов точки  $\tilde{\omega}^*(\tau_{s+1})$ , полуширина  $\tilde{\tilde{b}}(\tau_{s+1})$  равна  $\tilde{b}(\tau_{s+1})$ . Имеем  $F(\tau_{s+1}, \tilde{\tilde{n}}(\tau_{s+1}), \tilde{\tilde{\mathcal{I}}}(\tau_{s+1})) = F(\tau_{s+1}, \tilde{n}(\tau_{s+1}), \tilde{\mathcal{I}}(\tau_{s+1}))$  (кратко:  $\tilde{\tilde{F}} = \tilde{F}$ ). Докажем неравенство  $F(\tau_{s+1}, \overline{n}(\tau_{s+1}), \overline{\mathcal{I}}(\tau_{s+1})) \geq F(\tau_{s+1}, \tilde{\tilde{n}}(\tau_{s+1}), \tilde{\tilde{\mathcal{I}}}(\tau_{s+1}))$  ( $\overline{F} \geq \tilde{\tilde{F}}$ ). Для сокращения записи условимся опускать аргумент  $\tau_{s+1}$ .

Поскольку второй игрок использует стратегию  $\Omega^*$ , то на  $(\tau_s, \tau_{s+1})$  правый край информационного отрезка на реальном движении уходит вправо с максимально возможной скоростью. В силу свойства 1 получаем  $\tilde{\tilde{\omega}}^* \leq \overline{\omega}^*$ . Если  $\tilde{\tilde{\omega}}_c \geq \overline{\omega}_c$ , то  $\tilde{\tilde{\mathcal{I}}} \subset \overline{\mathcal{I}}$  и нужное неравенство  $\overline{F} \geq \tilde{\tilde{F}}$  вытекает из второй части леммы 1. Пусть  $\tilde{\tilde{\omega}}_c < \overline{\omega}_c$ . Тогда при  $\tilde{\tilde{b}} \leq \overline{b}$  ссылаемся на левое неравенство оценки (9.1). Предположим, что  $\tilde{\tilde{b}} > \overline{b}$ . С учетом  $\tilde{\tilde{\omega}}^* \leq \overline{\omega}^*$  имеем  $\overline{b} < \tilde{\tilde{b}} \leq \beta^*(\tilde{\tilde{\omega}}^*) \leq \beta^*(\overline{\omega}^*)$ , т. е.  $\overline{b} < \beta^*(\overline{\omega}^*)$ . Отсюда, опираясь на свойство 4, получаем, что  $\overline{b}_{\oplus}(\tau_s) < \beta^*(\overline{\omega}_{\oplus}^*(\tau_s))$  и на  $(\tau_s, \tau_{s+1})$  полуширина  $\overline{b}(t)$  развивалась с максимально возможной скоростью. Из  $\overline{b}_{\oplus}(\tau_s) < \beta^*(\overline{\omega}_{\oplus}^*(\tau_s))$  вытекает

$\bar{b}(\tau_s) = \bar{b}_\Phi(\tau_s)$ . Получаем  $\bar{b} \geq \bar{b}$ . В итоге  $\bar{\bar{b}} = \bar{b} \leq \bar{b}$ , т. е. приходим к противоречию. Случай  $\bar{\bar{b}} > \bar{b}$  невозможен. Неравенство  $\bar{F} \geq \bar{\bar{F}}$ , а вместе с ним и неравенство  $\bar{F} \geq \bar{F}$ , доказаны.

Аналогично (12.3) для случая  $\tau_1 > t_0$  (т. е. когда начальный момент  $t_0$  не является моментом импульса) доказывается неравенство

$$F(\tau_1, \bar{n}(\tau_1), \bar{I}(\tau_1)) \geq F(t_0, \bar{n}(t_0), \bar{I}(t_0)). \quad (12.4)$$

Эталонное движение при этом выпускается из позиции  $(t_0, \bar{n}(t_0), \bar{I}(t_0))$ .

В. Учитывая неравенства (12.2), (12.3) для всех моментов  $\tau_s$ , а также неравенство (12.4), получим

$$\begin{aligned} & F(\tau_m, \bar{n}_\Phi(\tau_m), Y(\bar{I}_\Phi(\tau_m))) \geq F(\tau_m, \bar{n}(\tau_m), \bar{I}(\tau_m)) \geq \dots \geq \\ & \geq F(\tau_{s+1}, \bar{n}(\tau_{s+1}), \bar{I}(\tau_{s+1})) \geq F(\tau_s, \bar{n}_\Phi(\tau_s), Y(\bar{I}_\Phi(\tau_s))) \geq F(\tau_s, \bar{n}(\tau_s), \bar{I}(\tau_s)) \geq \dots \geq \\ & \geq F(\tau_1, \bar{n}(\tau_1), \bar{I}(\tau_1)) \geq F(t_0, \bar{n}(t_0), \bar{I}(t_0)). \end{aligned}$$

Так как действует стратегия  $\Omega^*$ , то в любой дискретный момент  $t_i$  выполнено равенство  $\bar{I}(t_i) = Y(\bar{I}_\Theta(t_i))$ , в частности,

$$\bar{I}(t_0) = Y(\bar{I}_\Theta(t_0)).$$

Окончательно имеем

$$F(\tau_m, \bar{n}_\Phi(\tau_m), Y(\bar{I}_\Phi(\tau_m))) \geq F(t_0, \bar{n}(t_0), \bar{I}(t_0)).$$

Учитывая, что

$$\Phi(t_0, n(t_0), I_\Theta(t_0), U, \Omega^*, \varepsilon, \Delta) = F(\tau_m, 0, Y(\bar{I}_\Phi(\tau_m))) \geq F(\tau_m, \bar{n}_\Phi(\tau_m), Y(\bar{I}_\Phi(\tau_m)))$$

приходим к неравенству (12.1).

**Лемма 3.** Для любой начальной позиции  $(t_0, n(t_0), I_\Theta(t_0))$ , любой стратегии  $\Omega$  второго игрока, любых  $\varepsilon$  и  $\Delta$  справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & \Phi(t_0, n(t_0), I_\Theta(t_0), U^*, \Omega, \varepsilon, \Delta) \leq \\ & \leq \max\{F(t_0, n(t_0), Y(I_\Theta(t_0))) + r_1\Delta, [r_2 + r_3(\varepsilon + e\Delta)](\varepsilon + e\Delta)\}, \end{aligned} \quad (12.5)$$

где константы  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_3$  зависят только от параметров задачи.

**Доказательство.** Под реальным движением подразумеваем движение в силу дискретной схемы и стратегий  $U^*$ ,  $\Omega$ . Символы, относящиеся к реальному движению, отмечаем чертой сверху. Волна будет сопровождать символы вспомогательных эталонных движений. Основная идея – оценка

возрастания функции  $F$  вдоль реального движения. Увеличение  $F$  мало при малых  $\varepsilon, \Delta$ .

Выделим моменты  $\tau_s$ ,  $s = \overline{1, m}$ , действия импульсов на реальном движении. Поскольку используется стратегия  $U^*$ , то импульсы подаются в те из дискретных моментов, когда центр реального движения находится на или за порогом.

А. Исследуем изменение  $F$  вдоль реального движения на промежутке от  $\tau_s$  до  $\tau_{s+1}$ . При действии импульсов множество  $\bar{\mathcal{I}}(\tau_s)$  переходит в  $\bar{\mathcal{I}}_{\oplus}(\tau_s)$ . Опираясь на свойства 5, 9, имеем

$$F(\tau_s, \bar{n}_{\oplus}(\tau_s), Y(\bar{\mathcal{I}}_{\oplus}(\tau_s))) = F(\tau_s, \bar{n}(\tau_s), \bar{\mathcal{I}}(\tau_s)), \quad s = \overline{1, m}. \quad (12.6)$$

Положим  $\bar{n}(\tau_s) = \bar{n}_{\oplus}(\tau_s)$ ,  $\bar{\mathcal{I}}(\tau_s) = (\bar{\omega}_c(\tau_s), \bar{b}(\tau_s)) = Y(\bar{\mathcal{I}}_{\oplus}(\tau_s))$ . Выпустим из позиции  $(\tau_s, \bar{n}(\tau_s), \bar{\mathcal{I}}(\tau_s))$  эталонное движение и доведем его до момента  $\tau_{s+1}$ . Пусть  $g_s$  – число импульсов эталонного движения на  $[\tau_s, \tau_{s+1}]$ . Установим неравенство

$$F(\tau_{s+1}, \bar{n}(\tau_{s+1}), \bar{\mathcal{I}}(\tau_{s+1})) \leq F(\tau_{s+1}, \bar{n}(\tau_{s+1}), \bar{\mathcal{I}}(\tau_{s+1})) + g_s \Delta \Upsilon \Delta, \quad s = \overline{1, m-1}. \quad (12.7)$$

Поскольку  $F(\tau_{s+1}, \bar{n}(\tau_{s+1}), \bar{\mathcal{I}}(\tau_{s+1})) = F(\tau_s, \bar{n}(\tau_s), \bar{\mathcal{I}}(\tau_s))$ , отсюда будет следовать оценка

$$F(\tau_{s+1}, \bar{n}(\tau_{s+1}), \bar{\mathcal{I}}(\tau_{s+1})) \leq F(\tau_s, \bar{n}_{\oplus}(\tau_s), Y(\bar{\mathcal{I}}_{\oplus}(\tau_s))) + g_s \Delta \Upsilon \Delta, \quad s = \overline{1, m-1}. \quad (12.8)$$

Обозначим через  $t^a$  ближайший слева к  $\tau_{s+1}$  дискретный момент,  $t^a \neq \tau_{s+1}$ . Возможно совпадение  $t^a$  с  $\tau_s$ .

1) Оценим  $\bar{\omega}^*(t^a)$  через  $\bar{\omega}^*(t^a)$ , предполагая  $t^a > \tau_s$ . В этом случае центр реального движения в момент  $t^a$  ниже порога.

Если на  $[\tau_s, t^a]$  нет импульсов эталонного движения, то очевидно  $\bar{\omega}^*(t^a) \leq \bar{\omega}^*(t^a)$ . Покажем, что при наличии импульсов

$$\bar{\omega}^*(t^a) \leq \bar{\omega}^*(t^a) + \frac{\Delta \Upsilon}{x(t^a)}. \quad (12.9)$$

Пусть  $t^b < t^a$  – момент последнего импульса эталонного движения до  $t^a$ . Если  $t^b > \tau_s$ , то в момент  $t^b$  центр эталонного движения на пороге. В этом случае  $\bar{b}(t^b) = \bar{\omega}_{\oplus}^*(t^b)$ . Если  $t^b = \tau_s$ , центр может быть также и за порогом. Тогда  $\bar{b}(t^b) \leq \bar{\omega}_{\oplus}^*(t^b)$ .

