Российская Академия Наук
Уральское Отделение

Институт математики и механики

Препринт

В.С. Пацко

ПОВЕРХНОСТИ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯ В ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ

Екатеринбург

2004

УДК 62–50

Пацко В.С.
Поверхности переключения в линейных дифференциальных играх: Препринт.
ИММ УрО РАН. Екатеринбург, Россия, 2004, 80 с.

Рассматриваются линейные антагонистические дифференциальные игры с фиксированным моментом окончания, геометрическими ограничениями на управления игроков и непрерывной терминальной функцией платы. Предполагается, что ограничение на управление минимизирующего игрока представимо в виде независимых покомпонентных скалярных ограничений. Исследуется вопрос о построении оптимального управления обратной связи при помощи поверхностей переключения.

Доказываются утверждения о достаточных условиях, при выполнении которых такое построение возможно. Приводится список журнальных публикаций, связанных с прикладными задачами, где оптимальное управление реализовано при помощи поверхностей переключения. Работа может быть полезна для специалистов в области теории управления и ее приложений.

Ответственный редактор член-корр. РАН А.Г. Ченцов

Рецензент доктор физ.-мат. наук, проф. В.Н. Ушаков

П$\frac{53(04)}{8\Pi 6(03)1998}$БО

Введение

В инженерной практике типичны задачи управления движением, в которых компоненты u_i, $i = \overline{1,k}$, векторного управляющего воздействия стеснены независимыми ограничениями $|u_i| \leq \mu_i$. Для таких задач при нахождении управления, оптимизирующего заданный критерий, естественными являются способы, основанные на построении в фазовом пространстве поверхностей переключения. Каждая поверхность соответствует своей компоненте u_i управляющего воздействия и в текущий момент времени t разбивает фазовое пространство на две части: по одну сторону от поверхности переключения компонента $u_i(t)$ принимает значение $-\mu_i$, по другую – значение $+\mu_i$. Важным при этом является вопрос об устойчивости способа управления по отношению к малым погрешностям построения поверхностей переключения.

В работе рассматриваются линейные по динамике задачи конфликтного управления (линейные антагонистические дифференциальные игры) с фиксированным моментом окончания и непрерывной терминальной функцией платы. Векторное управляющее воздействие минимизирующего игрока стеснено независимыми покомпонентными ограничениями $|u_i| \leq \mu_i$. Описывается способ построения управления обратной связи при помощи поверхностей переключения. Формулируются и доказываются утверждения о достаточных условиях, при которых такой способ гарантирует минимизирующему игроку близкий к оптимальному результат и обладает свойством устойчивости.

В заключительной части работы дано краткое описание публикаций, посвященных компьютерному моделированию с использованием предложенного способа управления.

Автор благодарит Л.В. Камневу за внимательное прочтение рукописи и замечания.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 03-01-00415, 04-01-96099).

Основные обозначения

(1) – верхний индекс, показывающий, что рассматриваемое множество (матрица, функция и т.д.) относится к исходной дифференциальной игре;

(2) – верхний индекс, показывающий, что рассматриваемое множество (матрица, функция и т.д.) относится к аппроксимирующей дифференциальной игре;

u – векторное управляющее воздействие первого игрока;

P – ограничение на управляющее воздействие первого игрока;

k – число скалярных компонент управляющего воздействия первого игрока;

μ_i – ограничение по модулю на скалярную компоненту с номером i управления первого игрока;

$\mu = \sum\limits_{i=1}^{k} \mu_i$;

v – векторное управляющее воздействие второго игрока;

Q – ограничение на управляющее воздействие второго игрока;

ϑ – фиксированный момент окончания игры;

γ – терминальная функция платы;

λ – константа Липшица функции платы в аппроксимирующей игре;

T – промежуток игры;

$Z = T \times R^n$ – пространство игры;

U – стратегия первого игрока;

Δ – шаг дискретной схемы управления первого игрока;

K – множество допустимых программных управлений второго игрока;

Γ – гарантия первого игрока в дифференциальной игре;

$\mathbf{\Gamma}$ – функция цены дифференциальной игры;

$V^{(2)}$ – u-стабильная функция в аппроксимирующей игре;

$W_c^{(2)}$ – множество уровня функции $V^{(2)}$;

$\mathrm{Var}(V^{(2)}, [t_*, t^*])$ – приращение функции $V^{(2)}$ на промежутке $[t_*, t^*]$;

$B^{(3)}$ – вспомогательная матричная функция, заданная на промежутке T;

$B_i^{(3)}(t)$ – столбец с номером i матрицы $B^{(3)}(t)$;

β_i – константа Липшица функции $t \mapsto B_i^{(3)}(t)$;

β – максимальное из чисел β_i, $i = \overline{1,k}$;

σ_i – максимум модуля $|B_i^{(3)}(t)|$ на промежутке T;

σ – максимальное из чисел σ_i, $i = \overline{1,k}$;

$\chi(t_*, t^*)$ – интегральная характеристика различия динамик исходной и аппроксимирующей игр;

$\Pi(i,t)$ – соответствующая моменту t "поверхность" переключения первого игрока для i-ой компоненты управляющего воздействия;

$\Pi_-(i,t)$ – часть пространства R^n, расположенная по отрицательную сторону относительно "поверхности" $\Pi(i,t)$;

$\Pi_+(i,t)$ – часть пространства R^n, расположенная в положительную сторону относительно "поверхности" $\Pi(i,t)$;

$\mathbf{U}$ – многозначная стратегия первого игрока, определяемая на основе множеств $\Pi(i,t)$;

$\Pi^r(i,t)$ – геометрическая r-окрестность "поверхности" $\Pi(i,t)$;

$\mathbf{U}^r$ – многозначная стратегия первого игрока, определяемая на основе множеств $\Pi^r(i,t)$;

$\Pi^c(i,t)$ – c-окрестность "поверхности" $\Pi(i,t)$;

G – множество достижимости управляемой системы;

int – символ внутренности множества;

C_k^h – число сочетаний из k по h;

$\mathcal{G}(\mathcal{B})$ – подпространство, натянутое на совокупность $\mathcal{B}$ конечного числа векторов в R^n;

$q(F)$ – число элементов конечного набора F.

1. Постановка задачи и формулировка основных результатов

1.1. Предварительное описание задачи. Пусть линейная дифференциальная игра с фиксированным моментом окончания ϑ описывается соотношениями

$$\begin{gathered} \dot{y}(t) = B^{(1)}(t)u(t) + C^{(1)}(t)v(t), \\ y(t) \in R^n,\ u(t) \in P^{(1)},\ v(t) \in Q^{(1)};\ \gamma^{(1)}(y(\vartheta)). \end{gathered} \tag{1.1.1}$$

Здесь $y(t)$ – фазовый вектор, $u(t)$ – управляющее воздействие первого игрока, $v(t)$ – второго, матричные функции $B^{(1)}$, $C^{(1)}$ кусочно-непрерывны. Предполагаем, что множество $P^{(1)}$, ограничивающее управляющее воздействие первого игрока, представляет собой "прямоугольный параллелепипед" в пространстве R^k, т.е.

$$P^{(1)} := \{u \in R^k :\ |u_i| \leq \mu_i,\ \ i = \overline{1,k}\}.$$

При этом

$$\mu := \sum_{i=1}^{k} \mu_i > 0.$$

Множество $Q^{(1)}$, ограничивающее управляющее воздействие второго игрока, будем считать выпуклым компактом в конечномерном пространстве. Пусть $\gamma^{(1)} : R^n \longmapsto R,$ – непрерывная функция платы. Первый игрок минимизирует значения $\gamma^{(1)}(y(\vartheta))$ функции платы, интересы второго игрока противоположны.

Игру (1.1.1) будем называть исходной. Относящиеся к ней обозначения снабжаются верхним индексом (1).

Условимся, что начальные моменты t_0 для игры (1.1.1) принадлежат промежутку $T = [\vartheta_1, \vartheta]$, где $\vartheta_1 < \vartheta$. Пусть

$$Z := T \times R^n$$

– пространство игры.

Допустимым программным управлением $u(\cdot)$ $(v(\cdot))$ первого (второго) игрока назовем измеримую функцию времени $t \mapsto u(t)$ $(t \mapsto v(t))$, удовлетворяющую при любом t ограничению $u(t) \in P^{(1)}$ $(v(t) \in Q^{(1)})$. Пусть $K^{(1)}$ – совокупность всех допустимых программных управлений $v(\cdot)$ второго игрока.

Следуя книге [1], в качестве допустимых стратегий первого игрока рассмотрим произвольные функции $U : (t,\ x) \mapsto U(t,\ x)$, определенные на множестве Z со значениями в $P^{(1)}$. Символом $y^{(1)}(\cdot; t_0, x_0, U, \Delta, v(\cdot))$ обозначим пошаговое движение системы (1.1.1) из позиции (t_0, x_0), когда первый игрок применяет стратегию U в дискретной схеме управления [1] с шагом $\Delta > 0$, а за второго игрока реализуется управление $v(\cdot)$. Положим

$$\Gamma^{(1)}(t_0, x_0, U, \Delta) := \sup_{v(\cdot) \in K^{(1)}} \gamma^{(1)}(y^{(1)}(\vartheta; t_0, x_0, U, \Delta, v(\cdot))). \tag{1.1.2}$$

Величина $\Gamma^{(1)}(t_0, x_0, U, \Delta)$ имеет смысл гарантии, которую обеспечивает первому игроку стратегия U для начальной позиции (t_0, x_0) в дискретной схеме управления с шагом Δ. Наилучшая гарантия первого игрока для начальной позиции (t_0, x_0) определяется формулой

$$\mathbf{\Gamma}^{(1)}(t_0, x_0) := \min_{U} \overline{\lim_{\Delta \to 0}} \Gamma^{(1)}(t_0, x_0, U, \Delta), \tag{1.1.3}$$

где $\overline{\lim}$ означает верхний предел. В [1] показано, что минимум по U достигается. Отметим, что согласно формулам (1.1.2), (1.1.3) не исключается зависимость оптимальной стратегии первого игрока от начальной позиции (t_0, x_0).

Известно [1, 2], что наилучший гарантированный результат $\mathbf{\Gamma}^{(1)}(t_0, x_0)$ совпадает с симметрично определенным наилучшим гарантированным результатом второго игрока. Поэтому величину $\mathbf{\Gamma}^{(1)}(t_0, x_0)$ называют также значением функции цены в точке (t_0, x_0).

В работе будет показано, что при некоторых дополнительных условиях в игре (1.1.1) существует универсальная оптимальная стратегия U^* первого игрока, устойчивая по отношению к погрешностям ее численного задания.

Универсальность означает, что стратегия U^* является оптимальной для всех начальных позиций $(t_0, x_0) \in Z$. Подчеркнем, что речь идет об универсальности в "жестком" смысле: рассматриваемые стратегии являются функциями лишь от аргументов t, x. В классе стратегий, зависящих дополнительно от некоторого "параметра точности", существование оптимальных универсальных стратегий установлено для широкого класса задач в работе [3].

Универсальная оптимальная стратегия $(t, x) \mapsto U^*(t, x)$ определяется в работе при помощи "поверхностей переключения". В каждый момент

t каждой компоненте u_i, $i = \overline{1, k}$, управляющего воздействия u соответствует своя поверхность переключения. По одну сторону от поверхности переключения управление u_i принимает значение $-\mu_i$, по другую $+\mu_i$. На самой поверхности переключения оптимальное значение управления u_i можно брать любым из промежутка $[-\mu_i,\ \mu_i]$.

Вопрос о существовании универсальных оптимальных стратегий в дифференциальных играх кратко обсуждался в [1, стр. 48] и был заострен после работы [4], в которой приведен пример игровой задачи, где универсальная оптимальная стратегия не существует. В работах [5, 6] показано, что для линейных дифференциальных игр вида (1.1.1), но в случае, когда множество $P^{(1)}$ – отрезок (т.е. управляющее воздействие u является скалярным), устойчивая универсальная оптимальная стратегия первого (минимизируещего) игрока существует и может быть задана при помощи изменяющейся во времени поверхности переключения. В работах [7–10] установлено, что если множество $Q^{(1)}$ представляет собой отрезок (т.е. фактически управляющее воздействие v является скалярным), то существует универсальная оптимальная стратегия второго (максимизируещего) игрока и она также может быть задана при помощи поверхности переключения. Однако такая стратегия не обладает свойством устойчивости. Влияние потери устойчивости продемонстрировано при помощи компьютерного моделирования в статье [7].

Предлагаемые в работе конструкции обобщают построения, описанные в статьях [5, 6]. Другой подход к доказательству факта существования универсальной оптимальной стратегии для случая выпуклой функции платы намечен в статье [11].

Использование поверхностей переключения для построения управления по принципу обратной связи является очень естественным с инженерной точки зрения (применительно к игровым задачам см., например, [12]). Цель работы – выяснить условия, при которых в рассматриваемом классе дифференциальных игр получаем оптимальный и устойчивый способ управления.

Так же, как и в [5, 6], принята следующая схема рассуждений. Ориентируясь на компьютерные построения, подменяем исходную дифференциальную игру удобной аппроксимирующей игрой, для которой можем построить некоторую u-стабильную [1, 2] функцию или даже функцию цены игры. Обрабатывая такую функцию, получаем поверхности переключения. Применяем найденные поверхности переключения в исходной дифференциальной игре для задания универсальной стратегии первого игрока. Оцениваем гарантию первого игрока, которую он обеспечивает, используя построенную универсальную стратегию. В качестве следствия из такой оценки получаем результат, касающийся универсальной оптимальной устойчивой стратегии в игре (1.1.1).

Сделаем замечание о записи динамики линейной дифференциальной игры в виде (1.1.1). Особенность этой записи в том, что фазовая переменная не входит в правую часть. Пусть линейная дифференциальная игра с фиксированным моментом окончания ϑ имеет вид

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{y}(t) + \mathbf{B}(t)u(t) + \mathbf{C}(t)v(t),$$

$$\mathbf{y}(t) \in R^m, \ \ u(t) \in P^{(1)}, \ \ v(t) \in Q^{(1)}; \ \ \gamma(\mathbf{y}(\vartheta)).$$

Предположим, что функция платы γ определяется лишь значениями некоторых n координат, $n \le m$, фазового вектора в момент окончания. Тогда переход к виду (1.1.1) осуществляется [1, стр. 160; 13, стр. 354] при помощи стандартного преобразования

$$y(t) = X_{n,m}(\vartheta, t)\mathbf{y}(t),$$

где $X_{n,m}(\vartheta, t)$ – матрица $n \times m$, составленная из соответствующих n строк фундаментальной матрицы Коши для системы $\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{y}(t)$. При этом

$$B^{(1)}(t) = X_{n,m}(\vartheta, t)\mathbf{B}(t), \ \ C^{(1)}(t) = X_{n,m}(\vartheta, t)\mathbf{C}(t), \ \ \gamma^{(1)}(y(\vartheta)) = \gamma(\mathbf{y}(\vartheta)).$$

1.2. Аппроксимирующая игра. Наряду с игрой (1.1.1) рассмотрим еще одну дифференциальную игру

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= B^{(2)}(t)u(t) + C^{(2)}(t)v(t), \\ y(t) \in R^n, \ u(t) \in P^{(2)} = P^{(1)}, \ \ v(t) &\in Q^{(2)}; \ \gamma^{(2)}(y(\vartheta)) \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

с фиксированным моментом окончания ϑ. Игру (1.2.1) будем интерпретировать как удобную для компьютерных вычислений аппроксимацию игры (1.1.1). Здесь $y(t)$ – фазовый вектор, функции $B^{(2)}$ и $C^{(2)}$ кусочно-непрерывны. Множество $P^{(2)} = P^{(1)}$, ограничивающее управляющее воздействие первого игрока, такое же, как в игре (1.1.1), множество $Q^{(2)}$ – компакт в конечномерном пространстве. Функцию платы $\gamma^{(2)} : R^n \longmapsto R$, будем считать липшицевой с константой λ и удовлетворяющей условию $\gamma^{(2)}(x) \to \infty$ при $|x| \to \infty$. Первый игрок минимизирует значения $\gamma^{(2)}(y(\vartheta))$, второй максимизирует.

Принадлежность той или иной величины к аппроксимирующей игре подчеркивается верхним индексом (2). Допустимые программные управления $u(\cdot), v(\cdot)$ первого и второго игроков определим аналогично тому, как это сделано для игры (1.1.1). Обозначим через $K^{(2)}$ совокупность всех допустимых программных управлений $v(\cdot)$ второго игрока.

Будем считать, что в рамках аппроксимирующей игры (1.2.1) построена некоторая непрерывная u-стабильная функция $V^{(2)} : Z \longmapsto R$, удовлетворяющая краевому условию

$$V^{(2)}(\vartheta,\, x) = \gamma^{(2)}(x), \quad x \in R^n.$$

Согласно [1, 2], функцию $V^{(2)}$ называем u-стабильной, если для любой позиции $(t_*, x_*) \in Z$ по любому $t^* \in (t_*, \vartheta]$ и любому $v(\cdot) \in K^{(2)}$ найдется такое допустимое программное управление $u(\cdot)$ первого игрока, что для движения $y^{(2)}(t) = y^{(2)}(t; t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot))$ выполнено неравенство $V^{(2)}(t^*, y^{(2)}(t^*)) \leq V^{(2)}(t_*, x_*)$.

Предположим, что функция $V^{(2)}$ является липшицевой с константой λ. Если $V^{(2)}$ – функция цены игры (1.2.1), то свойство липшицевости вытекает [14, стр. 110−111] из условия, наложенного на функцию $\gamma^{(2)}$.

Пусть $B^{(3)}$ – матричная функция на T, каждый столбец $B_i^{(3)}$, $i = \overline{1,k}$, которой удовлетворяет условию Липшица с константой β_i. Содержательно функцию $B^{(3)}$ можно трактовать как липшицево приближение к функциям $B^{(1)}$ и $B^{(2)}$. Обозначим

$$\beta := \max_{i=\overline{1,k}} \beta_i; \quad \sigma_i := \max_{t \in T} |B_i^{(3)}(t)|,\ i = \overline{1,k}; \quad \sigma := \max_{i=\overline{1,k}} \sigma_i.$$

Считаем, что $\beta \geq 0$, $\sigma > 0$.

1.3. Условие 1. Сформулируем требование на функцию $V^{(2)}$, которое позволит ввести затем поверхности переключения.

Условие 1. *При любом $i = \overline{1,k}$ и любом $t \in T$, таком, что $B_i^{(3)}(t) \neq 0$, сужение функции $V^{(2)}(t, \cdot)$ на любую прямую в R^n, параллельную вектору $B_i^{(3)}(t)$, есть функция, множество точек минимума которой представляет собой отрезок (возможно, состоящий из одной точки) и которая является строго монотонной по обе стороны от этого отрезка.*

Условие 1 выполнено, в частности, если при любом $t \in T$ функция $V^{(2)}(t, \cdot)$ является выпуклой. В случае, когда $V^{(2)}$ – функция цены аппроксимирующей игры (1.2.1), для обеспечения выпуклости функций $V^{(2)}(t,\cdot)$, $t \in T$, достаточно потребовать выпуклость функции платы $\gamma^{(2)}$.

1.4. Поверхности переключения. Многозначная функция $\mathbf{U}^0$. Введем следующие обозначения. Для любых $i = \overline{1,k}$ и $(t,x) \in Z$ положим

$$\mathcal{A}(i,t,x) := \{z \in R^n : z = x + \alpha B_i^{(3)}(t),\ \alpha \in R\}, \tag{1.4.1}$$

$$\mathcal{V}(i,t,x) := \min_{z \in \mathcal{A}(i,t,x)} V^{(2)}(t,z). \tag{1.4.2}$$

Если $B_i^{(3)}(t) \neq 0$, то множество $\mathcal{A}(i,t,x)$ – прямая, проходящая в пространстве R^n через точку x параллельно вектору $B_i^{(3)}(t)$. При этом $\mathcal{V}(i,t,x)$ есть минимальное значение функции $V^{(2)}$ на прямой $\mathcal{A}(i,t,x)$. Минимум достигается в силу непрерывности функции $V^{(2)}(t,\cdot)$ и ее ухода в ∞ при $|x| \to \infty$. В силу условия 1 множество точек минимума представляет собой отрезок, который может состоять из одной точки. Если $B_i^{(3)}(t) = 0$, то множество $\mathcal{A}(i,t,x)$ является вырожденным и совпадает с точкой x. Значение $\mathcal{V}(i,t,x)$ в этом случае совпадает с $V^{(2)}(t,x)$.

Пусть далее для всех $i = \overline{1,k}$ и $t \in T$

$$\Pi(i,t) := \{x \in R^n : V^{(2)}(t,\ x) = \mathcal{V}(i,t,x)\}, \tag{1.4.3}$$

$$\Pi_-(i,t) := \{x \in R^n : x + \alpha B_i^{(3)}(t) \notin \Pi(i,t),\ \forall \alpha \geq 0\},$$

$$\Pi_+(i,t) := \{x \in R^n : x + \alpha B_i^{(3)}(t) \notin \Pi(i,t),\ \forall \alpha \leq 0\}.$$

Итак, множества $\Pi_-(i,t)$, $\Pi(i,t)$, $\Pi_+(i,t)$ определены на основе функции $V^{(2)}(t,\cdot)$ и вектора $B_i^{(3)}(t)$. Множества $\Pi_-(i,t)$, $\Pi_+(i,t)$ находятся в пространстве R^n по разные стороны относительно множества $\Pi(i,t)$. Из условия 1 следует, что при любом $(t,\ x) \in Z$ функция $V^{(2)}(t,\cdot)$ монотонно возрастает (монотонно убывает) в направлении вектора $B_i^{(3)}(t)$ на пересечении прямой $\mathcal{A}(i,\ t,\ x)$ с множеством $\Pi_-(i,\ t)$ $(\Pi_+(i,\ t))$.

