

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ  
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

ПРЕПРИНТ

*В. С. Пацко, В. Л. Турова*

**ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР  
НА ПЛОСКОСТИ**

Екатеринбург -- 1995

**Пацко В. С., Турова В. Л. Численное решение дифференциальных игр на плоскости:** Препринт. Екатеринбург; ИММ УрО РАН, 1995. 77 с .

Работа посвящена дифференциальным играм на плоскости. Рассматривается задача о построении для линейной управляемой системы совокупности всех точек, для каждой из которых первый игрок гарантирует перевод системы за конечное время на заданное целевое множество при любом поведении второго игрока (задача качества). Приводится алгоритм решения задачи, опирающийся на построение и склейку полуупроницаемых кривых. Исследуется задача качества для конкретной нелинейной системы. Описывается алгоритм построения множеств уровня функции цены в линейной игровой задаче быстродействия. Приведено большое число примеров, просчитанных на компьютере и демонстрирующих различные варианты и особенности решения. Работа может быть полезна для специалистов в области теории управления и теории дифференциальных игр.

Ответственный редактор член-корреспондент РАН **А. И. Субботин**

Рецензент доктор физ.-мат. наук **В. Н. Ушаков**

K $\frac{20204 - 72(95)}{8\Pi 6(03)}$ БО – 1995

© ИММ УрО РАН, 1995

# Введение

В работе<sup>1</sup> рассматриваются дифференциальные игры на плоскости с нефиксированным моментом окончания. Первый игрок заинтересован в переводе фазового вектора на целевое множество, второй препятствует этому.

По терминологии Р.Айзекса задачей качества называется задача выделения на плоскости множества всех точек, откуда первый игрок гарантирует перевод системы на целевое множество. В первой главе приводится алгоритм решения задачи качества для линейной системы общего вида, во второй главе – для конкретной нелинейной системы. Специфической особенностью этих алгоритмов является то, что они не опираются на решения каких-либо вспомогательных задач, где платой является время перевода. В основе решения лежат конструкции, связанные с рассмотрением семейств полупроницаемых кривых. Количество семейств определяется числом конусов выпуклости-вогнутости гамильтонiana системы. Решение усложняется с увеличением количества семейств. Сложность задачи качества зависит также от вида целевого множества. Основное внимание уделяется случаю, когда целевое множество есть точка на плоскости.

Алгоритм построения множеств уровня функции цены в линейной игровой задаче быстродействия с выпуклым целевым множеством описывается в третьей главе. Основой решения служит построение на плоскости в обратном времени линий фронта, состоящих из точек, где цена игры постоянна. Помимо кривой фронта, граница множества уровня включает барьерные линии, на которых цена игры разрывна.

Указанные алгоритмы разрабатывались в Институте математики и механики УрО РАН в 80-е годы и опираются на идеологию дифференциальных игр, характерную для Свердловской школы. В работе приведены лишь краткие схемы и основные идеи алгоритмов. Главное внимание уделено конкретным примерам.

---

<sup>1</sup>The research described in this publication was made possible in part by Grant № NME000 from the International Science Foundation

# Основные обозначения

$\mathcal{B}$  – множество разрешимости в задаче качества,

$P$  – геометрическое ограничение на управляющее воздействие первого игрока,

$Q$  – геометрическое ограничение на управляющее воздействие второго игрока,

$m$  – терминальная точка в задаче качества,

$H$  – гамильтониан конфликтно-управляемой системы,

$\ell^{(1),i}$  – корень + на – функции  $H(\cdot, x)$  в множестве  $\Gamma^{(1),i}$ ,

$\ell^{(2),i}$  – корень – на + функции  $H(\cdot, x)$  в множестве  $\Gamma^{(2),i}$ ,

$\Phi^{(1),i}$  – семейство с номером  $i$  полупроницаемых кривых первого типа,

$\Phi^{(2),i}$  – семейство с номером  $i$  полупроницаемых кривых второго типа,

$p^{(n),i}$  – полупроницаемая кривая семейства  $\Phi^{(n),i}$ ,

$g^{(1)}$ ,  $g^{(2)}$  – кусочно-гладкие полупроницаемые кривые первого и второго типа, используемые в процессе построения множества  $\mathcal{B}$ ,

$m_r$  – точки истока в нелинейной игре качества,

$\Delta$  – шаг попятных построений в игровой задаче быстродействия,

$\Gamma_0$  – допустимая зона на целевом множестве,

$W(i\Delta, M)$  – множество уровня функции цены в игровой задаче быстродействия, соответствующее моменту  $i\Delta$  при целевом множестве  $M$ ,

$F_i$  – фронт множества  $W(i\Delta, M)$ .

# Глава 1

## Линейные дифференциальные игры качества на плоскости

### 1. Постановка задачи

Рассмотрим систему второго порядка

$$\dot{x} = Ax + u + v \quad (1.1)$$

$$x \in R^2, u \in P, v \in Q.$$

Здесь  $x$  – фазовый вектор,  $A$  – постоянная матрица  $2 \times 2$ ,  $u$  и  $v$  – управление первого и второго игроков, стесненные геометрическими ограничениями  $P$  и  $Q$  соответственно. Множества  $P$  и  $Q$  – выпуклые замкнутые многоугольники на плоскости, не вырождающиеся в точку. Первый игрок стремится завести систему (1.1) в заданную точку  $m \in R^2$ , второй игрок препятствует этому. Требуется найти множество  $\mathcal{B}$  всех начальных состояний  $x_0$  на плоскости, из которых первый игрок, строя свое управление по принципу обратной связи, может привести систему в точку  $m$  за конечное время при любых действиях второго игрока. Назовем  $\mathcal{B}$  множеством разрешимости.

Задача о нахождении множества  $\mathcal{B}$  является по терминологии Р.Айзекса [1] задачей качества: при исследовании возможности перевода в точку  $m$  нас интересует лишь принципиальная возможность перевода за конечное время, но не сама величина времени перевода. Оценка времени перевода может зависеть от начальной точки  $x_0$  и при изменении  $x_0$  в пределах  $\mathcal{B}$  может стремиться к бесконечности. Таким образом, исследуемая задача есть дифференциальная игра с неограниченным временем окончания.

Дадим строгое определение множества  $\mathcal{B}$ . Пусть  $\mathcal{U}$  – совокупность всех стратегий  $U$  первого игрока, а именно, множество всех функций, заданных на  $R_+ \times R^2$  со значениями в  $P$ . Здесь  $R_+$  – множество неотрицательных чисел. Пусть  $\sigma$  – произвольное разбиение полуоси  $R_+$  точками  $0 < t_1 < t_2 < \dots$  ( $t_i \rightarrow \infty$  при  $i \rightarrow \infty$ ),  $d(\sigma)$  – диаметр разбиения,  $v(\cdot)$  – измеримая функция времени со значениями в  $Q$ . При фиксированных  $\sigma, U, v(\cdot)$  через  $y(\cdot; \sigma, x_0, U, v(\cdot))$  обозначим ломаную Эйлера [2, 3] для системы (1.1), выходящую из точки  $x_0$ .

Определим  $\mathcal{B}$  как множество всех  $x_0 \in R^2$ , для каждого из которых существуют стратегия  $U \in \mathcal{U}$ , момент  $\theta$  и отображение  $\varepsilon \rightarrow \delta(\varepsilon)$  из  $R_+$  в  $R_+$ , такие, что каковы бы ни были  $\varepsilon > 0$ , разбиение  $\sigma$  с диаметром  $d(\sigma) \leq \delta(\varepsilon)$  и функция  $v(\cdot)$  со значениями в  $Q$ , найдется момент  $t \in [0, \theta]$ , при котором  $y(t; \sigma, x_0, U, v(\cdot))$  будет принадлежать  $\varepsilon$ -окрестности точки  $x_0$ .

В силу утверждения об альтернативе [2, 3] второй игрок может уклонить систему (1.1) от попадания в  $t$  из любой точки  $x_0 \in R^2 \setminus \mathcal{B}$  на любом заранее заданном конечном промежутке времени.

В целях упрощения алгоритма построения множества  $\mathcal{B}$  исключим из рассмотрения случай “однотипности”, т.е. когда существует многоугольник  $D$ , такой, что  $P = -Q + D$ . В этом случае игра (1.1) сводится [2, 4] к решению задачи управления

$$\dot{x} = Ax + w, \quad w \in D.$$

## 2. Гладкие полупроницаемые кривые

Решение задачи о нахождении множества  $\mathcal{B}$  основано на построении в фазовой плоскости специальных линий – полупроницаемых кривых [1]. Дадим определение гладких полупроницаемых кривых.

Рассмотрим на плоскости гладкую кривую  $p$  (рис. 1.1). Отметим положительную и отрицательную стороны кривой. Символом  $\ell(x)$  обозначим нормаль к кривой в точке  $x$ , направленную в положительную сторону. Кривая  $p$  называется полупроницаемой, если в каждой точке  $x$  этой кривой выполнено условие

$$\max_{u \in P} \min_{v \in Q} \langle \ell(x), Ax + u + v \rangle = 0. \quad (1.2)$$

Поясним смысл свойства полупроницаемости. Пусть  $u_* \in P$  – управление первого игрока, доставляющее максимум в выражении (1.2). Тогда имеем

$$\langle \ell(x), Ax + u_* + v \rangle \geq 0$$

при любом управлении  $v \in Q$  второго игрока. Это означает, что векторная диаграмма правой части системы (1.1) при  $u = u_*$  лежит в положительном полупространстве, определяемом вектором  $\ell(x)$  (рис. 1.1). Другими словами, у первого игрока есть управление  $u_*$ , не допускающее переход движений системы с положительной стороны кривой  $p$  на отрицательную.

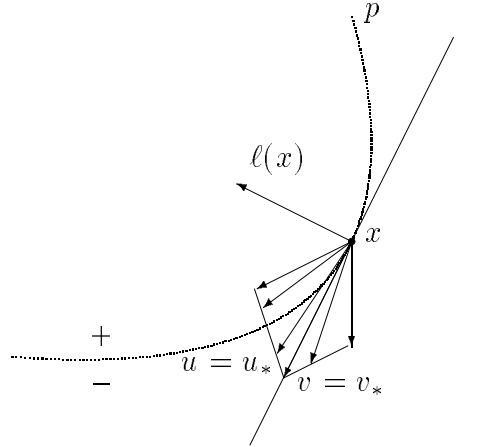


Рис. 1.1. Свойство полупроницаемости.

Пусть теперь  $v_* \in Q$  – управление второго игрока, доставляющее минимум в выражении (1.2). Тогда

$$\langle \ell(x), Ax + u + v_* \rangle \leq 0$$

при любом управлении  $u \in P$ . Векторограмма правой части системы (1.1) при  $v = v_*$  лежит в отрицательном полупространстве, определяемом вектором  $\ell(x)$ . У второго игрока есть управление  $v = v_*$ , не позволяющее переход движений системы с отрицательной стороны кривой  $r$  на положительную.

В книге Р.Айзекса методика решения игр качества основана на построении гладких полупроницаемых кривых. Методика Р.Айзекса рассчитана на случай, когда из терминального множества выходят две гладкие полупроницаемые кривые, положительные стороны которых обращены одна к другой и которые либо пересекаются между собой, либо не пересекаются, но уходят в бесконечность. Тогда часто удается показать, что множество, заключенное между кривыми, есть множество  $\mathcal{B}$ . Однако в большинстве наиболее интересных случаев, если гладкие полупроницаемые кривые и удается выпустить из терминального множества, то одна из них или обе обрываются, не пересекаясь между собой.

В работах [5–8] описана методика построения множества  $\mathcal{B}$ , опирающаяся на склейку полупроницаемых кривых. При помощи этой методики рассматриваемая линейная дифференциальная игра качества на плоскости решается до конца. В следующих разделах будет дано краткое изложение этой методики и отвечающего ей алгоритма построения множества  $\mathcal{B}$ . Другие способы построения множества  $\mathcal{B}$  на основе склейки полупроницаемых кривых исследовались в работах [9–12].

### 3. Семейства полупроницаемых кривых первого и второго типа

Рассмотрим функцию

$$\varphi(\ell) = \max_{u \in P} \min_{v \in Q} \langle \ell, u + v \rangle = \max_{u \in P} \langle \ell, u \rangle + \min_{v \in Q} \langle \ell, v \rangle, \quad \ell \in R^2.$$

В силу принятых предположений относительно множеств  $P$  и  $Q$ , всю плоскость можно разбить на такое четное число подряд идущих конусов  $K_1, \dots, K_{2s}$  с вершиной в нуле, непустой внутренностью и раствором меньше  $\pi$ , что при любом нечетном  $j = \overline{1, 2s}$  функция  $\varphi$  вогнута, а при любом четном – выпукла, при любом  $j = \overline{1, 2s}$  функция  $\varphi$  не является линейной на  $K_j$ .

Символом  $E$  обозначим некоторую состоящую из  $2s$  звеньев замкнутую ломаную линию на плоскости, такую, что если  $E_j$  – ее звено с номером  $j$ , то  $K_j = \cup_{\lambda \geq 0} \lambda E_j$ . Условимся, что переход от конуса  $K_j$  к конусу  $K_{j+1}$ ,  $j = \overline{1, 2s-1}$  происходит против часовой стрелки (рис. 1.2). Для всех векторов  $\ell_1, \ell_2$  из  $E$ , не равных между собой и не противоположных по направлению, запись  $\ell_1 < \ell_2$  будет означать, что направление вектора  $\ell_1$  поворотом против часовой стрелки на угол меньший  $\pi$  совмещается с направлением вектора  $\ell_2$ .

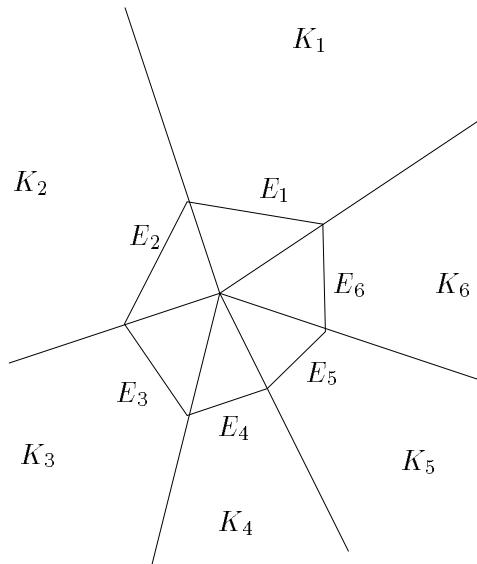


Рис. 1.2. Разбиение на конусы  $K_j$ .

Введем функцию

$$H(\ell, x) = \max_{u \in P} \min_{v \in Q} \langle \ell, Ax + u + v \rangle = \langle \ell, Ax \rangle + \varphi(\ell), \quad \ell \in R^2.$$

Очевидно, что функция  $H(\cdot, x)$  наследует свойства выпуклости, вогнутости функции  $\varphi$  на конусах  $K_j$ .

Полупроницаемые кривые будут строиться на основе корней функции  $H(\cdot, x)$ . Скажем, что функция  $H(\cdot, x)$  имеет при  $\ell_* \in E$  корень — на +, если  $H(\ell_*, x) = 0$  и при любом  $\ell$ , достаточно близком к  $\ell_*$  и удовлетворяющем условию  $\ell < \ell_*$  ( $\ell > \ell_*$ ), выполнено неравенство

$$H(\ell, x) < 0 \quad (H(\ell, x) > 0).$$

В аналогичном понятном смысле будем говорить о корне + на — функции  $H(\cdot, x)$ .

Обозначим символами  $\Gamma^{(1),1}, \Gamma^{(1),2}, \dots, \Gamma^{(1),s}$  попарные объединения  $E_1 \cup E_2, E_3 \cup E_4, \dots, E_{2s-1} \cup E_{2s}$  соответственно. Пусть  $\Gamma^{(2),1}, \Gamma^{(2),2}, \dots, \Gamma^{(2),s}$  — попарные объединения  $E_2 \cup E_3, E_4 \cup E_5, \dots, E_{2s} \cup E_1$ . В силу отмеченных свойств выпуклости-вогнутости, функция  $H(\cdot, x)$  может иметь в каждом из множеств  $\Gamma^{(1),i}, i = \overline{1, s}$ , не более одного корня + на —, а в каждом из множеств  $\Gamma^{(2),i}, i = \overline{1, s}$ , не более одного корня — на +. Символом  $S^{(1),i}$  ( $S^{(2),i}$ ),  $i = \overline{1, s}$ , обозначим совокупность всех  $x \in R^2$ , для каждого из которых существует корень + на — ( — на +) функции  $H(\cdot, x)$ , принадлежащий  $\Gamma^{(1),i}$  ( $\Gamma^{(2),i}$ ). Вектор из  $E$ , на котором реализуется корень + на — ( — на +), обозначим через  $\ell^{(1),i}(x)$  ( $\ell^{(2),i}(x)$ ). Функция  $\ell^{(n),i}(\cdot)$ ,  $n = 1, 2, i = \overline{1, s}$ , удовлетворяет локальному условию Липшица в области  $S^{(n),i}$ .

Пусть  $\Pi_+$  — матрица поворота на угол  $\pi/2$  против часовой стрелки,  $\Pi_-$  — матрица поворота на угол  $\pi/2$  по часовой стрелке.

Рассмотрим в области  $S^{(1),i}$  дифференциальное уравнение

$$\frac{dz}{d\tau} = \Pi_+ \ell^{(1),i}(z), \quad (1.3)$$

а в области  $S^{(2),i}$  — уравнение

$$\frac{dz}{d\tau} = \Pi_- \ell^{(2),i}(z). \quad (1.4)$$

Символом  $z^{(1),i}(\cdot, z_0)$  обозначим максимально продолженное влево и вправо решение уравнения (1.3) с начальным условием  $z^{(1),i}(0, z_0) = z_0$ . Аналогично, пусть  $z^{(2),i}(\cdot, z_0)$  — решение уравнения (1.4) с начальным условием

$z^{(2),i}(0, z_0) = z_0$ . Из построения уравнений (1.3), (1.4) вытекает, что фазовые траектории решений обладают свойством полупроницаемости. Фазовые траектории максимально продолженных решений уравнения (1.3) ((1.4)) образуют семейство  $\Phi^{(1),i}$  ( $\Phi^{(2),i}$ ), заполняющее множество  $S^{(1),i}$  ( $S^{(2),i}$ ). Кривые первого семейства, получаемые на основе корней + на - функции  $H(\cdot, x)$ , будем называть полупроницаемыми кривыми первого типа. Кривые второго семейства, получаемые на основе корней - на +, назовем полупроницаемыми кривыми второго типа.

Количество семейств полупроницаемых кривых первого и второго типа зависит от количества участков выпуклости-вогнутости функции  $\varphi$ . В том случае, когда множество  $P$  или множество  $Q$  является отрезком, всю плоскость можно разбить на четыре подряд идущих выпуклых конуса  $K_j$  так, что в конусах  $K_1, K_3$  функция  $\varphi$  вогнута, а в конусах  $K_2, K_4$  – выпукла. Тогда  $s = 2$  и, следовательно, имеется два семейства полупроницаемых кривых первого типа и два семейства полупроницаемых кривых второго типа.

#### 4. Краткая схема алгоритма построения множества разрешимости $\mathcal{B}$ . Примеры решения игр качества

Возможны случаи, когда множество  $\mathcal{B}$  состоит из одной точки  $m$ , т.е. на плоскости нет ни одной отличной от  $m$  начальной точки  $x_0$ , откуда первый игрок мог бы обеспечить перевод системы (1.1) в  $m$  за конечное время. Второй игрок в этом случае гарантирует уклонение системы (1.1) от попадания в  $m$  при любой начальной точке  $x_0 \neq m$ . Необходимые и достаточные условия соотношения  $\mathcal{B} = \{m\}$  приведены в работах [13–15].

Алгоритм [5–8] построения множества  $\mathcal{B}$  основан на склеивании гладких полупроницаемых кривых в кусочно-гладкие кривые  $g^{(1)}$ ,  $g^{(2)}$ , анализе их взаимного расположения и пересечения. При этом кривая  $g^{(1)}$  составляется из дуг семейств  $\Phi^{(1),i}$ ,  $i = \overline{1, s}$ , а кривая  $g^{(2)}$  – из дуг семейств  $\Phi^{(2),i}$ ,  $i = \overline{1, s}$ .

В данном препринте ограничимся пояснением идеи алгоритма для случая, когда множество  $P$  является отрезком, а множество  $Q$  – выпуклым многоугольником на плоскости. В этом случае решение строится при помощи кривых четырех семейств:  $\Phi^{(1),1}$ ,  $\Phi^{(1),2}$ ,  $\Phi^{(2),1}$ ,  $\Phi^{(2),2}$ . Будем считать также, что матрица  $A$  имеет комплексные собственные значения, причем фазовые траектории уравнения  $\dot{x}(t) = Ax(t)$  с ростом  $t$  обходят начало координат по часовой

стрелке.

Участок полупроницаемой кривой семейства  $\Phi^{(n),i}$  от точки  $a$  до точки  $b$  ( $\tau$  возрастает при движении от  $a$  к  $b$ ) обозначим через  $p^{(n),i}(a, b)$ . Символом  $p^{(n),i}(a)$  обозначим полупроницаемую кривую семейства  $\Phi^{(n),i}$ , выходящую из точки  $a$  и доведенную до границы множества  $S^{(n),i}$ .

Пусть  $\hat{i} = 1$ , если  $i = 2$ , и  $\hat{i} = 2$ , если  $i = 1$ .

Для осуществления склейки полупроницаемых кривых нам понадобится понятие точки отростка. Точка  $b$  называется точкой отростка на кривой  $p^{(n),i}(a)$ , если она является первой с конца точкой на этой кривой, для которой:

- 1) существует нуль  $\ell_0$  функции  $H(\cdot, b)$ , принадлежащий множеству  $\Gamma^{(n),\hat{i}}$ ;
- 2) составная кривая  $p^{(n),i}(a, b) \cup p^{(n),\hat{i}}(b)$  обладает свойством полупроницаемости.

Условие 2) допускает также формулировку в терминах корней функции  $H(\cdot, x)$ . А именно: а) угол между векторами  $\ell^{(n),i}(b)$ ,  $\ell_0$  меньше числа  $\pi$ ; б) для любого вектора  $\ell \in E$ ,  $\ell^{(n),i}(b) < \ell < \ell_0$  выполнено неравенство  $(-1)^n H(\ell, b) \geq 0$ ; в) при любом  $\ell \in E$ , достаточно близком к  $\ell_0$  и  $\ell > \ell_0$ , имеем  $(-1)^n H(\ell, b) > 0$ .

Первый шаг алгоритма состоит в проверке соотношения  $\mathcal{B} \neq \{m\}$ . Исключая тонкие, практически редко встречающиеся случаи, для выполнения этого достаточно [15], чтобы функция  $H(\cdot, m)$  имела ровно один корень + на −, ровно один корень − на + и чтобы угол между первым и вторым векторами, отсчитываемый от первого ко второму против часовой стрелки, был меньше  $\pi$ . Предположим, что указанное условие выполнено и реализуется на векторах  $\ell^{(1),i_1}(m)$ ,  $\ell^{(2),i_2}(m)$ .

Кривые  $g^{(1)}$ ,  $g^{(2)}$  строятся ветвями. Ветвь с номером  $k$  обозначим символом  $g_k^{(n)}$ . Начинаем с построения ветви

$$g_1^{(2)} = \begin{cases} p^{(2),i_2}(m), & i_1 \neq i_2 \\ p^{(2),i_2}(m, q_1^{(2)}) \cup p^{(2),\hat{i}_2}(q_1^{(2)}), & i_1 = i_2. \end{cases}$$

Здесь  $q_1^{(2)}$  – точка отростка на кривой  $p^{(2),i_2}(m)$ .

Далее ветви кривых  $g^{(1)}, g^{(2)}$  строятся поочередно:  $g_1^{(1)}, g_2^{(2)}, g_2^{(1)}, \dots$ . Каждая из них есть полупроницаемая кривая  $p^{(n),i}(q_k^{(n)})$  при некотором  $i$ , выходящая из точки  $q_k^{(n)}$ , которая является точкой отростка на предыдущей ветви. Считаем, что  $q_1^{(1)} = m$ . При переходе к следующей ветви кривой данного типа меняем номер семейства полупроницаемых кривых. Если, например, при построении ветви  $g_k^{(n)}$  использовалось семейство  $\Phi^{(n),i}$ , то при построении ветви

$g_{k+1}^{(n)}$  будет использовано семейство  $\Phi^{(n),\hat{i}}$ . Перед построением очередной ветви  $g_k^{(n)}$  определяется ее начальная точка  $q_k^{(n)}$ . Если точки отростка для очередной ветви нет, то построение кривой  $g^{(n)}$  обрываем. Процесс наращивания кривой  $g^{(n)}$  изображается последовательностью  $g_1^{(n)}(m, q_2^{(n)})$ ,  $g_2^{(n)}(q_2^{(n)}, q_3^{(n)})$ , ..., где через  $g_k^{(n)}(a, b)$  обозначен участок кривой  $g_k^{(n)}$  от точки  $a$  до точки  $b$ .

В рассматриваемом случае комплексных корней матрицы  $A$  кривые  $g^{(1)}, g^{(2)}$  могут получаться закручивающимися и раскручивающимися спиралью. В процессе построений производится анализ взаимного расположения кривых.

При построении кривой  $g_k^{(1)}$  проверяется ее пересечение с построенной к этому моменту частью кривой  $g^{(2)}$ . Такой тип пересечения назовем  $\alpha$ -пересечением. Типичный вид множества  $\mathcal{B}$  в случае  $\alpha$ -пересечения показан на рис. 1.3. Часть кривой  $g^{(2)}$ , лежащая за точкой пересечения, не участвует в образовании границы множества  $\mathcal{B}$ .

При построении кривой  $g_k^{(2)}$  проверяется ее пересечение с построенной к этому моменту частью кривой  $g^{(1)}$ . Такой тип пересечения назовем  $\xi$ -пересечением. Вид множества  $\mathcal{B}$  в случае  $\xi$ -пересечения показан на рис. 1.4. Тонкой линией отмечена часть полупроницаемой кривой  $g^{(1)}$ , построенная, но не вошедшая в описание границы множества  $\mathcal{B}$ .

В том случае, когда кривая  $g^{(1)}$  является раскручивающейся и пересекает  $g^{(2)}$ , получаемое пересечение назовем  $\beta$ -пересечением. Логика работы алгоритма в этом случае напоминает логику работы при  $\xi$ -пересечении. Множество  $\Omega$ , ограниченное построенными до точки  $\beta$ -пересечения кривыми  $g^{(1)}, g^{(2)}$ , не входит в множество  $\mathcal{B}$ . Вид множества в случае  $\beta$ -пересечения определяется поведением кривой  $g^{(2)}$  после точки  $\beta$ -пересечения. А именно: если  $g^{(2)}$  имеет предельный цикл, то  $\text{cl}\mathcal{B} = \text{cl}(\Omega^{(2)} \setminus \Omega)$ , где  $\Omega^{(2)}$  – множество, ограниченное предельным циклом; если  $g^{(2)}$  не имеет предельного цикла, то  $\text{cl}\mathcal{B} = \text{cl}(R^2 \setminus \Omega)$ . На рис. 1.5 показан пример  $\beta$ -пересечения. Кривая  $g^{(2)}$  раскручивается и не имеет предельного цикла. Множество  $\mathcal{B}$  есть вся плоскость за вычетом открытого множества, ограниченного кривыми  $g^{(1)}(m, \beta), g^{(2)}(m, \beta)$ . Часть кривой  $g^{(2)}$ , расположенная за точкой  $\beta$ -пересечения (раскручивающаяся спираль), показана тонкой линией.

Отметим, что на самом деле пересечения проверяются не с указанными кривыми целиком, а лишь с некоторыми специальным образом определяемыми участками.

Если в процессе построений происходит пересечение кривых  $g^{(1)}$  и  $g^{(2)}$ , то его можно отнести к одному из трех типов:  $\alpha$ ,  $\xi$ , или  $\beta$ -пересечение. Если

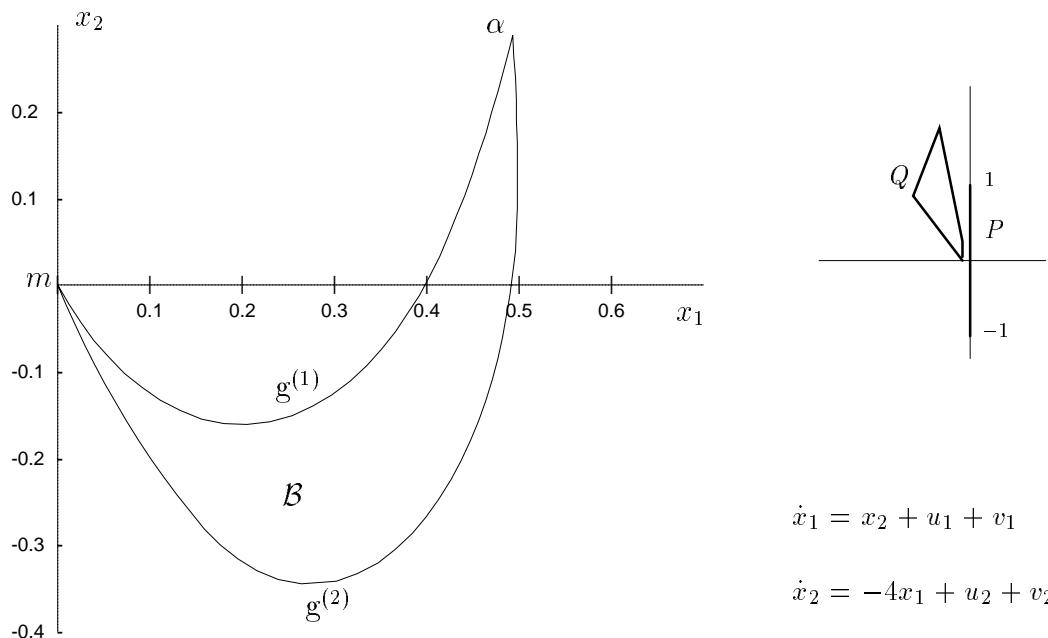


Рис. 1.3. Множество  $\mathcal{B}$  в случае  $\alpha$ -пересечения.