1а) Рассмотрим случай  $\bar{b}(t^b) = \beta_c(\Delta \Upsilon / x(t^b))$ . Опираясь на свойство 2 и учитывая неравенство  $\bar{b}(t^b) \leq \bar{\omega}_{\oplus}^*(t^b)$ , имеем  $\beta_c(\Delta \Upsilon / x(t^a)) \leq$

$\beta_c(\Delta\Upsilon/x(t^b))x^2(t^b)/x^2(t^a) = \bar{b}(t^b)x^2(t^b)/x^2(t^a) \leq \bar{\omega}_\oplus^*(t^b)x^2(t^b)/x^2(t^a) \leq \bar{\omega}^*(t^a)$ . Соотношение (12.9) следует из того, что

$$\bar{\omega}^*(t^a) = \bar{\omega}_c(t^a) + \bar{b}(t^a), \quad \bar{\omega}_c(t^a) < \frac{\Delta\Upsilon}{x(t^a)},$$

$$\bar{b}(t^a) \leq \beta_c(\bar{\omega}_c(t^a)) \leq \beta_c\left(\frac{\Delta\Upsilon}{x(t^a)}\right) \leq \bar{\omega}^*(t^a).$$

1b) Пусть  $\bar{b}(t^b) < \beta_c(\Delta\Upsilon/x(t^b))$ . Тогда  $\bar{b}(\tau_s) < \beta_c(\bar{\omega}_c(\tau_s))$  в силу свойства 3. Отсюда  $\bar{b}(\tau_s) = \bar{b}_\oplus(\tau_s)$  и  $t^b > \tau_s$ . Получаем также, что  $\bar{b}(t)$  на  $[\tau_s, t^b)$  развивалось с максимально возможной скоростью. Следовательно,  $\bar{b}(t^b) \geq \bar{b}(t^b)$  (даже если  $t^b$  не является дискретным моментом). Поскольку  $\bar{b}(t^b) = \bar{\omega}_\oplus^*(t^b)$ , то

$$\bar{b}(t^a) \leq \bar{b}(t^b) \frac{x^2(t^b)}{x^2(t^a)} + \zeta(t^b, t^a) \leq \bar{\omega}_\oplus^*(t^b) \frac{x^2(t^b)}{x^2(t^a)} + \zeta(t^b, t^a) = \bar{\omega}^*(t^a).$$

Неравенство (12.9) следует из  $\bar{\omega}^*(t^a) = \bar{\omega}_c(t^a) + \bar{b}(t^a)$ ,  $\bar{\omega}_c(t^a) < \Delta\Upsilon/x(t^a)$ .

Пусть теперь  $t^a = \tau_s$ . Тогда  $\bar{\omega}_\oplus^*(t^a) = \bar{\omega}^*(t^a)$ .

2) Перейдем непосредственно к доказательству оценки (12.7). Положим  $h_s = 0$ , если  $t^a = \tau_s$  или  $t^a > \tau_s$ , но на  $[\tau_s, t^a)$  отсутствуют импульсы эталонного движения. Считаем  $h_s = 1$ , если  $t^a > \tau_s$  и на  $[\tau_s, t^a)$  есть импульсы эталонного движения. Пусть  $\varphi_s \geq 0$  – количество импульсов эталонного движения на  $[t^a, \tau_{s+1})$ .

В соответствие позиции  $(\tau_{s+1}, \bar{n}(\tau_{s+1}), \bar{I}(\tau_{s+1}))$  поставим позицию  $(\tau_{s+1}, \tilde{\bar{n}}(\tau_{s+1}), \tilde{\bar{I}}(\tau_{s+1}))$ , где  $\tilde{\bar{n}}(\tau_{s+1}) = \bar{n}(\tau_{s+1}) + (h_s + \varphi_s)$ , правый край  $\tilde{\bar{\omega}}^*(\tau_{s+1})$  отрезка  $\tilde{\bar{I}}(\tau_{s+1})$  получен переносом вправо на  $(h_s + \varphi_s)$  импульсов точки  $\bar{\omega}^*(\tau_{s+1})$ , полуширина  $\tilde{\bar{b}}(\tau_{s+1})$  совпадает с  $\bar{b}(\tau_{s+1})$  в случае  $\bar{b}(\tau_{s+1}) < \beta^*(\bar{\omega}(\tau_{s+1}))$  и  $\tilde{\bar{b}}(\tau_{s+1}) = \beta^*(\tilde{\bar{\omega}}(\tau_{s+1}))$ , если  $\bar{b}(\tau_{s+1}) = \beta^*(\bar{\omega}^*(\tau_{s+1}))$ . Очевидно, что  $F(\tau_{s+1}, \tilde{\bar{n}}(\tau_{s+1}), \tilde{\bar{I}}(\tau_{s+1})) = F(\tau_{s+1}, \bar{n}(\tau_{s+1}), \bar{I}(\tau_{s+1}))$  (кратко:  $\tilde{\bar{F}} = \bar{F}$ ).

2a) Предположим, что  $t^a > \tau_s$ . Из точки  $\bar{\omega}^*(t^a)$  в момент  $t^a$  выпустим движение системы (3.1) при  $v_z(t) \equiv \nu$ ,  $k(t_i) \equiv 0$ . Пусть  $\hat{\omega}(\tau_{s+1})$  – его положение в момент  $\tau_{s+1}$ . Имеем  $\bar{\omega}^*(\tau_{s+1}) \leq \hat{\omega}(\tau_{s+1})$ .

Сравним  $\bar{\omega}^*(\tau_{s+1})$  с  $\tilde{\bar{\omega}}^*(\tau_{s+1})$ . Справедливы соотношения

$$\hat{\omega}(\tau_{s+1}) = \bar{\omega}^*(t^a) \frac{x^2(t^a)}{x^2(\tau_{s+1})} + \zeta(t^a, \tau_{s+1}) \leq \left( \bar{\omega}^*(t^a) + h_s \frac{\Delta\Upsilon}{x(t^a)} \right) \frac{x^2(t^a)}{x^2(\tau_{s+1})} + \zeta(t^a, \tau_{s+1}),$$

$$\begin{aligned}\bar{\omega}^*(\tau_{s+1}) &= \bar{\omega}^*(t^a) \frac{x^2(t^a)}{x^2(\tau_{s+1})} + \zeta(t^a, \tau_{s+1}) - \sum_{i=1}^{\varphi_s} \frac{\Delta \Upsilon}{x(t_i)} \frac{x^2(t_i)}{x^2(\tau_{s+1})}, \\ \tilde{\omega}^*(\tau_{s+1}) &= \bar{\omega}^*(\tau_{s+1}) + (h_s + \varphi_s) \frac{\Delta \Upsilon}{x(\tau_{s+1})}.\end{aligned}$$

Здесь через  $t_i$ ,  $l = \overline{1, \varphi_s}$ , обозначены моменты импульсов эталонного движения на промежутке от  $t^a$  до  $\tau_{s+1}$ . Далее,

$$\begin{aligned}\bar{\omega}(\tau_{s+1}) - \tilde{\omega}^*(\tau_{s+1}) &\leq \left( \bar{\omega}^*(t^a) + h_s \frac{\Delta \Upsilon}{x(t^a)} \right) \frac{x^2(t^a)}{x^2(\tau_{s+1})} - \bar{\omega}^*(t^a) \frac{x^2(t^a)}{x^2(\tau_{s+1})} + \\ &+ \sum_{i=1}^{\varphi_s} \frac{\Delta \Upsilon}{x(t_i)} \frac{x^2(t_i)}{x^2(\tau_{s+1})} - (h_s + \varphi_s) \frac{\Delta \Upsilon}{x(\tau_{s+1})} = \frac{h_s \Delta \Upsilon}{x^2(\tau_{s+1})} x(t^a) + \sum_{i=1}^{\varphi_s} \frac{\Delta \Upsilon}{x^2(\tau_{s+1})} x(t_i) - \\ &- (h_s + \varphi_s) \frac{\Delta \Upsilon}{x(\tau_{s+1})} \leq \frac{(h_s + \varphi_s) \Delta \Upsilon}{x^2(\tau_{s+1})} x(t^a) - \frac{(h_s + \varphi_s) \Delta \Upsilon}{x(\tau_{s+1})} = \\ &= \frac{(h_s + \varphi_s) \Delta \Upsilon}{x^2(\tau_{s+1})} (x(t^a) - x(\tau_{s+1})) = \frac{(h_s + \varphi_s) \Delta \Upsilon e \Delta}{x^2(\tau_{s+1})}.\end{aligned}$$

В итоге

$$\bar{\omega}^*(\tau_{s+1}) \leq \tilde{\omega}^*(\tau_{s+1}) + \frac{(h_s + \varphi_s) \Delta \Upsilon e \Delta}{x^2(\tau_{s+1})}. \quad (12.10)$$

Если  $t^a = \tau_s$ , то в сделанных выкладках вместо  $\bar{\omega}^*(t^a)$  следует писать  $\bar{\omega}_{\oplus}^*(t^a)$ . При этом  $h_s = 0$ .

2b) Покажем, что

$$\bar{F} \leq \tilde{F} + (h_s + \varphi_s) \Delta \Upsilon \Delta. \quad (12.11)$$

Здесь  $\bar{F} = F(\tau_{s+1}, \bar{n}(\tau_{s+1}), \bar{I}(\tau_{s+1}))$ .

Поскольку будут рассматриваться величины, связанные только с моментом  $\tau_{s+1}$ , для сокращения записи опустим скобку аргумента в обозначении этих величин. Так, вместо  $\tilde{\omega}^*(\tau_{s+1})$  будем писать  $\tilde{\omega}^*$  и т. д.