Для каждого $i = \overline{1,k}$ определим на Z скалярную многозначную функцию

$$\mathbf{U}_i^0(t,x) := \begin{cases} \{-\mu_i\}, & x \in \Pi_-(i,t), \\ \{\mu_i\}, & x \in \Pi_+(i,t), \\ [-\mu_i, \mu_i], & x \in \Pi(i,t). \end{cases}$$

Функция $\mathbf{U}_i^0(t,\cdot)$ принимает крайние значения из отрезка $[-\mu_i,\mu_i]$ в множествах $\Pi_-(i,t)$, $\Pi_+(i,t)$ и "переключается" с одного крайнего значения на другое в множестве $\Pi(i,t)$. Хотя множество $\Pi(i,t)$ не всегда является в общепринятом смысле поверхностью в пространстве R^n, тем не менее, для наглядности будем называть его поверхностью переключения для i-ой компоненты управляющего воздействия в момент t.

Введем на Z векторную многозначную функцию

$$\mathbf{U}^0(t,x) := \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1^0(t,x) \\ \mathbf{U}_2^0(t,x) \\ \vdots \\ \mathbf{U}_k^0(t,x) \end{pmatrix}.$$

1.5. Множества $\Pi^r(i,t)$. Многозначная функция $\mathbf{U}^r$. Продолжим введение обозначений для формулировки основного результата работы.

Пусть $r \geq 0$. В случае $B_i^{(3)}(t) \neq 0$ положим

$$\Pi^r(i,t) := \{x \in R^n : x = z + \alpha \frac{B_i^{(3)}(t)}{|B_i^{(3)}(t)|},\ z \in \Pi(i,t),\ |\alpha| \leq r\}.$$

Множество $\Pi^r(i,t)$ является геометрическим r-расширением множества $\Pi(i,t)$. Расширение происходит с использованием вектора $B_i^{(3)}(t)$. Множество $\Pi^r(i,t)$ будем называть также r-окрестностью поверхности $\Pi(i,t)$. Если $B_i^{(3)}(t) = 0$, то примем $\Pi^r(i,t) = \Pi(i,t) = R^n$.

Введем множества

$$\Pi_-^r(i,t) := \{x \in R^n : x + \alpha B_i^{(3)}(t) \notin \Pi^r(i,t),\ \forall \alpha \geq 0\},$$

$$\Pi_+^r(i,t) := \{x \in R^n : x + \alpha B_i^{(3)}(t) \notin \Pi^r(i,t),\ \forall \alpha \leq 0\}.$$

Множество $\Pi_-^r(i,t)$ $(\Pi_+^r(i,t))$ представляет собой часть пространства R^n, расположенную относительно $\Pi^r(i,t)$ по (противоположно) направлению вектора $B_i^{(3)}(t)$. Очевидно, что

$$\Pi_-^r(i,t) \subset \Pi_-(i,t), \quad \Pi_+^r(i,t) \subset \Pi_+(i,t).$$

При $r = 0$ имеем $\Pi^r(i,t) = \Pi(i,t)$, $\Pi_-^r(i,t) = \Pi_-(i,t)$, $\Pi_+^r(i,t) = \Pi_+(i,t)$.

Для каждого $i = \overline{1,k}$ введем на Z скалярную многозначную функцию

$$\mathbf{U}_i^r(t,x) := \begin{cases} \{-\mu_i\}, & x \in \Pi_-^r(i,t), \\ \{\mu_i\}, & x \in \Pi_+^r(i,t), \\ [-\mu_i,\mu_i], & x \in \Pi^r(i,t). \end{cases}$$

Далее определим на Z векторную многозначную функцию

$$\mathbf{U}^r(t,x) := \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1^r(t,x) \\ \mathbf{U}_2^r(t,x) \\ \vdots \\ \mathbf{U}_k^r(t,x) \end{pmatrix}.$$

1.6. Условие 2. Сформулируем еще одно дополнительное условие.

Пусть I – обозначение множества индексов $\overline{1,k}$ и F – произвольное подмножество I. Для любого $(t,x) \in Z$ положим

$$\mathcal{A}(F,t,x) := \{z \in R^n : z = x + \sum_{i \in F} \alpha_i B_i^{(3)}(t),\ \alpha_i \in R\},$$

$$\mathcal{V}(F,t,x) := \min_{z \in \mathcal{A}(F,t,x)} V^{(2)}(t,z). \tag{1.6.1}$$

Множество $\mathcal{A}(F,t,x)$ представляет собой плоскость в пространстве R^n, проходящую через точку x. Плоскость порождается совокупностью векторов $B_i^{(3)}(t)$, $i \in F$, и ее размерность равна числу линейно независимых векторов этой совокупности. В формуле (1.6.1) минимум достигается в силу свойств функции $V^{(2)}(t,\cdot)$. При этом множество точек минимума – компактное множество.

Для всех $F \subset I$ и $t \in T$ пусть

$$\Pi(F,t) := \{x \in R^n : V^{(2)}(t,\ x) = \mathcal{V}(F,t,x)\}.$$

Нетрудно видеть, что если $F_1 \subset F_2$, то $\Pi(F_2,t) \subset \Pi(F_1,t)$. В частности, при любом $i \in F$ имеем

$$\Pi(F,t) \subset \Pi(i,t).$$

Следовательно,

$$\Pi(F,t) \subset \bigcap_{i \in F} \Pi(i,t).$$

Дополнительное предположение о задаче будет состоять в требовании противоположного вложения.

Условие 2. *Для любого $t \in T$ и любого подмножества $F \subset I$ имеет место вложение*

$$\bigcap_{i \in F} \Pi(i,t) \subset \Pi(F,t).$$

Условие 2 выполнено в случае, когда множество $P^{(1)}$ – отрезок, т.е. в случае скалярного управления первого игрока. В нескалярном случае условие 2 означает, что любая точка, общая для "индивидуальных " поверхностей $\Pi(i,t),\ i \in F$, должна лежать в множестве $\Pi(F,t)$.

Будем использовать обозначения $\mathcal{A}(F,t,x)$, $\mathcal{V}(F,t,x)$, $\Pi(F,t)$ и для случая $F = \varnothing$. Примем

$$\mathcal{A}(\varnothing,t,x) := x, \quad \mathcal{V}(\varnothing,t,x) := V^{(2)}(t,x), \quad \Pi(\varnothing,t) := R^n.$$

Содержательное пояснение этому может быть следующее. Добавим к имеющимся компонентам $u_i,\ i = \overline{1,k}$, управляющего воздействия компоненту u_{k+1}, но при этом положим $B^{(1)}_{k+1}(t) = B^{(2)}_{k+1}(t) = B^{(3)}_{k+1}(t) \equiv 0$. Тогда для F, состоящего из индекса $k+1$, имеем $\mathcal{A}(F,t,x) = x,\ \ \mathcal{V}(F,t,x) = V^{(2)}(t,x),\ \ \Pi(F,t) = R^n$. Такое F в фиктивно расширенном множестве компонент управляющего воздействия равносильно пустому множеству при работе с исходным множеством индексов компонент управляющего воздействия.

1.7. Формулировка основных результатов. Для любых моментов t_*, t^* из промежутка T положим

$$\begin{aligned}\chi(t_*,t^*) := \sum_{i=1}^{k} \mu_i \int\limits_{t_*}^{t^*} (|B^{(1)}_i(t) - B^{(3)}_i(t)| + |B^{(2)}_i(t) - B^{(3)}_i(t)|)dt + \\ + \int\limits_{t_*}^{t^*} \max_{\ell \in R^n,\ |\ell| \le 1} \big[\max_{q \in Q^{(1)}} \ell' C^{(1)}(t) q - \max_{q \in Q^{(2)}} \ell' C^{(2)}(t) q\big] dt.\end{aligned} \tag{1.7.1}$$

Величина $\chi(t_*,t^*)$ характеризует в интегральном смысле различие функций $B^{(1)}_i$, $B^{(2)}_i$, $B^{(3)}_i$ при каждом $i = \overline{1,k}$, а также функций $C^{(1)}$, $C^{(2)}$ и множеств $Q^{(1)}$, $Q^{(2)}$. Верхний индекс штрих означает транспонирование.

Предполагая, что начальные позиции системы (1.1.1) принадлежат некоторому компактному множеству $\mathcal{Y}$ в пространстве игры Z, символом $\mathcal{M}$ обозначим компактное множество в R^n, оценивающее сверху множество возможных состояний системы (1.1.1) в момент ϑ. Примем

$$\|\gamma^{(1)} - \gamma^{(2)}\|_{\mathcal{M}} := \max_{x \in \mathcal{M}} |\gamma^{(1)}(x) - \gamma^{(2)}(x)|.$$

В работе будет доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия, наложенные на системы* (1.1.1), (1.2.1), *а также на функции* $V^{(2)}$ *и* $B^{(3)}$, *включая условия* 1, 2. *Тогда по любому* $\varepsilon > 0$ *найдутся такие положительные числа* $r(\varepsilon)$ *и* $\Delta(\varepsilon)$, *что для любой стратегии* U *первого игрока, представляющей собой однозначную выборку из многозначной функции* $\mathbf{U}^{r(\varepsilon)}$, *любой начальной позиции* $(t_0, x_0) \in \mathcal{Y}$ *и любого шага* $\Delta \leq \Delta(\varepsilon)$ *дискретной схемы управления справедлива оценка*

$$\Gamma^{(1)}(t_0, x_0, U, \Delta) \leq V^{(2)}(t_0, x_0) + \varepsilon + \lambda\chi(t_0, \vartheta) + \|\gamma^{(1)} - \gamma^{(2)}\|_{\mathcal{M}}. \quad (1.7.2)$$

Сделаем некоторые пояснения к теореме. Проводя построения в рамках аппроксимирующей игры, знаем значение $V^{(2)}(t_0, x_0)$ функции $V^{(2)}$ в начальной позиции (t_0, x_0). Поэтому в правой части оценки (1.7.2) стоит $V^{(2)}(t_0, x_0)$. Различие динамик исходной и аппроксимирующей игр, а также отличие функции $B^{(3)}$ от функций $B^{(1)}$ и $B^{(2)}$ учитываются величиной $\chi(t_0, \vartheta)$. Слагаемое $\|\gamma^{(1)} - \gamma^{(2)}\|_{\mathcal{M}}$ характеризует различие функций платы. Множества переключения $\Pi^{r(\varepsilon)}(i, t)$, $i = \overline{1, k}$, $t \in T$, для многозначной функции $\mathbf{U}^{r(\varepsilon)}$ определяются через построения, осуществляемые при помощи функций $V^{(2)}$ и $B^{(3)}$.

В целом, правая часть (1.7.2) оценивает гарантию первого игрока в игре (1.1.1), когда он использует с шагом Δ произвольную однозначную стратегию U, являющуюся выборкой из многозначной функции $\mathbf{U}^{r(\varepsilon)}$.

Поскольку при любых $i = \overline{1, k}$ и $t \in T$ справедливо вложение $\Pi(i, t) \subset \Pi^{r(\varepsilon)}(i, t)$, то стратегия U совпадает вне множества $\Pi^{r(\varepsilon)}(i, t)$ с функцией $\mathbf{U}^0$, задаваемой при помощи поверхностей $\Pi(i, t)$. Пусть U^0 – некоторая однозначная выборка многозначной функции $\mathbf{U}^0$. Из сказанного выше получаем, что действие стратегии U^0, осуществляемое с покомпонетными ошибками в множествах $\Pi^{r(\varepsilon)}(i, t)$, $i = \overline{1, k}$, $t \in T$, также оценивается правой частью (1.7.2). Поэтому можем говорить об устойчивости стратегии U^0 по отношению к неточностям построения поверхностей $\Pi(i, t)$ или по отношению к информационным ошибкам замера положения вектора $y(t)$ относительно поверхностей $\Pi(i, t)$.

Допустим, что аппроксимирующая игра совпадает с исходной и функция $B^{(3)}$ совпадает с функцией $B^{(1)}$. Тогда $\chi(t_0, \vartheta) = 0$, $\|\gamma^{(1)} - \gamma^{(2)}\|_{\mathcal{M}} = 0$. Пусть, кроме того, в качестве u-стабильной функции $V^{(2)}$ используется функция цены $\mathbf{\Gamma}^{(1)}$ исходной игры и выполнены условия 1, 2. Получим в результате

$$\Gamma^{(1)}(t_0, x_0, U, \Delta) \leq V^{(1)}(t_0, x_0) + \varepsilon.$$

Это означает, что любая однозначная стратегия U^0, определяемая при помощи поверхностей $\Pi(i,t)$, является универсальной оптимальной стратегией в игре (1.1.1) и обладает свойством устойчивости.

Стало быть, если функция $B^{(1)}$, а также функция платы $\gamma^{(1)}$ удовлетворяют условию Липшица, если поверхности переключения $\Pi(i,t)$, $i=\overline{1,k},\ t\in T$, строятся в рамках исходной игры (1.1.1) и выполнены условия 1, 2, то в качестве универсальной оптимальной стратегии U^* можно взять стратегию U^0.

Доказательству теоремы 1 при $\beta>0$ посвящены разделы $2-8$. Случай $\beta=0$ анализируется в разделе 9 и использует результаты разделов 2, 3.

Теорема 1 не дает какого-либо рецепта по выбору чисел $r(\varepsilon)$ и $\Delta(\varepsilon)$. Поэтому оценка (1.7.2) не является конструктивной.

В случае $k=1$, т.е. когда управляющее воздействие u первого игрока является скалярным с ограничением $|u|\le\mu$, можно дать явную оценку гарантии первого игрока. В разделе 10 будет доказано следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть при* $k=1$ *выполнены условия, наложенные на системы* (1.1.1), (1.2.1), *а также на функции* $V^{(2)}$ *и* $B^{(3)}$, *включая условие* 1. *Пусть* $r\ge0$, $\Delta>0$. *Тогда для любой стратегии* U *первого игрока, представляющей собой однозначную выборку из многозначной функции* $\mathbf{U}^r$, *и любой начальной позиции* $(t_0,x_0)\in\mathcal{Y}$ *справедлива оценка*

$$\Gamma^{(1)}(t_0,x_0,U,\Delta)\le V^{(2)}(t_0,x_0)+2\lambda\sqrt{(2\sigma\mu\Delta+r)\beta\mu}\,(\vartheta-t_0)+$$
$$+4\lambda\sigma\mu\Delta+\lambda r+\lambda\chi(t_0,\vartheta)+\|\gamma^{(1)}-\gamma^{(2)}\|_{\mathcal{M}}.$$

2. Основная лемма

2.1. Понятие близости данного вектора к совокупности других векторов. Пусть $\zeta > 0$. Скажем, что вектор $a \in R^n$ является ζ-близким к совокупности векторов $b_i \in R^n$, $i = \overline{1, s}$, $s \geq 1$, если проекция вектора a на ортогональное дополнение в R^n к линейному подпространству, натянутому на векторы b_i, $i = \overline{1, s}$, не превышает по модулю числа ζ.

Вектор $a \in R^n$ назовем ζ-малым, если $|a| \leq \zeta$. Таким образом, ζ-малость вектора a означает его ζ-близость к нулевому вектору.

Для $F \subset I$, $\zeta > 0$ и $t \in T$ символом $\mathcal{H}(F, \zeta, t)$ обозначим совокупность всех индексов $j \in I \setminus F$, для каждого из которых вектор $B_j^{(3)}(t)$ является ζ-близким к совокупности векторов $B_i^{(3)}(t)$, $i \in F$. Если $F = \varnothing$, то $\mathcal{H}(F, \zeta, t)$ будет означать совокупность всех $j \in I$, для каждого из которых вектор $B_j^{(3)}(t)$ является ζ-малым.

2.2. Формулировка леммы и комментарий. Для компактных множеств X, Y в R^n пусть

$$\hat{d}(X, Y) := \max_{x \in X} \min_{y \in Y} |x - y|$$

– хаусдорфово отклонение множества X от множества Y. Положим

$$G_v^{(i)}(t_*, t^*) := \bigcup_{v(\cdot) \in K^{(i)}} \int_{t_*}^{t^*} C^{(i)}(t) v(t) dt, \qquad i = 1, 2.$$

Множества $G_v^{(1)}(t_*, t^*), G_v^{(2)}(t_*, t^*)$ – выпуклые компакты. Справедлива оценка

$$\begin{gathered} \hat{d}(G_v^{(1)}(t_*, t^*), G_v^{(2)}(t_*, t^*)) \leq \\ \leq \int_{t_*}^{t^*} \max_{|\ell| \leq 1} \big[\max_{q \in Q^{(1)}} \ell' C^{(1)}(t) q - \max_{q \in Q^{(2)}} \ell' C^{(2)}(t) q \big] dt. \end{gathered} \tag{2.2.1}$$

Символом $G^{(1)}(t, t_*, x_*)$ обозначим множество достижимости системы (1.1.1) в момент t при начальном состоянии x_* в момент t_* и при переборе всех допустимых программных управлений $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ на промежутке $[t_*, t]$.

Аналогично символом $G^{(2)}(t, t_*, x_*)$ обозначим множество достижимости системы (1.2.1) в момент t. Положим

$$G^{(2)\natural}(t, t_*, x_*) := G^{(2)}(t, t_*, x_*) + B(2(t - t_*)\sigma\mu).$$

Здесь $B(r)$ – шар радиуса r в R^n.

(У.2.2.1) Основная лемма. *Пусть* $(t_*, x_*) \in Z,\ \delta > 0,\ t_* + \delta \le \vartheta$. *Зафиксируем набор* $F \subset I$ *и число* $\zeta > 0$. *Выберем некоторое множество* $H \subset \mathcal{H}(F,\, \zeta,\, t_* + \delta)$. *Предположим, что для всех* $i \in I \setminus (F \cup H)$ *и* $t \in [t_*,\, t_* + \delta]$ *имеют место соотношения*

$$G^{(1)}(t, t_*, x_*) \cap \Pi(i, t) = \varnothing, \quad G^{(2)\natural}(t, t_*, x_*) \cap \Pi(i, t) = \varnothing. \qquad (2.2.2)$$

Зададим далее число $\omega \in [0,\, \delta]$, *и пусть* $y^{(1*)}(\cdot)$ – *движение системы* (1.1.1) *в силу допустимых программных управлений* $u(\cdot),\ v(\cdot)$, *выходящее в момент* t_* *из точки* x_*, *причем для любого* $i \in I \setminus (F \cup H)$ *и любого* $t \in [t_* + \omega,\, t_* + \delta]$ *в случае* $x_* \in \Pi_+(i, t_*)$ *выполнено равенство* $u_i(t) = \mu_i$, *а в случае* $x_* \in \Pi_-(i, t_*)$ – *равенство* $u_i(t) = -\mu_i$. *Тогда справедлива оценка*

$$\begin{gathered} \mathcal{V}(F,\, t_* + \delta,\, y^{(1*)}(t_* + \delta)) \le V^{(2)}(t_*, x_*) + \lambda\delta^2 \sum_{i=1}^{k} \beta_i \mu_i + \\ +2\lambda\zeta\delta \sum_{i \in H} \mu_i + 2\lambda\omega \sum_{i \notin F \cup H} \sigma_i \mu_i + \lambda\chi(t_*,\, t_* + \delta). \end{gathered} \qquad (2.2.3)$$

Смысл этого утверждения в том, что величина $\mathcal{V}(F,\, t_*{+}\delta,\, y^{(1*)}(t_*{+}\delta))$ не слишком возрастает по сравнению со значением функции $V^{(2)}$ в позиции (t_*, x_*), несмотря на то, что на промежутке $[t_*,\, t_* + \delta]$ для индексов $i \in F$ действует произвольное допустимое управление $u_i(\cdot)$. Для индексов $j \in H$ управление $u_j(\cdot)$ также является произвольным. В случае $i \notin F \cup H$ предполагается, что на промежутке $[t_* + \omega,\, t_* + \delta]$ действует постоянное "правильное" управление первого игрока, соответствующее той части пространства относительно поверхности $\Pi(i, t_*)$, где находится точка x_* (т.е. $\Pi_+(i, t_*)$, либо $\Pi_-(i, t_*)$). По условию, движение $y^{(1*)}(t)$, выходя в момент t_* из точки $x_* \notin \Pi(i, t_*),\ i \notin F \cup H$, не может попасть на $\Pi(i, t)$ ни при каком $t \in [t_*,\, t_* + \delta]$.

2.3. Доказательство леммы. Символом $W_c^{(2)}$ обозначим множество уровня (множество Лебега) функции $V^{(2)}$, соответствующее числу c. Сечение в момент t обозначим $W_c^{(2)}(t)$.

По заданному в условии леммы управлению $v(\cdot) \in K^{(1)}$ определим в множестве $G_v^{(1)}(t_*,\, t_* + \delta)$ точку

$$g := \int_{t_*}^{t_*+\delta} C^{(1)}(t) v(t) dt.$$

Пусть $\overline{g}$ – ближайшая к ней точка множества $G_v^{(2)}(t_*,\, t_*+\delta)$. Выберем $\overline{v}(\cdot) \in K^{(2)}$ так, что

$$\overline{g} = \int\limits_{t_*}^{t_*+\delta} C^{(2)}(t)\overline{v}(t)dt.$$

Положим $c_* := V^{(2)}(t_*, x_*)$.