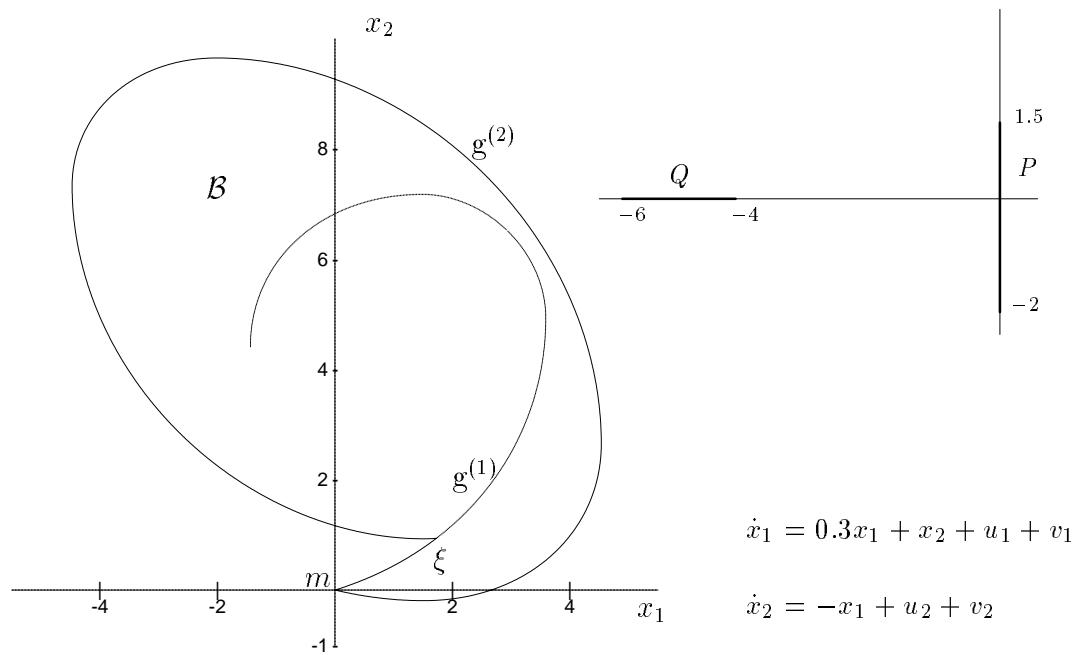


Рис. 1.4. Множество  $\mathcal{B}$  в случае  $\xi$ -пересечения.

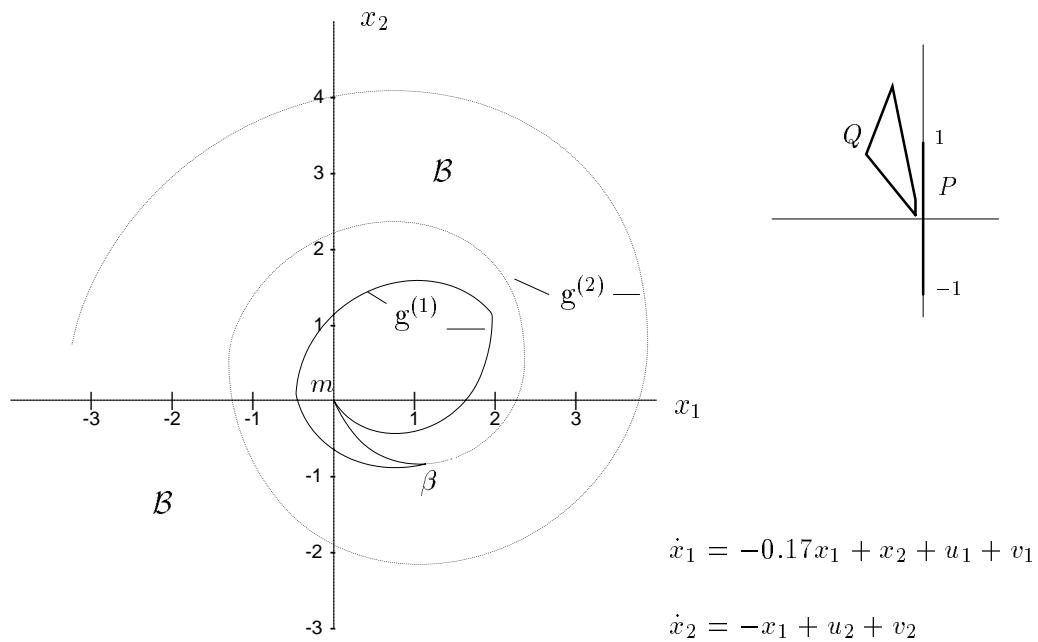


Рис. 1.5. Множество  $\mathcal{B}$  в случае  $\beta$ -пересечения.

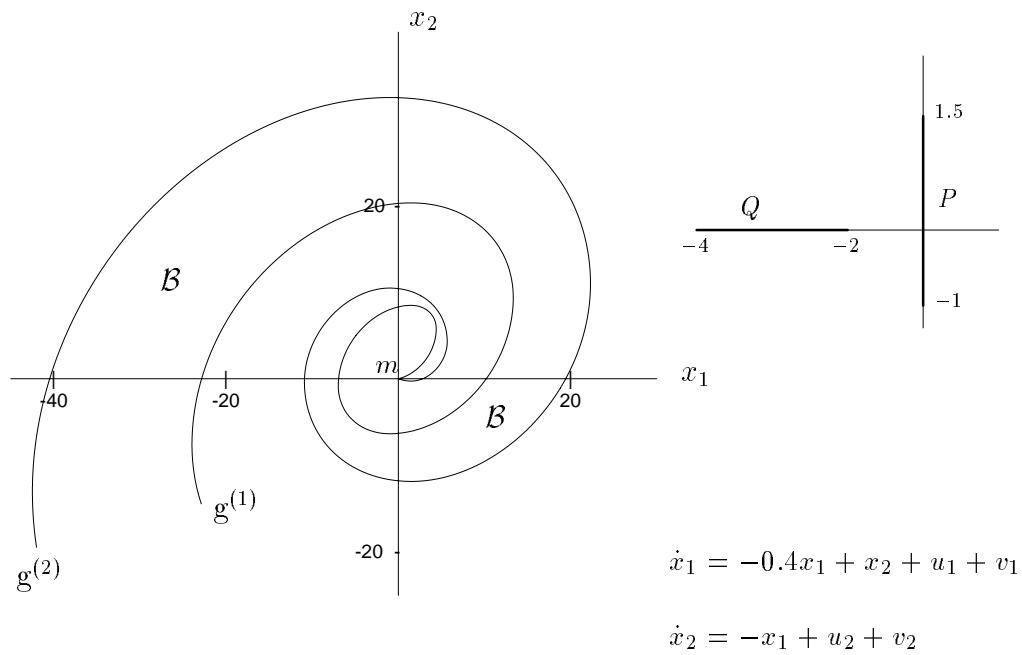


Рис. 1.6. Множество  $\mathcal{B}$  – бесконечная “лента”.

пересечения нет, то реализуются следующие случаи.

Кривые  $g^{(1)}, g^{(2)}$  раскручиваются, не пересекаясь. Множество  $\mathcal{B}$  в этом случае ограничено кривыми  $g^{(1)}$  и  $g^{(2)}$ , бесконечно, но не совпадает со всей плоскостью (рис. 1.6).

Кривая  $g^{(2)}$  – раскручивающаяся спираль. Если она имеет предельный цикл, пусть  $\Omega^{(2)}$  – открытое множество, им ограниченное. Когда предельного цикла нет, примем  $\Omega^{(2)} = R^2$ . Кривая  $g^{(1)}$  либо закручающаяся спираль, имеющая предельный цикл, либо ее построение оборвано из-за отсутствия точки отростка. Если  $g^{(1)}$  имеет предельный цикл, пусть  $\Omega^{(1)}$  – замкнутое множество, им ограниченное. Когда предельного цикла нет, примем  $\Omega^{(1)} = \emptyset$ . Во всех случаях  $\mathcal{B} = \Omega^{(2)} \setminus \Omega^{(1)}$ .

Множество  $\mathcal{B}$  не всегда замкнуто: некоторые граничные кривые могут не входить в ответ. Например, в случае, когда множество  $\mathcal{B}$  ограничено предельным циклом кривой  $g^{(2)}$ , сам предельный цикл не принадлежит множеству  $\mathcal{B}$ .

Приведенные примеры просчитаны на компьютере при помощи программы [8].

В работах [5, 6] для случая, когда  $P$  – отрезок, проведено доказательство существования способа управления первого игрока, приводящего систему (1.1) в точку  $t$  за конечное время. Доказательство опирается на разбиение множества  $\mathcal{B}$  на элементарные “ячейки” (криволинейные многоугольники):  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_d$ . Ячейка  $\Lambda_1$  примыкает к точке  $t$ . Каждому типу ячейки ставится в соответствие управление первого игрока (постоянное во внутренности ячейки, с особенностями на границе), обеспечивающее перевод из ячейки с большим номером в ячейку с меньшим номером, а из ячейки  $\Lambda_1$  – в точку  $t$ .

В примерах, где при постоянных  $u, v$  фазовые траектории системы (1.1) являются окружностями, множество  $\mathcal{B}$  может быть построено циркулем. Поясним это на следующем примере. Рассмотрим управляемую систему

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + u_1 + v_1 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + u_2 + v_2,\end{aligned}\quad (1.5)$$

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in P, \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in Q.$$

Множества  $P, Q$  показаны на рис. 1.7. Множество  $P$  – симметричный относительно нуля вертикальный отрезок длиной  $2\mu$ .

Имеем  $u_1 \equiv 0$ , т.е. управляющее воздействие первого игрока – скалярное; ограничение на него можно записать в виде  $|u_2| \leq \mu$ . Будем предполагать  $\mu$

достаточно большим. Вершины отрезка  $P$  обозначим через  $h_1, h_2$ , нормали – символами  $\gamma_1, \gamma_2$ . Множество  $Q$  – четырехугольник с вершинами  $r_1, r_2, r_3, r_4$ . Внутренние нормали к  $Q$  обозначим через  $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ .

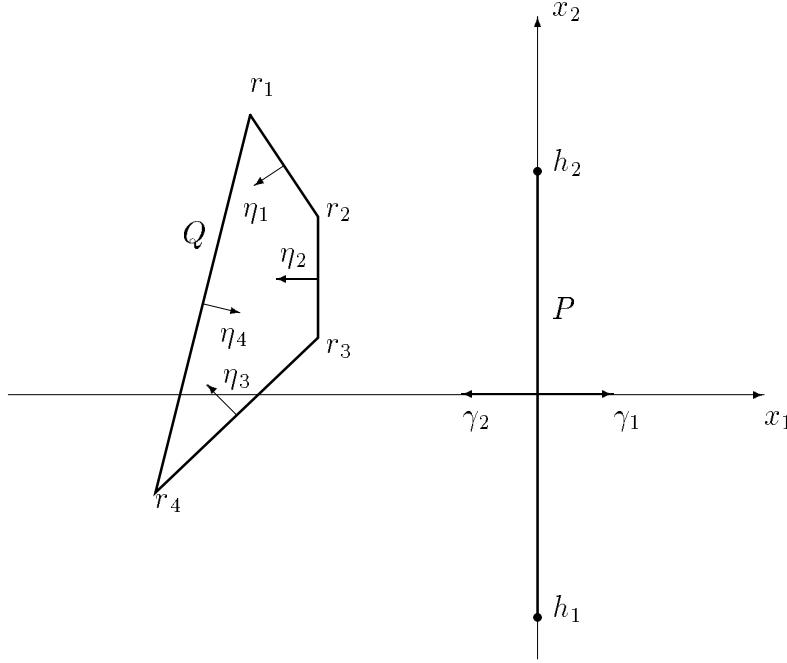


Рис. 1.7. Множества  $P, Q$  для игры (1.5).

Рассмотрим разбиение плоскости на конусы  $K_1, \dots, K_4$  (рис. 1.8), и пусть  $E$  – соответствующая такому разбиению замкнутая ломаная линия из четырех звеньев  $E_1, \dots, E_4$ . Функция  $\varphi(\ell) = \max_{u \in P} \min_{v \in Q} \langle \ell, u + v \rangle$  вогнута на конусе  $K_3$ , поскольку в этом конусе нет нормалей с множества  $P$  (стало быть,  $\max_{u \in P} \langle \ell, u \rangle$  при любом  $\ell \in K_3$  достигается на одном и том же векторе из отрезка  $P$ ), но есть нормаль  $\eta_3$  к множеству  $Q$ . По аналогичной причине функция  $\varphi$  вогнута на конусе  $K_1$ . Функция  $\varphi$  выпукла на конусе  $K_2$ , поскольку он не содержит векторов нормалей к множеству  $Q$  (стало быть,  $\min_{v \in Q} \langle \ell, v \rangle$  достигается на одном и том же элементе из  $Q$ ), но содержит нормаль  $\gamma_1$  к отрезку  $P$ . Конус  $K_4$  содержит нормали  $\gamma_2, \eta_2$  множеств  $P$  и  $Q$ , и они совпадают по направлению. Функция  $\varphi$  является выпуклой в конусе  $K_4$ , поскольку длина отрезка  $P$  больше длины параллельного ему отрезка  $[r_2, r_3]$ .

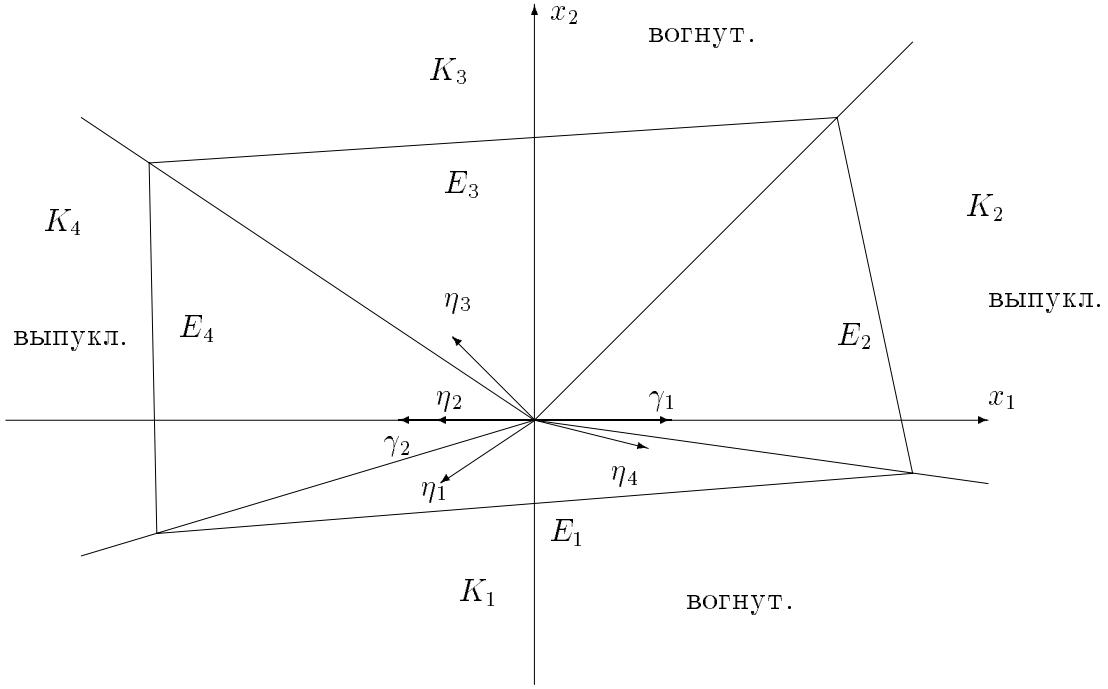


Рис. 1.8. Разбиение на конусы для игры (1.5).

Обозначим  $\Gamma^{(1),1} = E_1 \cup E_2$ ,  $\Gamma^{(1),2} = E_3 \cup E_4$ ,  $\Gamma^{(2),1} = E_2 \cup E_3$ ,  $\Gamma^{(2),2} = E_4 \cup E_1$ .

Примем

$$\tilde{J} = \text{cl}((P + Q) \setminus ((Q + h_1) \cup (Q + h_2))).$$

Для рассматриваемого примера множество  $\tilde{J}$  показано на рис. 1.9. Каждая вершина ломаной, ограничивающей множество  $\tilde{J}$ , есть вектор  $u + v$ :

$$\tilde{a} = h_1 + r_4, \quad \tilde{b} = h_2 + r_4, \quad \tilde{c} = h_2 + r_3, \quad \tilde{d} = h_1 + r_2, \quad \tilde{e} = h_1 + r_1.$$

Пусть  $\tilde{S}^{(n),i}$  – совокупность всех  $y \in R^2$ , для каждого из которых в множестве  $\Gamma^{(n),i}$  существует при  $n = 1$  корень  $+$  на  $-$ , а при  $n = 2$  корень  $-$  на  $+$  функции  $\max_{u \in P} \min_{v \in Q} \langle \ell, u + v - y \rangle$ . Нетрудно проверить, что множества  $\tilde{S}^{(n),i}$  в нашем примере имеют вид, показанный на рис. 1.10. Получаем

$$S^{(n),i} = \{x \in R^2 : -Ax = y, y \in \tilde{S}^{(n),i}\}, \quad n = 1, 2, i = 1, 2.$$

Положим

$$J = \{x \in R^2 : -Ax = y, y \in \tilde{J}\}.$$

В разбираемом примере матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

поэтому множества  $S^{(n),i}$ ,  $J$  получаются из множеств  $\tilde{S}^{(n),i}$ ,  $\tilde{J}$  поворотом на угол  $\pi/2$  по часовой стрелке.

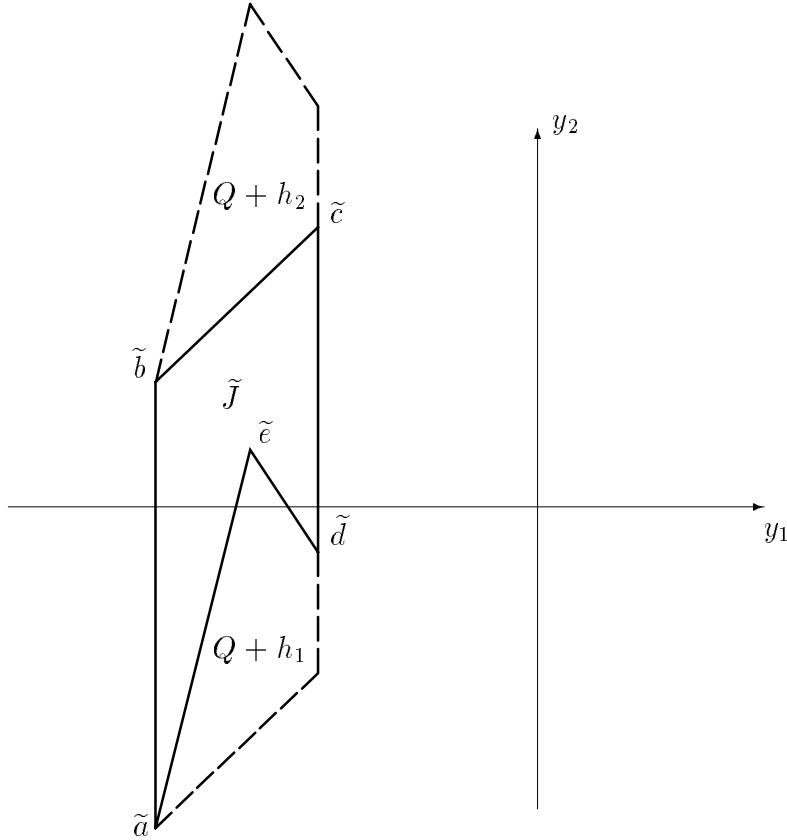


Рис. 1.9. Построение множества  $\tilde{J}$ .

В любой точке  $x$  вне множества  $J$  существует один корень  $+$  на  $-$  функции  $H(\cdot, x)$  и один корень  $-$  на  $+$ . Для любой точки из внутренности  $J$  имеем по два корня каждого типа.

Полупроницаемые кривые семейств  $\Phi^{(n),i}$  составлены из дуг окружностей, центры которых находятся в точках  $a, b, c, d, e$ . Так, например, на рис. 1.11 показана полупроницаемая кривая  $p^{(1),1}$ , входящая в семейство  $\Phi^{(1),1}$ . Она состоит из дуг  $w_1w_2, w_2w_3, w_3w_4, w_4w_5$  с центрами в точках  $d, e, a, b$  соответственно. На рис. 1.12 показана полупроницаемая кривая  $p^{(2),1}$ , входящая в семейство  $\Phi^{(2),1}$ . Дуги  $f_1f_2, f_2f_3$  соответствуют центрам  $b, c$ .

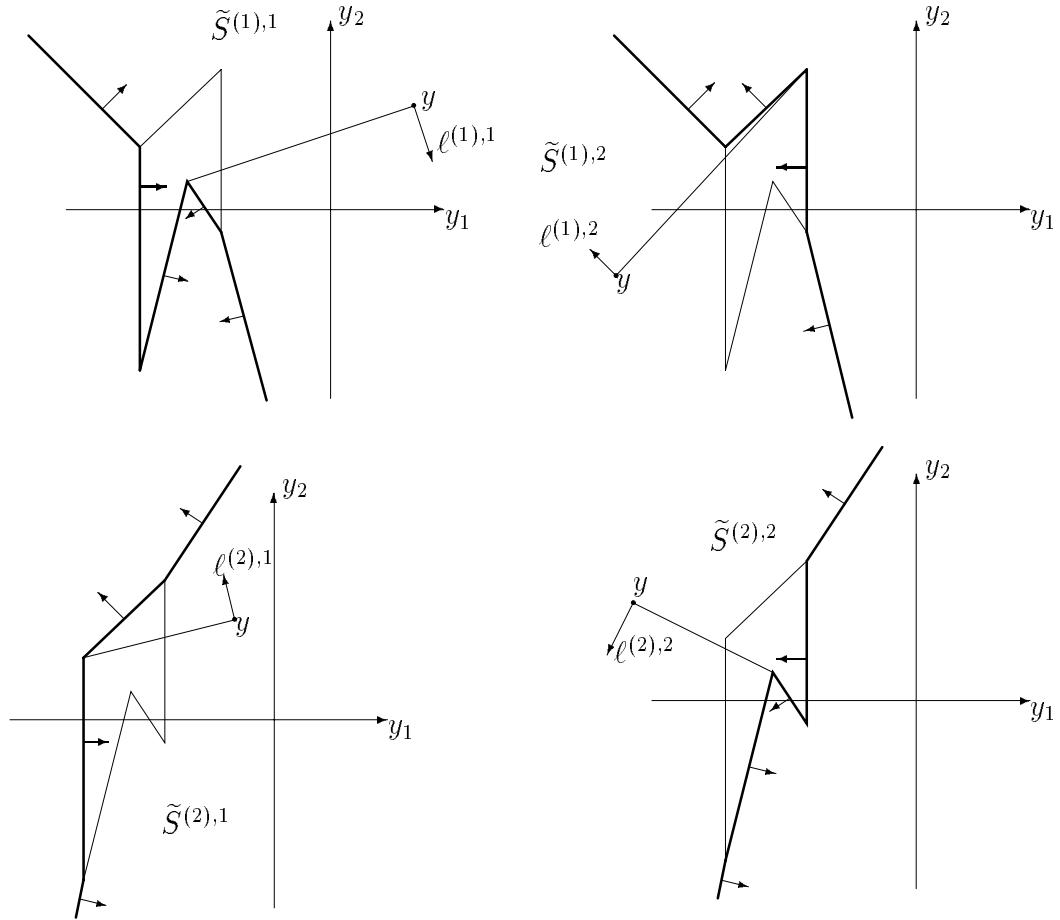


Рис. 1.10. Вид множеств  $\tilde{S}^{(n),i}$ .

Поясним построение множества  $\mathcal{B}$  для терминальной точки  $m$  из  $S^{(1),2} \cap S^{(2),2}$  (рис. 1.13).

Полупроницаемая кривая  $p^{(2),2}(m)$  семейства  $\Phi^{(2),2}$  является дугой окружности с центром в точке  $e$ . Дугу  $p^{(2),2}(m)$  доводим до границы множества  $S^{(2),2}$ . Символом  $\omega$  обозначена последняя точка на этой кривой. Ищем точку отростка. Перебираем, начиная с конца, точки на дуге  $p^{(2),2}(m, \omega)$  и находим первую точку  $q_1^{(2)}$ , в которой выполнены условия 1), 2) со стр. 11. Отметим, что условия 1), 2a), 2c) выполнены для всех точек дуги  $p^{(2),1}(q_1^{(2)}, \omega)$ , а условие 2b) лишь в точке  $q_1^{(2)}$ . Из найденной точки  $q_1^{(2)}$  выпускаем кривую  $p^{(2),1}(q_1^{(2)})$  семейства  $\Phi^{(2),1}$  (она составлена из дуг окружностей с центрами

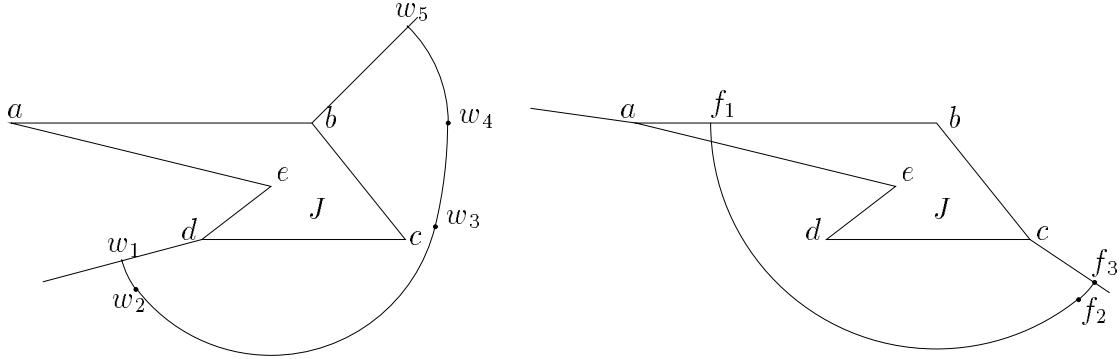


Рис. 1.11. Полупроницаемая кривая из семейства  $\Phi^{(1),1}$ .

Рис. 1.12. Полупроницаемая кривая из семейства  $\Phi^{(2),1}$ .

в точках  $b, c$ ). Доводим ее до границы множества  $S^{(2),1}$ . Кривая  $g_1^{(2)}$  состоит из двух гладких кусков:

$$g_1^{(2)} = p^{(2),2}(m, q_1^{(2)}) \cup p^{(2),1}(q_1^{(2)}).$$

Переходим к построению первой ветви кривой  $g^{(1)}$ . Кривая  $p^{(1),2}(m)$  составлена из дуг окружностей с центрами в точках  $c, d$ . В процессе ее построения анализируем  $\alpha$ -пересечение с кривой  $g_1^{(2)}$ . В данном случае такое пересечение есть. Построения заканчиваем. Множество  $\mathcal{B}$  ограничено кривыми  $g_1^{(2)}(m, \alpha), g_1^{(1)}(m, \alpha)$ .

На рис. 1.13 указаны положительные и отрицательные стороны кривых. Управление обратной связи, решающее задачу о приведении в точку  $m$ , может быть построено на основе следующей схемы: из любой точки  $x_0 \in \mathcal{B}$  при  $u_2 = \mu$  движение выходит на кривую  $p^{(2),2}(m, q_1^{(2)})$ , переключение управления на  $u_2 = -\mu$  предотвращает переход на отрицательную сторону этой кривой, при сходе на положительную сторону кривой  $p^{(2),2}(m, q_1^{(2)})$  через некоторое время вновь действует  $u_2 = \mu$  и так далее, режим скольжения около кривой  $p^{(2),2}(m, q_1^{(2)})$  обеспечивает движение в направлении точки  $m$ .

Множество  $\mathcal{B}$  для другой терминальной точки  $m \in S^{(1),1} \cap S^{(2),1}$  показано

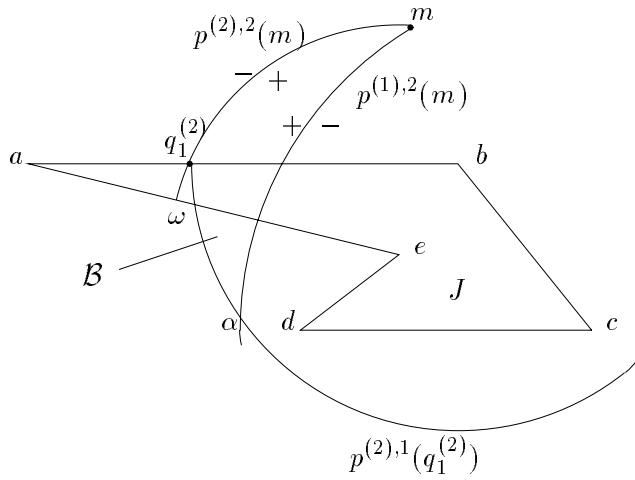


Рис. 1.13. Построение множества  $\mathcal{B}$  для  $m \in S^{(1),2} \cap S^{(2),2}$ .

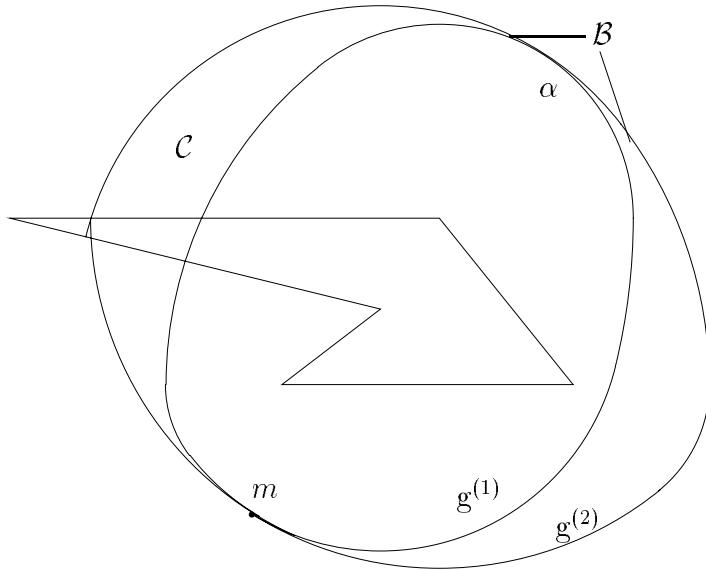


Рис. 1.14. Множество  $\mathcal{B}$  для  $m \in S^{(1),1} \cap S^{(2),1}$ .  
Случай касания кривых  $g^{(1)}, g^{(2)}$ .

на рис. 1.14. Подобран случай, когда нет непрерывной зависимости  $\mathcal{B}$  от  $m$ : при небольших смещениях точки  $m$  множество  $\mathcal{B}$  изменяется скачком. По этой причине результат решения задачи зависит от выбиралой формализации.