2b<sub>1</sub>) Пусть  $\tilde{\omega}^* \leq \bar{\omega}^*$ . Предположим вначале, что  $\tilde{b} \leq \bar{b}$ . Покажем, что  $\tilde{\omega}_c \leq \bar{\omega}_c$ . В самом деле, это очевидно при  $\tilde{b} = \bar{b}$ . Пусть  $\tilde{b} < \bar{b}$ . Если  $\bar{b} < \beta^*(\bar{\omega}^*)$ , то  $\bar{b}(\tau_s) < \beta^*(\bar{\omega}^*(\tau_s))$  и на  $[\tau_s, \tau_{s+1})$  полуширина  $\bar{b}(t)$  развивалась с максимальной возможной скоростью (свойство 3). Из  $\bar{b}(\tau_s) < \beta^*(\bar{\omega}^*(\tau_s))$  следует  $\bar{b}(\tau_s) = \bar{b}_{\oplus}(\tau_s)$ . Получаем  $\bar{b} \geq \bar{b}$ . В итоге  $\tilde{b} = \bar{b} \geq \bar{b}$ . Таким образом, соотношение  $\bar{b} < \beta^*(\bar{\omega}^*)$  невозможно. Если  $\bar{b} = \beta^*(\bar{\omega}^*)$ , то  $\tilde{b} = \beta^*(\tilde{\omega}^*)$  и с учетом  $\tilde{\omega}^* \leq \bar{\omega}^*$  получаем  $\tilde{\omega}_c = q(\tilde{\omega}^*) \leq q(\bar{\omega}^*) \leq \bar{\omega}_c$ .

Для оценки  $\bar{F}$  через  $\tilde{F}$  применим лемму 1. Учтем при этом неравенство (12.11) и соотношение  $\tilde{n} \leq \bar{n}$ . Имеем

$$\bar{F} \leq \tilde{F} + \frac{(h_s + \varphi_s) \Delta \Upsilon \epsilon \Delta x^2(\tau_{s+1})}{x^2(\tau_{s+1}) e} = \tilde{F} + (h_s + \varphi_s) \Delta \Upsilon \Delta.$$

Пусть теперь  $\tilde{b} > \bar{b}$ . Положим  $\bar{\mathcal{I}} = (\bar{\omega}_c, \tilde{b})$ ,  $\bar{\omega}_c = \bar{\omega}^* - \tilde{b}$ ,  $\bar{n} = \bar{n}$ ,  $\bar{F} = F(\tau_{s+1}, \bar{n}, \bar{\mathcal{I}})$ . Применяя лемму 1, получим  $\bar{F} \leq \tilde{F}$  в случае  $\bar{\omega}_c \leq \tilde{\omega}_c$  и  $\bar{F} \leq \tilde{F} + (h_s + \varphi_s) \Delta \Upsilon \Delta$ , если  $\bar{\omega}_c > \tilde{\omega}_c$ . Поскольку  $\bar{\mathcal{I}} \supset \bar{\mathcal{I}}$ , то

$$\bar{F} \leq \bar{F} \leq \tilde{F} + (h_s + \varphi_s) \Delta \Upsilon \Delta.$$

2b<sub>2</sub>) Пусть  $\tilde{\omega}^* > \bar{\omega}^*$ . Предположим, что  $\tilde{b} < \bar{b}$ . Тогда  $\tilde{b} < \bar{b} \leq \beta^*(\bar{\omega}^*) \leq \beta^*(\tilde{\omega}^*)$ . Следовательно,  $\tilde{b} = \bar{b} < \beta^*(\bar{\omega}^*)$  (см. правило переноса вправо на  $(h_s + \varphi_s)$  импульсов). Из неравенства  $\tilde{b} < \beta^*(\bar{\omega}^*)$  следует (свойство 3), что  $\tilde{b}(t)$  развивалось на  $[\tau_s, \tau_{s+1})$  с максимально возможной скоростью и, кроме того,  $\tilde{b}(\tau_s) = \bar{b}_\Phi(\tau_s)$ . Поэтому  $\tilde{b} \geq \bar{b}$ . В итоге  $\tilde{b} = \bar{b} \geq \bar{b}$ . Пришли к противоречию. Случай  $\tilde{b} < \bar{b}$  невозможен. Предположим, что  $\tilde{b} \geq \bar{b}$ . В силу леммы 1 получаем  $\tilde{F} \geq \bar{F}$ .

Итак, величины  $\bar{F}$  и  $\tilde{F}$  связаны соотношением (12.11). Поскольку  $(h_s + \varphi_s) \leq g_s$ , то из (12.10), (12.11) следует неравенство (12.7). Тем самым доказано и (12.8).

Аналогично (12.8) для случая  $\tau_1 > t_0$  (т. е. когда начальный момент  $t_0$  не является моментом импульса) доказывается неравенство

$$F(\tau_1, \bar{n}(\tau_1), \bar{\mathcal{I}}(\tau_1)) \leq F(t_0, \bar{n}(t_0), \bar{\mathcal{I}}(t_0)) + g_0 \Delta \Upsilon \Delta, \quad (12.12)$$

где  $g_0$  – число импульсов эталонного движения на  $[t_0, \tau_1)$ , выпущенного из позиции  $(t_0, \bar{n}(t_0), \bar{\mathcal{I}}(t_0))$ .

В. Рассмотрим момент  $\tau_m \leq t_\epsilon = \epsilon/e$  последнего импульса на реальном движении.

1) Предположим вначале, что в момент  $\tau_m$  центр  $\bar{\omega}_{c\Phi}(\tau_m)$  реального движения на или за порогом. Это означает, что истрачены все импульсы, т. е.  $\bar{n}_\Phi(\tau_m) = 0$ . Учитывая формулы (12.6), (12.8) для всех моментов  $\tau_s$ , неравенство (12.12), а также соотношения  $g_s \leq \bar{n}_\Phi(\tau_s) \leq N$ ,  $m \leq N$ , получим

$$\begin{aligned} F(\tau_m, 0, Y(\bar{\mathcal{I}}_\Phi(\tau_m))) &= F(\tau_m, \bar{n}_\Phi(\tau_m), Y(\bar{\mathcal{I}}_\Phi(\tau_m))) = \\ &= F(\tau_m, \bar{n}(\tau_m), \bar{\mathcal{I}}(\tau_m)) \leq F(t_0, \bar{n}(t_0), \bar{\mathcal{I}}(t_0)) + N(N+1) \Delta \Upsilon \Delta. \end{aligned} \quad (12.13)$$

В любой дискретный момент  $t_i$  выполнено неравенство  $F(t_i, \bar{n}(t_i), \bar{\mathcal{I}}(t_i)) \leq F(t_i, \bar{n}(t_i), Y(\bar{\mathcal{I}}_\Theta(t_i)))$ , в частности,

$$F(t_0, \bar{n}(t_0), \bar{\mathcal{I}}(t_0)) \leq F(t_0, \bar{n}(t_0), Y(\bar{\mathcal{I}}_\Theta(t_0))). \quad (12.14)$$

В силу (12.13), (12.14) имеем

$$F(\tau_m, 0, Y(\bar{\mathcal{I}}_\Theta(\tau_m))) \leq F(t_0, \bar{n}(t_0), Y(\bar{\mathcal{I}}_\Theta(t_0))) + N(N+1)\Delta\Upsilon\Delta.$$

Учитывая, что  $\bar{n}(t_0) = n(t_0)$ ,  $\bar{\mathcal{I}}_\Theta(t_0) = \mathcal{I}_\Theta(t_0)$  и  $\Phi(t_0, n(t_0), \mathcal{I}_\Theta(t_0), U^*, \Omega, \varepsilon, \Delta) = F(\tau_m, 0, Y(\bar{\mathcal{I}}_\Theta(\tau_m)))$ , приходим к неравенству

$$\Phi(t_0, n(t_0), \mathcal{I}_\Theta(t_0), U^*, \Omega, \varepsilon, \Delta) \leq F(t_0, n(t_0), Y(\mathcal{I}_\Theta(t_0))) + r_1\Delta, \quad (12.15)$$

где константа  $r_1$  зависит только от параметров задачи.

2) Предположим, что в момент  $\tau_m$  центр  $\bar{\omega}_{c\Theta}(\tau_m)$  реального движения под порогом. Тогда

$$F(\tau_m, 0, Y(\bar{\mathcal{I}}_\Theta(\tau_m))) \leq \left( \frac{\Delta\Upsilon}{x(\tau_m)} + \beta_c(\bar{\omega}_{c\Theta}(\tau_m)) \right) \frac{x^2(\tau_m)}{e} + \frac{\nu}{2} \left( \frac{x(\tau_m)}{e} \right)^2. \quad (12.16)$$

Здесь

$$\beta_c(\bar{\omega}_{c\Theta}(\tau_m)) \leq \beta_c(\Delta\Upsilon/x(\tau_m)) = \begin{cases} c_1\Delta\Upsilon/x(\tau_m) + c_2, & \text{если } \Delta\Upsilon/x(\tau_m) \geq a, \\ a, & \text{если } \Delta\Upsilon/x(\tau_m) < a. \end{cases}$$

Выражение для  $\beta_c(\Delta\Upsilon/x(\tau_m))$  перепишем в форме  $\beta_c(\Delta\Upsilon/x(\tau_m)) = \max\{c_1\Delta\Upsilon/x(\tau_m) + c_2, a\}$ . Учитывая дополнительное неравенство  $x(\tau_m) \leq \varepsilon + e\Delta$ , преобразуем оценку (12.16):

$$\begin{aligned} & F(\tau_m, 0, Y(\bar{\mathcal{I}}_\Theta(\tau_m))) \leq \\ & \leq \left[ \Delta\Upsilon + \max \left\{ c_1\Delta\Upsilon + c_2(\varepsilon + e\Delta), \frac{c_2}{1-c_1}(\varepsilon + a\Delta) \right\} \right] \frac{(\varepsilon + e\Delta)}{e} + \frac{\nu}{2} \left( \frac{x(\tau_m)}{e} \right)^2, \end{aligned}$$

или

$$F(\tau_m, 0, Y(\bar{\mathcal{I}}_\Theta(\tau_m))) \leq [r_2 + r_3(\varepsilon + e\Delta)](\varepsilon + e\Delta) + \frac{\nu}{2} \left( \frac{x(\tau_m)}{e} \right)^2.$$

Константы  $r_2, r_3$  зависят только от параметров задачи.

В итоге имеем

$$\begin{aligned}
& \Phi(t_0, n(t_0), I_\Theta(t_0), U^*, \Omega, \varepsilon, \Delta) = \\
& = F(\tau_m, 0, Y(\bar{\mathcal{I}}_\Theta(\tau_m))) \leq [r_2 + r_3(\varepsilon + e\Delta)](\varepsilon + e\Delta) + \frac{\nu}{2} \left( \frac{x(\tau_m)}{e} \right)^2. \tag{12.17}
\end{aligned}$$

Объединяя (12.15) и (12.17), получаем оценку (12.5).