Используя u-стабильность функции $V^{(2)}$, по управлению $\overline{v}(\cdot)$ найдем такое $\overline{u}(\cdot)$, что для движения $y^{(2*)}(t) := y^{(2*)}(t;\, t_*, x_*, \overline{u}(\cdot), \overline{v}(\cdot))$, выходящего в момент t_* из точки x_*, выполнено включение

$$y^{(2*)}(t_*+\delta) \in W_{c_*}^{(2)}(t_*+\delta). \tag{2.3.1}$$

1. Обозначим

$$J_1 := \int\limits_{t_*}^{t_*+\delta} B^{(1)}(t)u(t)dt - \int\limits_{t_*}^{t_*+\delta} B^{(2)}(t)\overline{u}(t)dt,$$

$$J_2 := \int\limits_{t_*}^{t_*+\delta} C^{(1)}(t)v(t)dt - \int\limits_{t_*}^{t_*+\delta} C^{(2)}(t)\overline{v}(t)dt.$$

Тогда

$$y^{(1*)}(t_*+\delta) - y^{(2*)}(t_*+\delta) = J_1 + J_2.$$

Имеем

$$\begin{gathered} J_1 = \sum_{i=1}^{k} \int\limits_{t_*}^{t_*+\delta} (B_i^{(1)}(t) - B_i^{(3)}(t))u_i(t)\,dt - \\ -\sum_{i=1}^{k} \int\limits_{t_*}^{t_*+\delta} (B_i^{(2)}(t) - B_i^{(3)}(t))\overline{u}_i(t)\,dt + \\ +\sum_{i=1}^{k} \int\limits_{t_*}^{t_*+\delta} (B_i^{(3)}(t) - B_i^{(3)}(t_*+\delta))(u_i(t) - \overline{u}_i(t))\,dt + \\ +\sum_{i=1}^{k} B_i^{(3)}(t_*+\delta) \int\limits_{t_*}^{t_*+\delta} (u_i(t) - \overline{u}_i(t))dt, \end{gathered} \tag{2.3.2}$$

$$J_2 = g - \overline{g}. \tag{2.3.3}$$

2. Для каждого $i \notin F \cup H$ введем на промежутке $[t_*,\, t_* + \delta]$ вспомогательное постоянное управление $u_{*i}(\cdot)$ равное постоянному значению управления $u_i(\cdot)$ на промежутке $[t_* + \omega,\, t_* + \delta]$.

Обозначим

$$\hat{z} := y^{(2*)}(t_* + \delta) + \sum_{i \notin F \cup H} B_i^{(3)}(t_* + \delta) \int\limits_{t_*}^{t_*+\delta} (u_{*i}(t) - \overline{u}_i(t))dt.$$

Опираясь на оценку (2.2.1) и предположение о виде управления $u_i(\cdot)$ на промежутке $[t_* + \omega,\, t_* + \delta]$, $\;i \in I \setminus (F \cup H)$, докажем, что

$$V^{(2)}(t_* + \delta,\; \hat{z}) \le V^{(2)}(t_* + \delta,\, y^{(2*)}(t_* + \delta)). \tag{2.3.4}$$

Действительно, предположение

$$G^{(1)}(t, t_*, x_*) \cap \Pi(i, t) = \varnothing, \quad i \notin F \cup H, \quad t \in [t_*,\, t_* + \delta],$$

означает, что любое движение системы (1.1.1) для каждого $i \notin F \cup H$ либо принадлежит $\Pi_+(i, t)$ на всем промежутке $[t_*,\, t_*+\delta]$, либо принадлежит $\Pi_-(i, t)$ также на всем этом промежутке. Первый случай возникает тогда, когда $x_* \in \Pi_+(i, t_*)$, второй, когда $x_* \in \Pi_-(i, t_*)$. Из условия, наложенного на управляющее воздействие $u_i(t)$, $\;i \notin F \cup H$, получаем, что $u_{*i}(t) \equiv \mu_i$ в первом случае и $u_{*i}(t) \equiv -\mu_i$ во втором.

Обратимся теперь к условию

$$G^{(2)\natural}(t, t_*, x_*) \cap \Pi(i, t) = \varnothing, \quad i \notin F \cup H, \quad t \in [t_*,\, t_* + \delta].$$

Из этого условия следует, что для каждого $i \notin F \cup H$ в случае $x_* \in \Pi_+(i, t_*)$ выполнено вложение

$$G^{(2)\natural}(t_* + \delta, t_*, x_*) \subset \Pi_+(i, t_* + \delta),$$

а в случае $x_* \in \Pi_-(i, t_*)$ – вложение

$$G^{(2)\natural}(t_* + \delta, t_*, x_*) \subset \Pi_-(i, t_* + \delta).$$

Пронумеруем в произвольном порядке индексы $i \notin F \cup H :\; i_1, i_2, ..., i_s$. Возьмем первый индекс i_1. Предположим, что $x_* \in \Pi_+(i_1, t_*)$. Тогда

$$y^{(2*)}(t_* + \delta) \in \Pi_+(i_1, t_* + \delta),$$

$$z_{i_1} := y^{(2*)}(t_* + \delta) +$$

$$+B_{i_1}^{(3)}(t_* + \delta) \int\limits_{t_*}^{t_*+\delta} (\mu_{i_1} - \overline{u}_{i_1}(t))dt \in G^{(2)\natural}(t_* + \delta, t_*, x_*) \subset \Pi_+(i_1, t_* + \delta).$$

Поскольку $\mu_{i_1} \geq \overline{u}_{i_1}(t),\ \ t \in [t_*, t_* + \delta]$, то отсюда следует, что

$$V^{(2)}(t_* + \delta,\ z_{i_1}) \leq V^{(2)}(t_* + \delta,\ y^{(2*)}(t_* + \delta)).$$

Аналогично рассуждаем в случае $x_* \in \Pi_-(i_1, t_*)$, только теперь воспользуемся неравенством $-\mu_{i_1} \leq \overline{u}_{i_1}(t),\ \ t \in [t_*,\ t_* \ +\ \delta]$.

Перейдем ко второму индексу i_2. Предположим, что $x_* \in \Pi_+(i_2, t_*)$. Тогда

$$z_{i_1} \in \Pi_+(i_2, t_* + \delta),$$

$$z_{i_2} := z_{i_1} + B_{i_2}^{(3)}(t_* + \delta) \int\limits_{t_*}^{t_*+\delta} (\mu_{i_2} - \overline{u}_{i_2}(t))dt \in G^{(2)\natural}(t_* + \delta, t_*, x_*) \subset \Pi_+(i_2, t_* + \delta).$$

Поскольку $\mu_{i_2} \geq \overline{u}_{i_2}(t),\ \ t \in [t_*,\ t_* + \delta]$, то отсюда следует, что

$$V^{(2)}(t_* + \delta,\ z_{i_2}) \leq V^{(2)}(t_* + \delta,\ z_{i_1}).$$

Аналогично в случае $x_* \in \Pi_-(i_2, t_*)$.

Продолжая последовательно такой процесс до последнего индекса i_s, придем к цепочке неравенств

$$V^{(2)}(t_* + \delta,\ z_{i_s})\ \leq\ V^{(2)}(t_* + \delta,\ z_{i_{s-1}})\ \leq ...$$

$$... \leq V^{(2)}(t_* + \delta,\ z_{i_1})\ \leq\ V^{(2)}(t_* + \delta,\ y^{(2*)}(t_* + \delta)).$$

Стало быть,

$$V^{(2)}(t_* + \delta,\ \hat{z}) = V^{(2)}(t_* + \delta,\ z_{i_s})\ \leq\ V^{(2)}(t_* + \delta,\ y^{(2*)}(t_* + \delta)).$$

Неравенство (2.3.4) доказано.

В силу (2.3.1) из (2.3.4) получаем включение

$$\hat{z} \in W_{c_*}^{(2)}(t_* + \delta). \tag{2.3.5}$$

3. Используя обозначения, введенные формулами (2.3.2) и (2.3.3), имеем

$$y^{(1*)}(t_* + \delta) - \hat{z} = y^{(1*)}(t_* + \delta) - y^{(2*)}(t_* + \delta) -$$

$$
-\sum_{i\notin F\cup H} B_i^{(3)}(t_*+\delta)\int\limits_{t_*}^{t_*+\delta}(u_{*i}(t)-\overline{u}_i(t))dt=
$$

$$
=J_1+J_2-\sum_{i\notin F\cup H} B_i^{(3)}(t_*+\delta)\int\limits_{t_*}^{t_*+\delta}(u_{*i}(t)-\overline{u}_i(t))dt.
$$

Символом π обозначим оператор ортогонального проектирования пространства R^n на подпространство, ортогональное подпространству, натянутому на векторы $B_i^{(3)}(t_*+\delta),\ i\in F$.

Примем во внимание, что управления $u_i(t)$ и $\overline{u}_i(t)$ ограничены по модулю числом μ_i, а каждая из функций $B_i^{(3)}$ удовлетворяет условию Липшица с константой β_i. Учтем также, что $\pi B_i^{(3)}(t_*+\delta)=0$ при $i\in F$, а любой вектор $B_j^{(3)}(t_*+\delta),\ \ j\in H$, является ζ-близким к совокупности векторов $B_i^{(3)}(t_*+\delta),\ i\in F$.

Получим

$$
|\pi J_1-\pi\sum_{i\notin F\cup H} B_i^{(3)}(t_*+\delta)\int\limits_{t_*}^{t_*+\delta}(u_{*i}(t)-\overline{u}_i(t))dt|\le
$$

$$
\le\sum_{i=1}^{k}\mu_i\int\limits_{t_*}^{t_*+\delta}(|B_i^{(1)}(t)-B_i^{(3)}(t)|+|B_i^{(2)}(t)-B_i^{(3)}(t)|)dt+
$$

$$
+\delta^2\sum_{i=1}^{k}\beta_i\mu_i+2\zeta\delta\sum_{i\in H}\mu_i+
$$

$$
+|\pi\sum_{i\notin F\cup H} B_i^{(3)}(t_*+\delta)\int\limits_{t_*}^{t_*+\delta}(u_i(t)-u_{*i}(t))dt|.
$$

В силу (2.3.3) и (2.2.1), имеем

$$
|\pi J_2|=|\pi(g-\overline{g})|\le|g-\overline{g}|\le
$$

$$
\le\int\limits_{t_*}^{t_*+\delta}\max_{|\ell|\le1}\big[\max_{q\in Q^{(1)}}\ell' C^{(1)}(t)q-\max_{q\in Q^{(2)}}\ell' C^{(2)}(t)q\big]dt.
$$

Учитывая определение функций $u_{*i}(t)$ на $[t_*,\, t_*+\delta]$, а также неравенства $|B_i^{(3)}(t_*+\delta)| \le \sigma_i,\ i \notin F \cup H$, получим

$$|\pi \sum_{i \notin F \cup H} B_i^{(3)}(t_*+\delta) \int\limits_{t_*}^{t_*+\delta} (u_i(t) - u_{*i}(t))dt| =$$

$$= |\pi \sum_{i \notin F \cup H} B_i^{(3)}(t_*+\delta) \int\limits_{t_*}^{t_*+\omega} (u_i(t) - u_{*i}(t))dt| \le 2\omega \sum_{i \notin F \cup H} \sigma_i \mu_i.$$

Окончательно приходим к неравенству

$$\begin{aligned} |\pi y^{(1*)}(t_*+\delta) - \pi \hat{z}| \le \delta^2 \sum_{i=1}^{k} \beta_i \mu_i + 2\zeta\delta \sum_{i \in H} \mu_i + \\ +2\omega \sum_{i \notin F \cup H} \sigma_i \mu_i + \chi(t_*,\, t_*+\delta). \end{aligned} \tag{2.3.6}$$

Пусть $\tilde{x}$ – ближайшая к множеству $W_{c_*}^{(2)}(t_*+\delta)$ точка на плоскости $\mathcal{A}(F,\, t_*+\delta,\, y^{(1*)}(t_*+\delta))$. Из (2.3.5) и определения оператора π следует, что

$$\hat{d}(\{\tilde{x}\},\, W_{c_*}^{(2)}(t_*+\delta)) \le |\tilde{x} - \hat{z}| \le |\pi\tilde{x} - \pi\hat{z}| = |\pi y^{(1*)}(t_*+\delta) - \pi\hat{z}|.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} V^{(2)}(t_*+\delta,\, \tilde{x}) \le c_* + \lambda|\pi y^{(1*)}(t_*+\delta) - \pi\hat{z}| = \\ = V^{(2)}(t_*, x_*) + \lambda|\pi y^{(1*)}(t_*+\delta) - \pi\hat{z}|. \end{aligned}$$

С учетом (2.3.6), требуемое неравенство (2.2.3) вытекает из того, что $\mathcal{V}(F,\, t_*+\delta,\, y^{(1*)}(t_*+\delta)) \le V^{(2)}(t_*+\delta,\, \tilde{x})$. □

2.4. Замечания.

1) Рассмотрим вырожденный случай, когда $F = \varnothing$. В этом случае множество H состоит из индексов $i = \overline{1,k}$, для каждого из которых $|B_i^{(3)}(t_*+\delta)| \le \zeta$. Оценка (2.2.3) сохраняет прежний вид, но при этом

$$\mathcal{V}(F,\, t_*+\delta,\, y^{(1*)}(t_* + \delta)) = V^{(2)}(t_*+\delta,\, y^{(1*)}(t_*+\delta)).$$

Таким образом, в вырожденном случае $F = \varnothing$ имеем

$$\begin{aligned} V^{(2)}(t_*+\delta,\, y^{(1*)}(t_*+\delta)) \le V^{(2)}(t_*, x_*) + \lambda\delta^2 \sum_{i=1}^{k} \beta_i \mu_i + \\ +2\lambda\zeta\delta \sum_{i \in H} \mu_i + 2\lambda\omega \sum_{i \notin H} \sigma_i \mu_i + \lambda\chi(t_*,\, t_*+\delta). \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

2) Пусть множество F таково, что число линейно независимых векторов $B_i^{(3)}(t_*+\delta),\ i \in F$, равно n, т.е. совпадает с размерностью пространства R^n. Тогда

$$\mathcal{V}(F,\, t_*{+}\delta,\, y^{(1*)}(t_*{+}\delta)) = \min_{z\in R^n} V^{(2)}(t_*{+}\delta,\, z) \le \min_{z\in R^n} V^{(2)}(t_*, z) \le V^{(2)}(t_*, x_*).$$

Стало быть,

$$\mathcal{V}(F,\, t_* + \delta,\, y^{(1*)}(t_* + \delta)) \le V^{(2)}(t_*, x_*).$$

При этом управления $u_i(\cdot),\ i \notin F$, на промежутке $[t_*,\, t_* + \delta]$, как и управления $u_i(\cdot),\ i \in F$, могут быть произвольными.

2.5. Оценка изменения функции $V^{(2)}$ в частном случае. Сформулируем утверждение, вытекающее из оценки (2.4.1).

(У.2.5.1) *Пусть $(t_*, x_*) \in Z,\ \ t^* \in (t_*, \vartheta]$. Зададим число $\zeta > 0$ и выберем множество индексов $H \subset I$ так, чтобы при любом $j \in H$ и любом $t \in [t_*, t^*]$ выполнялось неравенство $|B_j^{(3)}(t)| \le \zeta$. Пусть $0 \le \omega \le t^* - t_*$, и вдоль движения $y^{(1*)}(\cdot)$, выходящего в момент t_* из точки x_*, для любого $i \in I \setminus H$ либо $y^{(1*)}(t) \in \Pi_+(i,t)$ на промежутке $[t_*,\, t^*]$ и при этом $u_i(t) = \mu_i$ на $[t_* + \omega,\, t^*]$, либо $y^{(1*)}(t) \in \Pi_-(i,t)$ на промежутке $[t_*,\, t^*]$ и при этом $u_i(t) = -\mu_i$ на $[t_* + \omega,\, t^*]$. Тогда при любом $t \in [t_*, t^*]$ справедлива оценка*

$$\begin{aligned} V^{(2)}(t,\, y^{(1*)}(t)) \ \le\ & V^{(2)}(t_*, x_*) + 2\lambda\zeta(t - t_*) \sum_{i\in H} \mu_i + \\ & +2\lambda\omega \sum_{i\notin H} \sigma_i\mu_i + \lambda\chi(t_*, t). \end{aligned} \tag{2.5.1}$$

Доказательство. Разобъем промежуток $[t_*, t^*]$ моментами $t_s,\ s = \overline{1, e}$, $t_1 = t_*,\ \ t_e = t^*$, с шагом δ так, чтобы для любого промежутка $[t_s,\, t_{s+1}]$, $s = 1, 2, ..., e-1$, полученного разбиения при $t \in [t_s,\, t_{s+1}],\ i \notin H$ были выполнены условия

$$G^{(1)}(t, t_s, y^{(1*)}(t_s)) \cap \Pi(i,t) = \varnothing, \quad G^{(2)\natural}(t, t_s, y^{(1*)}(t_s)) \cap \Pi(i,t) = \varnothing.$$

Это можно сделать, опираясь на предположение, наложенное на расположение $y^{(1*)}(t)$ относительно поверхностей $\Pi(i,t),\ i \notin H$.

В силу (2.4.1) имеем при каждом s, для которого $t_s > t_* + \omega$, соотношение

$$\begin{aligned} V^{(2)}(t_{s+1},\, y^{(1*)}(t_{s+1})) \ \le\ & V^{(2)}(t_s,\, y^{(1*)}(t_s)) + \\ & +\lambda\delta^2 \sum_{i=1}^{n} \beta_i\mu_i + 2\lambda\zeta\delta \sum_{i\in H} \mu_i + \lambda\chi(t_s,\, t_{s+1}). \end{aligned} \tag{2.5.2}$$

Для s таких, что $t_s \in [t_*,\, t_* + \omega]$, в силу (2.4.1) получаем

$$\begin{aligned} V^{(2)}(t_{s+1},\, y^{(1*)}(t_{s+1})) \ \le \ & V^{(2)}(t_s,\, y^{(1*)}(t_s)) + \lambda\delta^2 \sum_{i=1}^{n} \beta_i\mu_i + \\ & +2\lambda\zeta\delta \sum_{i\in H} \mu_i + 2\lambda\delta \sum_{i\notin H} \sigma_i\mu_i + \lambda\chi(t_s,\, t_{s+1}). \end{aligned} \tag{2.5.3}$$

Применяя последовательно оценки (2.5.2), (2.5.3) для $s = 1, 2, ..., e-1$, приходим к неравенству

$$V^{(2)}(t^*,\, y^{(1*)}(t^*)) \ \le \ V^{(2)}(t_*,\, x_*) + \lambda(t^* - t_*)\delta \sum_{i=1}^{k} \beta_i\mu_i +$$

$$+2\lambda\zeta(t^* - t_*) \sum_{i\in H} \mu_i + 2\lambda(\omega + \delta) \sum_{i\notin H} \sigma_i\mu_i + \lambda\chi(t_*, t^*).$$

Переходя к пределу при $\delta \to 0$, получим оценку (2.5.1). □

Применим только что доказанное утверждение к случаю, когда все управляющие воздействия $u_i(t),\ i = \overline{1,k}$, являются произвольными на $[t_*, t^*]$ и какая-то специально оговоренная малость векторов $B_i^{(3)}(t)$, $i = \overline{1,k},\ \ t \in [t_*, t^*]$, не подразумевается. За характеристику малости возьмем величину

$$\zeta = \sigma = \max_{i=\overline{1,k},\ t\in T} |B_i^{(3)}(t)|.$$

Справедливо следующее утверждение.

(У.2.5.2) *Пусть $(t_*, x_*) \in Z,\ t^* \in (t_*, \vartheta]$. Пусть движение $y^{(1*)}(\cdot)$ на $[t_*, t^*]$, выходящее в момент t_* из точки x_*, порождается произвольными допустимыми программными управлениями $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ первого и второго игроков. Тогда при любом $t \in [t_*, t^*]$ справедлива оценка*

$$V^{(2)}(t,\, y^{(1*)}(t)) \ \le \ V^{(2)}(t_*, x_*) + 2\lambda\sigma\mu(t - t_*) + \lambda\chi(t_*, t). \tag{2.5.4}$$

3. Множества $\Pi^c(F,t)$

3.1. Определение множеств $\Pi^c(F,t)$. Множества $\Pi(i,t)$, введенные формулами (1.4.1) – (1.4.3), обладают свойством полунепрерывности сверху по аргументу t. Однако полунепрерывности снизу по t может не быть, причем даже в случае, когда вектор $B_i^{(3)}(t)$, при помощи которого строится множество $\Pi(i,t)$, не обращается в нуль на промежутке T.

Множества $\Pi^r(i,t)$ представляют собой геометрическое r-расширение множеств $\Pi(i,t)$, поэтому для них также есть полунепрерывность сверху по t, но может отсутствовать полунепрерывность снизу. Таким образом, к сожалению, нельзя говорить о непрерывном изменении множеств $\Pi^r(i,t)$ по аргументу t.