В используемой нами формализации, которая соответствует книгам [2, 3], множество  $\mathcal{B}$  включает в себя часть  $\mathcal{C}$  после точки касания  $\alpha$ . При других вариантах формализации эта часть может не входить в ответ. Отметим, что на обоих рисунках множество  $\mathcal{B}$  не является замкнутым: в него не включается дуга  $\alpha q_1^{(2)}$  на рис. 1.13 и аналогичная ей дуга на рис. 1.14.

Множества  $\Gamma^{(n),i}$  в рассмотренном примере были введены при помощи ломаной  $E$  со звенями  $E_1, E_2, E_3, E_4$ . Возможно другое задание множеств  $\Gamma^{(n),i}$  при помощи двух параллельных горизонтальных прямых, которые удобно обозначить  $E_1, E_3$ . Прямая  $E_1$  проходит ниже нуля, прямая  $E_3$  – выше нуля. Поскольку  $P$  – вертикальный отрезок, то функция  $\varphi$  вогнута на каждой из прямых  $E_1, E_3$ . Задание  $\Gamma^{(n),i} : \Gamma^{(1),1} = E_1, \Gamma^{(1),2} = E_3, \Gamma^{(2),1} = E_3, \Gamma^{(2),2} = E_1$ . Такое определение в некоторых случаях может быть несколько более удобным и будет использовано в главе 2. Следует, однако, учитывать, что при измененном определении горизонтальные векторы не входят в множества  $\Gamma^{(n),i}$ .

Компьютерный алгоритм построения множества  $\mathcal{B}$  не использует какое-либо явное геометрическое описание множеств  $\tilde{S}^{(n),i}, S^{(n),i}, \tilde{J}, J$ . Указанные множества полезны, когда мы строим множество  $\mathcal{B}$  “на руках”. В [8] описана программа, предназначенная для построения множества  $\mathcal{B}$  в случае произвольной матрицы  $A$  с комплексными собственными значениями и произвольных выпуклых многоугольников  $P, Q$ , задающих ограничения на управляющие воздействия игроков. Программа строит на основе корней функции  $H$  полуупроницаемые кривые, связанные с точкой  $m$ , проводит анализ их взаимного расположения и выдает границу множества  $\mathcal{B}$ . На рис. 1.15–1.18 представлены просчитанные на компьютере множества  $\mathcal{B}$  для различных вариантов матрицы  $A$ , множеств  $P, Q$ .

Полное описание решения задачи качества при скалярном управлении первого игрока (множество  $P$  – отрезок) и произвольной матрице  $A$  содержится в работах [5, 6].

В случае действительных собственных значений решение, как правило, упрощается за счет уменьшения количества ветвей кривых  $g^{(1)}, g^{(2)}$ . С другой стороны, оно усложняется в том, что для нахождения множества  $\mathcal{B}$  не всегда достаточно построения ветвей полуупроницаемых кривых, связанных с точкой  $m$ . Иногда необходимо привлекать полуупроницаемые кривые первого и второго типа, связанные с одной или несколькими дополнительными точками “истока”. На рис. 1.19 показан пример множества  $\mathcal{B}$  в случае действительных корней матрицы  $A$ . Точка  $m_1$  является точкой истока.

**Примеры решения задачи качества в случае  
нескалярного управления первого игрока**

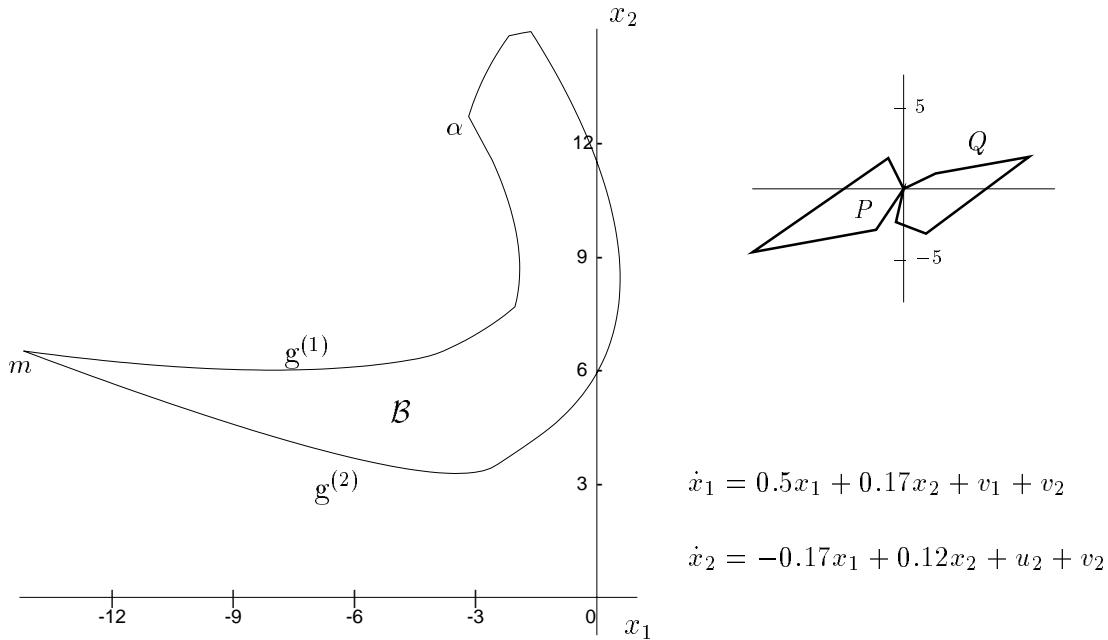


Рис. 1.15. Множество  $\mathcal{B}$  определяется точкой  $\alpha$ -пересечения.

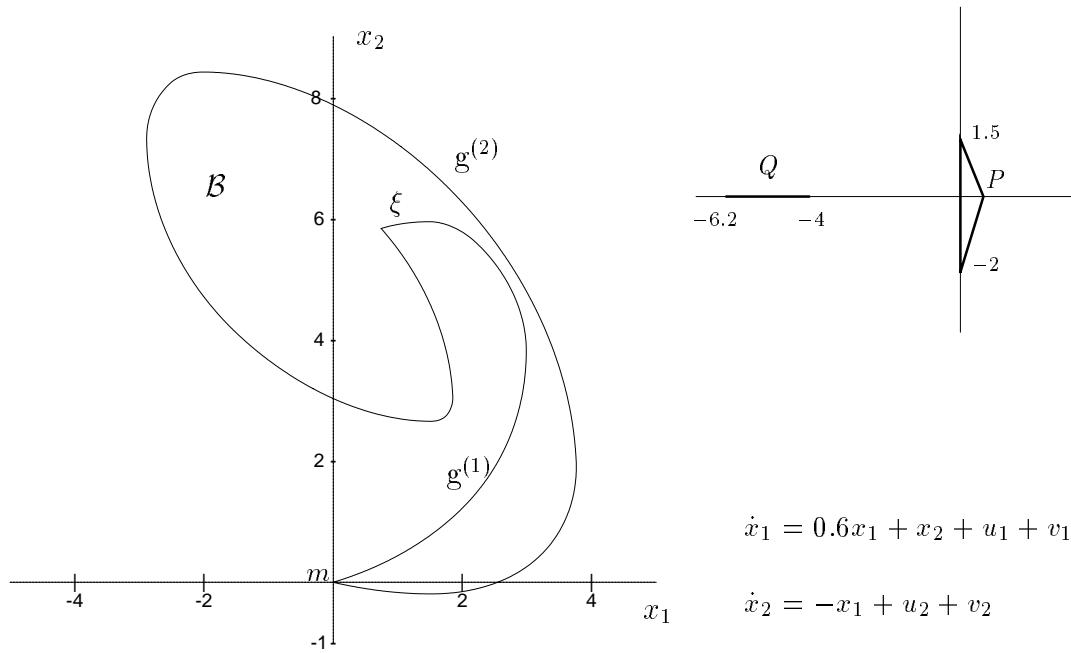


Рис. 1.16. Множество  $\mathcal{B}$  определяется точкой  $\xi$ -пересечения.

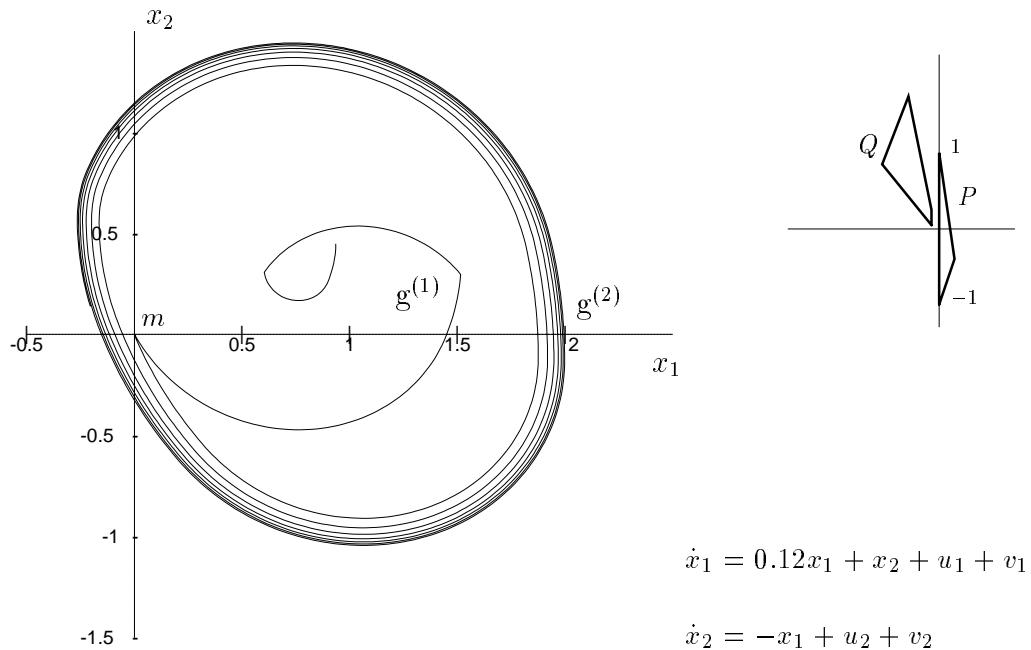


Рис. 1.17. Множество  $\mathcal{B}$  ограничено предельным циклом кривой  $g^{(2)}$ .

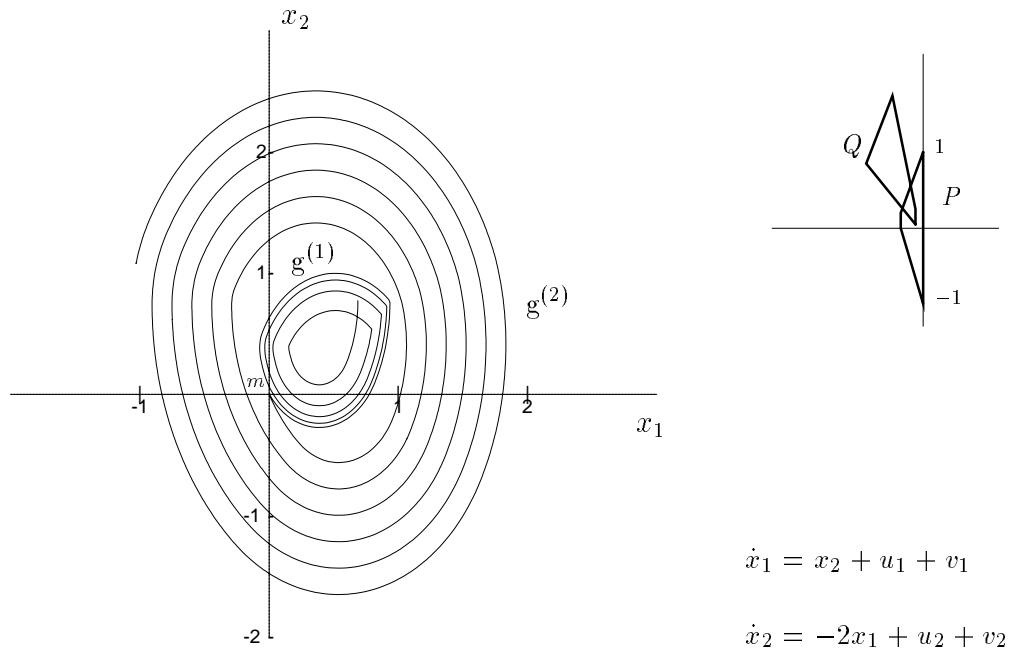


Рис. 1.18. Кривая  $g^{(1)}$  закручивается, кривая  $g^{(2)}$  раскручивается.  
Множество  $\mathcal{B}$  – вся плоскость.

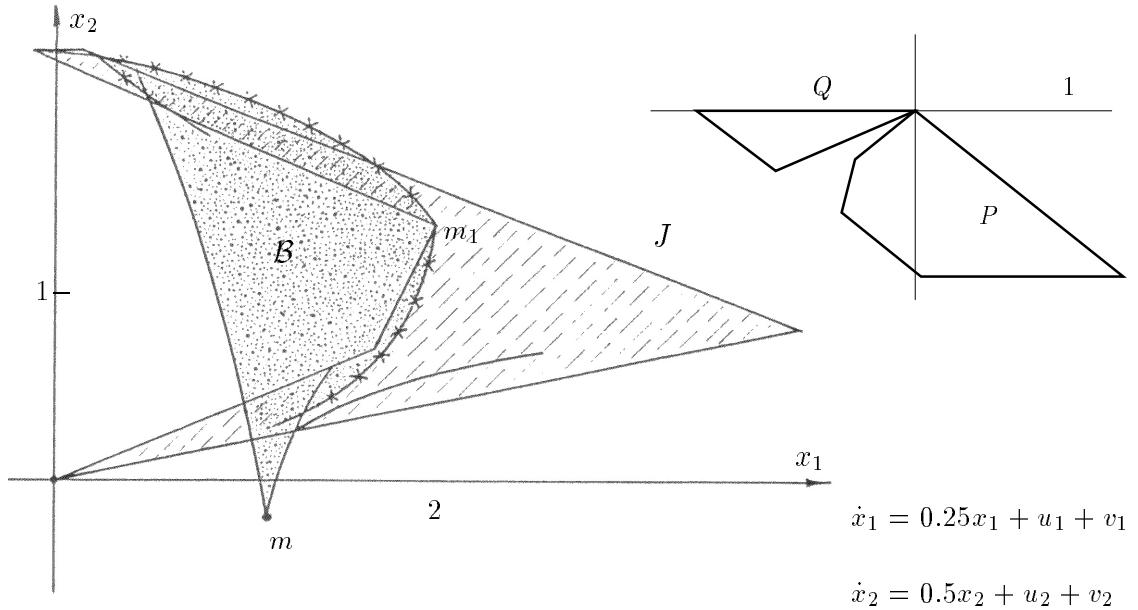


Рис. 1.19. Пример множества  $\mathcal{B}$  в случае действительных корней матрицы  $A$ .

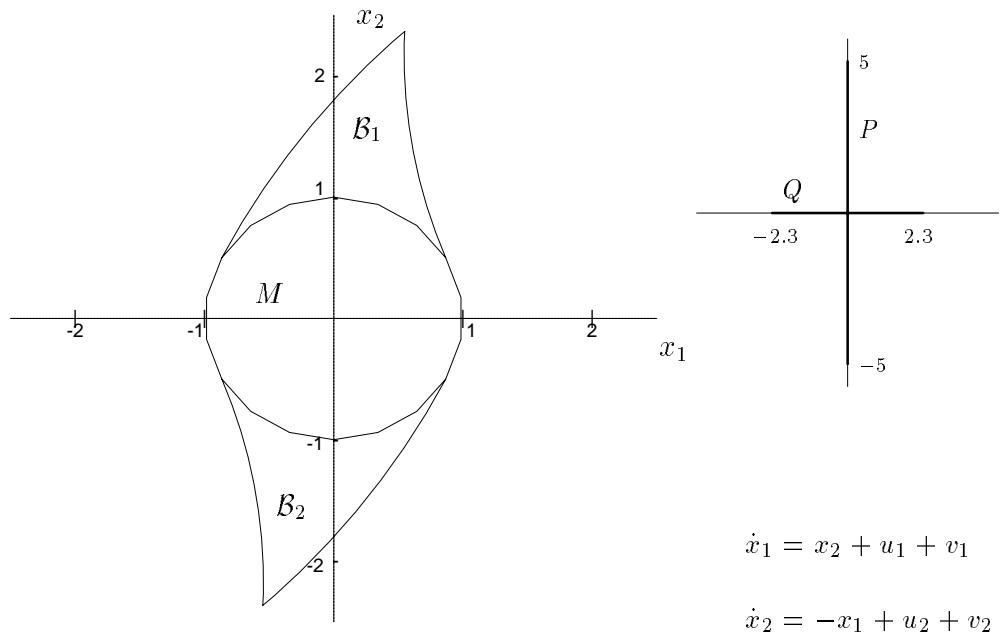


Рис. 1.20. Пример решения задачи качества в случае, когда терминальное множество не является точкой.

Мы рассмотрели случай, когда терминальное множество – точка. Решение задачи качества для произвольного выпуклого компактного терминального множества  $M$  также может быть осуществлено при помощи полупроницаемых кривых первого и второго типа. Самый простой случай при этом, когда к множеству  $M$  подсоединяются один или несколько кусков множества  $\mathcal{B}$ , каждый из которых строится независимо, и такие куски не пересекаются между собой. Подобная ситуация показана на рис. 1.20, где просчитанное на компьютере множество  $\mathcal{B}$  состоит из двух кусков  $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ . Значительное усложнение происходит тогда, когда упомянутые независимые куски начинают пересекаться между собой.

## Глава 2

### Нелинейная игра качества

Идея алгоритма построения множества  $\mathcal{B}$  в линейных дифференциальных играх качества на плоскости может быть распространена на дифференциальные игры качества с нелинейной по фазовой переменной динамикой. В данной главе опишем модификацию алгоритма на случай нелинейной системы

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + v_1 \\ \dot{x}_2 &= -k \sin(x_1 + a) + u_2 + c \\ v_1 &\in [\nu_*, \nu^*], \quad |u_2| \leq \mu.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Терминальное множество – точка  $t$  на плоскости. Постоянные  $c, \mu, k$  связаны соотношением  $c < \mu - k$ ,  $k > 0$ . Не упрощая задачу по существу, это условие сокращает число возможных конфигураций множества  $\mathcal{B}$ . Более подробно материал этой главы изложен в [16, 17].

#### 1. Описание семейств полупроницаемых кривых

По аналогии с главой 1 рассмотрим функцию

$$\varphi(\ell) = \max_{u \in P} \min_{v \in Q} \langle \ell, u + v \rangle, \quad \ell \in R^2,$$

где  $P$  – отрезок с вершинами  $(0, \mu)$ ,  $(0, -\mu)$ , а  $Q$  – отрезок с вершинами  $(\nu_*, c)$ ,  $(\nu^*, c)$ . Поскольку множество  $P$  – вертикальный отрезок, то вся плоскость разбивается осью абсцисс на две полуплоскости  $\{\ell_2 \geq 0\}$ ,  $\{\ell_2 < 0\}$ , в каждой из которых функция  $\varphi$  вогнута. Взамен ломаной  $E$ , введенной в разделе 3 главы 1, рассмотрим горизонтальные прямые  $E_1$ :  $\ell_2 = -\alpha$  ( $\alpha$  – произвольное положительное число) и  $E_3$ :  $\ell_2 = \alpha$ . Положим

$$\Gamma^{(1),1} = E_1, \quad \Gamma^{(1),2} = E_3, \quad \Gamma^{(2),1} = E_3, \quad \Gamma^{(2),2} = E_1.$$

Функция  $H$  имеет вид

$$H(l, x) = \langle \ell, \begin{pmatrix} x_2 \\ -k \sin(x_1 + a) \end{pmatrix} \rangle + \varphi(\ell)$$

и наследует свойства функции  $\varphi$  по переменной  $\ell$ . Поэтому при фиксированном  $x$  функция  $H$  может иметь не более одного корня + на – и не более одного корня – на + в каждом из множеств  $\Gamma^{(n),i}$ ,  $n = 1, 2$ ,  $i = 1, 2$ .

Как и в разделе 4 главы 1, рассмотрим множество  $\tilde{S}^{(n),i}$  – совокупность всех  $y \in R^2$ , для каждого из которых в множестве  $\Gamma^{(n),i}$  существует при  $n = 1$  корень + на –, а при  $n = 2$  корень – на + функции  $\max_{u \in P} \min_{v \in Q} \langle l, u + v - y \rangle$ . Множества  $\tilde{S}^{(n),i}$ ,  $n = 1, 2$ ,  $i = 1, 2$ , имеют вид, показанный на рис. 2.1, и являются открытыми.

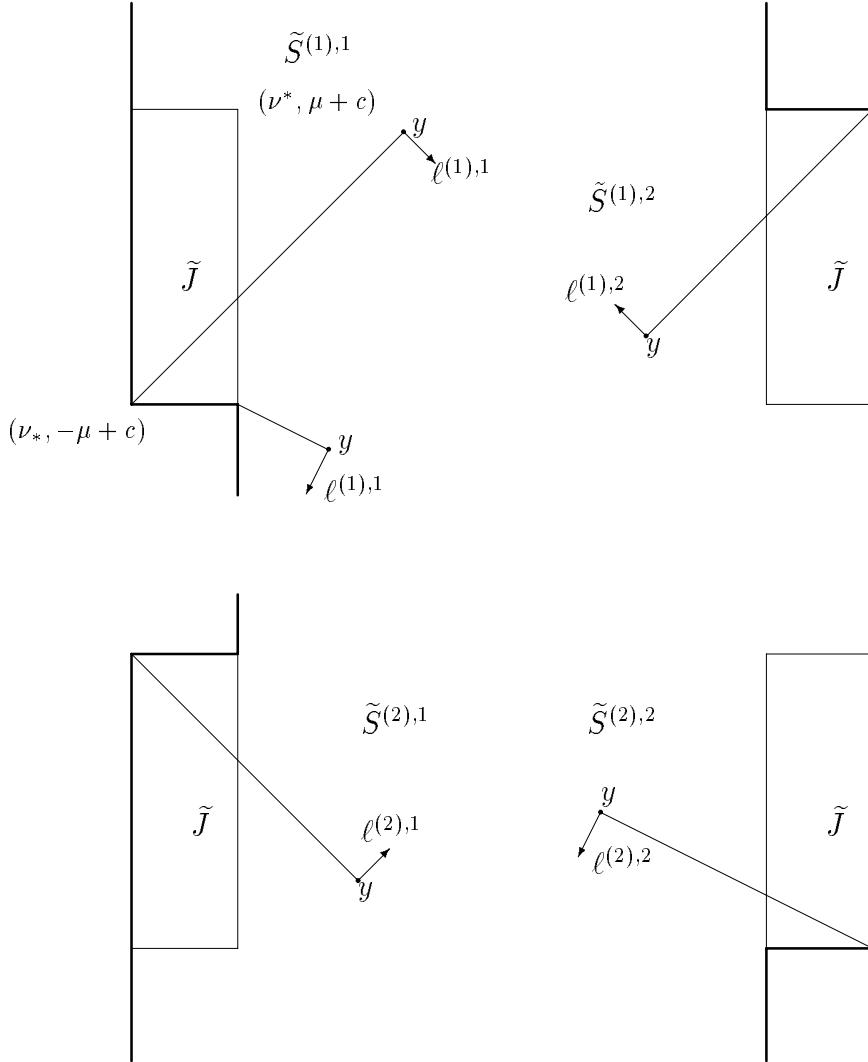


Рис. 2.1. Множества  $\tilde{S}^{(n),i}$ .

Введем отображение  $\Psi : (x_1, x_2) \rightarrow (-x_2, k \sin(x_1 + a))$ . Прообраз множества  $\tilde{S}^{(1),i}$  ( $\tilde{S}^{(2),i}$ ) при отображении  $\Psi$  есть множество  $S^{(1),i}$  ( $S^{(2),i}$ ), для каждой точки  $x$  которого существует единственный корень  $\ell^{(1),i}(x)$  ( $\ell^{(2),i}(x)$  ).

функции  $H(\cdot, x)$ , принадлежащий множеству  $\Gamma^{(1),i}$  ( $\Gamma^{(2),i}$ ) и отвечающий перемене знако + на - (- на +).

В силу условия  $c < \mu - k$  прообраз множества  $\{y : y_2 < -\mu + c\}$  при отображении  $\Psi$  пуст. Поэтому  $S^{(1),1}$  ( $S^{(2),2}$ ) – полуплоскость ниже (выше) прямой  $x_2 = -\nu_*$  ( $x_2 = -\nu^*$ ).

Если  $|\mu + c|/k \leq 1$ , то множество  $S^{(n),i}$ ,  $n \neq i$ , представляет собой совокупность сдвигов множества  $X^{(n),i}$  (рис. 2.2) на величину  $2\pi r$ ,  $r = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , вдоль оси абсцисс. Буквами  $b$ ,  $d$ ,  $e$  на рис. 2.2 обозначены величины

$$-a - \arcsin \frac{\mu + c}{k} - \pi, \quad -a + \arcsin \frac{\mu + c}{k}, \quad -a - \arcsin \frac{\mu + c}{k} + \pi$$

соответственно. В случае  $|\mu + c|/k < 1$  множества  $S^{(1),2}$ ,  $S^{(2),1}$  имеют вид, показанный на рис. 2.3.

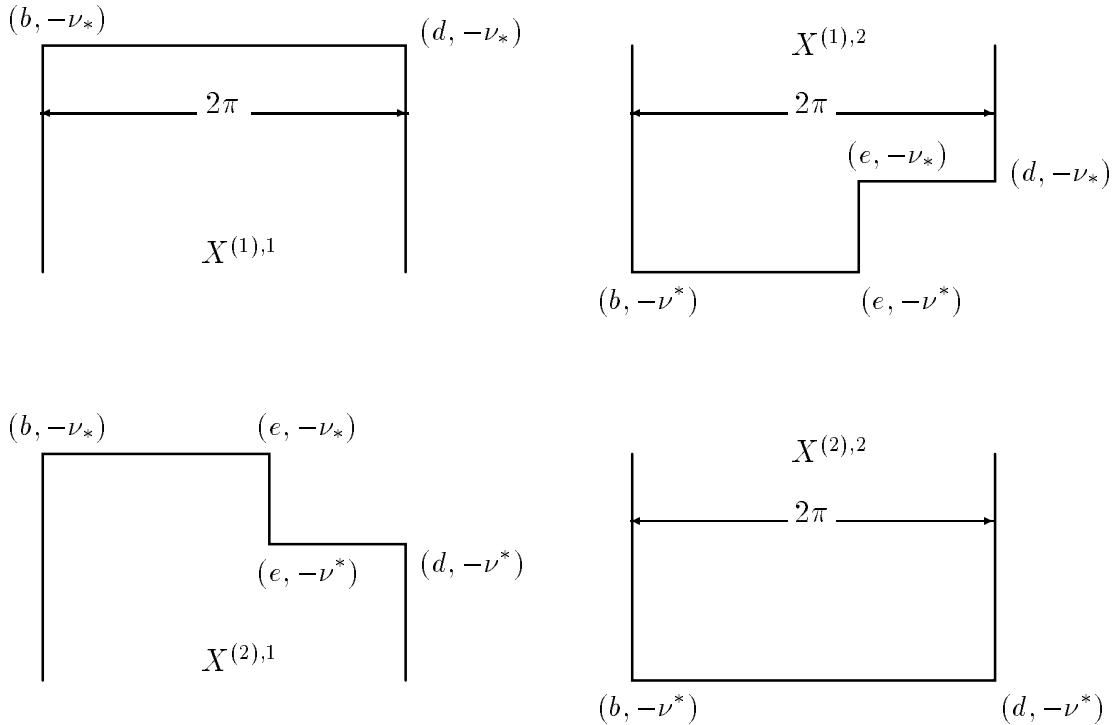


Рис. 2.2. Вспомогательные множества  $X^{(n),i}$ .

Если  $|\mu + c|/k > 1$ , то прообраз множества  $\{y : y_2 > \mu + c\}$  при отображении  $\Psi$  пуст. В этом случае множество  $S^{(1),2}$  ( $S^{(2),1}$ ) будет полуплоскостью

выше (ниже) прямой  $x_2 = -\nu^*$  ( $x_2 = -\nu_*$ ).

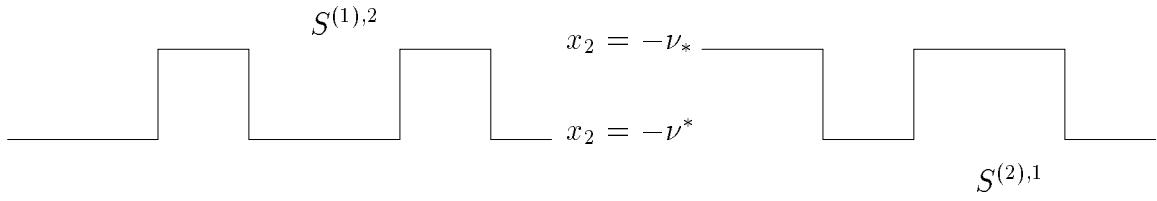


Рис. 2.3. Множества  $S^{(1),2}$ ,  $S^{(2),1}$ .

Функция  $\ell^{(n),i}(\cdot)$ ,  $n = 1, 2$ ,  $i = 1, 2$ , удовлетворяет условию Липшица в любом замкнутом ограниченном подмножестве множества  $S^{(n),i}$ . Как и в линейном случае, рассмотрим в области  $S^{(1),i}$  дифференциальное уравнение

$$\frac{dz}{d\tau} = \Pi_+ \ell^{(1),i}(z), \quad (2.2)$$

а в области  $S^{(2),i}$  – уравнение

$$\frac{dz}{d\tau} = \Pi_- \ell^{(2),i}(z). \quad (2.3)$$

Фазовые траектории максимально продолженных в множестве  $S^{(1),i}$  ( $S^{(2),i}$ ) решений уравнения (2.2) ( (2.3) ) образуют семейство  $\Phi^{(1),i}$  ( $\Phi^{(2),i}$ ) полупроницаемых кривых.