**Теорема.** В случае  $x_0 = x^0$  стратегии  $U^*$ ,  $\Omega^*$  являются оптимальными.

При этом

$$\Gamma^{(1)}(t_0, n(t_0), I_\Theta(t_0)) = \Gamma^{(2)}(t_0, n(t_0), I_\Theta(t_0)) = F(t_0, n(t_0), Y(\mathcal{I}_\Theta(t_0))).$$

**Доказательство.** Используя оценки (12.1) и (12.5), получаем

$$\begin{aligned}
L^{(2)}(t_0, n(t_0), I_\Theta(t_0), \Omega^*) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \liminf_{\Delta \rightarrow 0} \inf_U \Phi(t_0, n(t_0), I_\Theta(t_0), U, \Omega^*, \varepsilon, \Delta) \geq \\
&\geq F(t_0, n(t_0), Y(\mathcal{I}_\Theta(t_0))),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L^{(1)}(t_0, n(t_0), I_\Theta(t_0), U^*) &= \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\Delta \rightarrow 0} \sup_{\Omega} \Phi(t_0, n(t_0), I_\Theta(t_0), U^*, \Omega, \varepsilon, \Delta) \leq \\
&\leq F(t_0, n(t_0), Y(\mathcal{I}_\Theta(t_0))).
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\Gamma^{(2)}(t_0, n(t_0), I_\Theta(t_0)) &\geq L^{(2)}(t_0, n(t_0), I_\Theta(t_0), \Omega^*) \geq F(t_0, n(t_0), Y(\mathcal{I}_\Theta(t_0))) \geq \\
&\geq L^{(1)}(t_0, n(t_0), I_\Theta(t_0), U^*) \geq \Gamma^{(1)}(t_0, n(t_0), I_\Theta(t_0)).
\end{aligned}$$

С другой стороны, непосредственно из определения  $\Gamma^{(1)}$ ,  $\Gamma^{(2)}$  имеем

$$\Gamma^{(2)}(t_0, n(t_0), I_\Theta(t_0)) \leq \Gamma^{(1)}(t_0, n(t_0), I_\Theta(t_0)).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
\Gamma^{(2)}(t_0, n(t_0), I_\Theta(t_0)) &= L^{(2)}(t_0, n(t_0), I_\Theta(t_0), \Omega^*) = F(t_0, n(t_0), Y(\mathcal{I}_\Theta(t_0))) = \\
&= L^{(1)}(t_0, n(t_0), I_\Theta(t_0), U^*) = \Gamma^{(1)}(t_0, n(t_0), I_\Theta(t_0)).
\end{aligned}$$

## Глава 4

### Результаты моделирования

В главе приведены результаты моделирования движений в задачах преследования на плоскости и в трехмерном пространстве. Формулы алгоритмов управления взяты из вспомогательной дифференциальной игры с неполной информацией. Рассмотрен способ управления, основанный на фильтрации Калмана. Используются несколько вариантов формирования замеров и ускорения убегающего. Блок-схема процесса моделирования показана на рис. 6.



Рис. 6. Блок-схема моделирования.

#### § 13. Тестирование стратегий преследователя

Рассматривается задача преследования на плоскости. Моделируется движение системы (2.1), неполнота информации задается соотношениями (2.2), (2.3).

Перечень исходных данных (в разностных координатах):

- номинальное начальное расстояние по вертикали  $x_{НОМ} = 80000$  м,
- множество, ограничивающее возможные начальные положения,

$$B = \{(x, z): |x - 80000| \leq 10000, |z| \leq 2000\},$$

- номинал начальной скорости по вертикали  $V_{НОМx} = -5000$  м/с,
- множество, ограничивающее вектор начальной скорости,

$$D = \{(V_x, V_z): |V_x + 5000| \leq 100, |V_z| \leq 100\},$$

- величина одного импульса  $\Delta\Upsilon = 5$  м/с,
- количество импульсов  $N = 70$ ,
- множество, ограничивающее ускорение убегающего,

$$Q = \{(v_x, v_z): |v_x| \leq \mu, |v_z| \leq \nu, \mu = 2, \nu = 2\},$$

- константы в ограничении на максимальную величину погрешности замера угловой скорости линии визирования  $c_1 = 0.3$ ,  $c_2 = 0.0008$  рад/с.

Указанные исходные данные известны преследователю. Подчеркнем, что  $B$ ,  $D$  – предварительно заданные множества, в которых должны лежать положение и скорость разностной точки. Какой-либо более точной информацией преследователь (до начала процесса) не обладает.

Будем применять за преследователя три способа управления по принципу обратной связи, соответствующих тем, что введены в § 5. Выберем шаг  $\Delta$  дискретной схемы наблюдения и управления равным 0.1 с.

Начальное информационное множество  $I_\Theta(t_0): [x_0, x^0] = [70000, 90000]$ ; сечение при любом  $x \in [x_0, x^0]$  – отрезок, крайние точки (в проекции на ось  $\omega$ ) возьмем в виде

$$\omega_0(x) = \frac{-100x - 5100 \cdot 2000}{x^2}, \quad \omega^0(x) = \frac{100x + 5100 \cdot 2000}{x^2}.$$

Поскольку истинное значение угловой скорости в момент  $t$  подсчитывается по формуле

$$\omega(t) = \frac{\dot{z}(t)x(t) - \dot{x}(t)z(t)}{x^2(t) + z^2(t)},$$

то  $I_\Theta(t_0)$  охватывает все возможные положения пар  $\omega(t_0), x(t_0)$  на плоскости  $\omega, x$ , согласованные с ограничениями (2.3) при указанных выше множествах  $B, D$ .

Информационное множество при численной реализации задается конечным числом отрезков. В представленных ниже результатах количество отрезков в начальном множестве  $I_\Theta(t_0)$  принято равным 21. По ходу процесса число отрезков в информационном множестве может убывать. Если в какой-то момент число отрезков становится меньше заданного числа (в нашем случае 11), вводятся дополнительные, чтобы общее число отрезков удвоилось. В алгоритме построения информационных множеств используем величину ограничения на ускорение убегающего по оси  $z$  несколько

больше заданной, а именно  $2.5 \text{ м/с}^2$  вместо  $2 \text{ м/с}^2$ . Это делается для того, чтобы обеспечить невырождение информационных множеств при численной реализации. Возьмем порог  $\varepsilon = 500 \text{ м}$ . Управление преследователя прекращается, когда информационное множество, просчитываемое им по формулам § 4, целиком уходит по координате  $x$  под уровень  $\varepsilon$ , или же когда расстояние от истинной разностной точки  $(x(t), z(t))'$  до нуля становится меньше  $\varepsilon$ . Последнее условие ранее не упоминалось. Оно учитывает тот факт, что при малом расстоянии до убегающего преследователь перестает получать информацию об угловой скорости линии визирования.

Говоря о способах формирования замеров  $\omega_M(t_i)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ , и управляющих воздействий  $v_x$  и  $v_z$ , укажем два варианта.

1) Значение  $\omega_M(t_i)$  в каждый момент  $t_i$  вырабатывается при помощи датчика случайных чисел с равномерным распределением в диапазоне  $[\omega(t_i) - \chi, \omega(t_i) + \chi]$ , где  $\chi = c_1 |\omega(t_i)| + c_2$ , а  $\omega(t_i)$  – истинная угловая скорость. Воздействия  $v_x$  и  $v_z$  являются постоянными на всем интервале времени и выбираются в начальный момент  $t_0$  из множества  $Q$  при помощи датчика случайных чисел с равномерным распределением.

2) Второй вариант формирования  $\omega_M$ ,  $v_x$ ,  $v_z$  назовем игровым. В этом варианте  $\omega_M$  вырабатывается подобно правилу построения стратегии  $\tilde{\Omega}$ , описанному в § 6, но с учетом дополнительного требования (там отсутствовавшего), что замер  $\omega_M(t_i)$  должен лежать в промежутке  $[\omega(t_i) - \chi, \omega(t_i) + \chi]$ . Выбор  $\omega_M$ : если точка  $(\tilde{\omega}, \tilde{x})$  лежит на правом (левом) краю множества  $I_\Theta(t_i)$ , то задаем  $\omega_M(t_i)$  так, чтобы правый (левый) край множества неопределенности  $H(\omega_M(t_i))$  был максимально приближен к этой точке. Выбор управляющих воздействий  $v_x$ ,  $v_z$  определим следующим образом. Если  $x(t_0) \geq (x_0 + x^0)/2$ , положим  $v_x \equiv \mu$ ; в случае  $x(t_0) < (x_0 + x^0)/2$  пусть  $v_x \equiv -\mu$ . Таким образом, управление  $v_x$  постоянно на всем промежутке движения. Управление  $v_z$  выбираем заново в каждый момент  $t_i$  и держим постоянным на  $[t_i, t_{i+1})$ : если просчитанная на момент  $t_{i+1}$  точка  $(\tilde{\omega}, \tilde{x})$  лежит на правом краю множества  $I_\Theta(t_{i+1})$ , примем  $v_z(t_i) = \nu$ ; если на левом, то  $v_z(t_i) = -\nu$ .

Текущее значение  $\omega(t_i)$  истинной угловой скорости линии визирования вычисляем по координатам  $x(t_i)$ ,  $z(t_i)$ ,  $\dot{x}(t_i)$ ,  $\dot{z}(t_i)$  системы (2.1).

Поскольку результаты преследования в каждой отдельной реализации

носят “случайный” характер (многое зависит, в частности, от последнего импульса перед прохождением уровня  $\varepsilon$ ), то эффективность того или иного выбранного закона управления будем оценивать при помощи статистического моделирования. Суть его в следующем. Фиксируем способ управления преследователя, а также один из вариантов формирования замеров и ускорения убегающего. Задаем некоторые подмножества  $B^\circ$ ,  $D^\circ$  множеств  $B$ ,  $D$ . Просчитываем 100 реализаций движения. Разброс начальных положений и скоростей осуществляем в множествах  $B^\circ$ ,  $D^\circ$  при помощи датчика случайных чисел с равномерным распределением. Для каждой реализации движения подсчитываем минимальное расстояние вдоль движения (фактический промах) и количество истраченных импульсов. По 100 реализациям строим интегральный закон распределения вероятностей промаха в практически интересном интервале от 0 до 5 м. Реализации с промахом больше 5 м проявляются в том, что график закона не достигает единицы. Энергетические затраты преследователя характеризуем графиком интегрального закона распределения вероятностей расхода импульсов.