В связи с этим рассмотрим еще один вариант расширения множеств $\Pi(i,t)$, но только при помощи величины c, которая в отличие от r будет означать не расстояние по или против вектора $B_i^{(3)}(t)$, а перепад значений функции $V^{(2)}$. А именно, для всех $i=\overline{1,k},\ \ t\in T$ и $c\geq 0$ положим

$$\Pi^c(i,t):=\{x\in R^n: V^{(2)}(t,x)-\mathcal{V}(i,t,x)\leq c\}. \tag{3.1.1}$$

При $c=0$ имеем равенство $\Pi^c(i,t)=\Pi(i,t)$.

Множество $\Pi^c(i,t)$ условимся называть c-окрестностью поверхности $\Pi(i,t)$ и будем отличать его от множества $\Pi^r(i,t)$, т.е. от r-окрестности поверхности $\Pi(i,t)$.

Нам потребуются также множества

$$\Pi^c(F,t):=\{x\in R^n: V^{(2)}(t,x)-\mathcal{V}(F,t,x)\leq c\}, \tag{3.1.2}$$

которые будем рассматривать для всех $F\subset I,\ \ t\in T$ и $c\geq 0$. Формула (3.1.1) есть частный случай (3.1.2), когда F состоит из одного элемента.

Если $c_*<c^*$, то

$$\Pi^{c_*}(F,t)\subset \mathrm{int}\Pi^{c^*}(F,t).$$

Здесь int – символ внутренности множества.

Ниже будет показано, что если при любом t из некоторого замкнутого промежутка $\mathcal{T}\subset T$ векторы $B_i^{(3)}(t),\ \ i\in F$, линейно независимы, то функция $(t,x)\mapsto\mathcal{V}(F,t,x)$ непрерывна на множестве $\mathcal{T}\times R^n$. Будет доказано свойство полунепрерывности сверху множеств $\Pi^c(F,t)$ при $c\geq 0,\ \ t\in T$. Будет установлено, что если на замкнутом подмножестве $\mathcal{T}\subset T$ вектор $B_i^{(3)}(t)$ не обращается в нуль, то многозначная функция $(c,t)\mapsto\Pi^c(i,t)$ непрерывна на $c>0,\ \ t\in\mathcal{T}$.

3.2. Непрерывность функций $\mathcal{V}(F,\,\cdot,\,\cdot)$. В этом подразделе докажем следующее утверждение.

(У.3.2.1) *При любом наборе $F \subset I$ справедливо свойство полунепрерывности сверху функции $(t,x) \mapsto \mathcal{V}(F,t,x)$ на множестве Z. Если же для некоторого замкнутого промежутка $\mathcal{T} \subset T$ векторы $B_i^{(3)}(t)$, $i \in F$, линейно независимы при любом $t \in \mathcal{T}$, то функция $(t,x) \mapsto \mathcal{V}(F,t,x)$ на множестве $\mathcal{T} \times R^n$ будет обладать и свойством полунепрерывности снизу.*

Доказательство. Предварительно отметим в качестве очевидного факта полунепрерывность снизу многозначной функции $(t,x) \mapsto \mathcal{A}(F,t,x)$ на множестве $T \times R^n$ и ее полунепрерывность сверху на множестве $\mathcal{T} \times R^n$ при дополнительном предположении о линейной независимости векторов $B_i^{(3)}(t)$, $i \in F$, для каждого $t \in \mathcal{T}$.

1. Рассмотрим в множестве Z произвольную последовательность $(t_n, x_n) \to (t^*, x^*)$. Покажем, что

$$\varlimsup_{n\to\infty} \mathcal{V}(F,\, t_n,\, x_n) \le \mathcal{V}(F,\, t^*,\, x^*). \tag{3.2.1}$$

Пусть точка z^* на плоскости $\mathcal{A}(F,\, t^*,\, x^*)$ такова, что $V^{(2)}(t^*, z^*) = \mathcal{V}(F,\, t^*,\, x^*)$. Из полунепрерывности снизу функции $\mathcal{A}(F,\,\cdot,\,\cdot)$ следует существование при каждом $n = 1, 2, ...$ такого $z_n \in \mathcal{A}(F,\, t_n,\, x_n)$, что $z_n \to z^*$. Например, можно взять

$$z_n = x_n + \sum_{i\in F} b_i^* B_i^{(3)}(t_n),$$

где коэффициенты b_i^*, $i \in F$, удовлетворяют равенству

$$z_* = x_* + \sum_{i\in F} b_i^* B_i^{(3)}(t^*).$$

Поскольку $\mathcal{V}(F,\, t_n,\, x_n) \le V^{(2)}(t_n, z_n)$, то

$$\varlimsup_{n\to\infty} \mathcal{V}(F,\, t_n,\, x_n) \le \lim_{n\to\infty} V^{(2)}(t_n, z_n) = V^{(2)}(t^*, z^*) = \mathcal{V}(F,\, t^*,\, x^*).$$

Таким образом, соотношение (3.2.1), выражающее полунепрерывность сверху функции $\mathcal{V}(F,\,\cdot,\,\cdot)$, установлено.

2. Предположим теперь линейную независимость векторов $B_i^{(3)}(t)$, $i \in F$, при любом t из замкнутого промежутка $\mathcal{T} \subset T$. Выберем произвольную последовательность $(t_n, x_n) \to (t^*, x^*)$, $(t_n, x_n) \in \mathcal{T} \times R^n$. Докажем неравенство

$$\varliminf_{n\to\infty} \mathcal{V}(F,\, t_n,\, x_n) \ge \mathcal{V}(F,\, t^*,\, x^*). \tag{3.2.2}$$

Пусть для каждого $n = 1, 2, \ldots$ точка z_n на плоскости $\mathcal{A}(F,\, t_n,\, x_n)$ такова, что $V^{(2)}(t_n, z_n) = \mathcal{V}(F,\, t_n,\, x_n)$.

A) Вначале установим ограниченность последовательности z_n. Свойство ограниченности есть следствие бесконечного роста $|\gamma^{(2)}(x)| \to \infty$ функции платы $\gamma^{(2)}$ при $|x| \to \infty$.

Имеем $V^{(2)}(t_n, x_n) \to V^{(2)}(t^*, x^*)$. Задав $\kappa > 0$, выберем номер N так, что при $n \geq N$ выполнено неравенство

$$V^{(2)}(t_n, x_n) \leq V^{(2)}(t^*, x^*) + \kappa.$$

Рассмотрим множество уровня $M^{(2)}_{\kappa^*} := \{x \in R^n : \gamma^{(2)}(x) \leq \kappa^*\}$ функции $\gamma^{(2)}$, соответствующее числу $\kappa^* := V^{(2)}(t^*, x^*) + \kappa$. Множество $M^{(2)}_{\kappa^*}$ ограничено. Но тогда равномерно по $t \in T$ ограничено множество $W^{(2)}_{\kappa^*}(t)$. Поскольку $z_n \in W^{(2)}_{\kappa^*}(t_n)$, то последовательность z_n ограничена.

B) Из последовательности z_n выделим сходящуюся подпоследовательность z_k, реализующую нижний предел $\varliminf\limits_{n\to\infty} V^{(2)}(t_n, z_n)$. Пусть $z_k \to \overline{z}$. Тогда

$$\begin{aligned} \varliminf_{n\to\infty} \mathcal{V}(F,\, t_n,\, x_n) &= \varliminf_{n\to\infty} V^{(2)}(t_n, z_n) = \\ &= \lim_{k\to\infty} V^{(2)}(t_k, z_k) = V^{(2)}(t^*,\, \overline{z}). \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

В силу предположения о линейной независимости при каждом $t \in \mathcal{T}$ векторов $B^{(3)}_i(t)$, $i \in F$, имеем полунепрерывность сверху функции $\mathcal{A}(F,\, \cdot,\, \cdot)$ на множестве $\mathcal{T} \times R^n$. Поэтому из условий $z_k \in \mathcal{A}(F,\, t_k,\, x_k)$ и $z_k \to \overline{z}$ вытекает включение $\overline{z} \in \mathcal{A}(F,\, t^*,\, x^*)$. Следовательно,

$$V^{(2)}(t^*,\, \overline{z}) \geq \mathcal{V}(F,\, t^*,\, x^*).$$

В итоге, с учетом (3.2.3) имеем

$$\varliminf_{n\to\infty} \mathcal{V}(F,\, t_n,\, x_n) = V^{(2)}(t^*,\, \overline{z}) \geq \mathcal{V}(F,\, t^*,\, x^*).$$

Таким образом, соотношение (3.2.2), означающее полунепрерывность снизу функции $\mathcal{V}(F,\, \cdot,\, \cdot)$, доказано. □

3.3. Полунепрерывность сверху отображения $(c, t) \mapsto \Pi^c(F, t)$. Непрерывность отображения $(c, t) \mapsto \Pi^c(i, t)$.

(У.3.3.1) *При любом наборе $F \subset I$ отображение $(c, t) \mapsto \Pi^c(F, t)$ полунепрерывно сверху на множестве $c \geq 0,\ t \in T$.*

Доказательство. Зафиксируем произвольные $c^* \geq 0,\ t^* \in T$ и рассмотрим произвольные последовательности $c_n \to c^*,\ t_n \to t^*$. Для каждого $n = 1, 2, \ldots$ выберем $z_n \in \Pi^{c_n}(F, t_n)$ и предположим, что $z_n \to z^*$. Покажем, что $z^* \in \Pi^{c^*}(F, t^*)$. Это и будет означать полунепрерывность сверху.

Имеем
$$V^{(2)}(t_n, z_n) - \mathcal{V}(F,\, t_n,\, z_n) \leq c_n,$$
т.е.
$$V^{(2)}(t_n, z_n) \leq c_n + \mathcal{V}(F,\, t_n,\, z_n).$$
Отсюда с учетом полунепрерывности сверху функции $\mathcal{V}(F,\, \cdot,\, \cdot)$ получаем
$$V^{(2)}(t^*, z^*) = \lim_{n\to\infty} V^{(2)}(t_n, z_n) \leq \lim_{n\to\infty} c_n + \overline{\lim_{n\to\infty}} \mathcal{V}(F,\, t_n,\, z_n) \leq$$
$$\leq c^* + \mathcal{V}(F,\, t^*,\, z^*).$$
Таким образом,
$$V^{(2)}(t^*, z^*) - \mathcal{V}(F,\, t^*,\, z^*) \leq c^*.$$
Следовательно, $z^* \in \Pi^{c^*}(F, t^*)$. □

(У.3.3.2) *Пусть $i \in I$ и на некотором замкнутом промежутке $\mathcal{T} \subset\ T$ вектор $B_i^{(3)}(t)$ не обращается в нуль. Тогда на множестве $c > 0,\ t \in \mathcal{T}$ отображение $(c, t) \mapsto \Pi^c(i, t)$ непрерывно.*

Доказательство. С учетом (У.3.3.1) достаточно установить полунепрерывность снизу отображения $(c, t) \mapsto \Pi^c(i, t)$ на множестве $c > 0$, $t \in \mathcal{T}$.

Пусть заданы $c^* > 0,\ t^* \in \mathcal{T}$ и некоторые последовательности $c_n \to c^*$, $t_n \to t^*$, где $t_n \in \mathcal{T}$. Возьмем произвольное $z^* \in \Pi^{c^*}(i, t^*)$. Покажем возможность выбора таких $z_n \in \Pi^{c_n}(i, t_n)$, что $z_n \to z^*$. Это и будет означать полунепрерывность снизу.

Зададим точку $y^* \in \mathcal{A}(i,\, t^*,\, z^*)$ так, что $V^{(2)}(t^*, y^*) = \mathcal{V}(i,\, t^*,\, z^*)$. Имеем $V^{(2)}(t^*, y^*) \leq V^{(2)}(t^*, z^*)$.

1. Рассмотрим случай $V^{(2)}(t^*, y^*) < V^{(2)}(t^*, z^*)$. Тогда $y^* \neq z^*$. Отметим, что для любой точки z на прямой, проходящей через y^* и z^*, выполнено равенство $\mathcal{V}(i,\, t^*,\, z) = \mathcal{V}(i,\, t^*,\, z^*)$.

Зафиксируем положительное $\kappa < c^*$. Используя непрерывность функций $\mathcal{V}(i,\, \cdot,\, y^*)$ и $V^{(2)}(\cdot,\, y^*)$, выберем номер $\widetilde{N}$ так, чтобы при любом $n \geq \widetilde{N}$ выполнялись неравенства
$$\mathcal{V}(i,\, t_n,\, y^*) \geq \mathcal{V}(i,\, t^*,\, y^*) - \frac{\kappa}{2}, \quad V^{(2)}(t_n,\, y^*) \leq V^{(2)}(t^*,\, y^*) + \frac{\kappa}{2}, \quad c_n \geq \kappa.$$

Тогда при $n \geq \widetilde{N}$ имеем

$$V^{(2)}(t_n,\, y^*) - \mathcal{V}(i,\, t_n,\, y^*) \leq V^{(2)}(t^*,\, y^*) + \frac{\kappa}{2} - \mathcal{V}(i,\, t^*,\, y^*) + \frac{\kappa}{2} = \kappa \leq c_n.$$

Таким образом,

$$V^{(2)}(t_n,\, y^*) - \mathcal{V}(i, t_n, y^*) \leq c_n, \quad n \geq \widetilde{N}. \tag{3.3.1}$$

Далее считаем $n \geq \widetilde{N}$.

Рассмотрим на отрезке $[y^*, z^*]$ точки z, для которых

$$V^{(2)}(t_n, z) - \mathcal{V}(i,\, t_n,\, z) \leq c_n. \tag{3.3.2}$$

В силу (3.3.1), по крайней мере, одна такая точка $z = y^*$ есть. Используя непрерывность функций $V^{(2)}(t_n, \cdot)$ и $\mathcal{V}(i,\, t_n,\, \cdot)$, выберем среди точек $z \in [y^*, z^*]$, удовлетворяющих (3.3.2), ближайшую к z^* и обозначим ее z_n. Отметим, что если $z_n \neq z^*$, то в (3.3.2) для такой точки реализуется равенство.

Покажем, что $z_n \to z^*$. Предположим противное, т.е. существование подпоследовательности $z_k \to \hat{z}$, $\hat{z} \neq z^*$. Считаем, что $z_k \neq z^*$ при любом k. Тогда, используя в (3.3.2) нижний индекс k вместо индекса n и символ z_k вместо z, получаем равенство. А именно,

$$V^{(2)}(t_k, z_k) - \mathcal{V}(i,\, t_k,\, z_k) = c_k. \tag{3.3.3}$$

Положим

$$\eta := V^{(2)}(t^*, z^*) - V^{(2)}(t^*, \hat{z}).$$

С учетом условия 1 и неравенства $V^{(2)}(t^*, y^*) < V^{(2)}(t^*, z^*)$ имеем $\eta > 0$. Выберем $\overline{N}$ так, чтобы при любом $k \geq \overline{N}$ выполнялись неравенства

$$\begin{gathered} \mathcal{V}(i,\, t_k,\, z_k) \geq \mathcal{V}(i,\, t^*,\, \hat{z}) - \frac{\eta}{4} = \mathcal{V}(i,\, t^*,\, z^*) - \frac{\eta}{4}, \\ V^{(2)}(t_k, z_k) \leq V^{(2)}(t_*, \hat{z}) + \frac{\eta}{4}, \qquad c_k \geq c^* - \frac{\eta}{4}. \end{gathered} \tag{3.3.4}$$

Опираясь на (3.3.3) и (3.3.4), получаем

$$V^{(2)}(t^*, z^*) - \mathcal{V}(i,\, t^*,\, z^*) = V^{(2)}(t^*, z^*) - V^{(2)}(t_*, \hat{z}) + V^{(2)}(t_*, \hat{z}) -$$

$$- V^{(2)}(t_k, z_k) + V^{(2)}(t_k, z_k) - \mathcal{V}(i,\, t_k,\, z_k) + \mathcal{V}(i,\, t_k,\, z_k) - \mathcal{V}(i,\, t^*,\, z^*) \geq$$

$$\geq \eta - \frac{\eta}{4} + c_k - \frac{\eta}{4} \geq \eta - \frac{\eta}{4} + c^* - \frac{\eta}{4} - \frac{\eta}{4} = c^* + \frac{\eta}{4}.$$

Неравенство

$$V^{(2)}(t^*, z^*) - \mathcal{V}(i,\, t^*,\, z^*) \geq c^* + \frac{\eta}{4}$$

противоречит включению $z^* \in \Pi^{c^*}(i, t^*)$.

Таким образом, доказано, что $z_n \to z^*$. При этом $z_n \in \Pi^{c_n}(i, t_n)$.

2. Рассмотрим случай $V^{(2)}(t^*, y^*) = V^{(2)}(t^*, z^*)$. Имеем

$$V^{(2)}(t^*, z^*) - \mathcal{V}(i,\, t^*,\, z^*) = 0.$$

Используя непрерывность функций $V^{(2)}(\cdot, z^*)$ и $\mathcal{V}(i,\, \cdot,\, z^*)$, выберем $\widehat{N}$ так, чтобы при любом $n \geq \widehat{N}$ выполнялись неравенства

$$V^{(2)}(t_n, z^*) - \mathcal{V}(i,\, t_n,\, z^*) \leq \frac{c^*}{2}, \quad c_n \geq \frac{c^*}{2}.$$

Тогда

$$V^{(2)}(t_n, z^*) - \mathcal{V}(i,\, t_n,\, z^*) \leq c_n.$$

Последнее неравенство означает, что $z^* \in \Pi^{c_n}(i, t_n)$ при $n \geq \widehat{N}$. Поэтому в искомой последовательности можно взять $z_n = z^*$ для $n \geq \widehat{N}$. $\square$

3.4. Утверждение о ненулевом расстоянии между частью множества $\Pi^{c_*}(\mathfrak{F}_1, t)$, расположенной вне множества $\Pi^{\overline{c}}(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2, t)$, и множеством $\Pi^{c_*}(\mathfrak{F}_2, t)$. Сформулируем следствие из утверждений (У.3.2.1), (У.3.3.1). При этом символ d будет означать расстояние между множествами:

$$d(A, B) := \inf\{|a - b| : a \in A,\ b \in B\}.$$

(У.3.4.1) *Пусть $F \subset I$ — некоторый набор, состоящий более чем из одного элемента, и $\mathcal{T}$ — замкнутый промежуток из T. Предположим, что совокупность векторов $B_i^{(3)}(t)$, $i \in F$, линейно независима при любом $t \in \mathcal{T}$. Зафиксируем число $\overline{c} > 0$. Разложим множество F на непересекающиеся подмножества $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$. Тогда для любого ограниченного множества $\mathcal{X} \subset R^n$ существуют такие положительные числа c_* и e_*, что*

$$d\Bigg(\Big(\Pi^{c_*}(\mathfrak{F}_1, t) \cap \mathcal{X}\Big) \setminus \mathrm{int}\Pi^{\overline{c}}(F, t),\ \ \Pi^{c_*}(\mathfrak{F}_2, t)\Bigg) \geq e_*$$

для всех $t \in \mathcal{T}$.

Доказательство. Предполагая противное, выберем последовательности положительных чисел $c_n \to 0$, $e_n \to 0$, а затем последовательности моментов времени $t_n \in \mathcal{T}$ и точек

$$z_{1n} \in (\Pi^{c_n}(\mathfrak{F}_1, t_n) \cap \mathcal{X}) \setminus \mathrm{int}\Pi^{\overline{c}}(F, t_n), \quad z_{2n} \in \Pi^{c_n}(\mathfrak{F}_2, t_n)$$

так, что $|z_{1n} - z_{2n}| \leq e_n$. Используя ограниченность множеств $\mathcal{T}$ и $\mathcal{X}$, выделим сходящиеся подпоследовательности $t_k \to t_*$, $z_{1k} \to z_*$. Для соответствующей подпоследовательности z_{2k} точек z_{2n} получаем $z_{2k} \to z_*$.