Положим

$$F = \{x \in R^2 : k \sin(x_1 + a) < \mu + c\}, \quad G = \{x \in R^2 : k \sin(x_1 + a) > \mu + c\}.$$

В случае  $|\mu + c|/k < 1$  множество  $F$  ( $G$ ) является совокупностью вертикальных полос  $F_r$  ( $G_r$ ),  $r = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , повторяющихся с периодом  $2\pi$ . Полосы определяются вертикальными прямыми

$$M_r = \{x \in R^2 : x_1 = -a + \arcsin \frac{\mu + c}{k} + 2\pi r\},$$

$$N_r = \{x \in R^2 : x_1 = -a - \arcsin \frac{\mu + c}{k} + \pi + 2\pi r\}.$$

Если  $(\mu + c)/k \leq -1$ , то  $F = \emptyset$ ,  $G = R^2$ . Если  $(\mu + c)/k \geq 1$ , то  $F = R^2$ ,  $G = \emptyset$ .

Ниже рассматриваем случай  $|\mu + c|/k < 1$  как наиболее сложный.

Полупроницаемые кривые  $p^{(n),i}$  семейства  $\Phi^{(n),i}$  можно интерпретировать как фазовые траектории системы (2.1). А именно, кривые  $p^{(1),1}$  являются фазовыми траекториями при  $u_2 = -\mu$ ,  $v_1 = \nu_*$ . Кривые  $p^{(2),2}$  есть фазовые траектории при  $u_2 = -\mu$ ,  $v_1 = \nu^*$ . Кривые  $p^{(1),2}$  – фазовые траектории при  $u_2 = \mu$ ; управление  $v_1 = \nu_*$  в множестве  $G$  и  $v_1 = \nu^*$  в множестве  $F$ . Кривые  $p^{(2),1}$  есть фазовые траектории при  $u_2 = \mu$ ; управление  $v_1 = \nu^*$  в множестве  $G$  и  $v_1 = \nu_*$  в множестве  $F$ .

Рассматриваемые полупроницаемые кривые схематично изображены на рис. 2.4. Стрелки показывают направление движения в обратном времени или, что то же самое, при увеличивающемся  $\tau$  в уравнениях (2.2), (2.3).

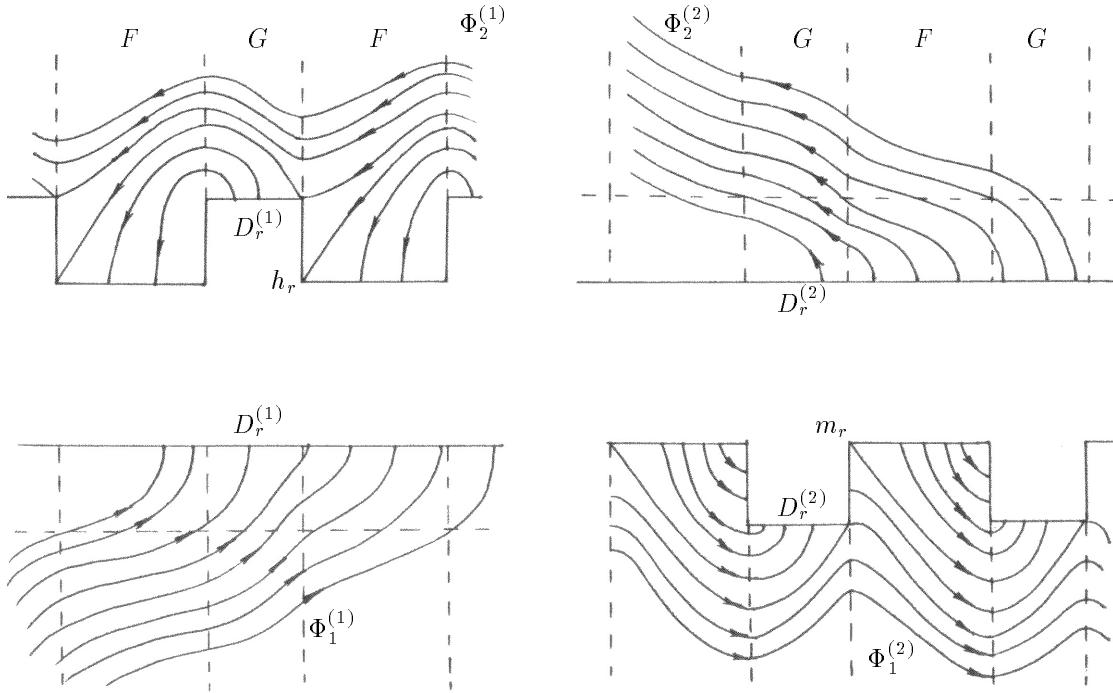


Рис. 2.4. Семейства полупроницаемых кривых.

Кривые  $p^{(1),1}$  гладко сопрягаются с кривыми  $p^{(1),2}$  на отрезках  $D_r^{(1)} = \{x :$

$x_2 = -\nu_*$ }  $\cap \text{cl}G_r$ ,  $r = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Исключение составляют точки

$$m_r = (-a - \arcsin \frac{\mu + c}{k} + \pi + 2\pi r, -\nu_*) \in D_r^{(1)} \cap N_r,$$

являющиеся особыми точками типа “седло” системы (2.1) при  $u_2 = \mu$ ,  $v_1 = \nu_*$ . Кривые  $p^{(2),1}$  гладко сопрягаются с кривыми  $p^{(2),2}$  на отрезках  $D_r^{(2)} = \{x : x_2 = -\nu^*\} \cap \text{cl}G_r$ , за исключением точек

$$h_r = (-a - \arcsin \frac{\mu + c}{k} + \pi + 2\pi r, -\nu^*) \in D_r^{(2)} \cap N_r,$$

являющихся особыми точками типа “седло” системы (2.1) при  $u_2 = \mu$ ,  $v_1 = \nu^*$ .

Множества  $S^{(n),i}$  открыты. В то же время нам понадобится говорить о полупроницаемых кривых, выходящих из некоторых точек на границе. Как показано на рис. 2.4, из каждой граничной точки множества  $S^{(n),i}$  может выходить и к каждой граничной точке может подходить не больше одной кривой семейства  $\Phi^{(n),i}$ . Таким образом, понятен смысл обозначения  $p^{(n),i}(x_*)$  при  $x_* \in \partial S^{(n),i}$ .

Для каждой точки  $m_r$  кривые  $p^{(1),2}(m_r)$  и  $p^{(2),1}(m_r)$  касаются в точке  $m_r$  инвариантной и отвечающей положительному собственному значению прямой линеаризованной вблизи положения равновесия  $m_r$  системы (2.1) при  $u_2 = \mu$ ,  $v_1 = \nu_*$ . Движение системы (2.1) по каждой из этих кривых асимптотически приближается к  $m_r$  при  $t \rightarrow \infty$ . Отметим, что для разных  $m_r$  кривые  $p^{(n),i}(m_r)$  отличаются только сдвигом вдоль оси  $x_1$  на величину  $2\pi r$ .

## 2. Алгоритм построения множества разрешимости $\mathcal{B}$ . Примеры решения задачи качества

Как и в линейном случае, алгоритм построения множества  $\mathcal{B}$  состоит в поочередном выпускании полупроницаемых кривых первого и второго типа. Основное отличие от случая комплексных корней матрицы  $A$  заключается в том, что, помимо точки  $m$ , может понадобиться выпускать полупроницаемые кривые первого и второго типа из одной или нескольких дополнительных точек, которые мы называем точками истока. Появление их обусловлено типом точек покоя системы (2.1). Множество  $\mathcal{B}$  при этом определяется всей совокупностью полупроницаемых кривых, выходящих из точки  $m$  и точек истока. В качестве точек истока в рассматриваемой задаче следует брать точки  $m_r$ .

При построении множества  $\mathcal{B}$  кривые  $p^{(1),1}$  будут склеиваться с кривыми  $p^{(1),2}$ , а кривые  $p^{(2),1}$  с кривыми  $p^{(2),2}$ . Склейка с соблюдением свойств 1),2), определяющих точку отростка (см. раздел 4 главы 1), возможна для кривых  $p^{(1),1}$ ,  $p^{(1),2}$  лишь на отрезках  $D_r^{(1)}$ , а для кривых  $p^{(2),1}$ ,  $p^{(2),2}$  – на отрезках  $D_r^{(2)}$ . При этом, как следует из качественного поведения кривых (рис. 2.4), склейка кривых первого типа будет гладкой, за исключением точек  $m_r$ , а склейка кривых второго типа – гладкой, за исключением точек  $h_r$ . Линия, получаемая в результате склейки кривых с одинаковыми первыми индексами, сохраняет свойство полупроницаемости.

Как и в линейной задаче, специальным условием [13–15] отсекается случай  $\mathcal{B} = \{m\}$ . В частности,  $\mathcal{B} = \{m\}$ , если точка  $m$  лежит в горизонтальной полосе между прямыми  $x_2 = -\nu_*$ ,  $x_2 = -\nu^*$ .

Предположим, что  $\mathcal{B} \neq \{m\}$  и опишем алгоритм построения множества  $\mathcal{B}$ . Пусть для определенности точка  $m$  лежит ниже указанной горизонтальной полосы, т.е.  $m \in S^{(1),1} \cap S^{(2),1}$ .

Вначале строим ветвь

$$g_1^{(2)} = \begin{cases} p^{(2),1}(m), & \text{если } p^{(2),1}(m) \text{ бесконечна} \\ p^{(2),1}(m, q_1^{(2)}) \cup p^{(2),2}(q_1^{(2)}), & \text{если } p^{(2),1}(m) \text{ конечна.} \end{cases}$$

Символом  $q_1^{(2)}$  обозначена точка отростка на кривой  $p^{(2),1}(m)$ . Точка  $q_1^{(2)}$  совпадает с последней точкой на кривой  $p^{(2),1}(m)$  и принадлежит отрезку  $D_r^{(2)}$ .

Далее ветви кривых  $g^{(1)}$ ,  $g^{(2)}$  строятся поочередно:  $g_1^{(1)}, g_2^{(2)}, g_2^{(1)}, \dots$ . Ветви  $g_1^{(1)}$ ,  $g_2^{(1)}$  связаны с точкой  $m$ :  $g_1^{(1)} = p^{(1),1}(m, q_2^{(1)})$ ,  $g_2^{(1)} = p^{(1),2}(q_2^{(1)})$ . Здесь символом  $q_2^{(1)}$  обозначена точка отростка на кривой  $p^{(1),1}(m)$ . Точка  $q_2^{(1)}$  совпадает с последней точкой кривой  $p^{(1),1}(m)$ , если эта точка принадлежит отрезку  $D_r^{(1)}$ . В противном случае точка отростка на кривой  $p^{(1),1}(m)$  не существует (считаем  $g_2^{(1)} = \emptyset$ .)

Перейдем к кривым, порождаемым точками  $m_r$ . Нам понадобятся лишь те точки, которые расположены слева от последней точки на кривой  $g_1^{(1)}$ . Занумеруем их справа налево:  $m_1, m_2, \dots$ . Для кривых первого типа при  $j \geq 3$  положим

$$g_j^{(1)} = \begin{cases} p^{(1),2}(m_{\frac{j-2}{2}}), & j-\text{четно} \\ \emptyset, & j-\text{нечетно.} \end{cases}$$

Для кривых второго типа примем при  $j \geq 2$

$$g_j^{(2)} = \begin{cases} p^{(2),1}(m_{\frac{j}{2}}), & j-\text{четно} \\ p^{(2),2}(q_j^{(2)}), & j-\text{нечетно и существует точка отростка } q_j^{(2)} \\ \emptyset, & j-\text{нечетно и не существует точка отростка } q_j^{(2)}. \end{cases}$$

Таким образом, кривые первого типа, выпускаемые из точек  $m_r$ , принадлежат семейству  $\Phi^{(1),2}$  и не имеют точек отростка. Кривые второго типа, выпускаемые из точек  $m_r$ , могут иметь точку отростка. В последнем случае кривая семейства  $\Phi^{(2),1}$  продолжается кривой семейства  $\Phi^{(2),2}$ .

При построении очередной ветви  $g_j^{(1)}$ ,  $j \geq 1$ , проверяется ее пересечение с одной или двумя построенными ранее кривыми второго типа. Если пересечение есть ( $\alpha$ -пересечение), то построение ветви  $g_j^{(1)}$  после точки пересечения прекращается. При построении каждой очередной ветви  $g_j^{(2)}$ ,  $j \geq 2$ , проверяется ее пересечение с одной из построенных ранее кривых первого типа. А именно, в случае четного номера  $j$  проверяется пересечение с  $g_1^{(1)}$ , в случае нечетного  $j$  – с  $g_{j-1}^{(1)}$ . Если пересечение есть ( $\xi$ -пересечение), то построение линии  $g_j^{(2)}$  прекращается.

В наиболее простых случаях множество  $\mathcal{B}$  определяется лишь кривыми, выпущенными из точки  $m$ . Перечислим такие случаи:

- a) если при построении кривой  $g_1^{(1)}$  или  $g_2^{(1)}$  зафиксировано  $\alpha$ -пересечение с кривой  $g_1^{(2)}$ , то множество  $\mathcal{B}$  ограничено кривыми первого и второго типа, построенными от точки  $m$  до точки  $\alpha$ -пересечения (рис. 2.5);
- b) если кривая  $g_2^{(1)}$  бесконечна и не имеет общих точек с кривой  $g_1^{(2)}$ , то множество  $\mathcal{B}$  заключено между кривыми первого и второго типа, выходящими из точки  $m$  (рис. 2.6–2.8). В этом случае множество  $\mathcal{B}$  бесконечно, но не совпадает со всей плоскостью.

На рис. 2.6–2.8 показаны три варианта множества  $\mathcal{B}$ . В каждом из них  $g^{(1)}, g^{(2)}$  – гладкие бесконечные кривые. Различие вариантов обусловлено видом отрезка  $Q$ .

Отметим некоторую аналогию рис. 2.5 с рис. 1.3 главы 1, а рис. 2.6–2.8 – с рис. 1.6.

Возможна ситуация, когда кривая  $g_1^{(1)}$  не имеет точки отростка (рис. 2.9), либо имеет, но кривая  $g_2^{(1)}$  конечна (рис. 2.10). При этом нет  $\alpha$ -пересечения этих кривых с кривой  $g_1^{(2)}$ . В случае линейной системы с комплексными корнями подобная конфигурация кривых сразу бы определяла вид множества  $\mathcal{B}$ . (Множество  $\mathcal{B}$  было бы либо ограничено предельным циклом кривой  $g^{(2)}$ , либо, если предельного цикла нет, совпадало со всей плоскостью.) В исследуемой нелинейной задаче ответ более сложен: необходимо привлечь полупроникаемые кривые первого и второго типа, выходящие из точек  $m_r$ . Именно это делается в алгоритме.

В примере на рис. 2.9 дальнейшие построения следующие. Строим кри-

вую  $g_2^{(2)}$  из точки  $m_1$ , она дает  $\xi$ -пересечение с кривой  $g_1^{(1)}$ . Поскольку  $g_2^{(1)} = \emptyset$ ,  $g_3^{(2)} = \emptyset$ ,  $g_3^{(1)} = \emptyset$ , переходим к построению кривой  $g_4^{(2)}$  из точки  $m_2$ . Далее строим кривую  $g_4^{(1)}$  из точки  $m_1$ . Она бесконечна. Множество  $\mathcal{B}$  ограничено кривыми  $g_1^{(2)}(m)$ ,  $g_1^{(1)}(m, \xi_1)$ ,  $g_2^{(2)}(m_1, \xi_1)$ ,  $g_4^{(1)}(m_1)$ . Кривая  $g_4^{(2)}$  была построена, но не вошла в ответ.

Разъясним построения в примере на рис. 2.10. Построив кривые  $g_1^{(2)}$ ,  $g_1^{(1)}$ , выпускаем  $g_2^{(2)}$  из точки  $m_1$ . Она имеет  $\xi$ -пересечение с кривой  $g_1^{(1)}$ . Затем выпускаем кривую  $g_2^{(1)}$ . Она имеет  $\alpha$ -пересечение с  $g_2^{(2)}$ . Далее строится кривая  $g_4^{(2)}$  из точки  $m_2$ , затем кривая  $g_4^{(1)}$  из точки  $m_1$ . Кривая  $g_4^{(1)}$  имеет  $\alpha$ -пересечение с  $g_4^{(2)}$ . Граница множества  $\mathcal{B}$  составляется кривыми  $g_1^{(2)}(m)$ ,  $g_1^{(1)}(m, q_2^{(1)})$ ,  $g_2^{(2)}(m_1, \alpha_{1*})$ ,  $g_2^{(1)}(q_2^{(1)}, \alpha_{1*})$ ,  $g_4^{(2)}(m_2, \alpha_{2*})$ ,  $g_4^{(1)}(m_1, \alpha_{2*})$ , а также кривыми  $g_{4+2\kappa}^{(2)}(m_{2+\kappa}, \alpha_{(2+\kappa)*})$ ,  $g_{4+2\kappa}^{(1)}(m_{1+\kappa}, \alpha_{(2+\kappa)*})$ ,  $\kappa = 1, 2, \dots$ , получаемыми переносом кривых  $g_4^{(2)}(m_2, \alpha_{2*})$ ,  $g_4^{(1)}(m_1, \alpha_{2*})$  вдоль оси  $x_1$  влево на величину  $2\pi\kappa$ .

Примеры на рис. 2.5–2.10 построены на компьютере. Другие возможные варианты множества  $\mathcal{B}$  показаны на рис. 2.11, 2.12. В первом из них граница множества  $\mathcal{B}$  описывается с привлечением лишь одной точки истока  $m_1$ . Во втором число задействованных точек истока  $m_i$  бесконечно (так же, как для примера на рис. 2.10). В работах [16, 17] указаны все возможные конфигурации множества  $\mathcal{B}$  (всего 19 вариантов) для случая, когда точка  $m$  лежит ниже прямой  $x_2 = -\nu^*$ . В этих же работах представлены виды множества  $\mathcal{B}$  для случая, когда  $m$  лежит выше линии  $x_2 = -\nu_*$ . Два из них показаны на рис. 2.13, 2.14.

Множество  $\mathcal{B}$  успешного окончания игры не обязательно замкнуто. Ему принадлежат те и только те граничные точки  $\hat{x}$ , которые удовлетворяют одному из следующих условий: а) точка  $\hat{x}$  не является точкой  $\alpha$  или  $\xi$ -пересечения граничных кривых, и при движении из нее по граничным кривым как по траекториям системы (2.1) в прямом времени не попадаем в особые точки  $m_r, h_r$ ; б) точка  $\hat{x}$  совпадает с точкой  $\alpha$ -пересечения граничных кривых, и при движении по каждой из кривых как по траектории системы (2.1) нет попадания в особые точки; в) точка  $\hat{x}$  совпадает с точкой  $\xi$ -пересечения граничных кривых, и при движении по кривой первого типа как по траектории системы (2.1) нет попадания в особую точку.

В примерах на рис. 2.9–2.12, 2.14 множество  $\mathcal{B}$  незамкнуто. Так, на рис. 2.10 множеству  $\mathcal{B}$  не принадлежит кривая  $\alpha_{1*}m_1\alpha_{2*}m_2\alpha_{3*}m_3\dots\alpha_{\kappa*}m_{\kappa}\dots$ .

Примеры множества  $\mathcal{B}$  в нелинейной игре

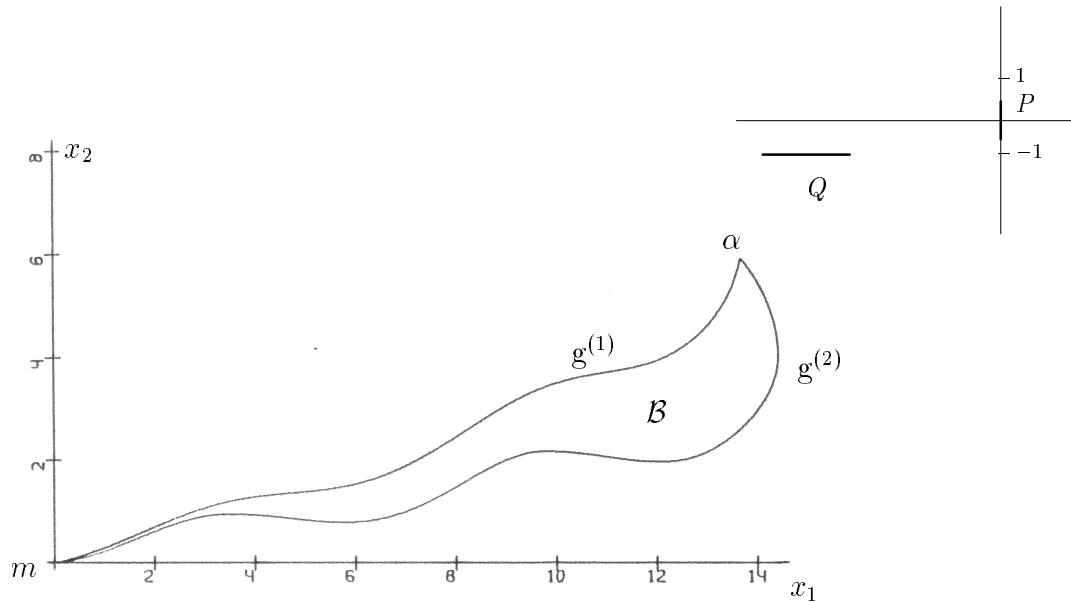


Рис. 2.5.

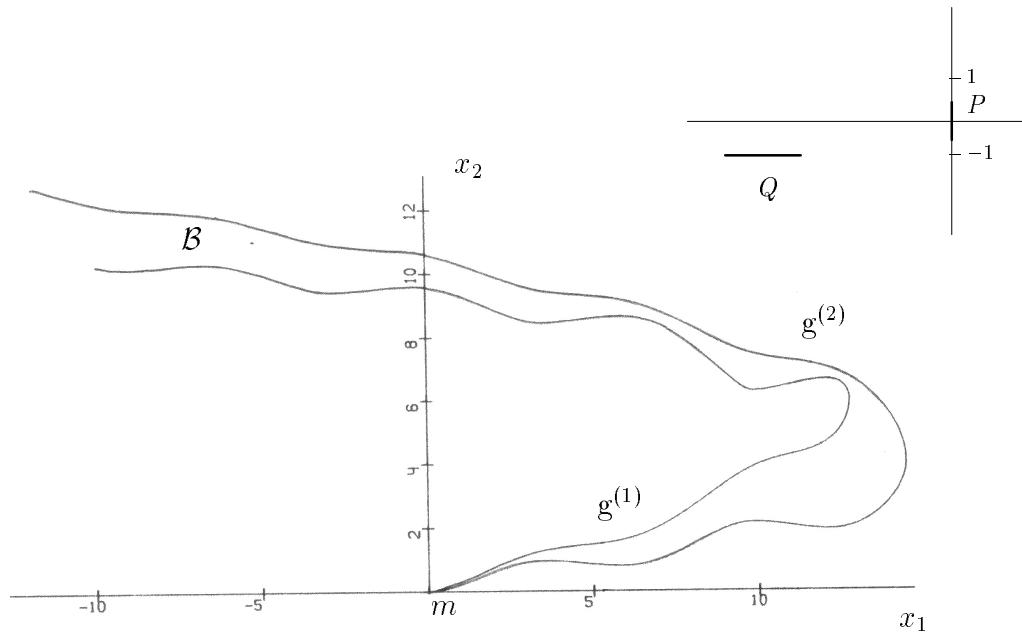


Рис. 2.6.

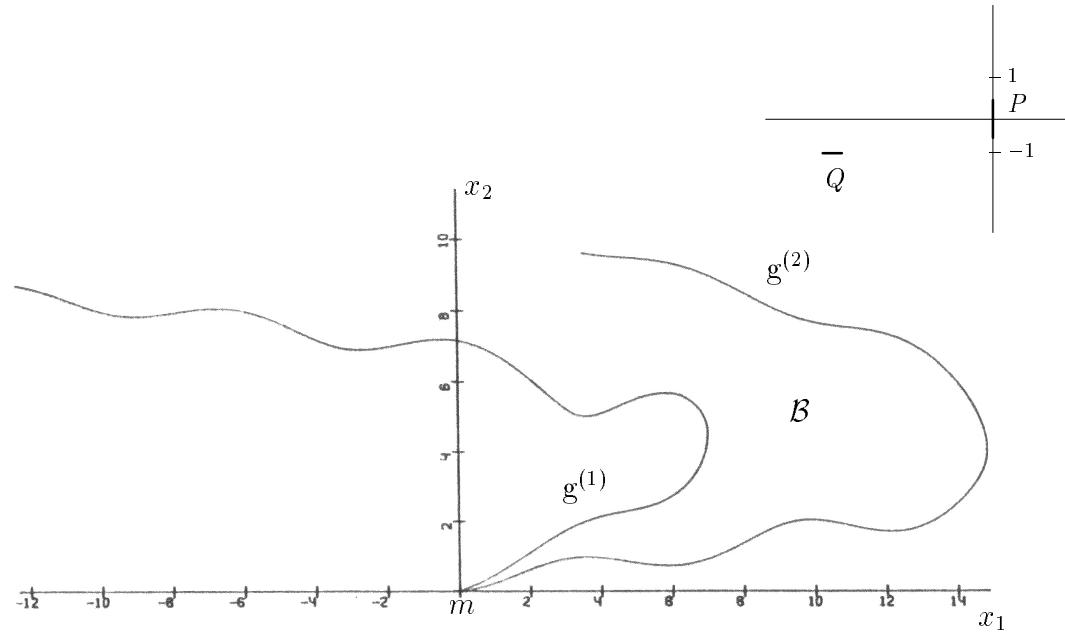


Рис. 2.7.

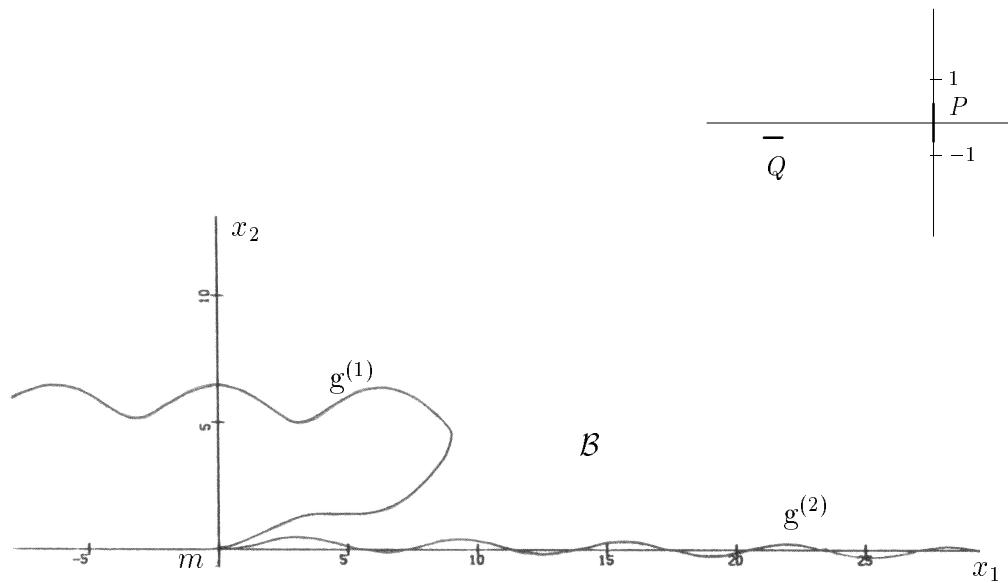


Рис. 2.8.

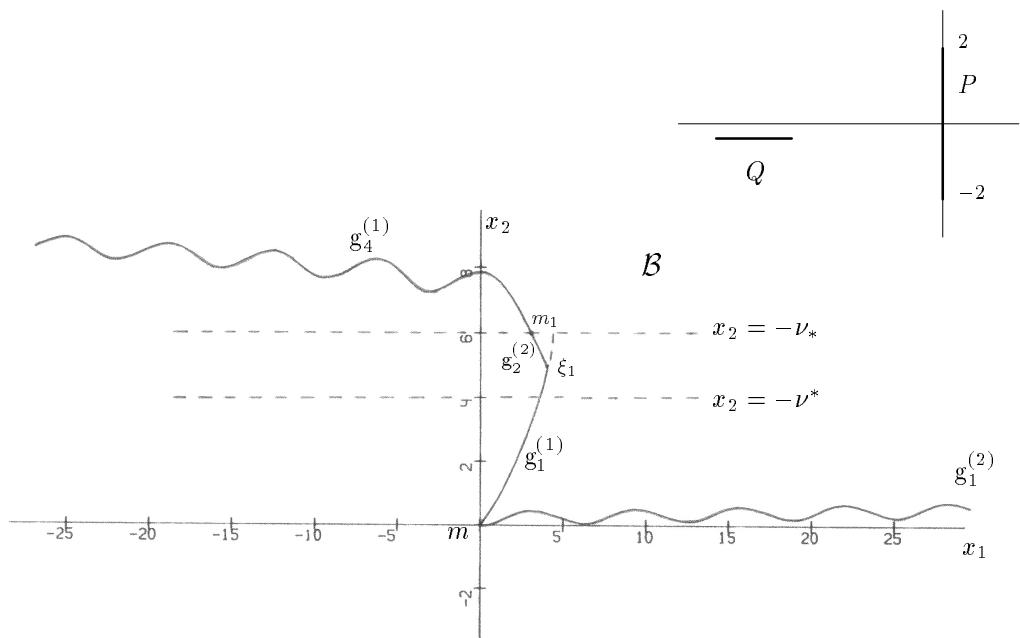


Рис. 2.9.

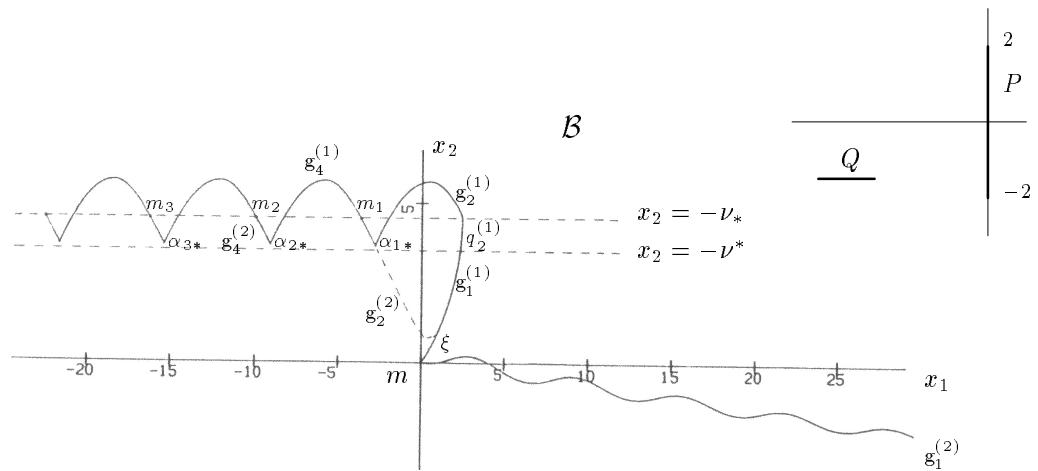


Рис. 2.10.