Приведем результаты статистического моделирования для случая, когда

$$B^\circ = \{(x, z): |x - 80000| \leq 25, |z - 100| \leq 25\},$$

$$D^\circ = \{(V_x, V_z): |V_x + 5000| \leq 5, |V_z - 10| \leq 5\}.$$

Таким образом, фактический разброс осуществляем вблизи начального положения  $x = 80000$  м,  $z = 100$  м и начальной скорости  $V_x = -5000$  м/с,  $V_z = 10$  м/с. Множества  $B^\circ$ ,  $D^\circ$  неизвестны преследователю.

Графики законов распределения вероятностей промаха и числа истраченных импульсов представлены на рис. 7. Используются следующие обозначения способов управления преследователя: SM – управление, основанное на стратегии поддержания симметрии прогнозируемого промаха, MN – способ, базирующийся на расчете точки максимума некомпенсируемого промаха, EM – эмпирический выбор отрезка из информационного множества. В эмпирическом способе функция  $s$  взята в виде  $s(\eta) = 1/\eta$ . Первый (второй) вариант формирования замеров и ускорения убегающего обозначим через RN (GM). Для сочетания MN–GM в большинстве реализаций 70 импульсов растрачиваются намного раньше момента окончания процесса, поэтому промах для них существенно больше 5 м.

Второй способ управления преследователя дает более плохие результаты, чем первый или третий.

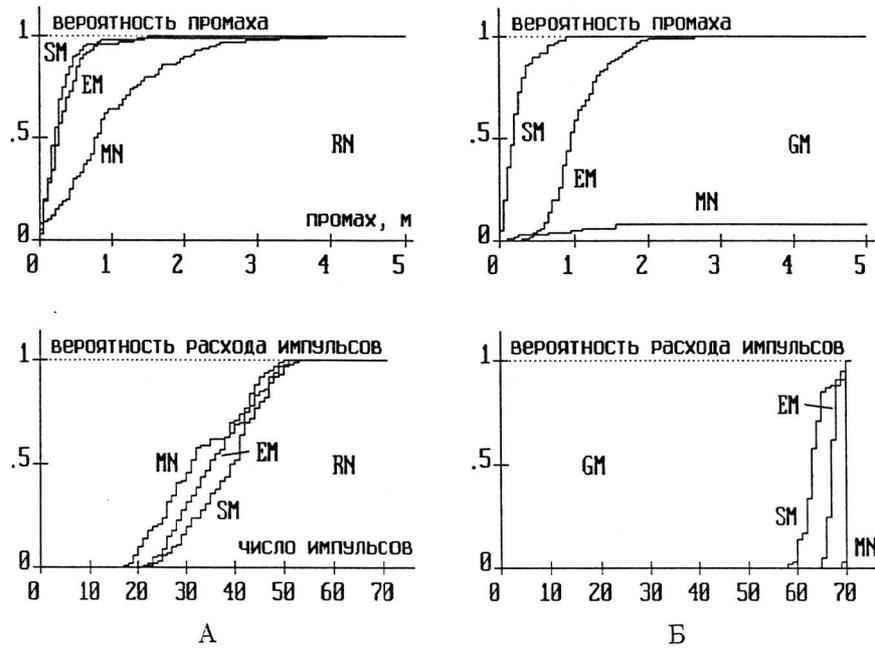


Рис. 7. Сравнение трех способов управления преследователя. Законы распределения вероятностей промаха и числа истраченных импульсов; А – случайная помеха, Б – игровая помеха.

Графики на рис. 8 показывают изменение параметров вдоль единичных реализаций для сочетаний SM–RN и SM–GM. Начальные координаты:  $x(t_0) = 80000$  м,  $z(t_0) = 100$  м,  $\dot{x}(t_0) = -5000$  м/с,  $\dot{z}(t_0) = 10$  м/с. Ускорение в способе RN:  $v_x = v_z \equiv 2$  м/с<sup>2</sup>. Представлены зависимости от  $t$  измеряемой  $\omega_M$  и истинной  $\omega$  угловых скоростей, графики текущего импульсного управления. В отличие от способа RN при игровом способе GM график  $\omega_M(t)$  не носит характера случайной функции – скорее это функция того же типа, что и  $\omega(t)$ . Промах для сочетания SM–RN составил 0.17 м, для сочетания SM–GM он равен 1.88 м. В первом варианте израсходовано 43 импульса, во втором – 64 импульса.

Изменение информационных множеств для сочетания SM–GM представлено на рис. 9, 10. Рис. 9 соответствует переходу от начального момента  $t_0 = 0$  к следующему дискретному моменту  $t_0 + \Delta = 0.1$ . Переход от момента  $t = 13.9$  к моменту  $t = 14$  демонстрируется на рис. 10. Пунктиром

показано множество неопределенности, вычисляемое по текущему замеру. Крестиком отмечено (в координатах  $\omega, x$ ) положение истинной разностной точки. Рядом с обозначением момента времени указано количество истраченных импульсов. Видно, что в конце процесса (рис. 10, до конца осталось примерно 2 с) развитие информационного множества происходит более динамично, чем в начале. В частности, резко уменьшается размер множества по вертикальной координате  $x$ . Два нижних отрезка множеств  $I_{\Phi}(13.9)$  и  $I_{\Theta}(14)$  ушли далеко влево и не попали в поле рисунка.

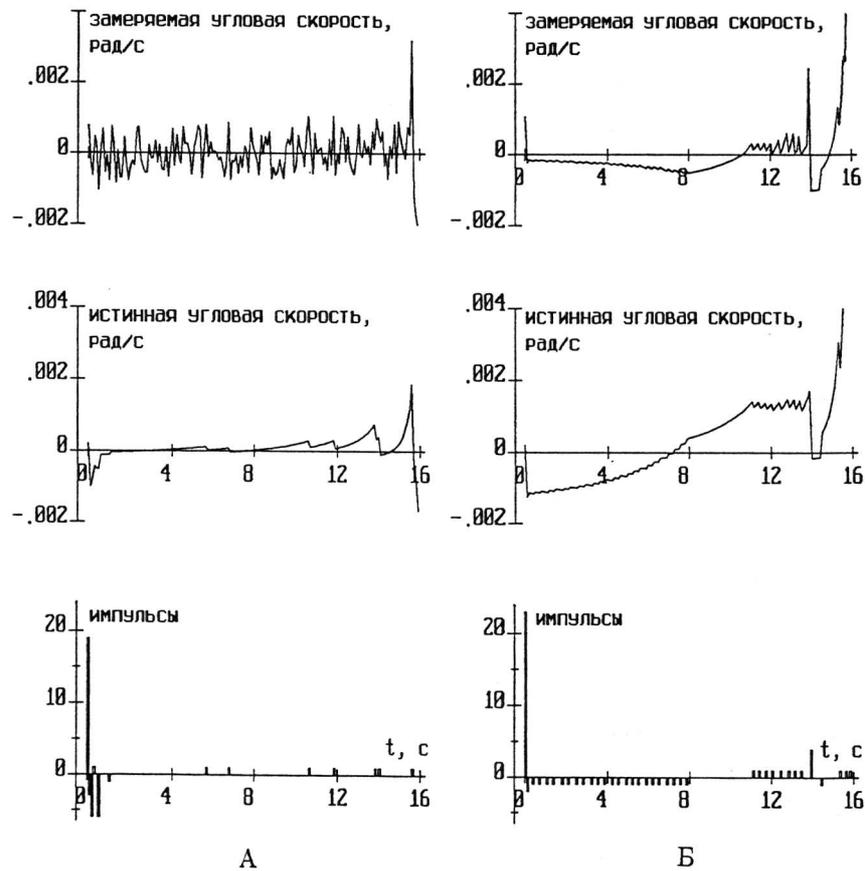


Рис. 8. Способ управления SM. Изменение параметров вдоль единичных реализаций; А – случайная помеха, Б – игровая помеха.

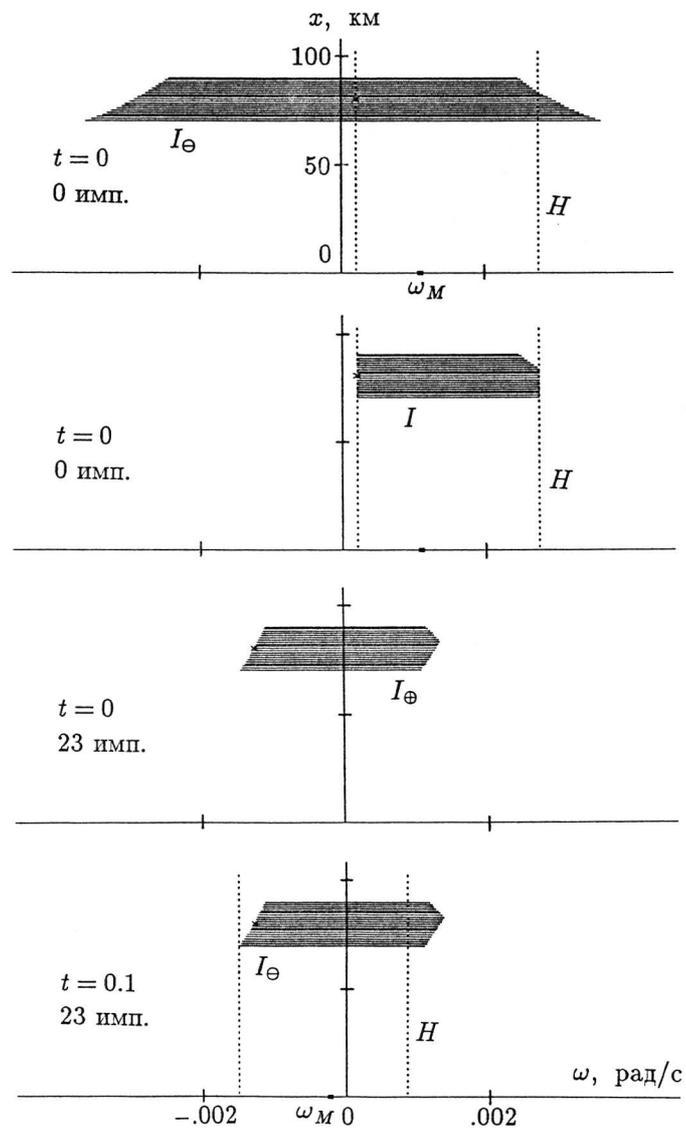


Рис. 9. Информационные множества на начальном этапе преследования.