В силу полунепрерывности сверху отображений $(c,t) \mapsto \Pi^c(\mathfrak{F}_1, t)$, $(c,t) \mapsto \Pi^c(\mathfrak{F}_2, t)$ имеем

$$z_* \in \Pi(\mathfrak{F}_1, t_*), \quad z_* \in \Pi(\mathfrak{F}_2, t_*).$$

Отсюда, опираясь на условие 2, заключаем, что $z_* \in \Pi(F, t_*)$, и значит

$$V^{(2)}(t_*, z_*) = \mathcal{V}(F,\, t_*,\, z_*). \tag{3.4.1}$$

Используя непрерывность функций $V^{(2)}$ и $\mathcal{V}(F,\, \cdot,\, \cdot)$ на $\mathcal{T} \times R^n$, выберем номер N так, чтобы при $k \geq N$ выполнялись неравенства

$$|V^{(2)}(t_k, z_{1k}) - V^{(2)}(t_*, z_*)| \leq \frac{\overline{c}}{4}, \tag{3.4.2}$$

$$|\mathcal{V}(F,\, t_k,\, z_{1k}) - \mathcal{V}(F,\, t_*,\, z_*)| \leq \frac{\overline{c}}{4}. \tag{3.4.3}$$

На основе соотношений (3.4.1)–(3.4.3) при $k \geq N$ получаем

$$V^{(2)}(t_k, z_{1k}) - \mathcal{V}(F,\, t_k,\, z_{1k}) =$$

$$= V^{(2)}(t_k, z_{1k}) - V^{(2)}(t_*, z_*) + \mathcal{V}(F,\, t_*,\, z_*) - \mathcal{V}(F,\, t_k,\, z_{1k}) \leq$$

$$\leq |V^{(2)}(t_k, z_{1k}) - V^{(2)}(t_*, z_*)| + |\mathcal{V}(F,\, t_*,\, z_*) - \mathcal{V}(F,\, t_k,\, z_{1k})| \leq 2 \cdot \frac{\overline{c}}{4} = \frac{\overline{c}}{2}.$$

Неравенство

$$V^{(2)}(t_k, z_{1k}) - \mathcal{V}(F,\, t_k,\, z_{1k}) \leq \frac{\overline{c}}{2}, \quad k \geq N,$$

означает, что

$$z_{1k} \in \Pi^{\overline{c}/2}(F, t_k), \quad k \geq N.$$

Поскольку $\Pi^{\overline{c}/2}(F, t_k) \subset \mathrm{int}\Pi^{\overline{c}}(F, t_k)$, то получаем противоречие с предположением $z_{1k} \notin \mathrm{int}\Pi^{\overline{c}}(F, t_k)$. $\square$

3.5. Многозначная функция $\mathbf{U}^c$. Положим для $c \geq 0$, $i = \overline{1, k}$, $t \in T$

$$\Pi_-^c(i,t) := \{x \in R^n : x + \alpha B_i^{(3)}(t) \notin \Pi^c(i,t),\ \forall \alpha \geq 0\},$$

$$\Pi_+^c(i,t) := \{x \in R^n : x + \alpha B_i^{(3)}(t) \notin \Pi^c(i,t),\ \forall \alpha \leq 0\}.$$

При каждом $i = \overline{1, k}$ введем на Z скалярную многозначную функцию

$$\mathbf{U}_i^c(t,x) := \begin{cases} \{-\mu_i\}, & x \in \Pi_-^c(i,t), \\ \{\mu_i\}, & x \in \Pi_+^c(i,t), \\ [-\mu_i, \mu_i], & x \in \Pi^c(i,t). \end{cases}$$

Определим на Z векторную многозначную функцию

$$\mathbf{U}^c(t,x) := \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1^c(t,x) \\ \mathbf{U}_2^c(t,x) \\ \vdots \\ \mathbf{U}_k^c(t,x) \end{pmatrix}.$$

4. Показатели независимости и зависимости векторов $B_i^{(3)}(t)$

Как видно из предыдущего раздела, полезным при рассмотрении какой-либо совокупности векторов $B_i^{(3)}(t)$, $i \in F$, на промежутке T было бы свойство линейной независимости векторов $B_i^{(3)}(t)$, $i \in F$, при любом $t \in T$. Однако у нас нет предположений, гарантирующих такое свойство. Более того, подобные предположения не являются естественными. Например, линейная независимость нарушается, если хотя бы один вектор $B_i^{(3)}(t)$ рассматриваемой совокупности обращается в нуль в некоторый момент $t \in T$. Чтобы различать случаи близкие к ситуации линейной зависимости от случаев грубой линейной независимости нам потребуется несколько понятий. Сформулируем их для произвольной совокупности векторов в R^n, а применять будем для векторов $B_i^{(3)}(t)$.

4.1. Показатели независимости и зависимости. Рассмотрим в пространстве R^n конечную совокупность $\mathcal{B}$ векторов b_i, $i = \overline{1, s}$, $s \geq 1$. Символом $\mathcal{G}(\mathcal{B})$ обозначим подпространство, натянутое на совокупность векторов $\mathcal{B}$. Пусть $\alpha > 0$.

Совокупность $\mathcal{B}$ при $s \geq 2$ назовем независимой с показателем α, если

$$d(b_i, \mathcal{G}(\mathcal{B} \setminus b_i)) \geq \alpha, \quad i = \overline{1, s}.$$

Отметим, что независимость с показателем α влечет за собой обычную линейную независимость. Очевидно также, что любая конечная совокупность линейно независимых векторов является независимой с некоторым показателем $\alpha > 0$.

В случае $s = 1$ под независимостью с показателем α будем понимать условие, что длина рассматриваемого вектора больше или равна α.

Совокупность $\mathcal{B}$ при $s \geq 2$ назовем зависимой с показателем α, если среди векторов данной совокупности найдется такой вектор b_{i_*}, что

$$d(b_{i_*}, \mathcal{G}(\mathcal{B} \setminus b_{i_*})) \leq \alpha,$$

т.е. найдется вектор, являющийся α-близким к множеству остальных векторов.

При $s = 1$ зависимость с показателем α будет означать, что длина рассматриваемого вектора не превышает α.

Сформулируем утверждение об оценке близости данного вектора к совокупности других.

(У.4.1.1) *Пусть дана совокупность $\mathcal{B}$ векторов $b_i \in R^n$, $i = \overline{1, s}$, являющаяся независимой с показателем α. Добавим еще один вектор $a \in R^n$. Предположим, что расширенная совокупность $\mathcal{B} \cup a$ векторов является зависимой с показателем $p < \alpha$. Тогда вектор a является ζ-близким к совокупности $\mathcal{B}$ с характеристикой $\zeta = (1 + 2D/\alpha)p$, где D — максимум из длин $s+1$ векторов совокупности $\mathcal{B} \cup a$.*

Доказательство. Символом $\hat{\alpha}$ обозначим наибольший показатель независимости векторов совокупности $\mathcal{B}$. Пусть $\hat{p}$ — наименьший показатель зависимости векторов совокупности $\mathcal{B} \cup a$. Наименьшую характеристику близости вектора a к совокупности $\mathcal{B}$ обозначим $\hat{\zeta}$.

В совокупности $\mathcal{B} \cup a$ выделим вектор h, который является $\hat{p}$-близким к совокупности $(\mathcal{B} \cup a) \setminus h$ оставшихся векторов.

1. Если в качестве h можно взять вектор a, то получаем

$$\hat{\zeta} = \hat{p} \le p < (1 + \frac{2D}{\alpha})p,$$

и доказательство закончено.

2. Предположим, что вектор a нельзя взять в качестве h.

А) Рассмотрим вначале случай, когда $s = 1$, т.е. совокупность $\mathcal{B}$ состоит из одного вектора, который и следует взять за вектор h. Имеем $\hat{\alpha} = |h|$. Справедливо соотношение $\hat{p}/\hat{\zeta} = |h|/|a|$. Поэтому

$$\hat{\zeta} = \frac{|a|\hat{p}}{|h|} = \frac{|a|\hat{p}}{\hat{\alpha}} \le \frac{|a|p}{\alpha} < (1 + \frac{2D}{\alpha})p.$$

Б) Пусть теперь $s > 1$. Рассмотрим подпространство $\mathcal{G}((\mathcal{B} \cup a) \setminus h)$. Пусть g — ближайший к h элемент этого подпространства. Положим $|hg| := |h - g|$. Имеем $|hg| = \hat{p} \le p$. Отметим также, что $d(h, \mathcal{G}(\mathcal{B} \setminus h)) \ge \alpha$.

Предположим, что $g \in \mathcal{G}(\mathcal{B} \setminus h)$. Тогда $|hg| \ge \alpha$. Отсюда, с учетом неравенства $p \ge |hg|$, получаем $p \ge \alpha$, что противоречит условию $p < \alpha$. Следовательно, $g \notin \mathcal{G}(\mathcal{B} \setminus h)$.

Имеем

$$a \notin \mathcal{G}(\mathcal{B} \setminus h), \quad a \in \mathcal{G}((\mathcal{B} \cup a) \setminus h),$$

$$g \in \mathcal{G}((\mathcal{B} \cup a) \setminus h), \qquad g \notin \mathcal{G}(\mathcal{B} \setminus h) \subset \mathcal{G}((\mathcal{B} \cup a) \setminus h).$$

Рассмотрим прямую A_1, проведенную через точки g, a. Прямая A_1 либо параллельна подпространству $\mathcal{G}(\mathcal{B} \setminus h)$, либо пересекает его.

Если прямая A_1 параллельна подпространству $\mathcal{G}(\mathcal{B} \setminus h)$, то $d(a, \mathcal{G}(\mathcal{B})) \le |hg|$. В самом деле, проведя через точку h прямую A_2, параллельную A_1, получим, что она будет параллельна $\mathcal{G}(\mathcal{B}\backslash h)$. Следовательно, $A_2 \subset \mathcal{G}(\mathcal{B})$. Поэтому $d(a, \mathcal{G}(\mathcal{B})) \leq d(a, A_2) \leq |hg|$.

Из неравенства $d(a, \mathcal{G}(\mathcal{B})) \leq |hg|$ с учетом соотношения $|hg| = \hat{p}$ получаем $d(a, \mathcal{G}(\mathcal{B})) \leq \hat{p}$, т.е. вектор a является $\hat{p}$-близким к совокупности $\mathcal{B}$. Это противоречит тому, что в качестве h нельзя было взять вектор a.

Предположим теперь, что прямая A_1 пересекает подпространство $\mathcal{G}(\mathcal{B} \setminus h)$. Пусть e – точка пересечения. Проведем через точки h, e прямую A_3. Имеем $A_3 \subset \mathcal{G}(\mathcal{B})$. Пусть f – точка на прямой A_3 такая, что fa параллельна hg. Отметим, что $|he| \geq \alpha$.

Рассмотрим варианты расположения точки e на прямой A_1.

а) Точка e лежит на луче ga с вершиной g дальше точки a (рис. 1). Тогда $d(a, \mathcal{G}(\mathcal{B})) \leq |fa| < |hg| = \hat{p}$, и это противоречит тому, что в качестве h нельзя было взять точку a.

б) Точка e лежит на луче ag с вершиной a дальше точки g (рис. 2). Имеем $|he| \geq d(h, \mathcal{G}(\mathcal{B} \setminus h)) \geq \alpha$.

Обозначим через k точку на луче ef, ближайшую к точке a. Отметим, что $k \in \mathcal{G}(\mathcal{B})$. Следовательно, $d(a, \mathcal{G}(\mathcal{B})) \leq |ka|$. Оценим величину $|ka|$.

Имеем (см. рис. 2) $|ka|/|fa| = \cos\varphi = |eg|/|eh|$. Поэтому

$$|ka| = |fa||eg|/|eh|. \tag{4.1.1}$$

Поскольку $|fa|/|hg| = |ea|/|eg|$, то

$$|fa| = \frac{|hg||ea|}{|eg|} = \frac{|hg|(|eg| + |ga|)}{|eg|} = |hg|\big(1 + \frac{|ga|}{|eg|}\big). \tag{4.1.2}$$

Используя (4.1.1) и (4.1.2), получаем

$$|ka| = |fa|\frac{|eg|}{|eh|} = |hg|\big(1 + \frac{|ga|}{|eg|}\big)\frac{|eg|}{|eh|} = \frac{|hg|}{|eh|}(|eg| + |ga|).$$

Учитывая неравенства $|eg| < |eh|$ и $|ga| < |ha|$, имеем далее

$$|ka| < \frac{|hg|}{|eh|}(|eh| + |ha|).$$

Так как $|hg| \leq p$, $|eh| \geq \alpha$ и $|ha| < 2D$, то

$$|ka| < p(1 + \frac{|ha|}{\alpha}) < (1 + \frac{2D}{\alpha})p.$$

Таким образом, за характеристику близости вектора a к совокупности $\mathcal{B}$ можно взять величину $\zeta = |ka| < (1 + 2D/\alpha)p$.

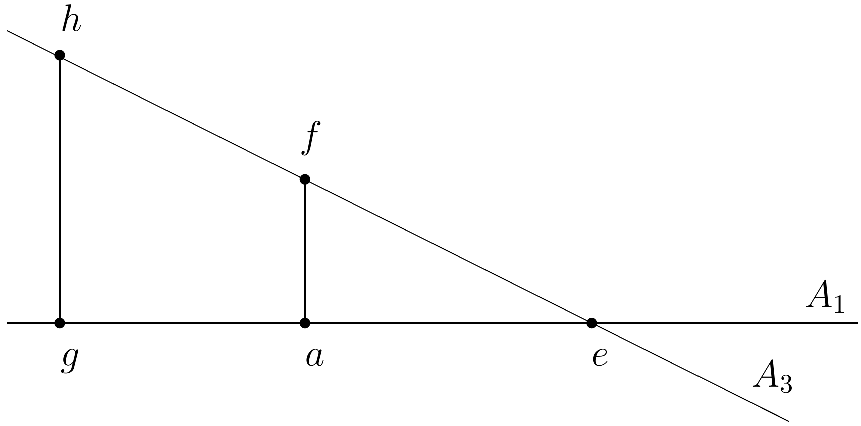

Рис. 1

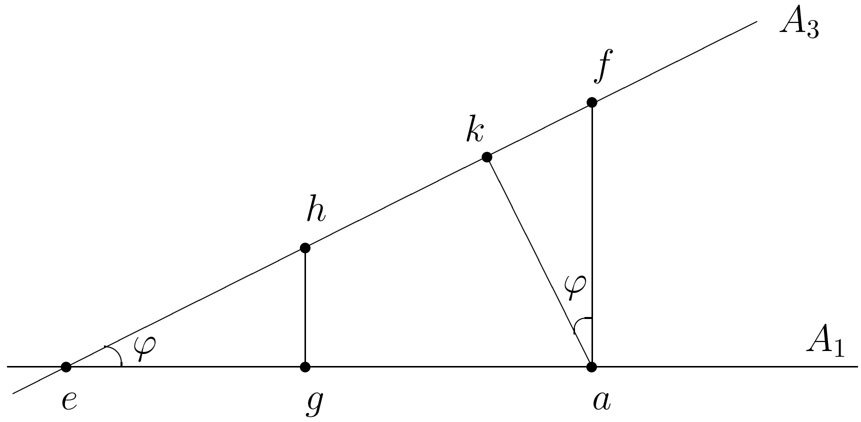

Рис. 2

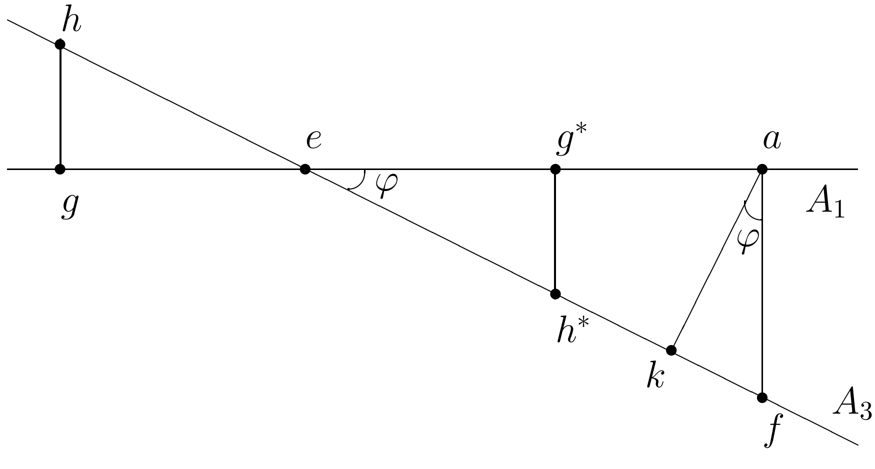

Рис. 3

в) Точка e лежит на луче ag между точками g и a (рис. 3).

Если $|ea| \leq |eg|$, то $|fa| \leq |hg|$, что противоречит тому, что a нельзя взять в качестве h.

Пусть $|ea| > |eg|$. Введем точки g^* и h^*, симметричные точкам g и h относительно e. Пусть k – точка на луче ef, ближайшая к a. Оценим величину $|ka|$.

Рассуждаем, как в случае б), взяв h^*, g^* вместо h, g. Имеем

$$|ka| = |fa|\frac{|eg^*|}{|eh^*|} = \frac{|h^*g^*|}{|eh^*|}(|eg^*| + |g^*a|).$$

Учитывая, что $|hg| = |h^*g^*|,\ |eh| = |eh^*|$ и $|eg^*| + |g^*a| < |ga| < |ha|$, получаем далее

$$|ka| < \frac{|hg|}{|eh|}|ha|.$$

В итоге,

$$|ka| < \frac{2Dp}{\alpha}$$

и значит за характеристику близости вектора a к множеству $\mathcal{B}$ в рассматриваемом случае можно взять величину

$$\zeta = |ka| < 2Dp/\alpha < (1 + 2D/\alpha)p. \qquad \square$$

4.2. Показатели независимости и зависимости векторов $B_i^{(3)}(t)$ на промежутках времени. Каждая из функций $B_i^{(3)},\ i = \overline{1,k}$, удовлетворяет условию Липшица на T. Следствием этого является следующее свойство.

Пусть $\mathcal{T} \subset T$ – замкнутый промежуток и $F \subset I$. Предположим, что при каждом $t \in \mathcal{T}$ векторы $B_i^{(3)}(t),\ \ i \in F$, являются линейно независимыми. Пусть $\mathcal{G}^{\perp}(\{B_i^{(3)}(t)\}_{i\in F})$ – ортогональное дополнение в R^n к линейному подпространству $\mathcal{G}(\{B_i^{(3)}(t)\}_{i\in F})$, натянутому на векторы $B_i^{(3)}(t)$, $i \in F$. Тогда при любом $j = \overline{1,k}$ проекция вектора $B_j^{(3)}(t)$ на подпространство $\mathcal{G}^{\perp}(\{B_i^{(3)}(t)\}_{i\in F})$ удовлетворяет по t условию Липшица на промежутке $\mathcal{T}$.

Из этого свойства в свою очередь вытекает существование оценки снизу длины промежутка, на котором независимость векторов $B_i^{(3)}(t)$, $i \in F$, с показателем α уменьшается до независимости с показателем $\alpha/2$. Приведем точную формулировку.

(У.4.2.1) *Пусть* $F \subset I$. *Тогда по любому* $\alpha > 0$ *найдется такое* $\kappa > 0$, *что если в некоторый момент* $t_* \in T$ *векторы* $B_i^{(3)}(t)$ *независимы с показателем* α, *то они независимы с показателем* $\alpha/2$ *при любом* $t \in [t_* - \kappa,\, t_* + \kappa] \cap T$.

Аналогично можно сформулировать утверждение о существовании оценки снизу длины промежутка, где зависимость с показателем α совокупности векторов $B_i^{(3)}(t)$, $i \in F$, может измениться до зависимости с показателем 2α.

(У.4.2.2) *Пусть* $F \subset I$. *Тогда по любому* $\alpha > 0$ *найдется такое* $\kappa > 0$, *что если в некоторый момент* $t_* \in T$ *векторы* $B_i^{(3)}(t)$ *зависимы с показателем* α, *то они зависимы с показателем* 2α *при любом* $t \in [t_* - \kappa,\, t_* + \kappa] \cap T$.

4.3. Правило выбора показателей независимости и зависимости векторов $B_i^{(3)}(t)$. Пусть $\beta > 0,\ \ \xi > 0,\ \ F \subset I$.

Показатель независимости (зависимости) совокупности векторов $B_i^{(3)}(t),\ \ i \in F$, вводим лишь тогда, когда число элементов $q(F)$ набора F не превышает n. Величину показателя полагаем равной $\xi^{q(F)}$.

Пусть в некоторый момент $t_* \in T$ для совокупности векторов $B_i^{(3)}(t_*)$, $i \in F$, имеем независимость с показателем $\xi^{q(F)}$. Тогда, опираясь на (У.4.2.1), можно оценить снизу длину промежутка $[t_*, \overline{t}\,] \subset T$, для каждого момента t из которого показатель независимости совокупности векторов $B_i^{(3)}(t),\ i \in F$, не меньше, чем $\xi^{q(F)}/2$. Пусть $\overline{w}(F, \xi)$ – такая оценка снизу. Поскольку общее число наборов F с числом элементов от 1 до $\min\{k, n\}$ конечно, то можно выбрать универсальную оценку

$$\overline{\overline{w}}(\xi) := \min_F \overline{w}(F, \xi),$$

Будем применять ее для любого набора F.

Пусть в некоторый момент $t_* \in T$ для совокупности векторов $B_i^{(3)}(t_*)$, $i \in F$, имеем зависимость с показателем $\xi^{q(F)}$. Тогда на основе (У.4.2.2) можно оценить снизу длину промежутка $[t_*, \hat{t}\,] \subset T$, для каждого момента t из которого показатель зависимости векторов $B_i^{(3)}(t),\ i \in F$, не больше $2\xi^{q(F)}$. Пусть $\widehat{w}(F, \xi)$ – такая оценка. В силу конечности числа наборов F можно выбрать универсальную оценку

$$\widehat{\widehat{w}}(\xi) := \min_F \widehat{w}(F, \xi).$$

Обозначим

$$w(\xi) := \min\{\overline{\overline{w}}(\xi),\ \widehat{\widehat{w}}(\xi)\}.$$

Справедливо следующее свойство: при любом F с числом элементов $q(F)$, не превышающим $\min\{k, n\}$, на промежутке длины $w(\xi)$ гарантируется независимость (зависимость) векторов $B_i^{(3)}(t),\ i \in F$, с показателем $\xi^{q(F)}/2$ (соответственно, $2\xi^{q(F)}$), если в начальный момент промежутка она была с показателем $\xi^{q(F)}$.

При $k > 1$ говорим лишь о существовании оценки $w(\xi)$. В случае $k = 1$ можно использовать явную оценку $w(\xi) = \xi/(2\beta)$.

4.4. Оценка близости при выбранных показателях.