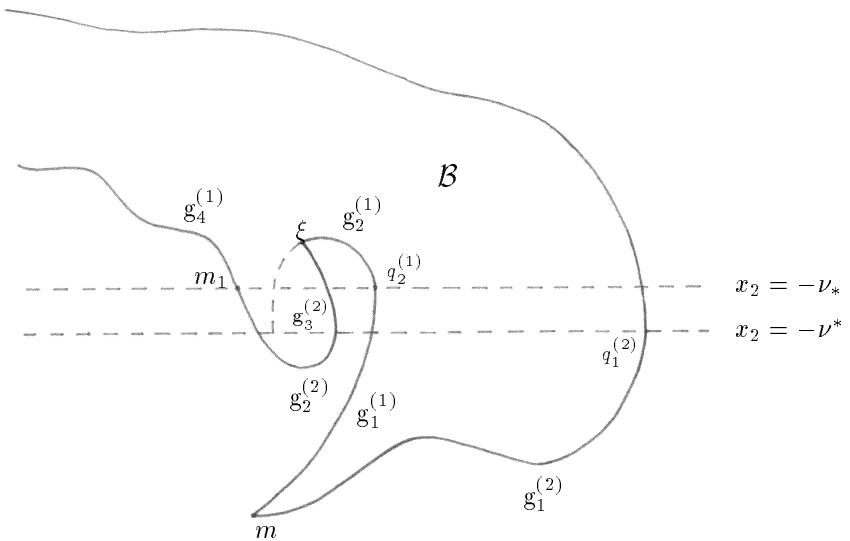


Рис. 2.11.

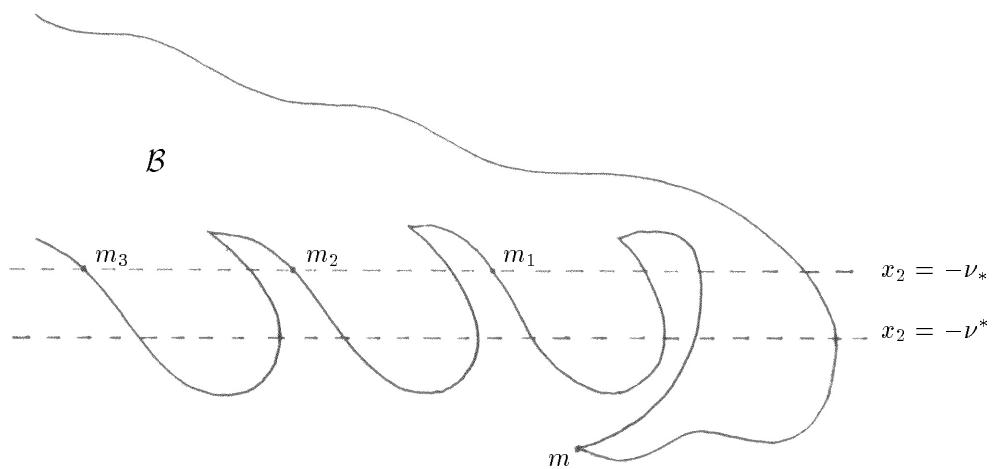


Рис. 2.12.

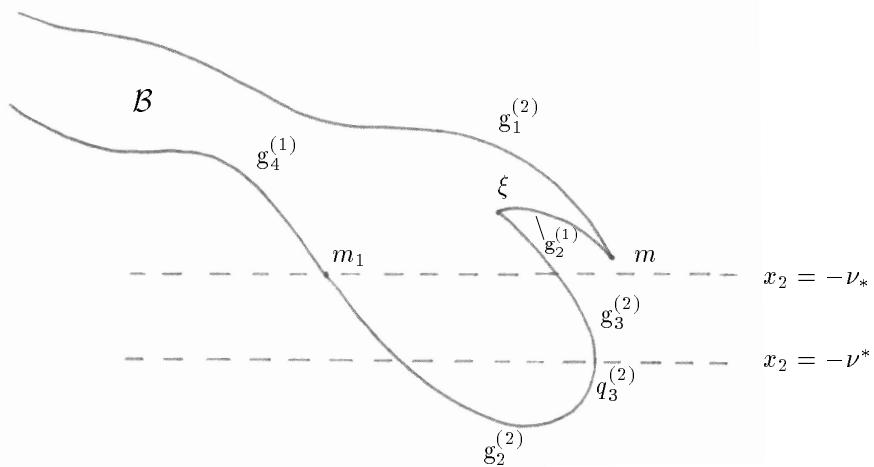


Рис. 2.13.

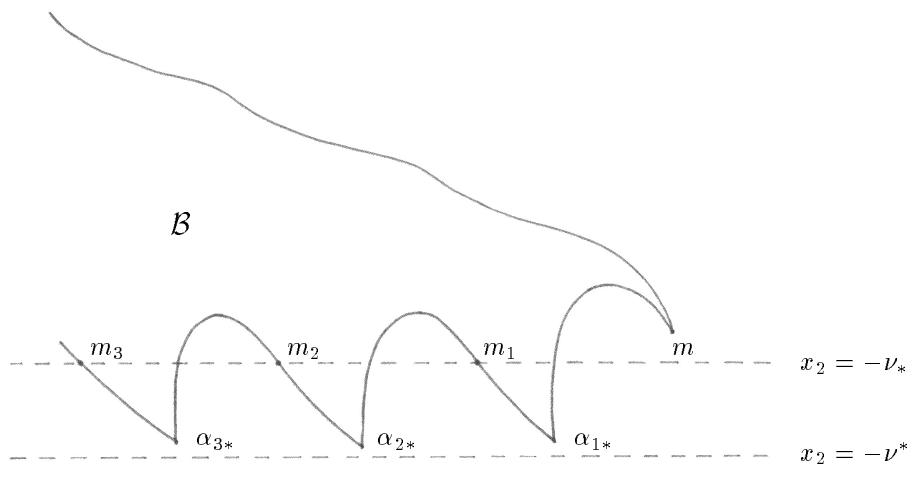


Рис. 2.14.

### 3. Управления первого и второго игроков

Поскольку не ставится задача отыскания оптимального по времени управления, перевод в точку  $t$  может быть осуществлен различными способами. Удобно определить способ управления первого игрока как экстремальную стратегию к замыканию специального пучка движений  $Y(x_0)$ , выходящего из точки  $x_0$  в момент  $t_0 = 0$ , обладающего свойством  $u$ -стабильности и обрывающегося в точке  $t$  к некоторому моменту  $\theta$  (зависящему от  $x_0$ ). Используемые нами понятия стабильности, экстремальной стратегии изложены в [2, 3].

Нахождение пучка с нужными свойствами использует [16, 17] разбиение замыкания множества  $\mathcal{B}$  на “ячейки”  $\Lambda_\kappa$ , определяемые при помощи возрастающей последовательности множеств  $A_\kappa$ :

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_\kappa \subseteq \dots, \quad A_\kappa \subseteq \text{cl}\mathcal{B}, \quad \kappa = 1, 2, \dots$$

Построение последовательности множеств  $A_\kappa$  иллюстрируется рис. 2.15, 2.16. В некоторых случаях множества с соседними индексами могут совпадать. Последовательность  $\{A_\kappa\}$  на рис. 2.15 отвечает множеству  $\mathcal{B}$  на рис. 2.11. При этом  $A_4 = \text{cl}\mathcal{B}$ . На рис. 2.16 показаны множества  $A_1, A_2 = A_3, A_4 = A_5$  бесконечной последовательности  $\{A_\kappa\}$ , отвечающей множеству  $\mathcal{B}$  на рис. 2.10. В общем случае граница множества  $A_\kappa$  составляется из полупроницаемых кривых первого и второго типа, а также вспомогательных вертикальных прямых. Если  $\text{cl}\mathcal{B}$  не содержит в себе точек  $t_i, i = 2, 3, \dots$ , то  $A_\kappa = \text{cl}\mathcal{B}$  при некотором  $\kappa \leq 4$ . В противном случае последовательность  $\{A_\kappa\}$  является бесконечной, возрастающей и стремится к  $\text{cl}\mathcal{B}$  при  $\kappa \rightarrow \infty$ .

Ячейки  $\Lambda_\kappa$  определяются по правилу:  $\Lambda_1 = \text{cl}A_1, \Lambda_\kappa = \text{cl}(A_\kappa \setminus A_{\kappa-1}), \kappa \geq 2$ . Если  $A_\kappa = A_{\kappa-1}$ , то  $\Lambda_\kappa = \emptyset$ . Различные ячейки могут пересекаться лишь участками своих границ. На рис. 2.17, 2.18 показано соответствующее рис. 2.15, 2.16 разбиение на ячейки. В ячейках с четными номерами полагаем  $u_2 = \mu$ , в ячейках с нечетными номерами  $u_2 = -\mu$ . При таком задании ни при каком управлении  $v_1$  не происходит зануления скорости системы (2.1) во внутренних точках ячеек.

Идея построения пучка движений с нужными свойствами стабильности состоит в следующем. Определяется наименьшее  $\kappa_*$ , при котором  $x_0 \in \Lambda_{\kappa_*}$ , и рассматриваются ячейки с номерами, не превышающими  $\kappa_*$ . Во всех ячейках с четными (нечетными) номерами первый игрок применяет постоянное управление  $u_2 = \mu$  ( $u_2 = -\mu$ ) с некоторыми особенностями выбора управле-

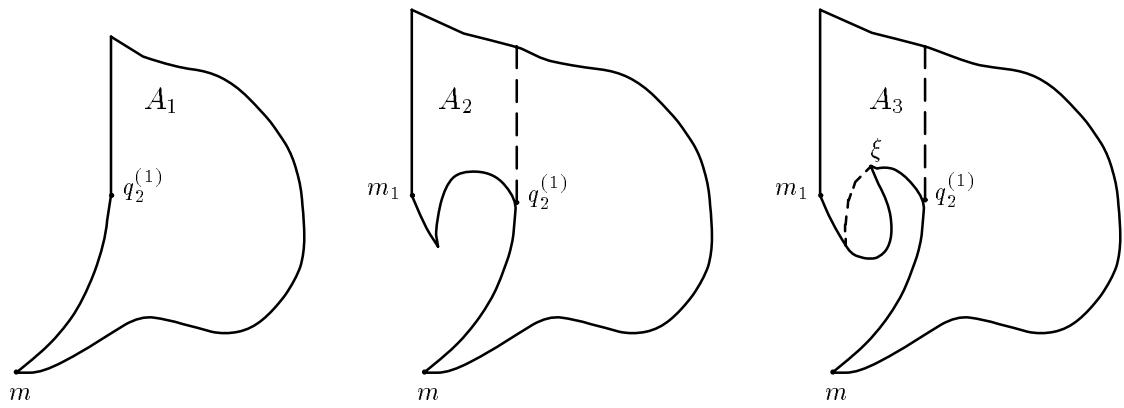


Рис. 2.15. Построение вспомогательных множеств  $A_\kappa$ .

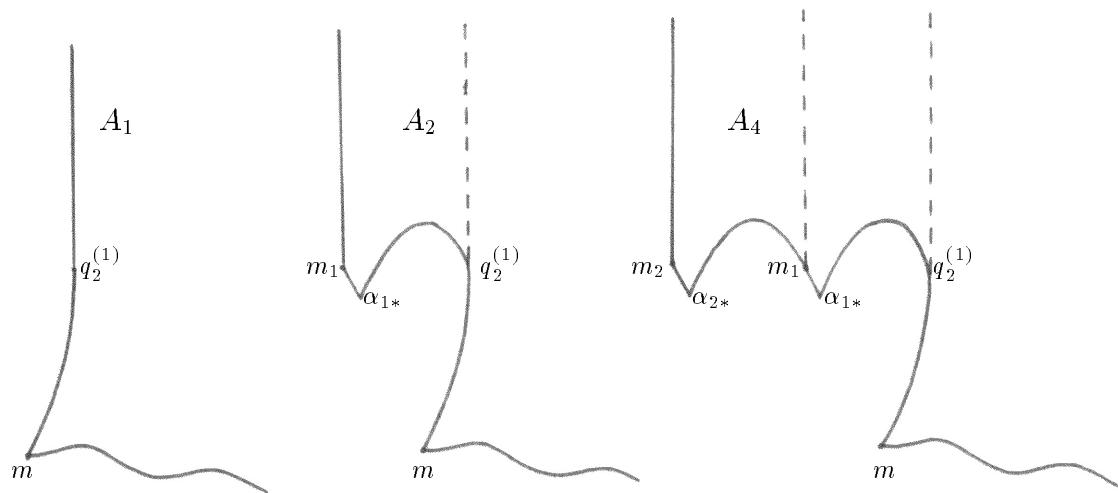


Рис. 2.16. Построение вспомогательных множеств  $A_\kappa$ .  
Случай бесконечного числа точек истока  $m_i$ .

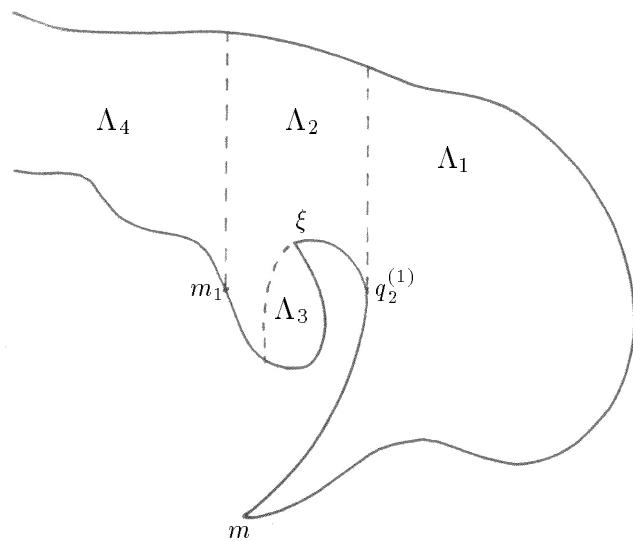


Рис. 2.17. Разбиение множества  $\mathcal{B}$  на ячейки  $\Lambda_\kappa$ .

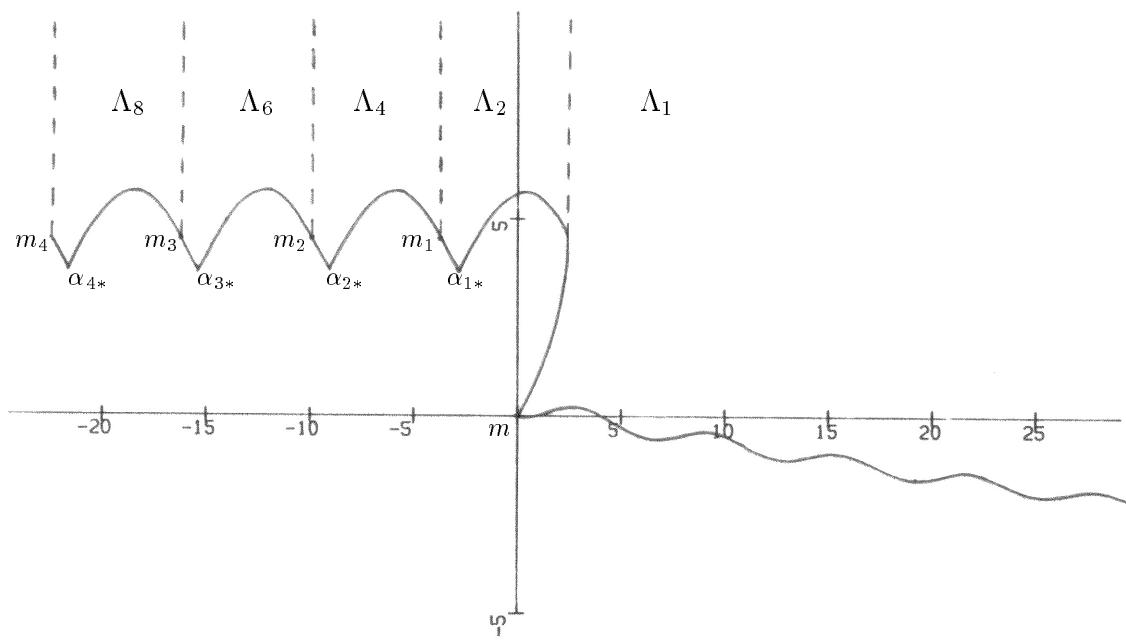


Рис. 2.18. Разбиение множества  $\mathcal{B}$  на ячейки  $\Lambda_\kappa$ .  
Случай бесконечного числа точек истока  $m_i$ .

ния вблизи границы ячейки. А именно, если движение системы (2.1) в силу  $u_2 = \mu$  ( $u_2 = -\mu$ ) выходит на часть границы ячейки, которая не принадлежит одновременно ячейке с меньшим номером, то управление  $u_2$  переключается на противоположное по знаку и держится постоянным до выхода на некоторую вспомогательную линию отслеживания, построенную вблизи указанной части границы ячейки. Затем опять происходит переключение на  $u_2 = \mu$  ( $u_2 = -\mu$ ) и так далее, т.е. может возникать скольжение вблизи границы ячейки. Такое правило выбора управления обеспечивает переход из ячейки  $\Lambda_k$  в ячейку  $\Lambda_s$  с номером  $s < k$ . Для каждого конкретного движения, начинающегося из одной и той же точки  $x_0$ , последовательность проходимых ячеек может быть своеи (в зависимости от реализующейся помехи  $v_1(\cdot)$ ), однако номера ячеек вдоль движения обязательно убывают. В некоторых случаях для осуществления дальнейшего движения к  $t$  требуется дискриминация второго игрока: управление первого строится не только как функция текущего состояния, но и в зависимости от “показанного” на некоторый малый интервал вперед значения управления  $v_1(t)$ . Пучок движений  $Y(x_0)$  из точки  $x_0 \in \mathcal{B}$  определяем как совокупность всех движений системы (2.1), получающихся при описанном правиле поведения первого игрока и переборе всех управлений  $v_1(\cdot)$  второго.

В работах [16, 17] показано, как строится для начальных состояний из множества  $R^2 \setminus \mathcal{B}$  стратегия второго игрока, уклоняющая движение от попадания в точку  $t$ .

Разобранный пример с нелинейной динамикой демонстрирует возможность нахождения множества разрешимости в задаче качества на основе предварительного анализа поведения семейств полупроницаемых кривых первого и второго типа.

## Глава 3

### Игровая задача быстродействия

Предыдущие главы были посвящены построению множества разрешимости в задаче качества. Точки множества разрешимости в задаче качества характеризуются свойством: первый игрок гарантирует приведение системы на терминальное множество за конечное время. При этом остается открытым вопрос об оптимальном гарантированном времени перевода.

В этой главе рассмотрим игровую задачу быстродействия на плоскости. Платой в игре является время перевода на заданное терминальное множество  $M$ . Первый игрок заинтересован в минимизации времени перевода, второй игрок максимизирует время перевода. Решение задачи будет получено путем построения множеств  $W(\theta, M)$ ,  $\theta > 0$ , каждое из которых есть множество всех начальных состояний, откуда первый игрок гарантирует приведение системы на  $M$  не позднее момента  $\theta$ . Множество  $W(\theta, M)$  представляет собой множество уровня (множество Лебега) функции цены в игровой задаче быстродействия. Оно также называется множеством позиционного поглощения к моменту  $\theta$  или сечением максимального  $u$ -стабильного моста, соответствующего моменту  $\theta$  [2, 3]. В пределе при  $\theta \rightarrow \infty$  множество  $W(\theta, M)$  переходит в множество разрешимости для соответствующей задачи качества.

При построении множеств  $W(\theta, M)$  используются попятные конструкции. Общие принципы попятных построений применительно к дифференциальным играм рассматривались в работах Р.Айзекса, Р.Беллмана, У.Флеминга, Л.С.Понtryгина, Б.Н.Пшеничного.

Наибольшее продвижение в алгоритмической реализации попятных построений получено для линейных задач с фиксированным моментом окончания [18–25]. Главные особенности, характерные для этих задач: 1) выпуклость терминального множества влечет за собой выпуклость  $t$ -сечений максимального стабильного моста; 2) если множество  $M$  является цилиндрическим по всем координатам, кроме нескольких  $k$  координат, то можно понизить размерность задачи переходом к эквивалентной игре  $k$ -го порядка. Последнее обстоятельство позволяет применять численные методы к важным практическим задачам [26–30].

Для игр с нефиксированным временем окончания отмеченные выше осо-

бенности не имеют места: сечения максимального стабильного моста, как правило, не являются выпуклыми; пропадает возможность понижения порядка задачи стандартным приемом. Методы численного решения невыпуклых задач с фиксированным моментом окончания, а также задач, где момент окончания не является фиксированным, развиваются в работах В.Н.Ушакова и его сотрудников [31–34]. Описываемый ниже алгоритм построения множеств  $W(\theta, M)$  представляет собой попытку использования идей алгоритмов с фиксированным моментом окончания из [19, 20] и опирается на работу с ломаными, аналогичными участкам границы выпуклых множеств.

Множества  $W(\theta, M)$  могут служить основой для построения оптимальных стратегий первого и второго игроков в задаче быстродействия [2, 3]. Тем не менее вопрос о нахождении оптимальных стратегий является самостоятельным, и мы не рассматриваем его в данной работе.

Применяемые нами попятные конструкции не связаны напрямую с анализом сингулярных линий [1] в дифференциальной игре. Решение дифференциальных игр при помощи построения сингулярных многообразий – самостоятельная область исследований [1, 35–37].

## 1. Постановка задачи

Рассматривается линейная дифференциальная игра второго порядка

$$\dot{x} = Ax + u + v \quad (3.1)$$

с геометрическими ограничениями  $u \in P$ ,  $v \in Q$ , где  $P$ ,  $Q$  – выпуклые замкнутые многоугольники на плоскости.

Заданы момент  $\theta > 0$  и выпуклый замкнутый многоугольник  $M \subset R^2$ . Требуется построить множество  $W(\theta, M)$  всех точек на плоскости, откуда первый игрок, используя управление обратной связи, может привести систему (3.1) на множество  $M$  к моменту  $\theta$ .

Дадим строгое определение множества  $W(\theta, M)$  [2, 3]. Пусть  $\mathcal{U}$  – совокупность всех позиционных стратегий  $U$  первого игрока, а именно, множество всех функций, заданных на  $[0, \theta] \times R^2$  со значениями в  $P$ . Пусть  $\sigma$  – произвольное разбиение отрезка  $[0, \theta]$  точками  $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_n = \theta$ ,  $d(\sigma)$  – диаметр разбиения,  $v(\cdot)$  – измеримая функция времени со значениями в

$Q$ ,  $y(\cdot; \sigma, x_0, U, v(\cdot))$  – ломаная Эйлера, выходящая из точки  $x_0$ . Определим  $W(\theta, M)$  как множество всех точек  $x_0 \in R^2$ , для каждой из которых существует стратегия  $U \in \mathcal{U}$  и отображение  $\varepsilon \rightarrow \delta(\varepsilon)$  из  $R_+$  в  $R_+$ , обладающие свойством: каковы бы ни были  $\varepsilon > 0$ , разбиение  $\sigma$  с диаметром  $d(\sigma) \leq \delta(\varepsilon)$  и функция  $v(\cdot)$  со значениями в  $Q$ , найдется момент  $t \in [0, \theta]$ , такой, что  $y(t; \sigma, x_0, U, v(\cdot))$  будет принадлежать  $\varepsilon$ -окрестности множества  $M$ .

В следующем разделе приведем краткую схему алгоритма приближенного построения множества  $W(\theta, M)$ . Более подробное изложение содержится в [17, 38].

## 2. Основная идея алгоритма

Множество  $W(\theta, M)$  получается путем последовательного построения в обратном времени с шагом  $\Delta$  цепочки

$$W(\Delta, M) \subset W(2\Delta, M) \subset W(3\Delta, M) \subset \dots \subset W(i\Delta, M) \subset \dots \subset W(\theta, M) \quad (3.2)$$

вложенных друг в друга множеств. Множество  $W(i\Delta, M)$  содержит все точки, из которых первый игрок переводит систему (3.1) на множество  $W((i-1)\Delta, M)$  за время, не превышающее  $\Delta$ . Считаем  $W(0, M) = M$ .

Перед осуществлением первого шага выделяем на границе множества  $M$  допустимую зону  $\Gamma_0$ . Согласно Р.Айзексу [1], допустимая зона представляет собой кривую или несколько кривых на границе  $M$ , куда первый игрок обеспечивает перевод системы (3.1) из близких к границе точек, лежащих вне  $M$ . Допустимая зона задается формулой

$$\Gamma_0 = \text{cl}\{x \in \partial M : \min_{u \in P} \max_{v \in Q} \langle \ell, Ax + u + v \rangle < 0, \forall \ell \in K_x\}.$$

Здесь  $K_x$  – конус внешних нормалей к множеству  $M$  в точке  $x$ . Поскольку терминальное множество выпукло, то каждый участок допустимой зоны есть “локально-выпуклая” кривая: при ее обходе нормали врашаются в одну сторону.

Введем понятие фронта. Полагаем  $F_0 = \Gamma_0$ . Фронт  $F_i$  есть совокупность всех точек на границе множества  $W(i\Delta, M)$ , для которых оптимальное гарантированное время перевода на предыдущий фронт  $F_{i-1}$  (а стало быть, на множество  $W((i-1)\Delta, M)$ ) в точности равно  $\Delta$ . Для остальных точек на границе

$W(i\Delta, M)$  оптимальное время перевода на  $W((i-1)\Delta, M)$  меньше  $\Delta$ . Таким образом, линия  $\partial W(i\Delta, M) \setminus F_i$  обладает барьерным [1] свойством. Фронт  $F_i$  строится на основе предыдущего фронта  $F_{i-1}$ . Соединение соответствующих крайних точек нового и старого фронтов дает приращение барьерной линии. Граница множества  $W(i\Delta, M)$  складывается из фронта  $F_i$ , указанных приращений барьерных линий и линии  $\partial W((i-1)\Delta, M) \setminus F_{i-1}$  (рис. 3.1).

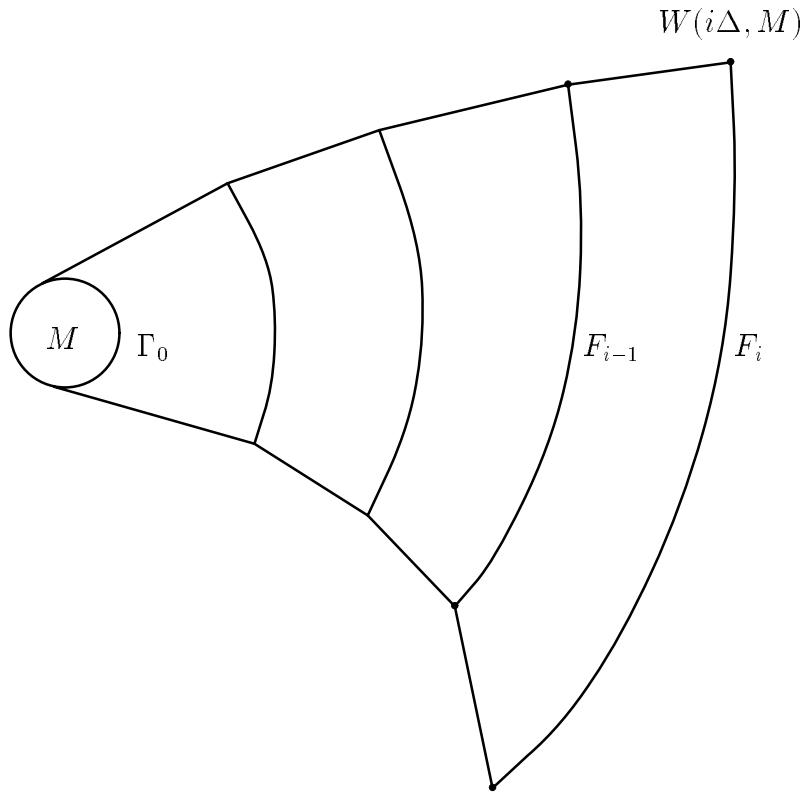


Рис. 3.1. Построение множества  $W(i\Delta, M)$ .

Предположим, что допустимая зона состоит из одного участка. В силу линейности системы (3.1) свойство локальной выпуклости  $\Gamma_0$  наследуется в виде локальной выпуклости фронтов  $F_1, F_2, F_3, \dots$  и сохраняется до тех пор, пока вновь выстраиваемый фронт  $F_i$  не попадет на уже построенное множество  $W((i-1)\Delta, M)$ . “Налетание” может происходить лишь на барьерную

часть границы множества  $W((i - 1)\Delta, M)$ . Во многих примерах ситуация налетания либо вообще не возникает, либо возникает при достаточно больших значениях  $i\Delta$ . Свойство локальной выпуклости фронта позволяет использовать с небольшими изменениями процедуры построения сечений максимальных стабильных мостов в линейных дифференциальных играх с фиксированным моментом окончания и выпуклым терминальным множеством. На рис. 3.2 показаны результаты построения цепочки множеств (3.2) при отсутствии налетания. Линии  $ab$ ,  $cd$  являются барьерами.

На рис. 3.3 приведены построения в случае, когда есть ситуация налетания. Пусть фронт  $F_i$  попадает на множество  $W((i - 1)\Delta, M)$ . Для построения очередного фронта следует учитывать невыпуклое сочленение  $F_i$  с границей множества  $W((i - 1)\Delta, M)$ . Вновь выстраиваемый фронт  $F_{i+1}$  уже не обязательно будет локально-выпуклым.

Барьерная часть множества  $W(i\Delta, M)$  хранится в виде упорядоченного набора точек. До возникновения ситуации налетания, а также в некоторых простых случаях налетания перестройка такого набора осуществляется несложно. Программа не рассчитана на сложные ситуации налетания, обработка которых требует значительного перебора.

Если допустимая зона на терминальном множестве состоит из нескольких кусков, то можно проводить построения от каждого из них независимо до тех пор, пока не произойдет взаимного пересечения получаемых в результате множеств.

Таким образом, в целом алгоритм включает в себя следующие основные блоки:

- 1) Выделение допустимой зоны на границе терминального множества.
- 2) Построение очередного фронта на основе предыдущего.
- 3) Проверка пересечения очередного фронта с барьерной частью уже построенного множества. Дальнейшие построения с учетом невыпуклого сочленения.