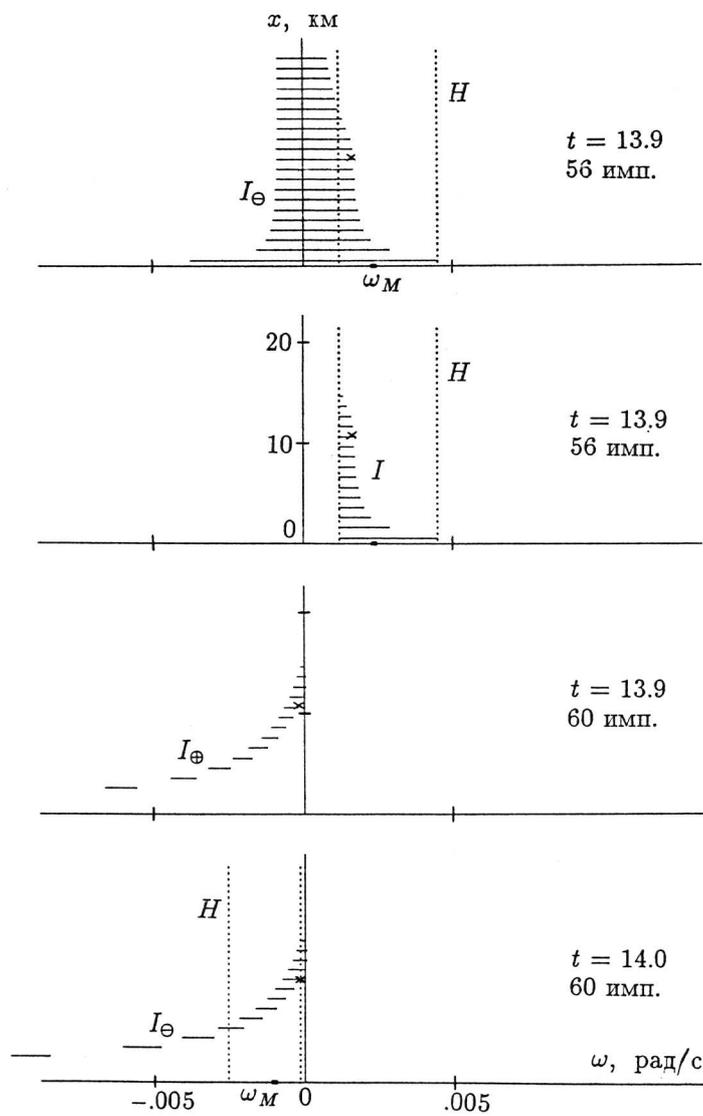


Рис. 10. Информационные множества на завершающем этапе преследования.

#### § 14. Сравнение со случаем Калмановской фильтрации

Приведем результаты сравнения способа управления SM со способом управления FK, использующим Калмановскую фильтрацию угловой скорости линии визирования.

Фильтр Калмана был запрограммирован для модели, в которой динамика описывается системой (3.1), наблюдение и управление осуществляются с шагом  $\Delta$ , возмущающие факторы распределены по нормальному закону с нулевым средним. Дисперсии задавались через максимально возможные отклонения, определяемые геометрическими ограничениями, входящими в формулы (3.1), (3.2).

Возмущающие факторы, учитываемые в модели:

- динамическая помеха, обусловленная ускорением  $v_z$ ; дисперсия величины  $v_z$  подсчитывается по формуле  $(\nu/3)^2$ ,
- ошибка замера угловой скорости; в (3.2) полагаем  $c_1 = 0$ , дисперсия ошибки принимается равной  $(c_2/3)^2$ ,
- начальный разброс угловой скорости; в формулах (3.2) полагаем  $x_0 = x^0$ , дисперсия разброса просчитывается через полуширину отрезка  $A(x_0)$ .

Соотношения рекуррентного пошагового оценивания аналогичны приведенным в статье [1]. При работе фильтра на каждом шаге дискретной схемы выдается оценка угловой скорости, импульсное управление вырабатывается при помощи порога  $\Delta\dot{\gamma}/x(t)$  так, как если бы эта оценка совпала с точным значением.

Сравнение способов управления SM и FK проводилось для системы (2.1)–(2.3). Предварительно задаваемые исходные данные те же, что описаны в § 13. Отличие в том, что были исключены неопределенности по вертикальной координате: начальные значения  $x(t_0)$  и  $V_z(t_0)$  предполагались известными точно и равными, соответственно, 80000 м и -5000 м/с; ускорение убегающего по вертикали  $v_z \equiv 0$ . Полагалось также  $c_1 = 0$ .

В процессе моделирования способы управления тестировались на двух вариантах помех. Один из них – игровой способ GM, описан в предыдущем параграфе. Вторым вариантом (обозначим его RNN) аналогичен способу RN, с тем лишь отличием, что случайный разброс осуществляем по нормальному закону. В обоих вариантах разброс начального положения разностного вектора проводился в множестве

$$B^\circ = \{(x, z): x = 80000, |z - 100| \leq 25\},$$

а разброс вектора начальной разностной скорости – в множестве

$$D^\circ = \{(V_x, V_z): V_x = 5000, |V_z - 10| \leq 5\}.$$

На рис. 11 даны графики интегральных законов распределения промаха и числа истраченных импульсов. Результаты практически одинаковы для случайной помехи, распределенной по нормальному закону; для игровой помехи способ SM дает более лучшие результаты, чем способ FK.

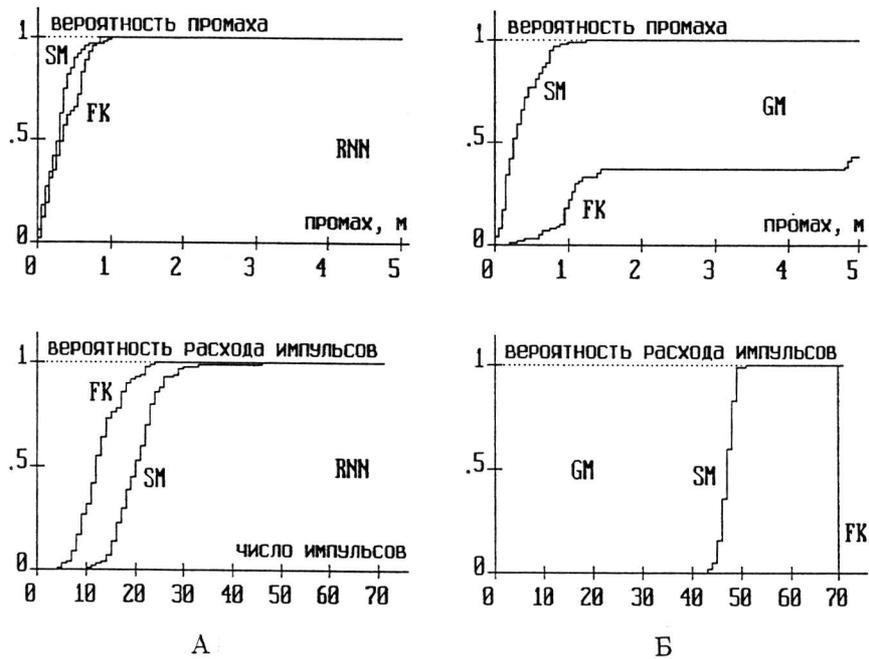


Рис. 11. Сравнение способов управления SM и FK. Законы распределения вероятностей промаха и числа истраченных импульсов; А – случайная помеха, Б – игровая помеха.

На рис. 12 для сочетаний FK-RNN, FK-GM и начального состояния  $x(t_0) = 80000$  м,  $z(t_0) = 100$  м,  $\dot{x}(t_0) = -5000$  м/с,  $\dot{z}(t_0) = 10$  м/с представлены зависимости от  $t$  измеряемой  $\omega_M$  и истинной  $\omega$  угловых скоростей, выход фильтра Калмана, реализации импульсного управления. В первом случае промах составляет 0.49 м, израсходовано 11 импульсов; во втором – 0.51 м и 70 импульсов. В способе RNN полагалось  $v_z \equiv 2$  м/с<sup>2</sup>.

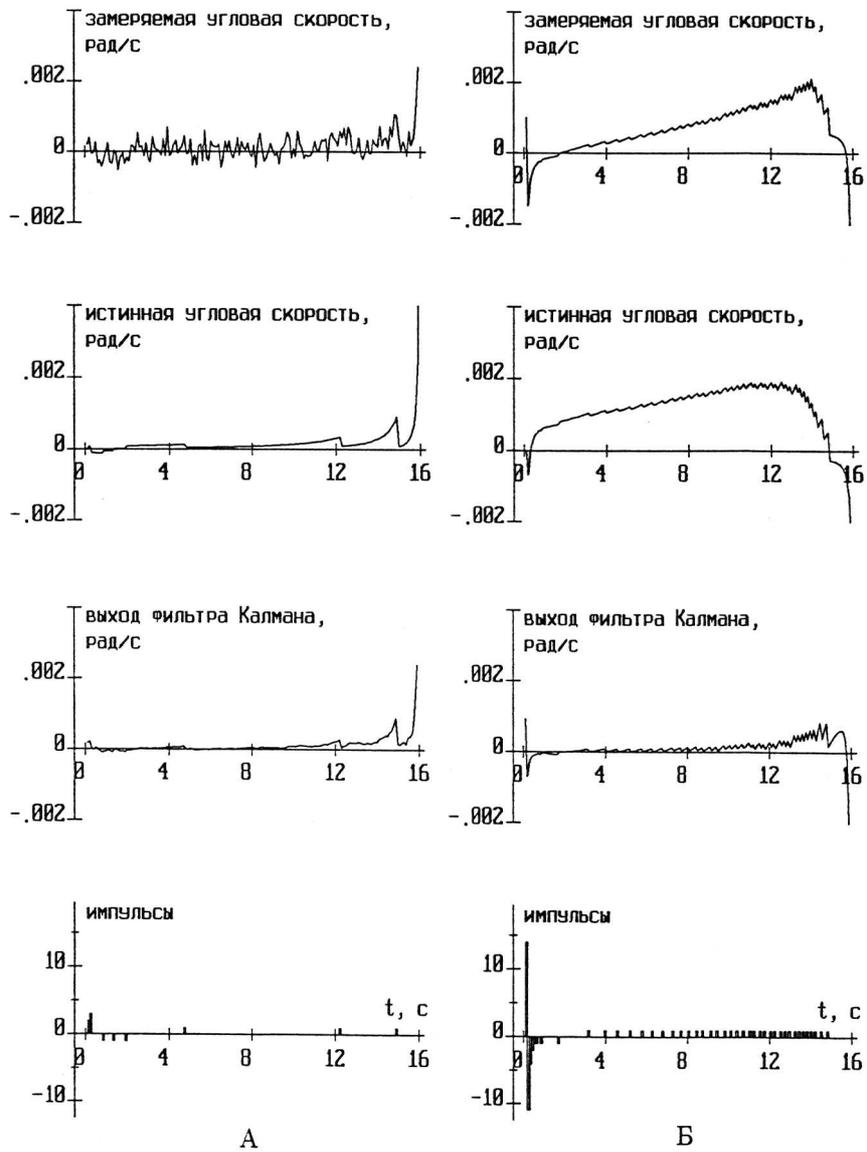


Рис. 12. Способ управления FK. Изменение параметров вдоль единичных реализаций; А – случайная помеха, Б – игровая помеха.