(У.4.4.1) *Пусть для некоторого момента $t_* \in T$ набор векторов $B_i^{(3)}(t_*),\ i \in F,\ q(F) < \min\{k, n\}$, является независимым с показателем $\xi^{q(F)}$, где $\xi \leq 1/4$. Добавим еще один вектор $B_j^{(3)}(t_*),\ j \notin F$. Для расширенной совокупности предположим, что есть зависимость с показателем $\xi^{q(F)+1}$. Тогда при любом $t \in [t_*,\, t_* + w(\xi)] \cap T$ вектор $B_j^{(3)}(t)$ близок к совокупности $B_i^{(3)}(t_*),\ i \in F$, с показателем $\zeta = ((1/2) + 8\sigma)\xi$.*

Доказательство. Для набора векторов $B_i^{(3)}(t),\ i \in F$, с числом элементов $q(F) < \min\{k, n\}$ имеем на промежутке $[t_*,\, t_* + w(\xi)] \cap T$ независимость с показателем $\xi^{q(F)}/2$. После добавления вектора $B_j^{(3)}(t),\ j \notin F$, расширенная совокупность на промежутке $[t_*,\, t_* + w(\xi)] \cap T$ является зависимой с показателем $2\xi^{q(F)+1}$.

Применим (У.4.1.1). Положим

$$\alpha := \xi^{q(F)}/2, \quad p := 2\xi^{q(F)+1}.$$

Неравенство $p < \alpha$ вытекает из того, что $\xi \leq 1/4$. В силу (У.4.1.1) получаем, что при любом $t \in [t_*,\, t_* + w(\xi)] \cap T$ вектор $B_j^{(3)}(t)$ близок к совокупности $B_i^{(3)}(t),\ i \in F$, с показателем

$$\zeta = (1 + \frac{2\sigma}{\alpha})p = (1 + \frac{4\sigma}{\xi^{q(F)}})2\xi^{q(F)+1} =$$

$$= (2\xi^{q(F)} + 8\sigma)\xi < (2(\frac{1}{4})^{q(F)} + 8\sigma)\xi \leq (\frac{1}{2} + 8\sigma)\xi.$$

В последнем неравенстве учтено, что $q(F) \geq 1$. $\square$

5. Применение основной леммы

5.1. Загрубление неравенства (2.2.3). При фиксированном ξ будем использовать оценку (2.2.3) на промежутках $[t_*, t^*]$ длины $t^* - t_* \le w(\xi)$. Величина δ в (2.2.3) берется в полуинтервале $(0,\, t^* - t_*]$. Множество индексов F считаем выбранным так, чтобы в каждый момент $t \in [t_*, t^*]$ векторы $B_i^{(3)}(t),\ \ i \in F$, были независимы с показателем $\xi^{q(F)}/2$. Положим

$$\mathcal{L} := (1/2) + 8\sigma, \quad \tilde{\zeta} := \mathcal{L}\xi.$$

Множество $H \subset I \backslash F$ выберем так, что $H \subset \mathcal{H}(F, \tilde{\zeta}, t)$ при всех $t \in [t_*, t^*]$. Таким образом, при любом $j \in H$ и любом $t \in [t_*, t^*]$ вектор $B_j^{(3)}(t)$ является $\tilde{\zeta}$-близким к совокупности $B_i^{(3)}(t),\ \ i \in F$. Соотношения (2.2.2) полагаем выполненными для $t \in [t_*, t^*]$. Относительно движения $y^{(1*)}(\cdot)$ системы (1.1.1) в силу некоторых допустимых программных управлений $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ предполагаем, что оно выходит в момент t_* из точки x_* и для любых $i \in I \setminus (F \cup H),\ t \in [t_* + \omega,\, t^*]$ в случае $x_* \in \Pi_+(i, t_*)$ выполнено равенство $u_i(t) = \mu_i$, а в случае $x_* \in \Pi_-(i, t_*)$ – равенство $u_i(t) = -\mu_i$.

Перепишем оценку (2.2.3). Имеем

$$\begin{gathered}\mathcal{V}(F,\, t_* + \delta,\, y^{(1*)}(t_* + \delta)) \le V^{(2)}(t_*, x_*) + \lambda\delta^2 \sum_{i=1}^{k} \beta_i \mu_i + \\ +2\lambda\mathcal{L}\xi\delta \sum_{i \in H} \mu_i + 2\lambda\omega \sum_{i \notin F \cup H} \sigma_i \mu_i + \lambda\chi(t_*,\, t_* + \delta).\end{gathered} \tag{5.1.1}$$

В оценке (5.1.1) загрубим третье и четвертое слагаемые справа:

$$2\lambda\mathcal{L}\xi\delta \sum_{i \in H} \mu_i \ \le\ 2\lambda\mathcal{L}\mu\xi\delta, \qquad 2\lambda\omega \sum_{i \notin F \cup H} \sigma_i \mu_i \le 2\lambda\sigma\mu\omega.$$

Получим для любого $\delta \in (0, t^* - t_*]$ неравенство

$$\begin{gathered}\mathcal{V}(F,\, t_* + \delta,\, y^{(1*)}(t_* + \delta)) \le V^{(2)}(t_*, x_*) + \lambda\delta^2 \sum_{i=1}^{k} \beta_i \mu_i + \\ +2\lambda\mathcal{L}\mu\xi\delta + 2\lambda\sigma\mu\omega + \lambda\chi(t_*,\, t_* + \delta).\end{gathered} \tag{5.1.2}$$

Правая часть неравенства (5.1.2) не зависит от F. Это неравенство можно применять в случае, когда на промежутке $[t_*, t^*]$ для $i \in F$ используются произвольные допустимые управления $u_i(\cdot)$, а для любого

$j \notin F$ либо на $[t_* + \omega, t^*]$ действует правильное управление $u_j(\cdot)$, либо при любом $t \in [t_*, t^*]$ вектор $B_j^{(3)}(t)$ является $\tilde{\zeta}$-близким к совокупности $B_i^{(3)}(t), \;\; i \in F$. Напомним, что управление $u_j(\cdot)$ называется "правильным", если при $x_* \in \Pi_+(j, t_*) \;\; (x_* \in \Pi_-(j, t_*))$ на $[t_* + \omega,\, t^*]$ выполнено равенство $u_j(t) = \mu_j \;\; (u_j(t) = -\mu_j)$.

Ограничим применение неравенства (5.1.2) лишь случаем, когда $t^* - t_* \le \mathcal{L}\xi/\beta$. Тогда, заменяя один сомножитель δ во втором слагаемом справа на $\mathcal{L}\xi/\beta$, вместо (5.1.2) получим оценку

$$\mathcal{V}(F,\, t_* + \delta,\, y^{(1*)}(t_* + \delta)) \le$$

$$\le V^{(2)}(t_*, x_*) + 3\lambda\mathcal{L}\mu\xi\delta + 2\lambda\sigma\mu\omega + \lambda\chi(t_*,\, t_* + \delta)$$

или, что то же самое,

$$\begin{gathered} \mathcal{V}(F,\, t,\, y^{(1*)}(t)) \le V^{(2)}(t_*, x_*) + \\ + \mathbf{kf}(\xi)(t - t_*) + 2\lambda\sigma\mu\omega + \lambda\chi(t_*, t), \qquad t \in [t_*, t^*], \end{gathered} \tag{5.1.3}$$

где

$$\mathbf{kf}(\xi) := 3\lambda\mathcal{L}\mu\xi.$$

5.2. Загрубление неравенства (2.5.1). Неравенство (2.5.1) будем применять, полагая $\zeta = 2\xi$. При этом в оценке (2.5.1) загрубим второе и третье слагаемые справа:

$$4\lambda\xi \cdot (t - t_*) \sum_{i \in H} \mu_i \;\le\; 4\lambda\mu\xi \cdot (t - t_*), \quad 2\lambda\omega \sum_{i \notin H} \sigma_i \mu_i \le 2\lambda\sigma\mu\omega.$$

Оставляя постановочную часть (У.2.5.1) прежней, получим при $\zeta = 2\xi$ оценку

$$\begin{gathered} V^{(2)}(t,\, y^{(1*)}(t)) \;\le V^{(2)}(t_*, x_*) + \\ + \mathbf{kf}^{[*]}(\xi)(t - t_*) + 2\lambda\sigma\mu\omega + \lambda\chi(t_*, t), \qquad t \in [t_*, t^*], \end{gathered} \tag{5.2.1}$$

где

$$\mathbf{kf}^{[*]}(\xi) := 4\lambda\mu\xi.$$

6. Выбор величин c_h, Δ_h, $\mathbf{st}^{[h]}$

Положим

$$\mathrm{st}(\xi, \Delta, c) := (2\lambda\sigma\mu\Delta + c)/\mathbf{kf}(\xi), \quad \Delta > 0,\ c \geq 0,\ \xi > 0.$$

В дальнейшем условимся, что

$$\xi \leq \sigma/(1 + 16\sigma).$$

Для таких ξ выполнены соотношения

$$\xi < \sigma, \quad \xi < 1/4, \quad \mathrm{st}(\xi, \Delta, c) > \Delta.$$

Рассмотрим множество целых чисел $h \geq 1$, $h \leq \min\{k, n\}$, для каждого из которых существуют набор $F \subset I$ с количеством элементов $q(F) = h$ и момент $t \in T$ такие, что совокупность векторов $B_i^{(3)}(t)$, $i \in F$, независима с показателем ξ^h. Такое множество непусто в силу неравенства $\xi < \sigma$. Максимальное из чисел обозначим $h^*(\xi)$.

Считаем значение ξ зафиксированным.

1. Выберем величины $c_{h^*(\xi)} > 0$ и $\Delta_{h^*(\xi)} > 0$ так, что

$$\mathrm{st}(\xi,\, \Delta_{h^*(\xi)},\, c_{h^*(\xi)}) \leq \min\{\frac{\mathcal{L}\xi}{\beta},\ w(\xi),\ \vartheta - \vartheta_1\}.$$

Ниже ради сокращения записи условимся опускать аргумент ξ там, где это не приводит к недоразумению.

2. Перейдем к выбору величин c_h и Δ_h для $h = h^* - 1, h^* - 2, ..., 1$.

Опишем индукционный шаг. Пусть $c_h > 0$ и $\Delta_h > 0$ введены при некотором $h \in \overline{2, h^*}$. Определим величины c_{h-1}, Δ_{h-1}.

А) Зафиксируем набор F_h из h элементов. Выделим произвольное подмножество F_{h-1} из $h-1$ элементов и оставшееся подмножество F_1 из одного элемента. Пусть $\mathcal{K}(F_h, F_{h-1})$ – совокупность моментов времени $t \in T$, для каждого из которых имеется ξ^h-независимость векторов $B_i^{(3)}(t)$, $i \in F_h$, и одновременно ξ^{h-1}-независимость векторов $B_i^{(3)}(t)$, $i \in F_{h-1}$.

В случае $\mathcal{K}(F_h, F_{h-1}) \neq \varnothing$ каждому моменту из множества $\mathcal{K}(F_h, F_{h-1})$ поставим в соответствие примыкающий к нему справа замкнутый промежуток длины $w(\xi)$. Если правый край такого промежутка оказывается больше ϑ, то берем промежуток, заканчивающийся в момент ϑ.

Объединение по $t \in \mathcal{K}(F_h, F_{h-1})$ оговоренных промежутков обозначим $\widehat{\mathcal{K}}(F_h, F_{h-1})$. Отметим, что $\widehat{\mathcal{K}}(F_h, F_{h-1})$ – замкнутое, ограниченное множество. В любой момент $t \in \widehat{\mathcal{K}}(F_h, F_{h-1})$ имеет место $\xi^h/2$-независимость векторов $B_i^{(3)}(t)$, $i \in F_h$, и $\xi^{h-1}/2$-независимость векторов $B_i^{(3)}(t)$, $i \in F_{h-1}$. Имеется также $\xi^h/2$-независимость вектора $B_i^{(3)}(t)$, $i \in F_1$.

В случае $\mathcal{K}(F_h, F_{h-1}) = \varnothing$ пару F_h, F_{h-1} для определения c_{h-1}, Δ_{h-1} не учитываем. Ниже считаем, что $\mathcal{K}(F_h, F_{h-1}) \neq \varnothing$.

Опираясь на (У.3.4.1), выберем $c_\sharp \in (0, c_h]$ так, чтобы равномерно по $t \in \widehat{\mathcal{K}}(F_h, F_{h-1})$ множества $\Pi^{c_\sharp}(F_{h-1}, t)$ и $\Pi^{c_\sharp}(F_1, t)$ вне множества $\mathrm{int}\Pi^{c_h}(F_h, t)$ отстояли друг от друга на конечное расстояние в пределах некоторого ограниченного множества $\mathcal{X}_* \subset R^n$, оценивающего сверху совокупность состояний, где могут быть движения системы (1.1.1), начинающиеся в множестве $\mathcal{Y}$.

Пусть $b(\xi,\, F_h,\, F_{h-1},\, c_h,\, c)$, где $c \in (0,\, c_\sharp]$, – равномерная по $\bar{t} \in \widehat{\mathcal{K}}(F_h, F_{h-1})$ оценка снизу времени перехода системы (1.1.1) с множества $\Pi^c(F_{h-1}, \bar{t}) \cap \mathcal{X}_*$ на множество $\Pi^c(F_1, t)$, $t \in (\bar{t},\, \bar{t} + w(\xi)] \cap T$, если в исходный момент $\bar{t}$ система находится на $(\Pi^c(F_{h-1}, \bar{t}) \cap \mathcal{X}_*) \setminus \mathrm{int}\Pi^{c_h}(F_h, \bar{t})$. Такая оценка существует в силу свойства непрерывности изменения по t множества $\Pi^c(F_1, t)$, установленного в (У.3.3.2). Очевидно, что зависимость $c \mapsto b(\xi,\, F_h,\, F_{h-1},\, c_h,\, c)$ можно выбрать невозрастающей. Например, можно взять $b(\xi,\, F_h,\, F_{h-1},\, c_h,\, c) = b(\xi,\, F_h,\, F_{h-1},\, c_h,\, c_\sharp)$, $c \in (0,\, c_\sharp]$.

Выберем положительные $c_\flat \le c_\sharp$ и $\Delta_\flat \le \Delta_h$ так, чтобы

$$\mathrm{st}(\xi, \Delta_\flat, c_\flat) \le b(\xi,\, F_h,\, F_{h-1},\, c_h,\, c_\flat).$$

В результате получим $c_\flat$ и $\Delta_\flat$ для заданных F_h, F_{h-1}. Чтобы подчеркнуть зависимость выбранных величин от ξ, F_h, F_{h-1}, c_h, Δ_h, будем писать $c_\flat(\xi,\, F_h,\, F_{h-1},\, c_h,\, \Delta_h)$ и $\Delta_\flat(\xi,\, F_h,\, F_{h-1},\, c_h,\, \Delta_h)$.

Б) Перебираем теперь все наборы F_h из h элементов и для каждого из них все подмножества F_{h-1} из $h-1$ элементов (с соблюдением условия $\mathcal{K}(F_h, F_{h-1}) \neq \varnothing$).

Положим

$$c_{h-1} := \min_{(F_h,\, F_{h-1})} c_\flat(\xi,\, F_h,\, F_{h-1},\, c_h,\, \Delta_h),$$

$$\Delta_{h-1} := \min_{(F_h,\, F_{h-1})} \Delta_\flat(\xi,\, F_h,\, F_{h-1},\, c_h,\, \Delta_h).$$

Если для всех вариантов F_h и F_{h-1} множество $\mathcal{K}(F_h, F_{h-1}) = \varnothing$, то полагаем $c_{h-1} = c_h$ и $\Delta_{h-1} = \Delta_h$.

Обозначим

$$\mathbf{st}^{[h]} := \mathrm{st}(\xi, \Delta_h, c_h), \quad h = \overline{1, h^*}.$$

Величина $\mathbf{st}^{[h]}$ зависит от ξ. Ради краткости опускаем скобку аргумента.

7. Петли вдоль движения

Итак, по заданному ξ введены величины c_h, Δ_h и $\mathbf{st}^{[h]}$, $h=\overline{1,h^*}$.

Рассмотрим движение $y^{(1)}(\cdot)$ системы (1.1.1) из позиции $(t_0,x_0)\in\mathcal{Y}$, $t_0<\vartheta$, в силу некоторой стратегии $U\in\mathbf{U}^{c_1}$ первого игрока с шагом $\Delta\leq\Delta_1$ и некоторого допустимого программного управления $v(\cdot)$ второго игрока.

Символом $\mathfrak{H}$ обозначим множество целых чисел $h\in\overline{1,h^*}$, для каждого из которых существуют набор $F\subset I$ с количеством элементов $q(F)=h$ и момент $t\in[t_0,\vartheta]$ такие, что $y^{(1)}(t)\in\Pi^{c_h}(F,t)$ и совокупность векторов $B_i^{(3)}(t)$, $i\in F$, независима с показателем ξ^h.

Если $\mathfrak{H}=\varnothing$, то условимся считать весь промежуток $[t_0,\vartheta]$ свободным промежутком уровня 1.

Предположим, что $\mathfrak{H}\neq\varnothing$. Пусть $h^\flat$ – максимальное из чисел множества $\mathfrak{H}$.

Выделим вдоль движения $y^{(1)}(\cdot)$ "петли", связанные с заходом в множества $\Pi^{c_h}(F,t)$, где $q(F)=h$, $h=\overline{1,h^\flat}$. Определим также свободные промежутки.

Пусть $\mathfrak{T}^{[h]}$ – совокупность моментов $t\in[t_0,\vartheta]$ таких, что $y^{(1)}(t)\in\Pi^{c_h}(F,t)$ для некоторого набора F с $q(F)=h$, причем векторы $B_i^{(3)}(t)$, $i\in F$, независимы с показателем ξ^h. Указанное F не обязательно единственно. Отвечающую моменту t совокупность наборов F обозначим $\{F^{[h]}(t)\}$.

Если $h^\flat<h^*$, то считаем $[t_0,\vartheta]$ свободным промежутком уровня $h^\flat+1$.

1. Пусть $h=h^\flat$.

А) Примем

$$\tau_1^{[h^\flat]}:=\min\{t:t\in\mathfrak{T}^{[h^\flat]}\},$$

$$\tau_{i+1}^{[h^\flat]}:=\min\{t:t\in\mathfrak{T}^{[h^\flat]}\cap[\tau_i^{[h^\flat]}+\mathbf{st}^{[h^\flat]},\,\vartheta]\},\quad i=1,2,....$$

Полученный так набор моментов $\tau_i^{[h^\flat]}$ обозначим $\{\tau^{[h^\flat]}\}$.

Каждому моменту $\tau_i^{[h^\flat]}\in\{\tau^{[h^\flat]}\}$ поставим в соответствие серию петель. Положим $t_{i,1}^{[h^\flat]}:=\tau_i^{[h^\flat]}$. Момент $t_{i,1}^{[h^\flat]}$ назовем моментом начала первой петли (в серии i) уровня $h^\flat$. Выберем произвольное $F\in\{F^{[h^\flat]}(t_{i,1}^{[h^\flat]})\}$.

Момент $t^{[h^\flat]}_{i,1+}$ окончания первой петли назначаем следующим образом:

$$t^{[h^\flat]}_{i,1+} := \max\{t : y^{(1)}(t) \in \Pi^{c_{h^\flat}}(F,t),\ t \in [t^{[h^\flat]}_{i,1},\, \tau^{[h^\flat]}_i + \mathbf{st}^{[h^\flat]}] \cap [t_0,\, \vartheta]\}.$$

Свойство независимости векторов $B^{(3)}_i(t)$, $i \in F$, с показателем $\xi^{h^\flat}$ не проверяется. Момент $t^{[h^\flat]}_{i,1+}$, в частности, может совпадать с $t^{[h^\flat]}_{i,1}$.

В качестве момента $t^{[h^\flat]}_{i,2}$ начала второй петли (в серии i) уровня $h^\flat$ возьмем

$$t^{[h^\flat]}_{i,2} := \min\{t : t \in \mathfrak{T}^{[h^\flat]} \cap [t^{[h^\flat]}_{i,1+},\, \tau^{[h^\flat]}_i + \mathbf{st}^{[h^\flat]}]\}.$$

Выберем произвольное $F \in \{F^{[h^\flat]}(t^{[h^\flat]}_{i,2})\}$. Отмечаем момент $t^{[h^\flat]}_{i,2+}$ окончания второй петли:

$$t^{[h^\flat]}_{i,2+} := \max\{t : y^{(1)}(t) \in \Pi^{c_{h^\flat}}(F,t),\ t \in [t^{[h^\flat]}_{i,2},\, \tau^{[h^\flat]}_i + \mathbf{st}^{[h^\flat]}] \cap [t_0,\, \vartheta]\}.$$

Продолжая такой процесс, получим серию петель уровня $h^\flat$, отвечающую моменту $\tau^{[h^\flat]}_i$. Количество петель в серии не более $C^{h^\flat}_k$.

Пронумеруем петли уровня $h^\flat$ в сквозной нумерации. Совокупность моментов начала петель уровня $h^\flat$ обозначим $\{t^{[h^\flat]}\}$.

Б) Выкидываем из отрезка $[t_0, \vartheta]$ промежутки построенных петель. Получаем упорядоченный набор интервалов. Каждый из них замыкаем и называем свободным промежутком уровня $h^\flat$. Начало первого свободного промежутка может совпадать с t_0, а конец последнего свободного промежутка с ϑ. Пусть $\Theta^{[h^\flat]}_j$ – обозначение свободного промежутка с номером j в сквозной нумерации.