Приведем алгоритм построения фронта. Предположим, что построен очередной фронт  $F_i$  и опишем правило построения фронта  $F_{i+1}$ . Для простоты будем считать, что множества  $P$  и  $Q$  – отрезки на плоскости.

Рассмотрим сначала случай, когда ситуация налетания отсутствует. Фронт  $F_i$  есть ломаная на границе множества  $W(i\Delta, M)$ , обладающая свойством локальной выпуклости: при обходе вершин ломаной в направлении по часовой стрелке нормали к звеньям ломаной вращаются также по часовой стрелке. Пронумеруем по порядку вершины ломаной  $F_i$  и обозначим их  $z_1$ ,

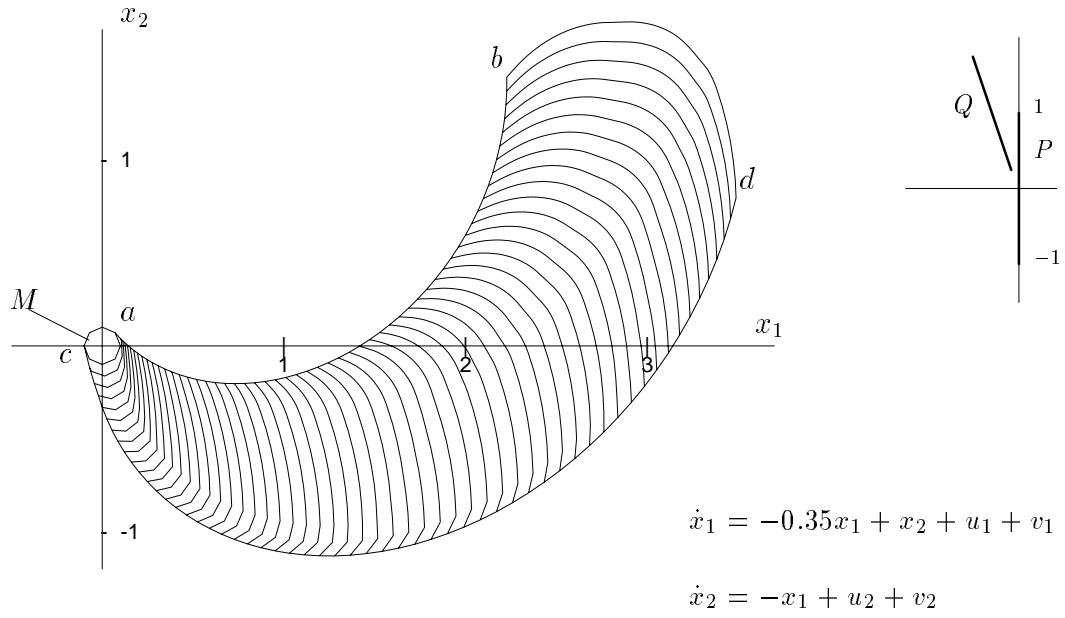


Рис. 3.2. Цепочка множеств  $W(i\Delta, M)$ , налетание отсутствует.

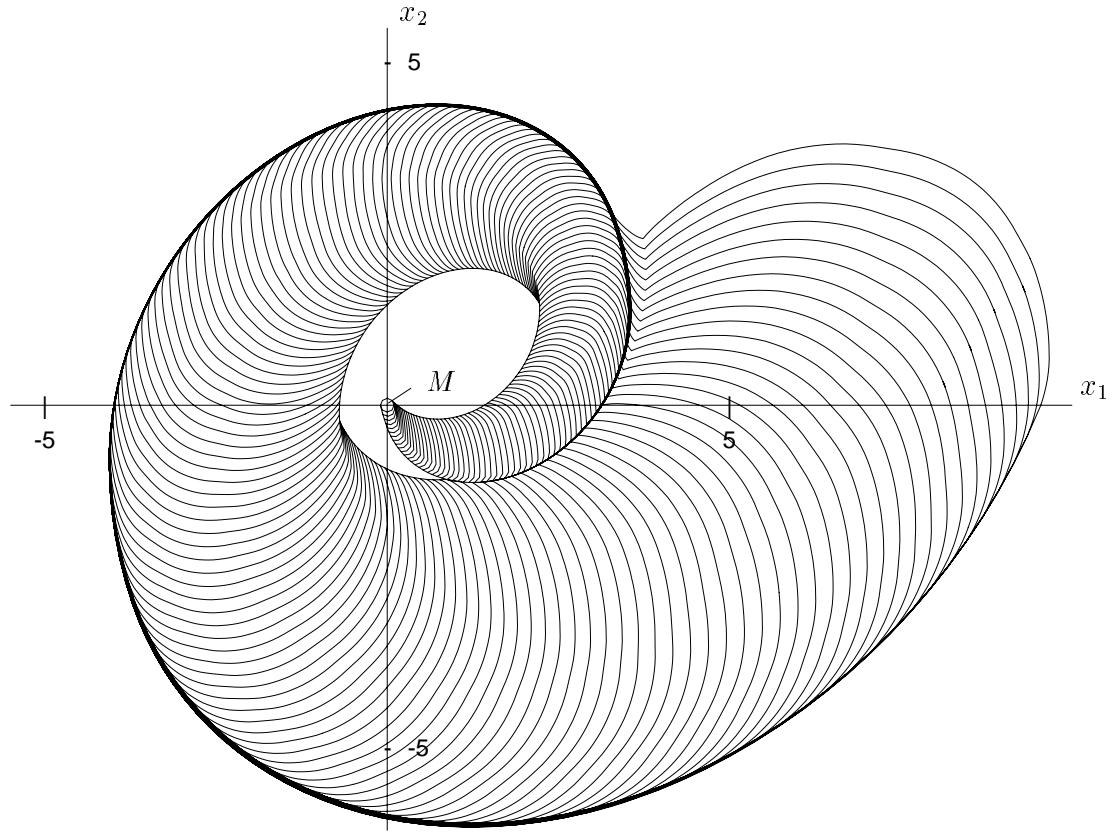


Рис. 3.3. Цепочка множеств  $W(i\Delta, M)$ , случай налетания.

$z_2, \dots, z_r$ . Каждой вершине  $z_j$ ,  $j = \overline{2, r-1}$ , поставим в соответствие две нормали:  $\ell_{j-1}$  к звену  $[z_{j-1}, z_j]$  и  $\ell_j$  к звену  $[z_j, z_{j+1}]$ . Вершине  $z_1$ , кроме нормали  $\ell_1$ , сопоставим вектор  $\ell_0$ , определяемый из условий:

- 1)  $\min_{u \in P} \max_{v \in Q} \langle \ell_0, Az_1 + u + v \rangle = 0,$
  - 2)  $\forall \ell : \ell_1 < \ell < \ell_0 \quad \min_{u \in P} \max_{v \in Q} \langle \ell, Az_1 + u + v \rangle < 0,$
- а вершине  $z_r$ , кроме нормали  $\ell_{r-1}$ , сопоставим вектор  $\ell_r$ , такой, что
- 1)  $\min_{u \in P} \max_{v \in Q} \langle \ell_r, Az_r + u + v \rangle = 0,$
  - 2)  $\forall \ell : \ell_r < \ell < \ell_{r-1} \quad \min_{u \in P} \max_{v \in Q} \langle \ell, Az_r + u + v \rangle < 0.$

Если  $\min_{u \in P} \max_{v \in Q} \langle \ell_1, Az_1 + u + v \rangle = 0$ , то полагаем  $\ell_0 = \ell_1$ . Аналогично, если  $\min_{u \in P} \max_{v \in Q} \langle \ell_{r-1}, Az_r + u + v \rangle = 0$ , то  $\ell_r = \ell_{r-1}$ .

Пусть  $q_1, q_2$  – концы отрезка  $Q$ . Разобъем ломаную  $F_i$  на части  $F_i^{(k)}$  так, чтобы для каждой части максимум по  $v \in Q$  скалярного произведения  $\langle \ell_j, v \rangle$  достигался на одном и том же конце отрезка  $Q$  для любого вектора нормали  $\ell_j$  к ломаной  $F_i^{(k)}$ .

Допустим для определенности, что имеются только две части  $F_i^{(1)} = [z_1, \dots, z_\omega]$ ,  $F_i^{(2)} = [z_\omega, \dots, z_r]$ , и для первой из них

$$\arg \max_{v \in Q} \langle \ell_j, v \rangle = q_1, \quad j = \overline{0, \omega - 1},$$

а для второй

$$\arg \max_{v \in Q} \langle \ell_j, v \rangle = q_2, \quad j = \overline{\omega, r}.$$

Такое разбиение означает, что одна из нормалей к отрезку  $Q$  (обозначим ее  $\ell_q$ ) попадает между векторами  $\ell_{\omega-1}$ ,  $\ell_\omega$ .

Из каждой вершины  $z_j$ ,  $j = \overline{1, \omega - 1}$ , ломаной  $F_i^{(1)}$  выпустим движения

$$z(\tau) = z_j - \tau(Az_j + u + v) \tag{3.3}$$

в силу  $v = q_1$  и при  $u = u_*$ ,  $u = u^*$ , выбираемых из условий

$$u_* = \arg \min_{u \in P} \langle \ell_{j-1}, u \rangle, \quad u^* = \arg \min_{u \in P} \langle \ell_j, u \rangle. \tag{3.4}$$

При построении движений из точки  $z_\omega$  заменим в (3.3), (3.4) индекс  $j$  на  $\omega$  и вектор  $\ell_j$  на  $\ell_q$ .

Если  $u_* = u^*$ , то получаем одно движение. В случае  $u_* \neq u^*$  имеем два движения. Если вектор  $\ell_{j-1}$  ортогонален отрезку  $P$ , то вектор  $\ell_j$  не является

ортогональным к  $P$ , и  $u^*$  определяется однозначно. В качестве  $u_*$  выбираем тот из концов отрезка  $P$ , который не совпадает с  $u^*$ . Аналогичным образом поступаем в случае, когда вектор  $\ell_j$  ортогонален отрезку  $P$ . Движения дотягиваем до момента  $\tau = \Delta$ .

Движения из точек  $z_{\omega+1}, \dots, z_r$  ломаной  $F_i^{(2)}$  выстраиваются аналогично, с заменой  $v = q_1$  на  $v = q_2$ . При построении движений из точки  $z_\omega$  индекс  $j$  в (3.3), (3.4) заменяется на  $\omega$  и вектор  $\ell_{j-1}$  на  $\ell_q$ .

Таким образом, при разбиении фронта  $F_i$  на две части имеем дело с двумя семействами регулярных экстремальных движений. Движения каждого семейства можно интерпретировать как характеристики соответствующего уравнения Беллмана-Айзекса.

Концы экстремальных движений, выпущенных из вершин первой ломаной, будучи соединенными по порядку, составляют ломаную  $[\xi_1, \dots, \xi_s]$ ; концы движений, выпущенных из вершин второй ломаной, – линию  $[\xi_{s+1}, \dots, \xi_m]$ . Правило выпускания движений обеспечивает пересечение ломаных, как показано на рис. 3.4 (“ласточкин хвост”). На рис. 3.5 пунктиром показаны два движения, выпущенные из точки  $z_\omega$  и пришедшие в точки  $\xi_s, \xi_{s+1}$ . Если процесс выпускания движений представить как непрерывный по точкам фронта  $F_i$ , то участок  $\xi_\alpha \xi_s$  образуется за счет концов движений, выпускаемых при  $v = q_1$  из точек линии  $z^* z_\omega$ , примыкающей к точке  $z_\omega$  сверху, а участок  $\xi_\alpha \xi_{s+1}$  образуется концами движений, выпускаемых при  $v = q_2$  из точек линии  $z_\omega z^*$ , примыкающей к  $z_\omega$  снизу. Ясно, что движения, порождающие участок  $\xi_\alpha \xi_{s+1}$ , пересекаются с движениями, порождающими участок  $\xi_\alpha \xi_s$ . Участки  $\xi_\alpha \xi_s, \xi_\alpha \xi_{s+1}$  отбрасываются. Полученная в результате этой операции ломаная  $[\xi_1, \dots, \xi_\alpha, \dots, \xi_m]$  есть новый фронт  $F_{i+1}$ . Участки  $\xi_\alpha \xi_s, \xi_\alpha \xi_{s+1}$  могут состоять не из одного, а из нескольких отрезков. Тогда отбрасываются ломаные  $[\xi_\alpha, \dots, \xi_s]$  и  $[\xi_\alpha, \dots, \xi_{s+1}]$ .

Если ломаная  $F_i$  разбивается на три или большее количество частей, могут возникать сложные варианты пересечения ломаных, набираемых из концевых точек выпускаемых экстремальных движений. Алгоритм построения фронта отбрасывает участки, соответствующие пересечению характеристик. Если экстремальный вектор из  $v \in Q$  один и тот же для всех векторов нормалей  $\ell_j$ , то какого-либо разбиения ломаной  $F_i$  не делается, и экстремальные движения выпускаются в силу рассматриваемого экстремального значения  $v$ . Набираемую из концевых точек дугу считаем новым фронтом  $F_{i+1}$ .

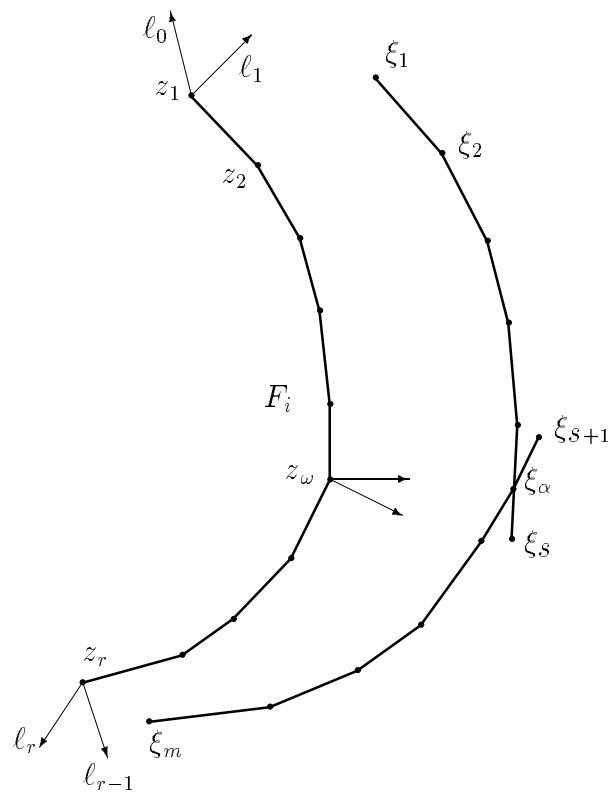


Рис. 3.4. Построение фронта.

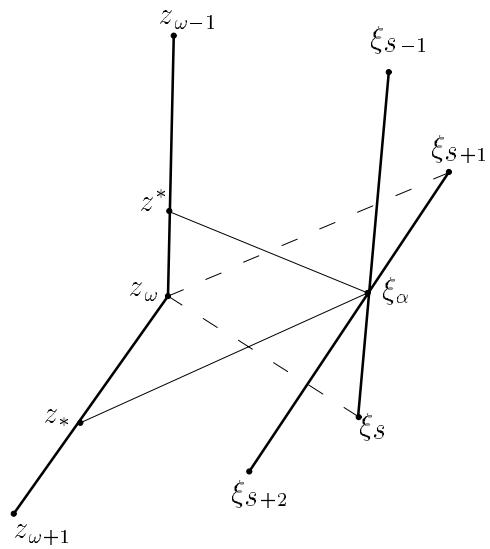


Рис. 3.5. Пересечение ломаных при построении фронта.

Перейдем к рассмотрению ситуации налетания. Налетание происходит на часть границы множества  $W((i-1)\Delta, M)$ , обладающую барьерным свойством. Часть фронта  $F_i$ , попавшая внутрь множества  $W((i-1)\Delta, M)$ , отбрасывается. При построении фронта  $F_{i+1}$  необходимо учитывать невыпуклость сочленения фронта  $F_i$  с границей  $\partial W((i-1)\Delta, M)$ . Пронумеруем вершины ломаной  $F_i$ :  $z_1, \dots, z_r$ . К фронту  $F_i$  подсоединяется малый участок  $z_1 z_0$  (рис. 3.6) границы  $\partial W((i-1)\Delta, M)$ . Точка  $z_1$  есть точка невыпуклого сочленения. Зададим достаточно малую окрестность точки  $z_1$ . При выпускании движений из точки  $z_1$  рассмотрим следующую “обращенную” задачу. Будем считать, что цель второго игрока, распоряжающегося параметром  $v$ , – привести систему (3.1) на заштрихованное множество, а цель первого игрока, отвечающего за параметр  $u$ , – уклонить систему от попадания на указанное множество. Сопоставим точке  $z_1$  нормали  $\tilde{l}_0$  к отрезку  $[z_1 z_0]$ ,  $\tilde{l}_1$  к отрезку  $[z_1 z_2]$  и выпустим движения по описанному ранее правилу, поменяв ролями множества  $P$  и  $Q$ .

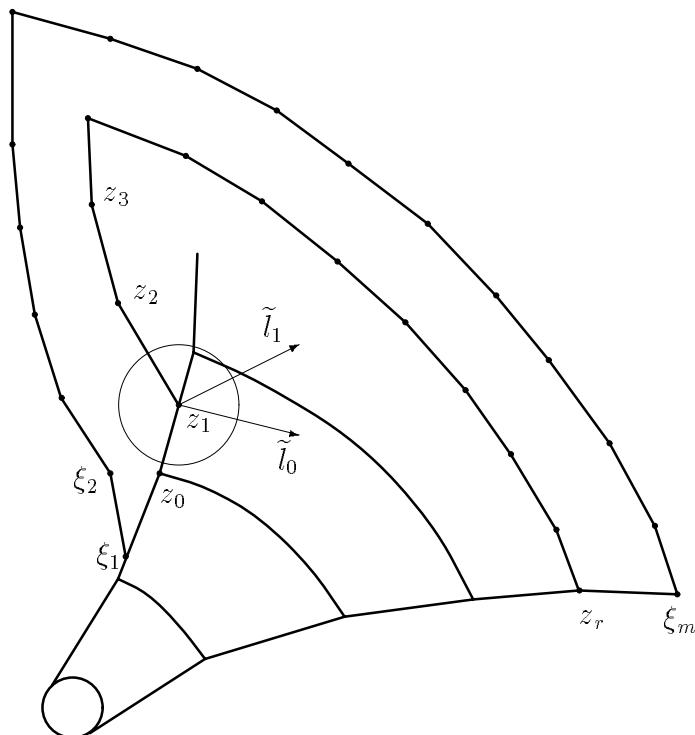


Рис. 3.6. Учет невыпуклого сочленения.

Если экстремальное управление первого игрока одно и то же для векторов  $\tilde{\ell}_0, \tilde{\ell}_1$  ( $u = p_1$  для определенности), то выпустим движения (3.3) из точки  $z_1$  в силу  $u = p_1$  и при  $v = v_*, v = v^*$ , выбираемых из условий

$$v_* = \arg \min_{v \in Q} \langle \tilde{\ell}_0, v \rangle, \quad v^* = \arg \min_{v \in Q} \langle \tilde{\ell}_1, v \rangle. \quad (3.5)$$

Если  $v_* = v^*$ , то получаем одно движение. В случае  $v_* \neq v^*$  имеем два движения. Пусть теперь экстремальные управления  $u$  различны для векторов  $\tilde{\ell}_0, \tilde{\ell}_1$ :

$$\arg \max_{u \in P} \langle \tilde{\ell}_0, u \rangle = p_1, \quad \arg \max_{u \in P} \langle \tilde{\ell}_1, u \rangle = p_2.$$

Это означает, что одна из нормалей к отрезку  $P$  (обозначим ее  $\ell_p$ ) попадает между векторами  $\tilde{\ell}_0, \tilde{\ell}_1$ . Выпустим движения из точки  $z_1$  сначала в силу  $u = p_1$  и при  $v = v_*, v = v^*$ , выбираемых из условий (3.5), где вектор  $\tilde{\ell}_1$  заменен на  $\ell_p$ ; затем – в силу  $u = p_2$  и  $v = v_*, v = v^*$ , выбираемых из условий (3.5), где  $\tilde{\ell}_0$  заменен на  $\ell_p$ .

Из остальных вершин ломаной  $F_i$  выпустим движения по старому способу. В итоге получаем несколько кривых, из которых удаляются участки, соответствующие пересечению характеристик. Показанная на рис. 3.6 результирующая ломаная  $[\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m]$  отвечает случаю, когда экстремальные  $u$  были различны для векторов  $\ell_0, \ell_1$  и  $v_* \neq v^*$ . Точки  $\xi_1, \xi_2$  – вершины невыпуклости. С учетом этого они и обрабатываются на следующем шаге.

Если множества  $P, Q$  – многоугольники, то при построении очередного фронта увеличивается количество семейств регулярных экстремальных движений. Выпускаемое из каждой вершины число движений определяется в случае локальной выпуклости (локальной вогнутости) числом нормалей к граням многоугольника  $P$  ( $Q$ ), попадающих в конус нормалей, сопоставляемый данной вершине.

### 3. Примеры решения задач игрового быстродействия

1. В теории оптимального управления классическим модельным примером задачи быстродействия является пример, где динамика имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u, \quad |u| \leq 1. \end{aligned}$$

Добавим в первую строчку мешающее воздействие  $v$  и рассмотрим дифференциальную игру

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + v \\ \dot{x}_2 &= u,\end{aligned}\tag{3.6}$$

$$|u| \leq 1, \quad |v| \leq 1.$$

Первый игрок минимизирует время перевода фазовой точки на терминальное множество  $M$ , интересы второго противоположны.

Если  $M$  представляет собой малый правильный многоугольник с центром в начале координат, то цепочка (3.2) множеств  $W(i\Delta, M)$  перестает наращиваться, начиная с некоторого номера. При стягивании многоугольника  $M$  к началу координат множество разрешимости задачи качества (о переводе на  $M$ ) также стягивается в точку. Аналогичная ситуация имеет место, когда терминальное множество есть достаточно малый правильный многоугольник с центром в точке  $\bar{x}$ , для которой  $|\bar{x}_2| < 1$ . Если  $M$  – правильный многоугольник с центром в точке  $\bar{x}$  и  $|\bar{x}_2| > 1$ , то множество разрешимости задачи качества совпадает со всей плоскостью; построение  $W(i\Delta, M)$  имеет смысл для любого номера  $i$ .

Пусть  $M$  – правильный восьмиугольник, вписанный в круг радиуса 0.1 с центром в точке  $(0, 2)$ . Выберем  $\Delta = 0.05$ . На рис. 3.7 показаны множества  $W(\tau, M)$  (кратко –  $W(\tau)$ ) для моментов  $\tau = k \cdot 4\Delta$ ,  $k = \overline{0, 50}$ ; на рис. 3.8 – множества  $W(\tau)$  для моментов  $\tau = k \cdot 20\Delta$ ,  $k = \overline{1, 20}$ . Момент первого налетания равен 6.6. Множество  $W(6.6)$  выделено на рис. 3.7, показан также фронт множества  $W(9)$ . Обозначим через  $a$ ,  $b$  крайние точки допустимой зоны  $\Gamma_0$ . Кривые  $ac$ ,  $bd$ , образуемые концами фронтов, представляют собой барьеры. На них, а также на линии  $\partial M \setminus \Gamma_0$  функция цены разрывна. Линия, составленная из угловых точек фронтов (обозначим ее  $cf$ ), есть множество, где функция цены недифференцируема.

В работах [39, 40] проведено исследование дифференциальной игры с неполной информацией, которая переходит в рассматриваемую задачу, если предположить, что первый игрок в каждый момент имеет точную информацию о положении системы. Дифференциальная игра быстродействия с динамикой (3.6) рассматривалась также в [41]. Из результатов указанных работ следует, что синтез оптимальных управлений обратной связи определяется сингуляри-

**Классический пример задачи быстродействия: управление материальной точкой на прямой, случай безинерционной помехи**

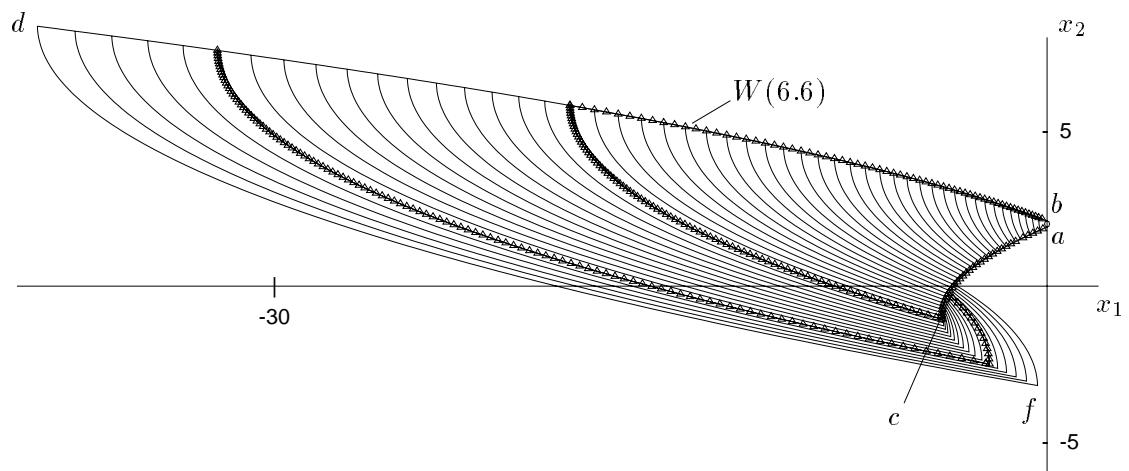


Рис. 3.7. Решение до момента  $\tau = 10$ .

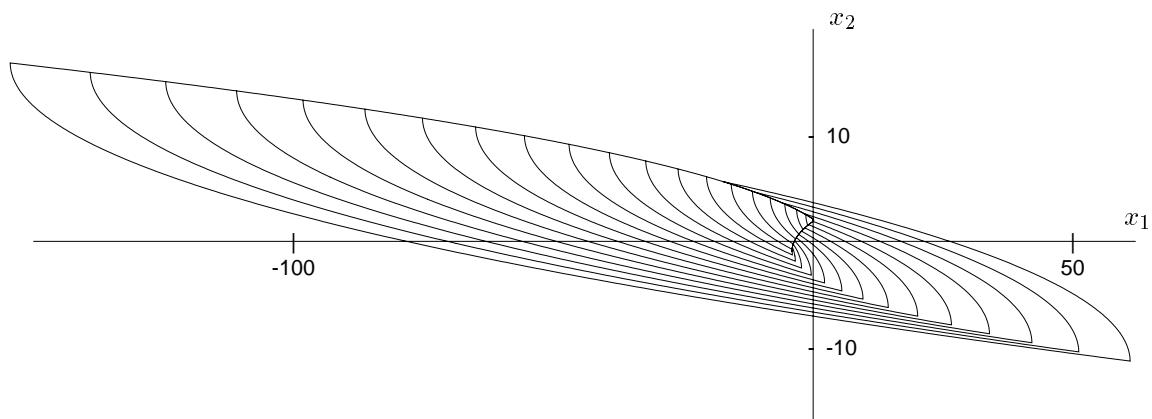


Рис. 3.8. Решение до момента  $\tau = 20$ .

ной линией  $ghbacp$  (рис. 3.9), разделяющей плоскость на две части. Сверху от этой линии  $u^0 = -1, v^0 = 1$ , снизу  $u^0 = 1, v^0 = -1$ . Примыкающие к  $M$  участки  $ac$ ,  $bh$  сингулярной линии – барьеры, они продолжаются дальше бесконечной цепочкой экивокальных кривых. Вторая экивокальная кривая  $e_2$  конструируется на основе первой кривой  $e_1$ , третья  $e_3$  – на основе второй  $e_2$  и т.д.. Первая экивокальная кривая  $e_1$  описывается некоторым дифференциальным уравнением, для остальных экивокальных кривых удается установить только качественные свойства, поэтому функция цены в целом не имеет аналитического описания.

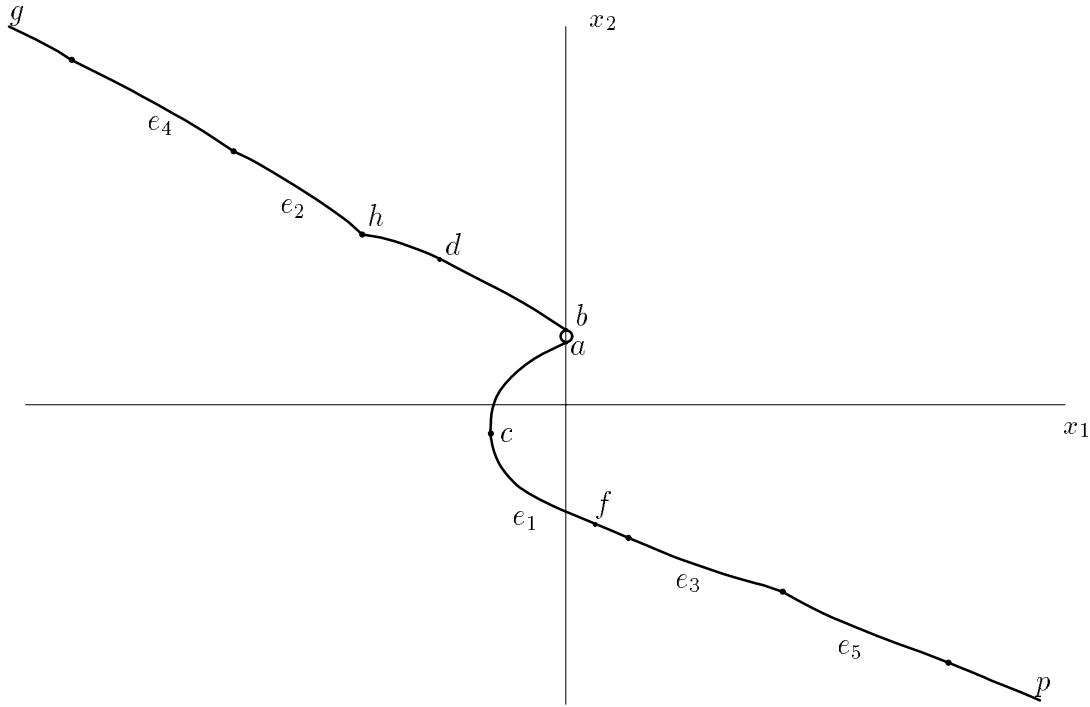


Рис. 3.9. Сингулярная линия в игровой задаче управления материальной точкой.