### § 15. Наведение по ложной точке

Описанные в параграфах 5, 6 стратегии могут быть приспособлены для случая, когда преследователь заметит угловую скорость линии визирования, направленной не на точку  $E$ , а на некоторую другую, ложную точку  $L$ . Геометрическое расположение точки  $L$  относительно точки  $E$  предполагается известным.

Рассмотрим в качестве примера случай, когда точка  $L$  расположена на заданном расстоянии  $d$  от точки  $E$  противоположно вектору абсолютной скорости  $V_E(t)$  (рис. 13). Считаем, что скорость  $V_E(t)$  не может обратиться в нуль. Абсолютная скорость  $V_P(t)$  известна преследователю, скорость  $V_E(t)$  преследователю неизвестна. Начальные неопределенности (множества  $B$  и  $D$ ) связаны с точкой  $L$ .

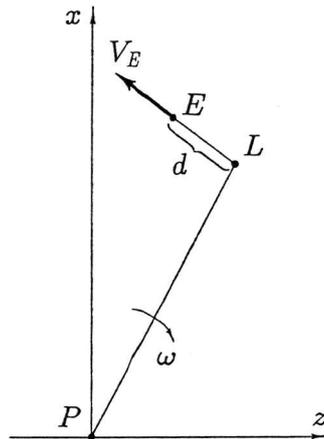


Рис. 13. Расположение ложной точки  $L$  относительно истинной убегающей точки  $E$ .

Модернизируем алгоритм стратегии  $U_S$  поддержания симметрии прогнозируемого промаха (§ 5) для наведения по ложной точке  $L$ .

Пусть  $t_i$  – произвольный момент,  $I$  – информационное множество, построенное по информации о точке  $L$ . Каждой точке  $(\omega, x) \in I$  поставим в

соответствие оценки компонент абсолютной скорости точки  $L$ :

$$V_{Lx}(t_i, \omega, x) = V_{NOMx} + V_{Px}(t_i), \quad V_{Lz}(t_i, \omega, x) = \omega x + V_{Pz}(t_i).$$

Полагая (приближенно) вектор скорости точки  $E$  равным вектору скорости точки  $L$ , определим смещение  $E$  относительно  $L$  величинами

$$\Delta x(t_i, \omega, x) = \frac{V_{Lx}(t_i, \omega, x)d}{|V_L(t_i, \omega, x)|}, \quad \Delta z(t_i, \omega, x) = \frac{V_{Lz}(t_i, \omega, x)d}{|V_L(t_i, \omega, x)|}.$$

Прогноз пассивного промаха (с учетом знака) по точке  $E$ :

$$\pi_L(t_i, \omega, x) = \frac{\omega x(x + \Delta x(t_i, \omega, x))}{e} + \Delta z(t_i, \omega, x).$$

Пробегаая правый и левый края информационного множества  $I$ , аналогично (5.1), (5.2) введем

$$\pi_L^*(t_i, I) = \max_{(\omega, x) \in \partial \cdot I} \left\{ \pi_L(t_i, \omega, x) + \frac{\nu}{2} \left( \frac{x + \Delta x(t_i, \omega, x)}{e} \right)^2 \right\}, \quad (15.1)$$

$$\pi_{L^*}(t_i, I) = \min_{(\omega, x) \in \partial \cdot I} \left\{ \pi_L(t_i, \omega, x) - \frac{\nu}{2} \left( \frac{x + \Delta x(t_i, \omega, x)}{e} \right)^2 \right\}. \quad (15.2)$$

Символами  $(\omega_L^*, x_L^*)$ ,  $(\omega_{L^*}, x_{L^*})$  обозначим точки, на которых достигается максимум в (15.1) и минимум в (15.2). Отрезок с концами  $\pi_*(t_i, I)$ ,  $\pi^*(t_i, I)$  назовем отрезком прогнозируемого промаха по точке  $E$ , соответствующим в момент  $t_i$  множеству  $I$ .

Стратегию  $U_{LS}$  определим как функцию, сопоставляющую позиции  $(t_i, n, I)$  целое число  $k_{LS}$ , вычисляемое по формуле

$$k_{LS} = \left[ \frac{(\pi_L^* + \pi_{L^*})e}{(x_L^* + x_{L^*})\Delta\Upsilon} \right],$$

если  $|k_{LS}| \leq n(t_i)$ , и число  $n \text{sign} k_{LS}$ , если  $|k_{LS}| > n(t_i)$ .

Говоря об аналоге стратегии  $\bar{\Omega}$  (§ 6), поступим следующим образом. Пусть  $t_i$  – произвольный момент,  $n$  – количество оставшихся импульсов,  $I_\Theta$  – множество прогноза, построенное по информации о точке  $L$ ,  $(\omega, x) \in I_\Theta$ . Положим

$$\bar{\Delta x}(t_i) = \frac{V_{Ex}(t_i)d}{|V_E(t_i)|}, \quad \bar{\Delta z}(t_i) = \frac{V_{Ez}(t_i)d}{|V_E(t_i)|},$$

$$\bar{\pi}_L(t_i, \omega, x) = \frac{\omega x(x + \bar{\Delta x}(t_i))}{e} + \bar{\Delta z}(t_i).$$

Пробегая края множества  $I_\Theta$ , находим точку  $(\bar{\omega}_L, \bar{x}_L)$ , на которой достигается максимум выражения

$$\bar{\pi}_L(t_i, n, I_\Theta) = \max_{(\omega, x) \in I_\Theta} \left\{ \bar{\pi}_L(t_i, \omega, x) + \frac{\nu}{2} \left( \frac{x + \bar{\Delta x}(t_i)}{e} \right)^2 - \frac{n \Delta \Upsilon(x + \bar{\Delta x}(t_i))}{e} \right\}.$$

Далее, как в § 6: если точка  $(\bar{\omega}_L, \bar{x}_L)$  лежит на правом (левом) краю множества  $I_\Theta$ , то выберем  $\omega_M \leq \bar{\omega}_L$  ( $\omega_M \geq \bar{\omega}_L$ ) так, чтобы правый (левый) край множества неопределенности  $H(\omega_M)$  проходил через точку  $(\bar{\omega}_L, \bar{x}_L)$ . Полученную стратегию обозначим  $\bar{\Omega}_L$ .

На рис. 14 для трех значений смещения  $d = 0, 15, 30$  м показаны графики интегральных законов распределения промаха и числа истраченных

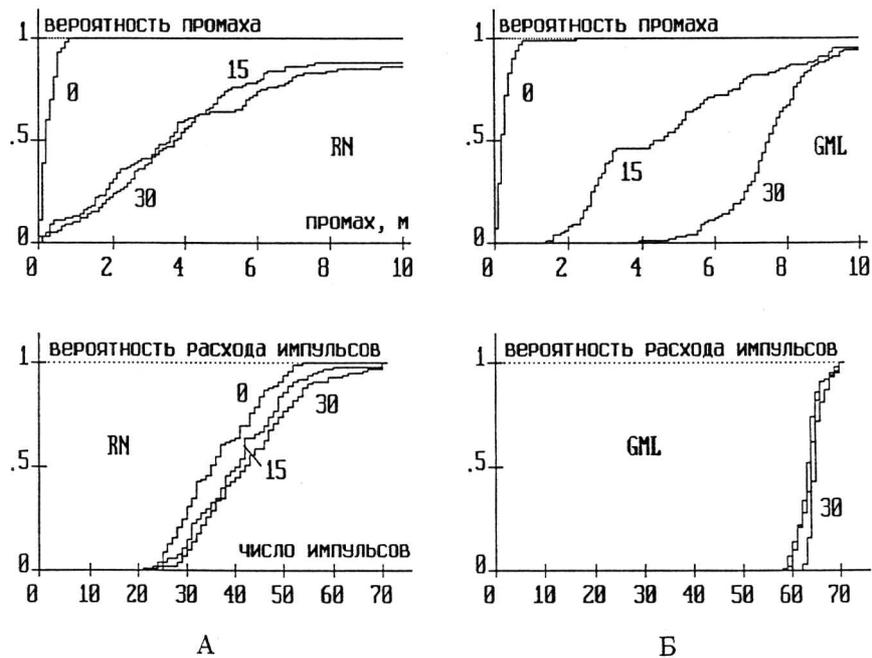


Рис. 14. Способ управления SML. Законы распределения вероятностей промаха и числа истраченных импульсов, смещение  $d = 0, 15, 30$  м;  
А – случайная помеха, Б – игровая помеха.

импульсов. Исходные данные для моделирования те же, что и в § 13. Начальные значения компонент скорости преследователя:  $V_{Px}(t_0) = 1000$  м/с,  $V_{Pz}(t_0) = 7000$  м/с. За преследователя использовался способ управления SML, соответствующий стратегии  $U_{LS}$ . Варианты формирования помехи – RN и GML. Способ GML основан на стратегии  $\tilde{\Omega}_L$ . При  $d = 0$  графики совпадают с кривыми законов распределения, приведенными в § 13 для сочетаний SM-RN и SM-GM.

### § 16. Преследование в трехмерном пространстве

Решение плоской задачи преследования можно использовать и в пространственном трехмерном случае, когда помимо координаты  $z$  добавляется аналогичная ей координата  $y$ .