2. Переходим к уровням $h^\flat - 1, h^\flat - 2, ..., 1$. Опишем индукционный шаг.

Предположим, что определены петли и свободные промежутки, соответствующие некоторому уровню $h \in \overline{2, h^\flat}$. Пусть $\Theta^{[h]}_j := [\theta^{[h]}_j,\, \theta^{[h]}_{j+}]$ – обозначение свободного промежутка с номером j в сквозной нумерации на $[t_0, \vartheta]$.

А) Рассмотрим свободный промежуток $\Theta^{[h]}_j$. Примем

$$\tau^{[h-1]}_{j,1} := \min\{t : t \in \mathfrak{T}^{[h-1]} \cap \Theta^{[h]}_j\},$$

$$\tau^{[h-1]}_{j,i+1} := \min\{t : t \in \mathfrak{T}^{[h-1]} \cap [\tau^{[h-1]}_{j,i} + \mathbf{st}^{[h-1]},\, \vartheta^{[h]}_{j+}]\}, \quad i = 1, 2, ...$$

Полученный набор моментов $\tau_{j,i}^{[h-1]}$ обозначим $\{\tau_j^{[h-1]}\}$.

Каждому моменту $\tau_{j,i}^{[h-1]} \in \{\tau_j^{[h-1]}\}$ поставим в соответствие серию петель. Положим $t_{j,i,1}^{[h-1]} := \tau_{j,i}^{[h-1]}$. Момент $t_{j,i,1}^{[h-1]}$ назовем моментом начала первой петли (в серии i) уровня $h-1$ на свободном промежутке $\Theta_j^{[h]}$. Выберем произвольное $F \in \{F^{[h-1]}(t_{j,i,1}^{[h-1]})\}$. Момент $t_{j,i,1+}^{[h-1]}$ окончания первой петли назначаем следующим образом:

$$t_{j,i,1+}^{[h-1]} := \max\{t : y^{(1)}(t) \in \Pi^{c_{h-1}}(F,t),\ t \in [t_{j,i,1}^{[h-1]},\, \tau_{j,i}^{[h-1]} + \mathbf{st}^{[h-1]}] \cap \Theta_j^{[h]}\}.$$

Момент $t_{j,i,1+}^{[h-1]}$, в частности, может совпадать с $t_{j,i,1}^{[h-1]}$. Далее находим момент $t_{j,i,2}^{[h-1]} \in [t_{j,i,1+}^{[h-1]},\, \tau_{j,i}^{[h-1]} + \mathbf{st}^{[h-1]}] \cap \Theta_j^{[h]}$ и т.д.

Б) Определяем свободные промежутки уровня $h-1$ на $\Theta_j^{[h]}$. Для этого выкидываем из отрезка $\Theta_j^{[h]}$ промежутки построенных на нем петель уровня $h-1$. Каждый из оставшихся интервалов замыкаем и называем свободным промежутком. Начало первого свободного промежутка может совпадать с $\theta_j^{[h]}$, а конец последнего свободного промежутка с $\theta_{j+}^{[h]}$.

В) Описанным способом вводим петли уровня $h-1$ и свободные промежутки уровня $h-1$ на каждом свободном промежутке $\Theta_j^{[h]}$ уровня h.

Производим сквозную нумерацию моментов $\tau_{j,i}^{[h-1]}$, проходя все значения индексов j, i. Полученную совокупность моментов обозначим $\{\tau^{[h-1]}\}$.

Пронумеруем также в сквозной нумерации моменты начала петель уровня $h-1$. Обозначим такой набор $\{t^{[h-1]}\}$. Вводим сквозную нумерацию свободных промежутков. Пусть $\Theta_j^{[h-1]} := [\theta_j^{[h-1]},\, \theta_{j+}^{[h-1]}]$ – обозначение свободного промежутка с номером j.

Отметим, что свободные промежутки на уровне $h-1$ могут быть заданы как результат выкидывания из $[t_0, \vartheta]$ всех петель уровней $h^\flat$, $h^\flat - 1, ..., h-1$ и последующего замыкания каждого из полученных интервалов.

Если на уровне $h-1$ петель нет, то минуя уровень $h-1$, переходим к формированию петель на уровне $h-2$. При этом считаем, что свободные промежутки уровня $h-1$ совпадают со свободными промежутками уровня h.

8. Доказательство теоремы 1 при $\beta > 0$

В предыдущем разделе при зафиксированном ξ движению $y^{(1)}(\cdot)$ поставлены в соответствие петли и свободные промежутки уровней $1, 2, ..., h^\flat$. Совокупность моментов начала петель уровня h обозначена $\{t^{[h]}\}$.

Для записи изменения функции $V^{(2)}$ вдоль движения $y^{(1)}(\cdot)$ на промежутке $[t_*,\, t^*]$ введем обозначение

$$\mathrm{Var}(V^{(2)},\, [t_*,\, t^*]) := V^{(2)}(t^*,\, y^{(1)}(t^*)) - V^{(2)}(t_*,\, y^{(1)}(t_*)).$$

Положим

$$\mathbf{sh}^{[*]} := 2\lambda\sigma\mu\Delta; \quad \mathbf{sh}^{[h]} := 2\lambda\sigma\mu\Delta + c_h, \quad h = \overline{1, h^\flat}.$$

Величина $\mathbf{sh}^{[*]}$ зависит от Δ, а величина $\mathbf{sh}^{[h]}$ – от ξ и Δ, но мы опускаем скобки аргументов.

Из определения величин $\mathbf{st}^{[h]}$, $\mathbf{sh}^{[h]}$ и условия $\Delta \le \Delta_h$ следует соотношение

$$\mathbf{sh}^{[h]} \le \mathbf{st}^{[h]} \cdot \mathbf{kf}, \quad h = \overline{1, h^\flat}.$$

Пусть далее

$$\mathbf{kf}^{[0]} := \max\{\mathbf{kf},\, \mathbf{kf}^{[*]}\}; \quad \mathbf{kf}^{[h]} := e(h,k)\mathbf{kf}^{[0]}, \quad h = \overline{1, h^\flat},$$

где

$$e(1,k) := 2C_k^1 + 1,$$
$$e(h,k) := e(h-1,k) + C_k^h(1 + e(h-1,k)), \qquad h = \overline{2, h^\flat}.$$

Отметим, что

$$\mathbf{sh}^{[*]} < \mathbf{sh}^{[1]}; \quad \mathbf{sh}^{[h-1]} \le \mathbf{sh}^{[h]}, \quad h = \overline{2, h^\flat},$$

и

$$\mathbf{kf}^{[0]} < \mathbf{kf}^{[1]}; \quad \mathbf{kf}^{[h-1]} < \mathbf{kf}^{[h]}, \quad h = \overline{2, h^\flat}.$$

8.1. Приращение функции $V^{(2)}$ на петлях уровня h. Сделаем пояснение о применении неравенства (5.1.3), вытекающего из основной леммы, для оценивания изменения функции $V^{(2)}$ вдоль движения $y^{(1)}(\cdot)$ на петлях уровня h.

Любой момент $t_j^{[h]}$ из $\{t^{[h]}\}$ представляет собой момент начала петли h-ого уровня, момент окончания петли обозначается $t_{j+}^{[h]}$, при этом

$t_{j+}^{[h]} - t_j^{[h]} \leq \mathbf{st}^{[h]}$. Каждой петле уровня h соответствует по построению вполне определенное множество индексов F с числом элементов $q(F) = h$. В момент $t_j^{[h]}$ имеем ξ^h-независимость векторов $B_i^{(3)}(t_j^{[h]})$, $i \in F$. На промежутке $[t_j^{[h]},\, t_{j+}^{[h]}]$ независимость с показателем ξ^h может уменьшиться разве лишь до независимости с показателем $\xi^h/2$.

Чтобы применить неравенство (5.1.3) для оценки значения $\mathcal{V}(F,\, t_{j+}^{[h]},\, y^{(1)}(t_{j+}^{[h]}))$, сформируем, опираясь на (У.4.4.1), множество $H(F, \mathcal{L}\xi)$, состоящее из индексов $g \notin F$ векторов $B_g^{(3)}(t)$, являющихся близкими с характеристикой $\mathcal{L}\xi$, $\mathcal{L} = (1/2) + 8\sigma$, к совокупности векторов $B_i^{(3)}(t)$, $i \in F$, при всех t на промежутке $[t_j^{[h]},\, t_{j+}^{[h]}]$. Взяв элемент $g \notin F$, относим его к множеству $H(F, \mathcal{L}\xi)$, если в момент $t_j^{[h]}$ имеем ξ^{h+1}-зависимость векторов $B_i^{(3)}(t_j^{[h]})$, $i \in F \cup g$.

Пусть $g \notin F$, $g \notin H(F, \mathcal{L}\xi)$. Для таких элементов имеем ξ^{h+1}-независимость векторов $B_i^{(3)}(t_j^{[h]})$, $i \in F \cup g$. В этом случае учитываем, что по определению наборов $\{t^{[h+1]}\}$ и $\{t^{[h]}\}$, момент $t_j^{[h]}$ принадлежит некоторому свободному промежутку уровня $h+1$. Во внутренности этого промежутка нет петель уровня $h+1$. Стало быть,

$$y^{(1)}(t_j^{[h]}) \notin \mathrm{int}\Pi^{c_{h+1}}(F \cup g,\, t_j^{[h]}).$$

Поскольку $t_{j+}^{[h]} - t_j^{[h]} \leq \mathbf{st}^{[h]}$, то на $[t_j^{[h]},\, t_{j+}^{[h]}]$ имеем независимость векторов $B_i^{(3)}(t)$, $i \in F \cup g$, с показателем $\xi^{h+1}/2$. Следовательно, опираясь на правило выбора чисел c_{h+1}, c_h, c_1, описанное в разделе 6 и основанное на (У.3.4.1), можно говорить о равномерной оценке снизу расстояния между множествами $(\Pi^{c_h}(F, t) \cap \mathcal{X}_*) \setminus \mathrm{int}\Pi^{c_{h+1}}(F \cup g, t)$ и $\Pi^{c_1}(g, t)$ для моментов $t \in T$, где векторы $B_i^{(3)}(t)$, $i \in F \cup g$, независимы с показателем $\xi^{h+1}/2$. Стало быть, этой оценке удовлетворяет и расстояние между точкой $y^{(1)}(t_j^{[h]})$ и множеством $\Pi^{c_1}(g, t_j^{[h]})$. По выбору величины $\mathbf{st}^{[h]}$ движение системы (1.1.1), выходящее в момент $t_j^{[h]}$ из точки $y^{(1)}(t_j^{[h]})$, не может попасть на промежутке $[t_j^{[h]},\, t_{j+}^{[h]}]$ на непрерывно изменяющееся в силу (У.3.3.2) множество $\Pi^{c_1}(g, t)$.

Кроме того, на $[t_j^{[h]},\, t_{j+}^{[h]}]$ вдоль движения $y^{(1)}(\cdot)$ реализуется правильное управление $u_g(\cdot)$, за исключением, возможно, некоторого начального промежутка, примыкающего к моменту $t_j^{[h]}$ и по длине не превосходящего шаг $\Delta \leq \Delta_1$ дискретной схемы.

Таким образом, на промежутке $[t_j^{[h]},\, t_{j+}^{[h]}]$ можем применить основную лемму и вытекающие из нее неравенства. При этом полагаем $\omega = \Delta$.

Используя неравенство (5.1.3), запишем оценку сверху значения $\mathcal{V}(F,\, t_{j+}^{[h]},\, y^{(1)}(t_{j+}^{[h]}))$:

$$\mathcal{V}(F,\, t_{j+}^{[h]},\, y^{(1)}(t_{j+}^{[h]})) \leq$$

$$\leq V^{(2)}(t_j^{[h]},\, y^{(1)}(t_j^{[h]})) + \mathbf{kf} \cdot (t_{j+}^{[h]} - t_j^{[h]}) + 2\lambda\sigma\mu\Delta + \lambda\chi(t_j^{[h]},\, t_{j+}^{[h]}).$$

Поскольку $y^{(1)}(t_{j+}^{[h]}) \in \Pi^{c_h}(F, t_{j+}^{[h]})$, то для значения функции $V^{(2)}$ имеем неравенство

$$V^{(2)}(t_{j+}^{[h]},\, y^{(1)}(t_{j+}^{[h]})) \leq \mathcal{V}(F, t_{j+}^{[h]},\, y^{(1)}(t_{j+}^{[h]})) + c_h.$$

Таким образом,

$$\mathrm{Var}(V^{(2)},\, [t_j^{[h]},\, t_{j+}^{[h]}]) \leq \mathbf{kf} \cdot (t_{j+}^{[h]} - t_j^{[h]}) + 2\lambda\sigma\mu\Delta + c_h + \lambda\chi(t_j^{[h]},\, t_{j+}^{[h]}).$$

Учитывая, что $\mathbf{sh}^{[h]} = 2\lambda\sigma\mu\Delta + c_h$, получаем

$$\mathrm{Var}(V^{(2)},\, [t_j^{[h]},\, t_{j+}^{[h]}]) \leq \mathbf{kf} \cdot (t_{j+}^{[h]} - t_j^{[h]}) + \mathbf{sh}^{[h]} + \lambda\chi(t_j^{[h]},\, t_{j+}^{[h]}). \quad (8.1.1)$$

8.2. Вспомогательные промежутки. Определим варианты промежутков времени, используя которые будем оценивать изменение функции $V^{(2)}$ вдоль движения $y^{(1)}(\cdot)$.

Условимся, что каждый из индексов h, p принимает значения $1, 2, ..., h^\flat$. Пусть

$\mathbf{E}^{[h]}$ – промежуток $[\rho, \eta]$ такой, что на нем есть хотя бы один момент из множества $\{\tau^{[h]}\}$; на $[\rho, \eta)$ нет точек из множеств $\{t^{[p]}\}$, $p > h$;

$E^{[h]}$ – промежуток $[\rho, \eta]$ такой, что $\rho \in \{\tau^{[h]}\}$; на $[\rho, \eta] \setminus [\rho, \rho + \mathbf{st}^{[h]}]$ нет точек из множества $\{\tau^{[h]}\}$; на $[\rho, \eta)$ нет точек из множеств $\{t^{[p]}\}$, $p > h$;

$\mathcal{E}^{[h]}$ – промежуток $[\rho, \eta]$ вида $E^{[h]}$, удовлетворяющий дополнительному условию $\rho + \mathbf{st}^{[h]} \leq \eta$.

Символом $\mathcal{D}$ обозначим промежуток $[\rho, \eta]$, если он является одним из свободных промежутков уровня 1. На (ρ, η) нет моментов из $\{t^{[p]}\}$, $p \geq 1$. Это следует из того, что свободные промежутки уровня 1 получаются выкидыванием из отрезка $[t_0, \vartheta]$ всех петель уровней $h^\flat, h^\flat - 1, ..., 1$ и последующим замыканием каждого из оставшихся интервалов.

На каждом промежутке вида $E^{[h]}$ или $\mathcal{E}^{[h]}$ есть хотя бы один момент из множества $\{t^{[h]}\}$. Могут быть также моменты из множеств $\{t^{[p]}\}$, $p < h$.

Все начальные моменты h-петель, $h = \overline{1, h^\flat}$, попадающие в конкретный интервал $E^{[h]}$, лежат на промежутке длины не более $\mathbf{st}^{[h]}$. При этом на таком промежутке для каждого F с $q(F) = h$ может быть не более одного момента начала петли. Таким образом, общее число h-петель на $E^{[h]}$ не превышает C_k^h. Отметим также, что интервалы h-петель, попадающих в $E^{[h]}$, не пересекаются между собой. Следовательно, можем проводить независимое суммирование оценки (8.1.1) по интервалам h-петель, попадающих в $E^{[h]}$, и нам известна оценка числа петель.

8.3. Приращение функции $V^{(2)}$ на вспомогательных промежутках. Оценим изменение функции $V^{(2)}$ на вспомогательных промежутках.

Начнем с промежутка $[\rho, \eta]$ вида $\mathcal{D}$. Отметим следующие факты:

– если на (ρ, η) были заходы в множества $\Pi^{c_1}(i, t)$, $i = \overline{1, k}$, то в каждый из таких моментов имело место неравенство $|B_i^{(3)}(t)| < \xi$;

– возможное увеличение функции $V^{(2)}$ за счет “неправильных” управлений на одном шаге дискретной схемы оценивается сверху в силу (У.2.5.2) величиной $\mathbf{sh}^{[*]}$.

(У.8.3.1) *Приращение функции $V^{(2)}$ на промежутке $[\rho, \eta]$ вида $\mathcal{D}$ описывается неравенством*

$$\mathrm{Var}_{\mathcal{D}}(V^{(2)}, [\rho, \eta]) \le \mathbf{kf}^{[*]} \cdot (\eta - \rho) + \mathbf{sh}^{[*]} + \lambda\chi(\rho, \eta). \tag{8.3.1}$$

Доказательство. Отметим, что

$$\Delta \le \Delta_1 \le w(\xi) \le \xi/(2\beta).$$

Выберем $\overline{\delta} := \xi/(2\beta)$. Тогда за время $\overline{\delta}$ величина $|B_i^{(3)}(t)|$, $i = \overline{1, k}$, не может измениться более чем на $\xi/2$. Двигаясь слева направо, разделим промежуток $[\rho, \eta]$ с шагом $\overline{\delta}$ (последний из полученных промежутков может быть длины меньше $\overline{\delta}$). Покажем, что к каждому из $\overline{\delta}$-промежутков можно применить (У.2.5.1) с оценкой (5.2.1).

Действительно, пусть $[\bar{t},\, \tilde{t}\,]$ – произвольный из $\overline{\delta}$-промежутков. По выбору числа $\overline{\delta}$ получаем, что при любом $i \in \overline{1,k}$ либо $|B_i^{(3)}(t)| \leq 2\xi$ для всех $t \in [\bar{t},\, \tilde{t}\,]$, либо $|B_i^{(3)}(t)| \geq 3\xi/2$ также для всех $t \in [\bar{t},\, \tilde{t}\,]$.

В первом случае относим i к множеству H индексов малых значений $|B_i^{(3)}(t)|$.

Пусть $i \notin H$. Если $\bar{t} > \rho + \Delta$, то управление $u_i(\cdot)$ является правильным на $[\bar{t},\, \tilde{t}\,]$. В самом деле, на $[\bar{t}-\Delta,\, \tilde{t}\,]$ имеем $|B_i^{(3)}(t)| \geq \xi$. Кроме того, на $[\bar{t}-\Delta,\, \tilde{t}\,]$ нет моментов из совокупности $\{t^{[1]}\}$, поскольку их нет на $[\rho, \eta]$. Следовательно, на $[\bar{t}-\Delta,\, \tilde{t}\,]$ движение $y^{(1)}(t)$ идет по одну сторону от $\Pi^{c_1}(i,t)$, причем на $[\bar{t}-\Delta,\, \bar{t}\,]$ есть момент дискретной схемы. Отсюда и следует, что $u_i(\cdot)$ является правильным на $[\bar{t},\, \tilde{t}\,]$. Если $\bar{t} \leq \rho + \Delta$, то правильное управление $u_i(\cdot)$ заведомо действует на $[\rho + \Delta,\, \tilde{t}\,]$, а произвольное управление $u_i(\cdot)$ – разве лишь на $[\bar{t},\, \min\{\rho + \Delta,\, \tilde{t}\,\}]$.

Таким образом, на промежутке $[\bar{t},\, \tilde{t}\,]$ выполнены условия утверждения (У.2.5.1). При этом в оценке (5.2.1) полагаем $\omega = 0$ в случае $\bar{t} > \rho+\Delta$ и $\omega = \min\{\rho + \Delta,\, \tilde{t}\,\} - \bar{t} \leq \rho + \Delta - \bar{t}$ при $\bar{t} \leq \rho + \Delta$.

Суммируем оценку (5.2.1) по $\overline{\delta}$-промежуткам. Принимаем во внимание, что общая длина $\overline{\delta}$-промежутков, для каждого из которых $H \neq \varnothing$, не превышает $\eta - \rho$. Учитываем также, что моменты t, для которых $|B_i^{(3)}(t)| \geq \xi$ и управление $u_i(t)$ произвольно, $i \in \overline{1,k}$, могут быть лишь на начальной части промежутка $[\rho, \eta]$, а именно, на $[\rho,\, \rho + \Delta]$. В результате получаем оценку (8.3.1). $\square$

Перейдем к оценке приращения функции $V^{(2)}$ на промежутках вида $E^{[h]}$, $\mathcal{E}^{[h]}$, $\mathbf{E}^{[h]}$, где $h = \overline{1, h^\flat}$.