Представленные на рис. 3.7 результаты численных построений доведены до момента  $\tau = 10$ . Линия  $cf$  представляет собой начальную часть первой экивокальной линии, о которой говорилось выше. Верхний кусок  $bd$  барьера при дальнейших попытках построения перестает наращиваться в момент, когда смыкаются первая и последняя точки линии фронта. На рис. 3.8 построения продолжены до момента  $\tau = 20$ , но все еще не вышли за пределы линий  $e_1$ ,  $bh$ .

Таким образом, в данном достаточно простом по описанию динамики примере возникают наиболее сложные из сингулярных линий – экивокальные, что затрудняет решение подобных задач при помощи метода характеристик [1]. С точки зрения численного решения по предложенному алгоритму, единственная особенность состоит в наличии ситуации налетания, но она не вызывает потери локальной выпуклости фронта.

**2.** В работе [42] проделано полное качественное исследование дифференциальной игры быстродействия с динамикой

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\lambda_1 x_1 + u + p_1 - v \\ \dot{x}_2 &= -\lambda_2 x_2 + ku + p_2 - lv,\end{aligned}\tag{3.7}$$

$$|u| \leq \mu, \quad |v| \leq \nu,$$

и точечным целевым множеством  $M$ . Здесь  $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ ,  $k > 0$ ,  $l < 0$ ,  $\mu > 0$ ,  $\nu > 0$ ;  $p_1$ ,  $p_2$  – произвольные числа. Проведена классификация типов решения в зависимости от параметров задачи, построены сингулярные линии, найдены оптимальные стратегии игроков.

Приведем результаты численных построений для задачи (3.7). В качестве  $M$  возьмем правильный восьмиугольник, вписанный в круг малого радиуса с центром в начале координат.

На рис. 3.10 показаны результаты вычислений для случая, когда оптимальный синтез определяется экивокальной линией, начинающейся из некоторой точки на барьерной линии. Экивокальная линия набирается из угловых точек линии фронта и разбивает внутренность пространства игры, где цена игры конечна, на две части: выше этой линии оптимальные управлении принимают значения  $u^0 = \mu$ ,  $v^0 = \nu$ , ниже  $-u^0 = -\mu$ ,  $v^0 = -\nu$ .

На рис. 3.11 представлено решение для другого набора параметров. Отличие от предыдущего случая состоит в том, что обе барьерные линии поднимаются вверх и при продолжении попутных построений должны пересекаться.

Наиболее простым является случай, изображенный на рис. 3.12. Барьерные линии опускаются вниз и пересекаются. Каких-либо сингулярных линий внутри области решения не возникает, оптимальные управлении во внутренней части принимают значения  $u^0 = -\mu$ ,  $v^0 = -\nu$ .

При значении параметров, соответствующих рис. 3.13, перевод в начало координат возможен из любой точки плоскости. Построения на рис. 3.13 доведены до момента  $\tau = 4.4$ . Кривые  $ac$ ,  $bd$  представляют собой барьеры,  $cf$  – экивокальная линия.

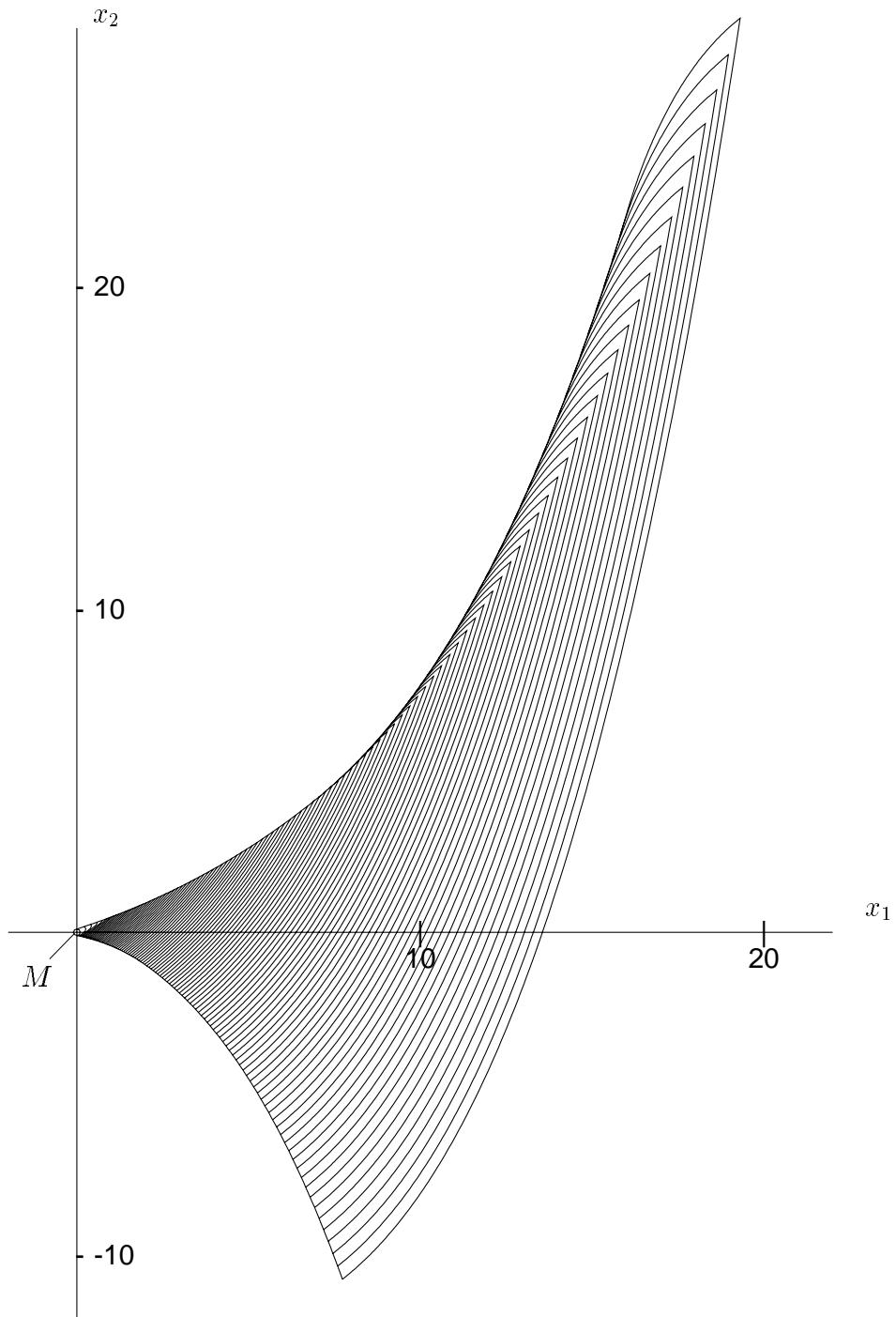


Рис. 3.10. Игровое управление устойчивой системой:  $\lambda_1 = 0.1$ ,  $\lambda_2 = 0.4$ ,  
 $k = 5/6$ ,  $l = -1$ ,  $\mu = 0.6$ ,  $\nu = 0.15$ ,  $p_1 = -1.2$ ,  $p_2 = -0.3$ .

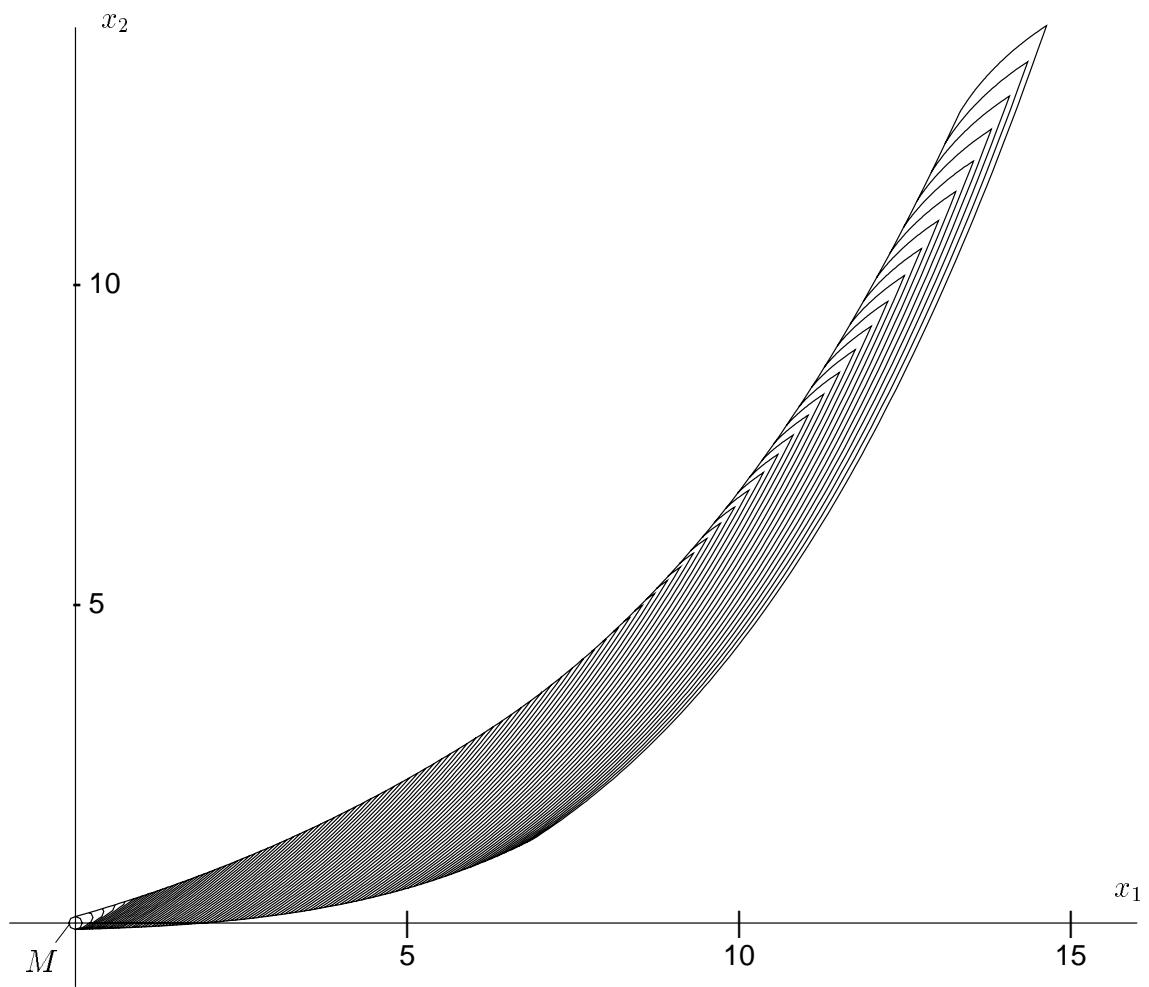


Рис. 3.11. Игровое управление устойчивой системой:  $\lambda_1 = 0.1$ ,  $\lambda_2 = 0.4$ ,  
 $k = 2/3$ ,  $l = -1$ ,  $\mu = 0.6$ ,  $\nu = 0.15$ ,  $p_1 = -1.2$ ,  $p_2 = -0.3$ .

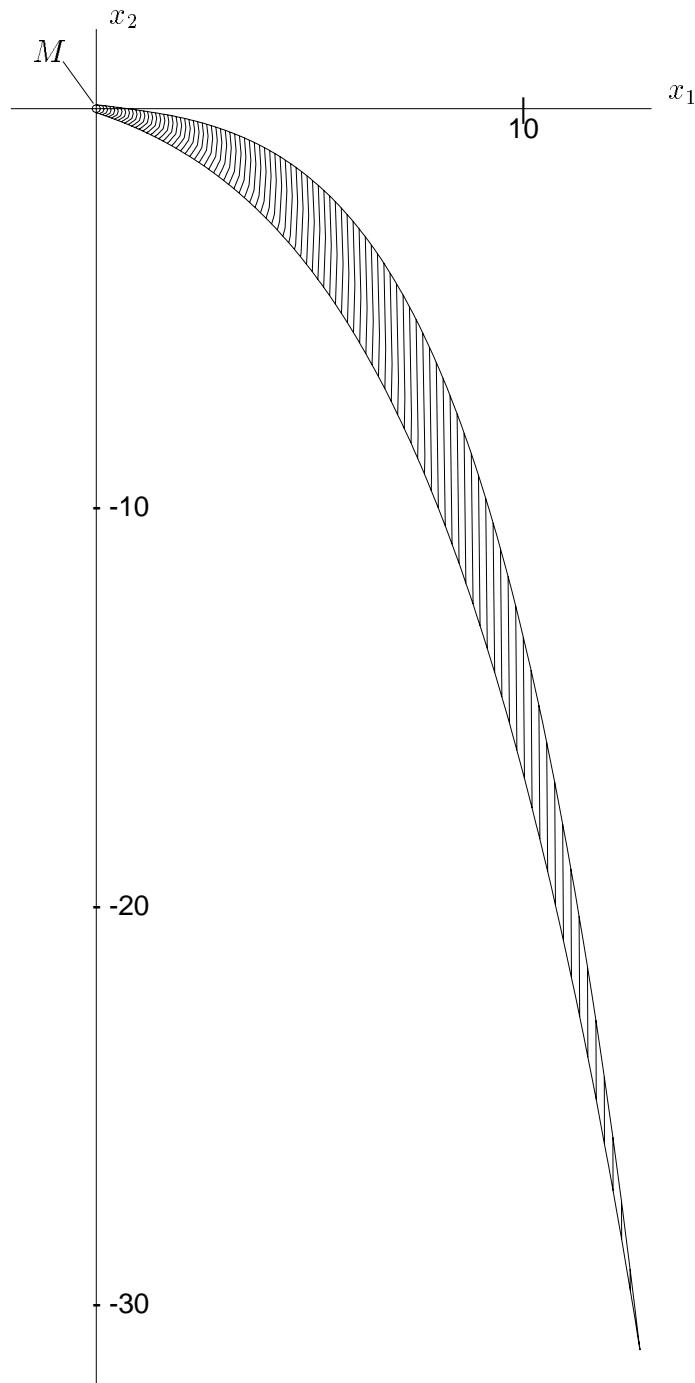


Рис. 3.12. Игровое управление устойчивой системой:  $\lambda_1 = 0.1$ ,  $\lambda_2 = 0.6$ ,  
 $k = 1$ ,  $l = -1/3$ ,  $\mu = 0.1$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $p_1 = -0.6$ ,  $p_2 = 0.3$ .

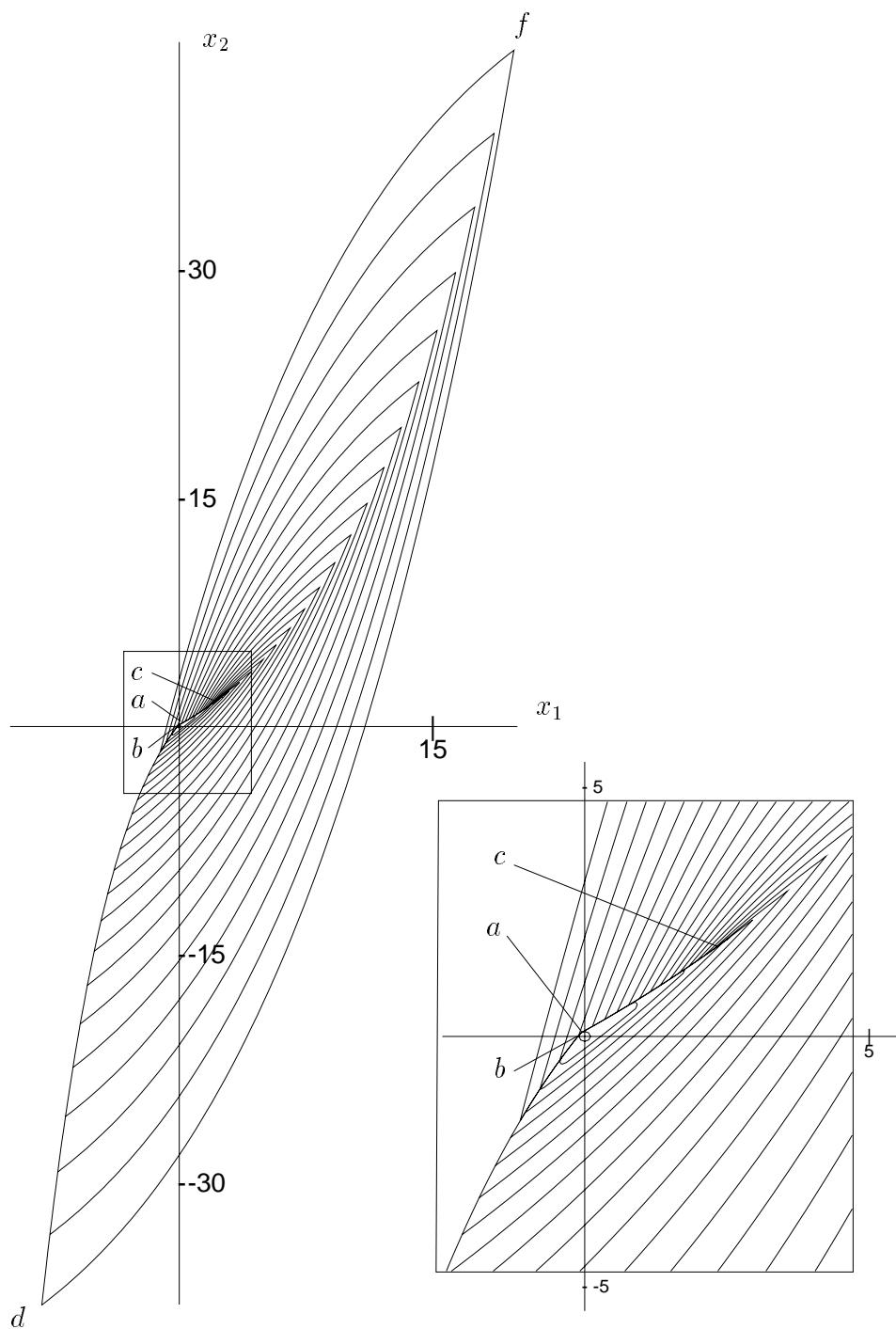


Рис. 3.13. Игровое управление устойчивой системой:  $\lambda_1 = 0.1$ ,  $\lambda_2 = 0.6$ ,

$$k = 5/6, \quad l = -1, \quad \mu = 3, \quad \nu = 0.15, \quad p_1 = -1.2, \quad p_2 = -0.3.$$

**Замечание.** В работе [42] в формулах (1.1), (2.1), (2.2), а также в формуле для  $h(u, v)$  допущена ошибка: следует сменить знаки слагаемых, содержащих управляющий параметр  $v$ .

3. На рис. 3.14–3.16 представлены результаты вычисления множеств  $W(i\Delta, M)$  для системы с различными по знаку действительными собственными значениями матрицы  $A$ . Множество  $M$  – правильный восьмиугольник, вписанный в круг радиуса 0.1 с центром в точке  $(-5, -10)$ . Матрица  $A$  и отрезок  $P$  одни и те же, отличие в результатах вызвано изменением отрезка  $Q$ .

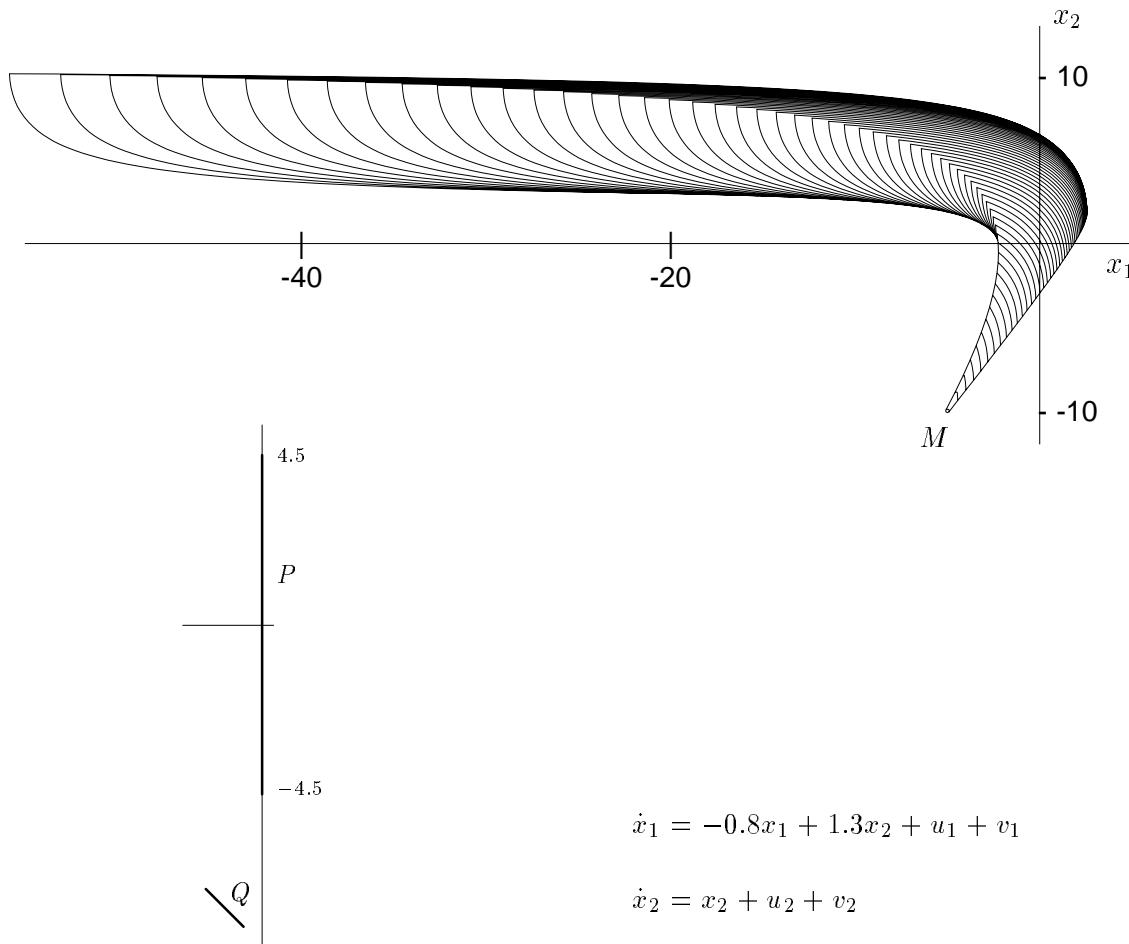


Рис. 3.14.

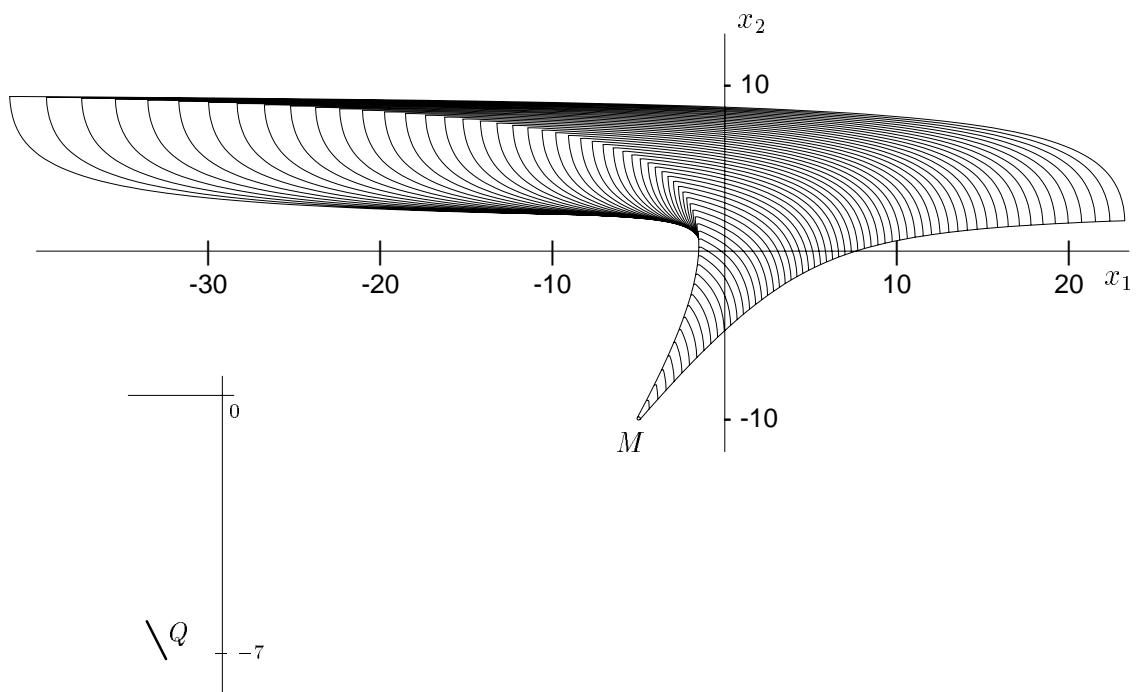


Рис. 3.15.

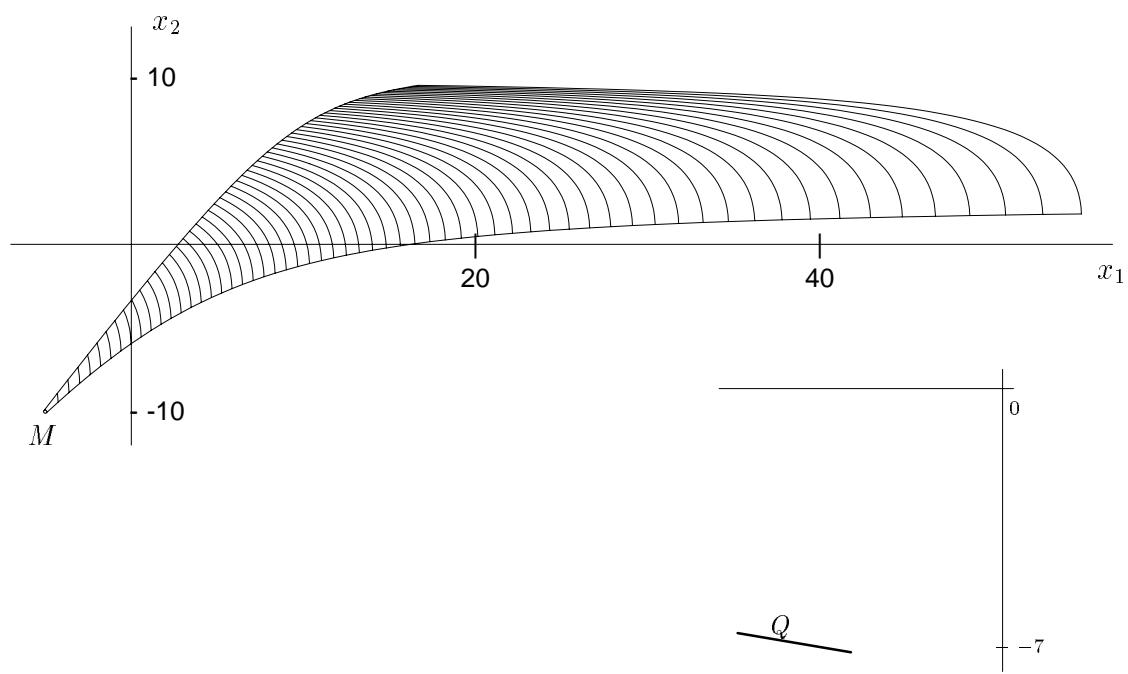


Рис. 3.16.

4. Рассмотрим колебательную систему

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + u_1 + v_1 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + u_2 + v_2,\end{aligned}\tag{3.8}$$

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in P, \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in Q.$$

На рис. 3.17–3.19 показано последовательное наращивание множества  $W(\tau, M)$  при увеличении  $\tau$ . Терминальное множество  $M$  – правильный восьмиугольник с центром в начале координат. Множества  $P$ ,  $Q$  изображены на рис. 3.17. Шаг  $\Delta = 0.05$ . Построения на рис. 3.13 доведены до момента  $\tau = 5$ , на рис. 3.18 – до момента  $\tau = 6.45$ . В момент  $\tau = 6.45$  происходит налётание фронта на множество  $M$ . При  $\tau > 6.45$  фронт разделяется на две части, каждая из которых не является локально-выпуклой. На рис. 3.19 показано заполнение “лунки”, происходящее к моменту  $\tau = 8.15$ . Нижняя часть фронта построена до момента  $\tau = 6.95$ .

На рис. 3.20 демонстрируются изменения в решении дифференциальной игры (3.8), возникающие при уменьшении возможностей второго игрока. В некоторый момент обрывается левая барьерная линия, фронт начинает огибать ее, один из концов фронта скользит по внешней стороне барьера. В итоге исчезает лунка, которая была в предыдущем примере. Построения доведены до момента  $\tau = 4.9$ .

5. Рис. 3.21 соответствует примеру с колебательной динамикой, приведенному в первой главе на рис. 1.6. В качестве терминального множества взят правильный восьмиугольник, вписанный в круг малого радиуса с центром в начале координат. Показано, как множества уровня функции цены игры заполняют область  $\mathcal{B}$  решения задачи качества. Построения доведены до момента  $\tau = 12$ . Линия фронта является негладкой лишь на сравнительно небольшом промежутке построений.

6. Во всех рассмотренных примерах допустимая зона на границе множества  $M$  состояла только из одной дуги. На рис. 3.22 показан пример, где допустимая зона распадается на две части  $\Gamma_0^{(1)}, \Gamma_0^{(2)}$ . Динамика системы описывается соотношениями (3.6). Множество  $M$  – правильный двенадцатиугольник, вписанный в круг единичного радиуса с центром в начале координат. Шаг  $\Delta = 0.05$ . Задача симметрична относительно нуля, поэтому множество  $W(\tau, M)$  составляется из двух симметричных кусков. Построения доведены до момента  $\tau = 4$ .