Приведем результаты моделирования для случая, когда импульсное управляющее воздействие может подаваться по любому из четырех взаимно-ортогональных направлений (рис. 15) в плоскости, проходящей через центр масс ортогонально строительной оси. В начальный момент строительная ось ориентирована на номинальное положение убегающего, начальная скорость преследователя при этом подбирается так, чтобы вектор разностной скорости  $V_{НОМ}$  был направлен вдоль строительной оси.

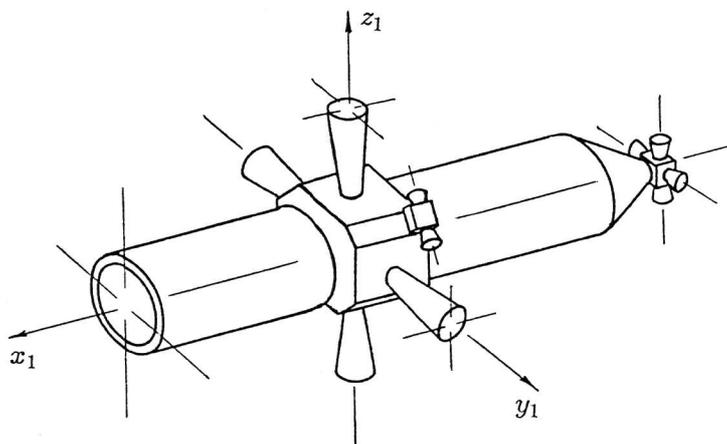


Рис. 15. Расположение двигателей.

Имеем два канала управления. Информационные множества в каждом из них строятся независимо, но поскольку они имеют общую координату  $x$ , то итоговый размах информационных множеств по  $x$  принимаем одинаковым (рис. 16).

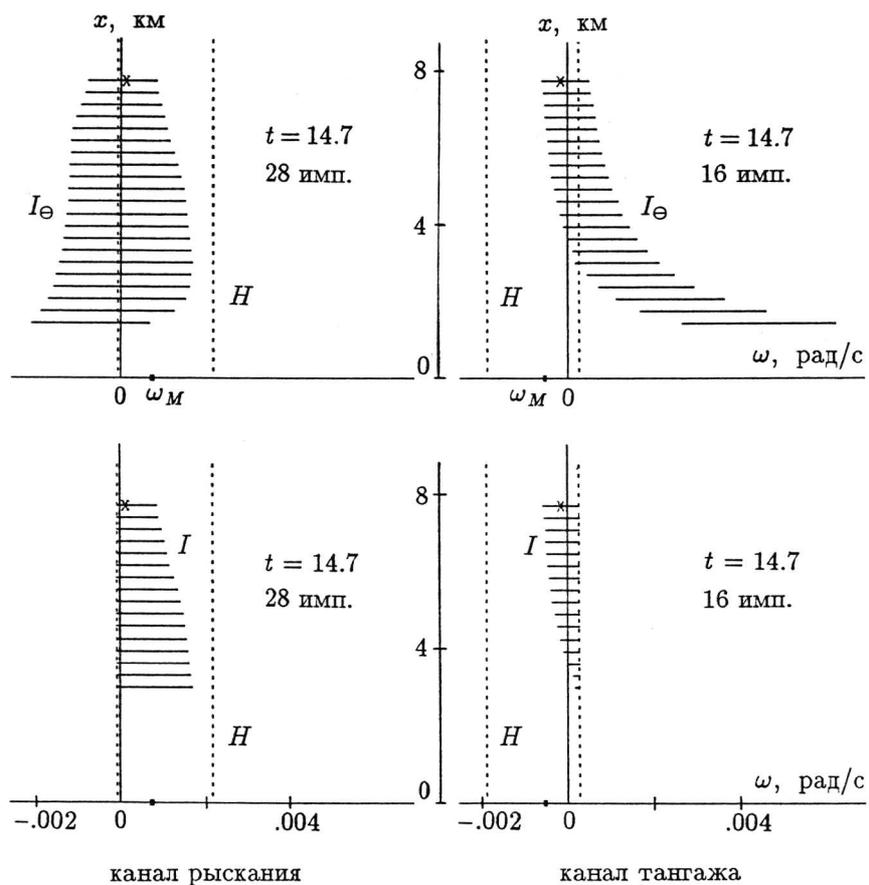


Рис. 16. Информационные множества в двухканальном алгоритме управления.

Для каждого канала используем способ управления  $U_S$ . Оговорен общий по двум каналам запас импульсов  $N = 140$ . Формирование замеров осуществляем при помощи датчика случайных чисел равномерного рас-

пределения. Ограничения на ошибку замера в каждом канале одинаковы и описываются соотношениями (1.2). Ускорение убегającego выбираем из параллелепипеда со сторонами, параллельными осям  $x, y, z$ . Исходные данные по каждому каналу возьмем те же, что описаны в § 13 для плоского случая. На рис. 17 для сочетания SM–RN показаны графики законов распределения промаха и числа истраченных импульсов.



Рис. 17. Способ управления SM в пространственной задаче преследования. Законы распределения вероятностей промаха и числа истраченных импульсов; вариант случайной помехи.

## Литература

1. Merz A.W. Stochastic guidance laws in satellite pursuit-evasion // *Comput. Math. Appl.* – 1987. – V. 13, N. 1–3. – P. 151–156.
2. Merz A.W. Noisy satellite pursuit-evasion guidance // *J. Guidance.* – 1989. – V. 12, N. 6. – P. 901–905.
3. Кумков С.И., Пацко В.С. Модельная задача импульсного управления с неполной информацией // *Труды Института математики и механики УрО РАН.* – 1992. – Т. 1, С. 106–121.
4. Красовский Н.Н. Игровые задачи о встрече движений. – М.: Наука, 1970. – 420 с.
5. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. – М.: Наука, 1974. – 456 с.
6. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. – М.: Наука, 1977. – 392 с.
7. Черноусько Ф.Л., Меликян А.А. Игровые задачи управления и поиска. – М.: Наука, 1978. – 270 с.
8. Шелементьев Г.С. Об одной задаче коррекции движения // *Прикл. математика и механика.* – 1969. – Т. 33, Вып. 2. – С. 251–260.
9. Пацко В.С. Модельный пример игровой задачи преследования с неполной информацией. I, II // *Дифференц. уравнения.* – 1971. – Т. 7, N. 3. – С. 424–435; 1972. – Т. 8, N. 8. – С. 1423–1434.
10. Меликян А.А., Черноусько Ф.Л. Некоторые минимаксные задачи управления с неполной информацией // *Прикл. математика и механика.* – 1971. – Т. 35, Вып. 6. – С. 952–961.
11. Красовский Н.Н., Осипов Ю.С. Задача управления с неполной информацией // *Изв. АН СССР. Механика твердого тела.* – 1973. – N. 4. – С. 9–14.
12. Кряжимский А.В., Филиппов С.Д. Об одной игровой задаче сближения двух точек на плоскости в условиях неполной информации // *Задачи управления с неполной информацией.* Свердловск, – 1976. – С. 62–77.
13. Субботина Н.Н., Субботин А.И. Игровая задача управления при неполной информации // *Изв. АН СССР. Техн. кибернетика.* – 1977. – N. 5. – С. 14–23.
14. Неупокоев Ф.К. Стрельба зенитными ракетами. – М.: Воениздат, – 1991. – 343 с.
15. Розыев И., Субботин А.И., Тарасьев А.М. Об одной игровой задаче сближения для двух слабо управляемых объектов / *ИММ УНЦ АН СССР.* – Свердловск. – 1986. – 25 с. – Деп. в ВИНТИ 29.12.86, N 8976 - В.
16. Пашков А.Г. Об одной игре сближения // *Прикл. математика и механика.* – 1970. – Т. 34, Вып. 5. – С. 804–811.

## Оглавление

Введение . . . . .	3
Основные обозначения . . . . .	4
<b>Глава 1. Содержательное описание задачи преследования на плоскости . . . . .</b>	<b>6</b>
§ 1. Управляющие воздействия, неполнота информации, предположение о слабой управляемости . . . . .	6
§ 2. Исходные уравнения динамики. Переход к эквивалентным координатам . . . . .	9
<b>Глава 2. Вспомогательная дифференциальная игра с неполной информацией . . . . .</b>	<b>10</b>
§ 3. Уравнения динамики для вспомогательной дифференциальной игры . . . . .	10
§ 4. Информационные множества. Допустимые стратегии. Постановка вспомогательной дифференциальной игры с неполной информацией . . . . .	11
§ 5. Три варианта стратегий первого игрока . . . . .	16
§ 6. Стратегия второго игрока . . . . .	20
<b>Глава 3. Исследование частного случая вспомогательной дифференциальной игры . . . . .</b>	<b>22</b>
§ 7. Дополнительные сведения об информационных отрезках и отрезке неопределенности . . . . .	23
§ 8. Эталонное движение. Функция гипотетического промаха . . . . .	25
§ 9. Некоторые свойства движений системы (3.1), эталонного движения и функции гипотетического промаха . . . . .	27
§ 10. Доказательство утверждений 1 – 9 . . . . .	29
§ 11. Доказательство леммы 1 и утверждений 10, 11 . . . . .	33
§ 12. Оптимальность стратегий $U^*$ , $\Omega^*$ . . . . .	37
<b>Глава 4. Результаты моделирования . . . . .</b>	<b>46</b>
§ 13. Тестирование стратегий преследователя . . . . .	46
§ 14. Сравнение со случаем Калмановской фильтрации . . . . .	54
§ 15. Наведение по ложной точке . . . . .	57
§ 16. Преследование в трехмерном пространстве . . . . .	60
<b>Литература . . . . .</b>	<b>63</b>

Сергей Иванович Кумков  
Валерий Семенович Пацко

**Задача преследования с неполной информацией**

Препринт

ЛР N 020764

Рекомендовано к изданию Ученым советом Института  
математики и механики и НИСО УрО РАН

Ответственный за выпуск А. Г. Иванов

НИСО УрО РАН N 44(93)

Подписано в печать 11.10.93. Формат 60 × 84/16.

Бумага типографская. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 4,0. Уч-изд. л. 3,0. Тираж 100 . Заказ 1621 .

620 219, Екатеринбург, ГСП-384, Институт математики и механики УрО РАН

Отпечатано в типографии Свердловской фабрики  
беловых, канцелярских и картонажных изделий  
620146, Екатеринбург, пр. Решетникова, 22