**Построение множеств  $W(\tau, M)$  для колебательной системы**

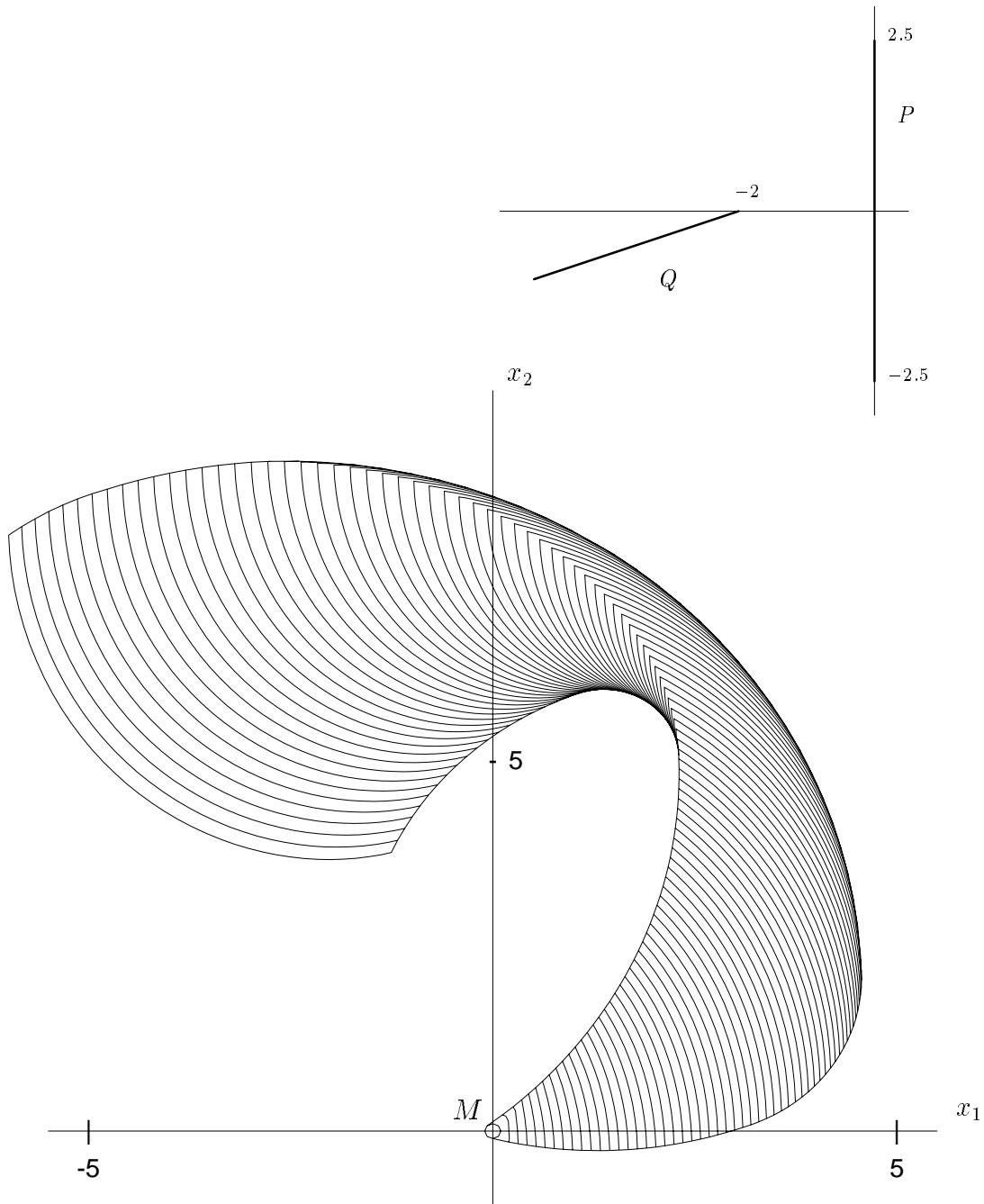


Рис. 3.17. Начальный этап построений.

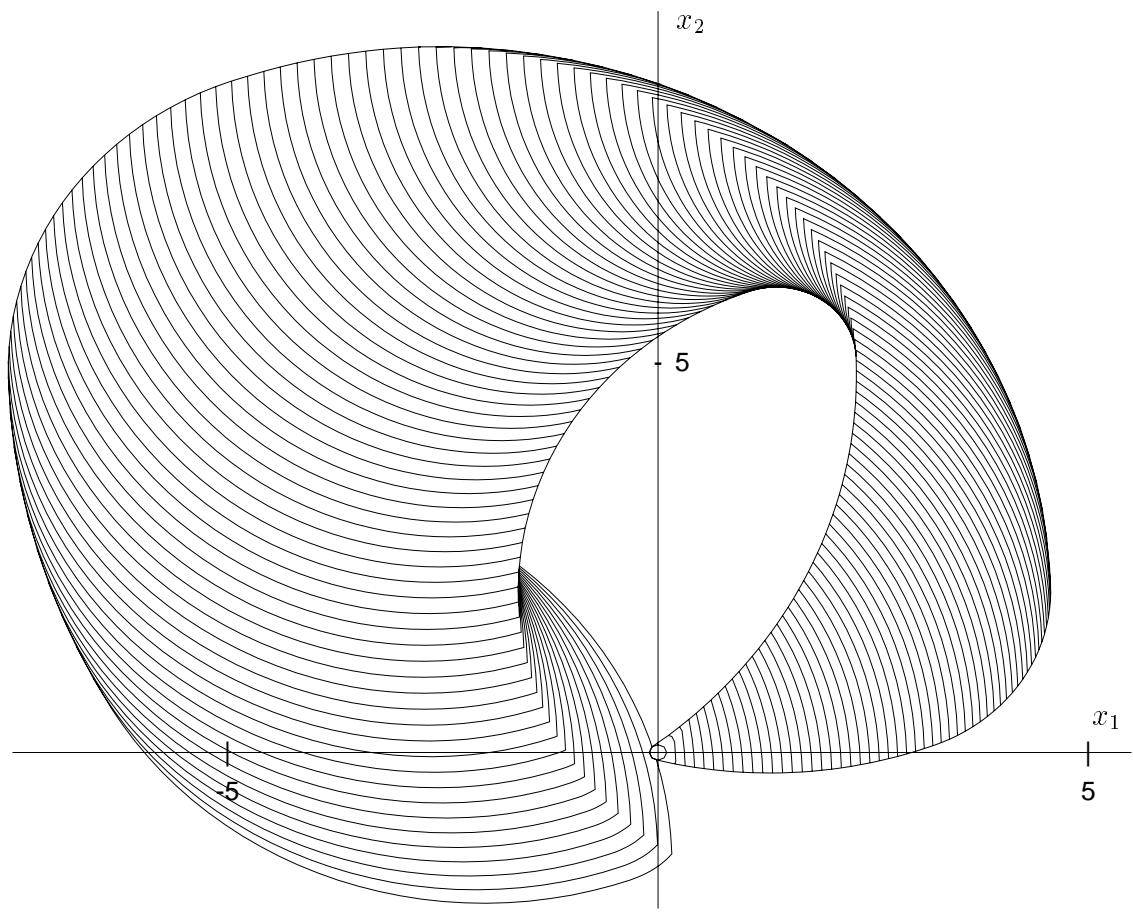


Рис. 3.18. Ситуация налетания.

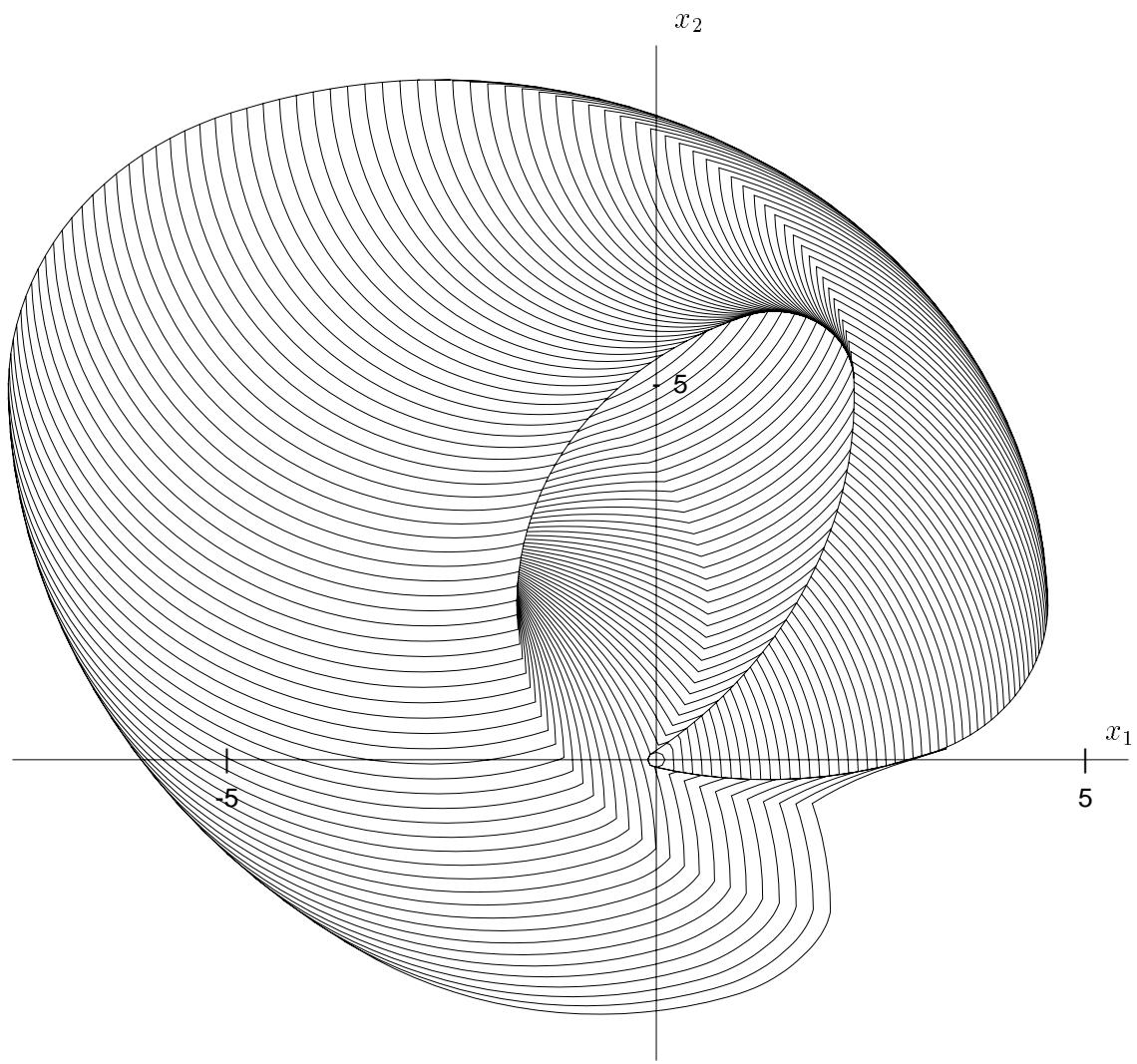


Рис. 3.19. Заполнение “лунки”.

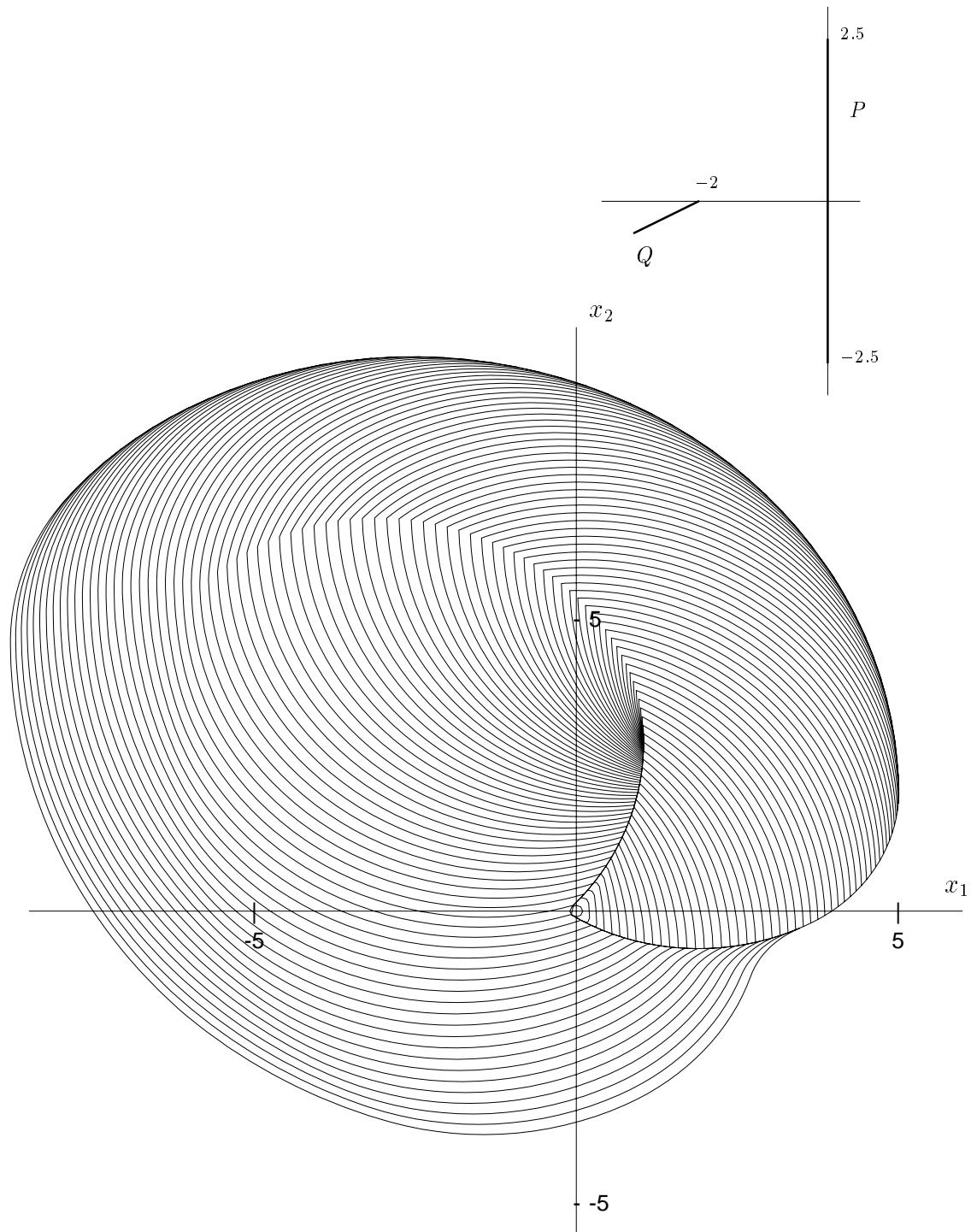


Рис. 3.20. Исчезновение “лунки” при уменьшении возможностей  
второго игрока.

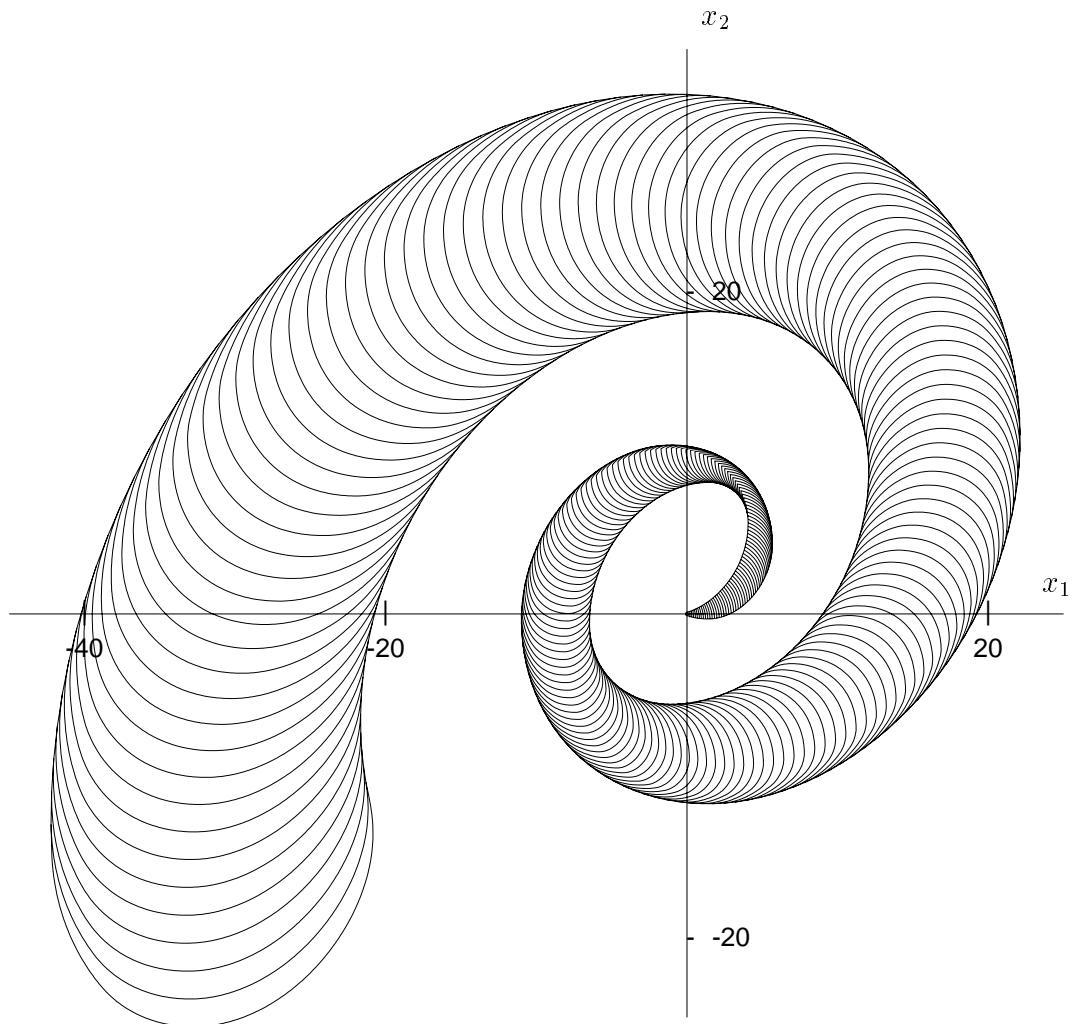


Рис. 3.21. Колебательная система (3.8). Заполнение множества разрешимости задачи качества (сравнение с рис. 1.6).

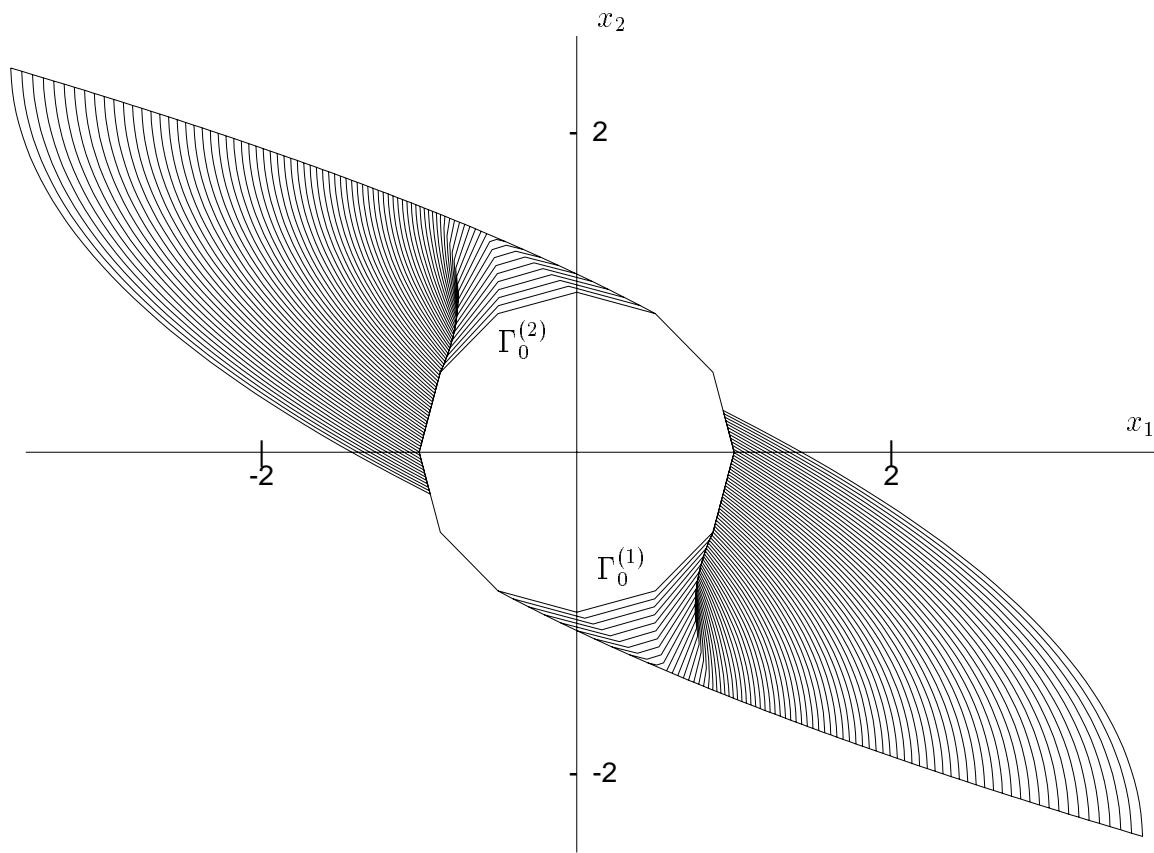


Рис. 3.22. Управляемая система (3.6). Допустимая зона на множестве  $M$  состоит из двух дуг  $\Gamma_0^{(1)}$ ,  $\Gamma_0^{(2)}$ .

## Литература

1. Р.Айзекс. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967.
2. Н.Н.Красовский, А.И.Субботин. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
3. N.N.Krasovskii, A.I.Subbotin. Game-Theoretical Control Problems. New York: Springer-Verlag, 1988.
4. Н.Н.Красовский. Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970.
5. В.С.Пацко. Задача качества в линейных дифференциальных играх второго порядка. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Свердловск, 1973.
6. В.С.Пацко. Задача качества в линейных дифференциальных играх второго порядка. В сб.: Дифференциальные игры и задачи управления. Свердловск, УНЦ АН СССР, 1975, с. 167–227.
7. В.С.Пацко. Дифференциальная игра качества второго порядка. Прикладная математика и механика, т. 46, вып. 4, 1982, с. 596–604.
8. В.Л.Турова. Линейная дифференциальная игра качества. В сб.: Алгоритмы и программы решения линейных дифференциальных игр (Материалы по математическому обеспечению ЭВМ). Свердловск, УНЦ АН СССР, 1984, с. 191–248.
9. Э.И.Богуславская. Линейные дифференциальные игры на плоскости. I. Кибернетика, N 6, 1973, с. 94–104.
10. Э.И.Богуславская. Линейные дифференциальные игры на плоскости. II. Кибернетика, N 1, 1974, с. 113–116.
11. Э.И.Богуславская. Линейные дифференциальные игры на плоскости. Случай комплексных корней. Кибернетика, N 1, 1976, с. 64–70.
12. Г.П.Пермяков. Зона захвата в линейных дифференциальных играх качества на плоскости. В сб.: Управление динамическими системами. Якутск, 1986, с. 76–85.
13. В.С.Пацко. Условия уклонения в линейной дифференциальной игре второго порядка. Прикладная математика и механика, т. 36, вып. 3, 1972, с. 420–425.
14. В.С. Пацко. Условия уклонения от точки в дифференциальной игре второго порядка. Прикладная математика и механика, т. 36, вып. 6, 1972, с. 1005–1015.

15. В.С. Пацко. Дифференциальная игра уклонения на плоскости. Прикладная математика и механика, т. 41, вып. 4, 1977, с. 604–608.
16. В.Л.Турова. Нелинейная дифференциальная игра качества на плоскости. В сб.: Исследования задач минимаксного управления. Свердловск, УНЦ АН СССР, 1985, с. 91–116.
17. В.Л.Турова. Численное решение некоторых классов дифференциальных игр. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Свердловск, 1989.
18. А.П.Пономарев, Н.Х.Розов. Устойчивость и сходимость альтернированных сумм Понтрягина. Вестник МГУ. Сер. 15: Вычислительная математика и кибернетика, N 1, 1978, с. 82–90.
19. Н.Д.Боткин. Численное построение сечений множества позиционного поглощения в линейной дифференциальной игре В сб.: Алгоритмы и программы решения линейных дифференциальных игр (Материалы по математическому обеспечению ЭВМ). Свердловск, УНЦ АН СССР, 1984, с. 5–38.
20. Е.А.Исакова, Г.В.Логунова, В.С.Пацко. Построение стабильных мостов в линейной дифференциальной игре с фиксированным моментом окончания. Там же, с. 127–158.
21. А.М.Тарасьев, В.Н.Ушаков. Построение системы множеств, аппроксимирующей максимальный минимаксно  $u$ -стабильный мост. Там же, с. 159–190.
22. М.А.Зарх, В.С.Пацко. Численное решение дифференциальной игры наведения третьего порядка. Известия АН СССР. Техническая кибернетика, N 6, 1987, с. 162–169.
23. А.М.Тарасьев, А.А.Успенский, В.Н.Ушаков. Приближенное построение множества позиционного поглощения в линейной задаче сближения с выпуклой целью в пространстве  $R^3$ . В сб.: Управление в динамических системах. Свердловск, 1990, с. 93–100.
24. Н.Д.Боткин, Е.А.Рязанцева. Алгоритм построения множества разрешимости в линейной дифференциальной игре высокой размерности. Труды института математики и механики, том 2, Екатеринбург, 1992, с. 128–134.
25. М.А.Зарх, А.Г.Иванов. Построение функции цены в линейной дифференциальной игре с фиксированным моментом окончания. Там же, с. 140–155.
26. Н.Д.Боткин, В.М.Кейн, В.С.Пацко. Модельная задача об управлении боковым движением самолета на посадке. Прикладная математика и механика, т. 48, вып. 4, 1984, с. 560–567.

27. Б.Н.Соколов, В.Л.Турова. Синтез оптимального управления маятником при наличии активных помех. Известия АН СССР. Механика твердого тела, N 5, 1988, с. 14–23.
28. N.D.Botkin, V.M.Kein, V.S.Patsko, and V.L.Turova. Aircraft landing control in the presence of windshear. Problems of Control and Information Theory, Vol. 18, No. 4, 1989, pp. 223–235.
29. Н.Д.Боткин, М.А.Зарх, В.М.Кейн, В.С.Пацко, В.Л.Турова. Дифференциальные игры и задачи управления самолетом при ветровых помехах. Известия РАН. Техническая кибернетика, N 1, 1993, с. 68–76.
30. В.Л.Турова. Применение численных методов теории дифференциальных игр к задачам о взлете и прекращении посадки самолета. Труды института математики и механики, том 2, Екатеринбург, 1992, с. 188–201.
31. В.Н.Ушаков. К задаче построения стабильных мостов в дифференциальной игре сближения-уклонения. Известия АН СССР. Техническая кибернетика, N 4, 1980, с. 29–36.
32. А.М.Тарасьев, В.Н.Ушаков, А.П.Хрипунов. Об одном вычислительном алгоритме решения игровых задач управления. Прикладная математика и механика, т. 51, N 2, 1987, с. 216–222.
33. А.И.Субботин, А.М.Тарасьев, В.Н.Ушаков. Обобщенные характеристики уравнений Гамильтона-Якоби. Известия РАН. Техническая кибернетика, N 1, 1993, с. 190–197.
34. В.А.Иванов, А.М.Тарасьев, В.Н.Ушаков, А.П.Хрипунов. Задача тореадора. Прикладная математика и механика, т. 57, вып. 3, 1993, с. 15–22.
35. А.А.Меликян. Необходимые условия оптимальности на поверхности разрыва одного типа в дифференциальной игре. Известия АН СССР. Техническая кибернетика, N 4, 1981, с. 10–18.
36. A.A.Melikyan. The Method of Characteristics for Constructing Singular Paths and Manifolds in Optimal Control and Differential Games. In: Lecture Notes in Control and Informational Science, Vol. 156, Springer, Berlin, 1991, pp. 81–90.
37. P.Bernhard. Linear Pursuit-Evasion Games and the Isotropic Rocket. PhD thesis, Stanford University, SUDAAR 413, 1970.
38. В.Л.Турова. Построение множества позиционного поглощения в линейной дифференциальной игре второго порядка с нефиксированным моментом окончания. В сб.: Управление с гарантированным результатом. Свердловск, 1987, с. 92–112.

39. В.С.Пацко. Модельный пример игровой задачи преследования с неполной информацией. I. Дифференциальные уравнения, т. VII, № 3, 1971, с. 424–435.
40. В.С.Пацко. Модельный пример игровой задачи преследования с неполной информацией. II. Дифференциальные уравнения, т. VIII, № 8, 1972, с. 1423–1434.
41. М.Ю.Филимонов. Сопряжение сингулярных линий в дифференциальной игре. В сб.: Исследования задач минимаксного управления. Свердловск, 1985, с. 117–124.
42. В.С.Пацко. Об одной дифференциальной игре второго порядка. Прикладная математика и механика, т. 35, № 4, 1971, с. 584–597.

# Оглавление

<b>Введение</b> . . . . .	3
<b>Список обозначений</b> . . . . .	4
<b>Глава 1. Линейные дифференциальные игры качества на плоскости</b> . . . . .	5
1. Постановка задачи . . . . .	5
2. Гладкие полупроницаемые кривые . . . . .	6
3. Семейства полупроницаемых кривых первого и второго типа . . . . .	8
4. Краткая схема алгоритма построения множества разрешимости $\mathcal{B}$ . Примеры решения игр качества . . . . .	10
<b>Глава 2. Нелинейная игра качества</b> . . . . .	27
1. Описание семейств полупроницаемых кривых . . . . .	27
2. Алгоритм построения множества разрешимости $\mathcal{B}$ . Примеры решения задачи качества . . . . .	32
3. Управления первого и второго игроков . . . . .	41
<b>Глава 3. Игровая задача быстродействия</b> . . . . .	45
1. Постановка задачи . . . . .	46
2. Основная идея алгоритма . . . . .	47
3. Примеры решения задач игрового быстродействия . . . . .	55
<b>Литература</b> . . . . .	73

**Валерий Семенович Пацко  
Варвара Леонидовна Турова**

**Численное решение дифференциальных игр  
на плоскости**

Препринт

Рекомендовано к изданию Ученым советом Института  
математики и механики и НИСО УрО РАН

ЛР N 020764 от 29.03.93

Ответственный за выпуск А. Г. Иванов

НИСО УрО РАН N 72(95)

Подписано в печать 28.04.95. Формат 60 × 84/16.

Печать офсетная. Усл. печ. л. 4,75. Уч-изд. л. 4,0. Тираж 100.

620 219, Екатеринбург, ГСП–384, Институт математики и механики  
УрО РАН