(У.8.3.2) *Приращение функции* $V^{(2)}$ *на промежутках вида* $E^{[h]}$, $\mathcal{E}^{[h]}$, $\mathbf{E}^{[h]}$ *при любом* $h = \overline{1, h^\flat}$ *описывается неравенствами*

$$\mathrm{Var}_{E^{[h]}}(V^{(2)},\, [\rho,\eta]) \leq \mathbf{kf}^{[h-1]} \cdot (\eta - \rho) + e(h,k)\mathbf{sh}^{[h]} + \lambda\chi(\rho,\eta),$$

$$\mathrm{Var}_{\mathcal{E}^{[h]}}(V^{(2)},\, [\rho,\eta]) \leq \mathbf{kf}^{[h]} \cdot (\eta - \rho) + \lambda\chi(\rho,\eta),$$

$$\mathrm{Var}_{\mathbf{E}^{[h]}}(V^{(2)},\, [\rho,\eta]) \leq \mathbf{kf}^{[h]} \cdot (\eta - \rho) + e(h,k)\mathbf{sh}^{[h]} + \lambda\chi(\rho,\eta).$$

Доказательство. 1. Пусть $h = 1$. Опираясь на (8.1.1), имеем

$$\mathrm{Var}_{E^{[1]}}(V^{(2)},\, [\rho,\eta]) \leq \mathbf{kf} \cdot |T^{[1]}| + C_k^1\mathbf{sh}^{[1]} + \lambda\chi(T^{[1]}) + \mathrm{Var}(V^{(2)},\, [\rho,\eta] \setminus T^{[1]}).$$

Здесь $T^{[1]}$ – подмножество промежутка $[\rho, \eta]$, заполненное петлями уровня 1; $|T^{[1]}|$ – общая длина множества $T^{[1]}$; C_k^1 – оценка сверху числа петель уровня 1 на $[\rho, \eta]$; $\chi(T^{[1]})$ – интеграл вида (1.7.1), но вычисленный на множестве $T^{[1]}$; слагаемое $\mathrm{Var}(V^{(2)},\, [\rho, \eta] \setminus T^{[1]})$ оценивает приращение функции $V^{(2)}$ на множестве $[\rho, \eta] \setminus T^{[1]}$.

Множество $[\rho, \eta] \setminus T^{[1]}$ есть совокупность интервалов отрезка $[\rho, \eta]$ вне петель уровня 1. Таких интервалов не более чем C_k^1, и замыкание каждого из них есть промежуток вида $\mathcal{D}$. Поэтому можем использовать оценку (8.3.1). Получаем

$$\mathrm{Var}_{E^{[1]}}(V^{(2)},\, [\rho, \eta]) \le \mathbf{kf} \cdot |T^{[1]}| + C_k^1 \mathbf{sh}^{[1]} +$$
$$+ \mathbf{kf}^{[*]} \cdot ((\eta - \rho) - |T^{[1]}|) + C_k^1 \mathbf{sh}^{[*]} + \lambda \chi(\rho, \eta) \le$$
$$\le \mathbf{kf}^{[0]} \cdot (\eta - \rho) + 2C_k^1 \mathbf{sh}^{[1]} + \lambda \chi(\rho, \eta).$$

Оценим $\mathrm{Var}_{\mathcal{E}^{[1]}}(V^{(2)},\, [\rho, \eta])$. Учтем соотношение $\mathbf{sh}^{[1]} \le \mathbf{st}^{[1]} \cdot \mathbf{kf}$. По определению множества вида $\mathcal{E}^{[1]}$, имеем $\mathbf{st}^{[1]} \le \eta - \rho$. Поэтому

$$\mathbf{sh}^{[1]} \le \mathbf{kf} \cdot (\eta - \rho).$$

Таким образом,

$$\mathrm{Var}_{\mathcal{E}^{[1]}}(V^{(2)},\, [\rho, \eta]) = \mathrm{Var}_{E^{[1]}}(V^{(2)},\, [\rho, \eta]) \le$$
$$\le \mathbf{kf}^{[0]} \cdot (\eta - \rho) + 2C_k^1 \mathbf{sh}^{[1]} + \lambda \chi(\rho, \eta) \le$$
$$\le \mathbf{kf}^{[0]} \cdot (\eta - \rho) + 2C_k^1 (\eta - \rho) \mathbf{kf} + \lambda \chi(\rho, \eta) \le$$
$$\le (2C_k^1 + 1) \mathbf{kf}^{[0]} \cdot (\eta - \rho) + \lambda \chi(\rho, \eta) = \mathbf{kf}^{[1]} \cdot (\eta - \rho) + \lambda \chi(\rho, \eta).$$

Рассмотрим теперь промежуток $[\rho, \eta]$ вида $\mathbf{E}^{[1]}$. Его можно представить составленным из начального промежутка $[\rho, t^{\#}]$ вида $\mathcal{D}$, конечного числа идущих друг за другом до некоторого момента $t^{\diamondsuit}$ промежутков вида $\mathcal{E}^{[1]}$ (их суммарный промежуток есть $[t^{\#},\, t^{\diamondsuit}]$) и остаточного промежутка $[t^{\diamondsuit}, \eta]$ вида $E^{[1]}$. Поэтому

$$\mathrm{Var}_{\mathbf{E}^{[1]}}(V^{(2)},\, [\rho, \eta]) \le$$
$$\le \mathrm{Var}_{\mathcal{D}}(V^{(2)},\, [\rho, t^{\#}]) + \mathbf{kf}^{[1]} \cdot (t^{\diamondsuit} - t^{\#}) + \lambda \chi(t^{\#},\, t^{\diamondsuit}) + \mathrm{Var}_{E^{[1]}}(V^{(2)},\, [t^{\diamondsuit}, \eta]) \le$$
$$\le \mathbf{kf}^{[*]} \cdot (t^{\#} - \rho) + \mathbf{sh}^{[*]} + \mathbf{kf}^{[1]} \cdot (t^{\diamondsuit} - t^{\#}) + \mathbf{kf}^{[0]} \cdot (\eta - t^{\diamondsuit}) + 2C_k^1 \mathbf{sh}^{[1]} + \lambda \chi(\rho, \eta) \le$$

$$\leq \mathbf{kf}^{[1]} \cdot (\eta - \rho) + (2C_k^1 + 1)\mathbf{sh}^{[1]} + \lambda\chi(\rho, \eta).$$

2. Перейдем к оценке приращения $V^{(2)}$ на промежутках вида $E^{[h]}$, $\mathcal{E}^{[h]}$, $\mathbf{E}^{[h]}$ при $h \in \overline{2, h^\flat}$. Докажем требуемые неравенства по индукции.

Предположим, что для промежутков вида $\mathbf{E}^{[p]}$ при $p \geq 1$, $p \leq h < h^\flat$ получена следующая оценка приращения функции $V^{(2)}$:

$$\operatorname{Var}_{\mathbf{E}^{[p]}}(V^{(2)}, [\rho, \eta]) \leq \mathbf{kf}^{[p]} \cdot (\eta - \rho) + e(p, k)\mathbf{sh}^{[p]} + \lambda\chi(\rho, \eta). \qquad (8.3.2)$$

Для промежутка вида $E^{[h+1]}$ с использованием (8.1.1) имеем

$$\operatorname{Var}_{E^{[h+1]}}(V^{(2)}, [\rho, \eta]) \leq$$

$$\leq \mathbf{kf} \cdot |T^{[h+1]}| + C_k^{h+1}\mathbf{sh}^{[h+1]} + \lambda\chi(T^{[h+1]}) + \operatorname{Var}(V^{(2)}, [\rho, \eta] \setminus T^{[h+1]}).$$

Здесь $T^{[h+1]}$ – подмножество промежутка $[\rho, \eta]$, заполненное петлями уровня $h+1$; $|T^{[h+1]}|$ – длина множества $T^{[h+1]}$; C_k^{h+1} – оценка сверху числа петель уровня $h+1$ на $[\rho, \eta]$; $\chi(T^{[h+1]})$ – интеграл вида (1.7.1), но вычисленный на множестве $T^{[h+1]}$; $\operatorname{Var}(V^{(2)}, [\rho, \eta] \setminus T^{[h+1]})$ – приращение функции $V^{(2)}$ на множестве $[\rho, \eta] \setminus T^{[h+1]}$.

Множество $[\rho, \eta] \setminus T^{[h+1]}$ есть совокупность интервалов отрезка $[\rho, \eta]$ вне петель уровня $h+1$. Таких интервалов не более чем C_k^{h+1}, и замыкание каждого из них есть промежуток вида $\mathcal{D}$ или $\mathbf{E}^{[p]}$, где $p \leq h$. Поэтому можем использовать оценки (8.3.1), (8.3.2). Получаем

$$\operatorname{Var}_{E^{[h+1]}}(V^{(2)}, [\rho, \eta]) \leq \mathbf{kf} \cdot |T^{[h+1]}| + C_k^{h+1}\mathbf{sh}^{[h+1]} +$$

$$+ \mathbf{kf}^{[h]} \cdot ((\eta - \rho) - |T^{[h+1]}|) + C_k^{h+1} e(h, k)\mathbf{sh}^{[h]} + \lambda\chi(\rho, \eta) \leq$$

$$\leq \mathbf{kf}^{[h]} \cdot (\eta - \rho) + C_k^{h+1}(1 + e(h, k))\mathbf{sh}^{[h+1]} + \lambda\chi(\rho, \eta).$$

Оценим $\operatorname{Var}_{\mathcal{E}^{[h+1]}}(V^{(2)}, [\rho, \eta])$. Учтем соотношение $\mathbf{sh}^{[h+1]} \leq \mathbf{st}^{[h+1]} \cdot \mathbf{kf}$. По определению множества вида $\mathcal{E}^{[h+1]}$, имеем $\mathbf{st}^{[h+1]} \leq \eta - \rho$. Поэтому

$$\mathbf{sh}^{[h+1]} \leq \mathbf{kf} \cdot (\eta - \rho).$$

Таким образом,

$$\operatorname{Var}_{\mathcal{E}^{[h+1]}}(V^{(2)}, [\rho, \eta]) = \operatorname{Var}_{E^{[h+1]}}(V^{(2)}, [\rho, \eta]) \leq$$

$$\leq \mathbf{kf}^{[h]} \cdot (\eta - \rho) + C_k^{h+1}(1 + e(h,k))\mathbf{sh}^{[h+1]} + \lambda\chi(\rho,\eta) \leq$$
$$\leq \mathbf{kf}^{[h]} \cdot (\eta - \rho) + C_k^{h+1}(1 + e(h,k))(\eta - \rho)\mathbf{kf} + \lambda\chi(\rho,\eta) \leq$$
$$\leq e(h,k)\mathbf{kf}^{[0]} \cdot (\eta - \rho) + C_k^{h+1}(1 + e(h,k))\mathbf{kf}^{[0]} \cdot (\eta - \rho) + \lambda\chi(\rho,\eta).$$

Поскольку

$$\mathbf{kf}^{[h+1]} = (e(h,k) + C_k^{h+1}(1 + e(h,k)))\mathbf{kf}^{[0]},$$

то

$$\mathrm{Var}_{\mathcal{E}^{[h+1]}}(V^{(2)},\, [\rho,\eta]) \leq \mathbf{kf}^{[h+1]} \cdot (\eta - \rho) + \lambda\chi(\rho,\eta).$$

Рассмотрим теперь промежуток $[\rho,\eta]$ вида $\mathbf{E}^{[h+1]}$. Его можно представить составленным из начального промежутка $[\rho, t^{\#}]$ вида $\mathbf{E}^{[h]}$, конечного числа идущих друг за другом до некоторого момента $t^{\diamondsuit}$ промежутков вида $\mathcal{E}^{[h+1]}$ (их суммарный промежуток есть $[\rho, t^{\diamondsuit}]$) и остаточного промежутка $[t^{\diamondsuit}, \eta]$ вида $E^{[h+1]}$. Поэтому

$$\mathrm{Var}_{\mathbf{E}^{[h+1]}}(V^{(2)},\, [\rho,\eta]) \leq \mathrm{Var}_{\mathbf{E}^{[h]}}(V^{(2)},\, [\rho,t^{\#}]) + \mathbf{kf}^{[h+1]} \cdot (t^{\diamondsuit} - \rho) +$$
$$+ \lambda\chi(\rho, t^{\diamondsuit}) + \mathrm{Var}_{E^{[h+1]}}(V^{(2)},\, [t^{\diamondsuit},\eta]) \leq$$
$$\leq \mathbf{kf}^{[h]} \cdot (t^{\#} - \rho) + e(h,k)\mathbf{sh}^{[h]} + \mathbf{kf}^{[h+1]} \cdot (t^{\diamondsuit} - \rho) + \mathbf{kf}^{[h]} \cdot (\eta - t^{\diamondsuit}) +$$
$$+ C_k^{h+1}(1 + e(h,k))\mathbf{sh}^{[h+1]} + \lambda\chi(\rho,\eta) \leq$$
$$\leq \mathbf{kf}^{[h+1]} \cdot (\eta - \rho) + [e(h,k) + C_k^{h+1}(1 + e(h,k))]\mathbf{sh}^{[h+1]} + \lambda\chi(\rho,\eta).$$

В итоге,

$$\mathrm{Var}_{\mathbf{E}^{[h+1]}}(V^{(2)},\, [\rho,\eta]) \leq \mathbf{kf}^{[h+1]} \cdot (\eta - \rho) + e(h+1,k)\mathbf{sh}^{[h+1]} + \lambda\chi(\rho,\eta). \quad \square$$

8.4. Приращение функции $V^{(2)}$ на всем промежутке игры. Напомним, что $h^{\flat}$ – наибольший номер h-петель вдоль движения $y^{(1)}(\cdot)$ на всем промежутке $[t_0,\vartheta]$. Поскольку $[t_0,\vartheta]$ – промежуток вида $\mathbf{E}^{[h^{\flat}]}$, то можно записать оценку для $\mathrm{Var}_{\mathbf{E}^{[h^{\flat}]}}(V^{(2)},\, [t_0,\vartheta])$:

$$\mathrm{Var}_{\mathbf{E}^{[h^{\flat}]}}(V^{(2)},\, [t_0,\vartheta]) \leq \mathbf{kf}^{[h^{\flat}]} \cdot (\vartheta - t_0) + e(h^{\flat},k)\mathbf{sh}^{[h^{\flat}]} + \lambda\chi(t_0,\vartheta).$$

Имеем $\mathbf{st}^{[h^{\flat}]} \leq \vartheta - \vartheta_1$. Поэтому

$$\mathbf{sh}^{[h^{\flat}]} \leq \mathbf{st}^{[h^{\flat}]} \cdot \mathbf{kf} \leq \mathbf{kf} \cdot (\vartheta - \vartheta_1).$$

Следовательно,

$$\operatorname{Var}_{\mathbf{E}[h^\flat]}(V^{(2)},\,[t_0,\vartheta]) \le$$
$$\le e(h^\flat,k)\mathbf{kf}^{[0]}\cdot(\vartheta-t_0)+e(h^\flat,k)\mathbf{kf}\cdot(\vartheta-\vartheta_1)+\lambda\chi(t_0,\vartheta)\le$$
$$\le 2e(h^\flat,k)\mathbf{kf}^{[0]}\cdot(\vartheta-\vartheta_1)+\lambda\chi(t_0,\vartheta).$$

Загрубляя $e(h^\flat,k)$ через $e(k,k)$, окончательно получим

$$\operatorname{Var}_{\mathbf{E}[h^\flat]}(V^{(2)},\,[t_0,\vartheta])\le 2e(k,k)\mathbf{kf}^{[0]}\cdot(\vartheta-\vartheta_1)+\lambda\chi(t_0,\vartheta).$$

Заменяя $\operatorname{Var}_{\mathbf{E}[h^\flat]}(V^{(2)},\,[t_0,\vartheta])$ на $V^{(2)}(\vartheta,\,y^{(1)}(\vartheta))-V^{(2)}(t_0,x_0)$ и учитывая, что $\gamma^{(2)}(y^{(1)}(\vartheta))=V^{(2)}(\vartheta,\,y^{(1)}(\vartheta))$, имеем

$$\gamma^{(2)}(y^{(1)}(\vartheta))\le V^{(2)}(t_0,x_0)+2e(k,k)\mathbf{kf}^{[0]}\cdot(\vartheta-\vartheta_1)+\lambda\chi(t_0,\vartheta).$$

Поскольку $\mathbf{kf}^{[0]}$ есть максимум из величин

$$\mathbf{kf}=3\lambda\mathcal{L}\mu\xi=3\lambda((1/2)+8\sigma)\mu\xi,\quad \mathbf{kf}^{[*]}=4\lambda\mu\xi,$$

то $\mathbf{kf}^{[0]}$ можно оценить сверху величиной $3\lambda((3/2)+8\sigma)\mu\xi$. Поэтому

$$\begin{gathered}\gamma^{(2)}(y^{(1)}(\vartheta))<V^{(2)}(t_0,x_0)+\\ +3e(k,k)\lambda(3+16\sigma)\mu\xi\cdot(\vartheta-\vartheta_1)+\lambda\chi(t_0,\vartheta).\end{gathered}\tag{8.4.1}$$

Учитывая различие функций платы $\gamma^{(1)}$ и $\gamma^{(2)}$, получим в силу (8.4.1)

$$\begin{gathered}\gamma^{(1)}(y^{(1)}(\vartheta))<V^{(2)}(t_0,x_0)+\\ +3e(k,k)\lambda(3+16\sigma)\mu\xi\cdot(\vartheta-\vartheta_1)+\lambda\chi(t_0,\vartheta)+\|\gamma^{(1)}-\gamma^{(2)}\|_{\mathcal{M}},\end{gathered}\tag{8.4.2}$$

где

$$e(k,k)=C_k^k+(C_k^k+1)[C_k^{k-1}+(C_k^{k-1}+1)[...[C_k^1+(C_k^1+1)]...]].$$

8.5. Окончательная оценка. При выводе оценки (8.4.2) значение ξ предполагалось зафиксированным. По ξ находились величины c_1 и Δ_1. Величина c_1 определяет множества $\Pi^{c_1}(i,t)$, $i=\overline{1,k}$, $t\in[t_0,\vartheta]$, при помощи которых задается многозначная функция $\mathbf{U}^{c_1}$. Ее однозначная выборка U используется как стратегия первого игрока. Стратегия U применяется в дискретной схеме управления с шагом $\Delta\le\Delta_1$. При выбранных $U,\ \Delta$ движение $y^{(1)}(\cdot)$ соответствует некоторой начальной позиции $(t_0,x_0)\in\mathcal{Y}$ и некоторому управлению $v(\cdot)$ второго игрока.

Выбором числа ξ второе слагаемое в правой части (8.4.2) можно сделать сколь угодно малым.

Справедливо следующее утверждение.

(У.8.5.1) *Пусть задано число* $\varepsilon > 0$*. Выберем* $\xi(\varepsilon) \in (0, \sigma/(1+16\sigma)]$ *так, чтобы удовлетворялось неравенство*

$$3e(k,k)\lambda(3+16\sigma)\mu\xi(\varepsilon)(\vartheta - \vartheta_1) \le \varepsilon.$$

Зададим далее по выбранному $\xi(\varepsilon)$ *число* $c(\varepsilon) = c_1(\xi(\varepsilon))$ *и ограничение* $\Delta(\varepsilon) = \Delta_1(\xi(\varepsilon))$ *на шаг дискретной схемы управления по рецепту раздела* 6. *Пусть первый игрок применяет с шагом* $\Delta \le \Delta(\varepsilon)$ *произвольную стратегию* U*, которая является однозначной выборкой из многозначной функции* $\mathbf{U}^{c(\varepsilon)}$*, построенной на основе множеств* $\Pi^{c(\varepsilon)}(i,t)$*,* $i = \overline{1,k}$*,* $t \in T$*. Тогда первый игрок гарантирует для любой начальной позиции* $(t_0, x_0) \in \mathcal{Y}$ *результат*

$$\Gamma^{(1)}(t_0, x_0, U, \Delta) \le V^{(2)}(t_0, x_0) + \varepsilon + \lambda\chi(t_0, \vartheta) + \|\gamma^{(1)} - \gamma^{(2)}\|_{\mathcal{M}}.$$

В (У.8.5.1) рассматриваются стратегии, определяемые при помощи c-окрестностей поверхностей переключения $\Pi(i,t)$. Чтобы сформулировать результат, связанный с геометрическими r-окрестностями, зададим число

$$r(\varepsilon) := c(\varepsilon)/\lambda.$$

Тогда $\Pi^{r(\varepsilon)}(i,t) \subset \Pi^{c(\varepsilon)}(i,t)$ при $i = \overline{1,k}$, $t \in T$. Следовательно, для любой стратегии U, вложенной в $\mathbf{U}^{r(\varepsilon)}$, и для любых $(t_0, x_0) \in \mathcal{Y}$, $\Delta \le \Delta(\varepsilon)$ справедливо неравенство

$$\Gamma^{(1)}(t_0, x_0, U, \Delta) \le V^{(2)}(t_0, x_0) + \varepsilon + \lambda\chi(t_0, \vartheta) + \|\gamma^{(1)} - \gamma^{(2)}\|_{\mathcal{M}},$$

что и означает утверждение теоремы 1.

Замечание. В формулировке утверждения (У.8.5.1) говорится о выборе величин $c(\varepsilon)$, $\Delta(\varepsilon)$ по рецепту раздела 6. Такой выбор использует непрерывность изменения множеств $\Pi^{c}(i,t)$, $i = \overline{1,k}$, и не является конструктивным. Для эффективного задания величин $c(\varepsilon)$, $\Delta(\varepsilon)$ дополнительно требуются характеристики скорости изменения по t таких множеств.

9. Доказательство теоремы 1 при $\beta = 0$

9.1. Аналоги неравенств (5.1.2) и (5.2.1). В случае $\beta = 0$ функции $t \to B_i^{(3)}(t), \ i \in I$, являются постоянными, соответствующие константы обозначим $b_i^{(3)}$. Для любого набора $F \subset I$ векторы $b_i^{(3)}$ либо линейно зависимы, либо линейно независимы.

Выберем параметр $\hat{\xi}$ так, чтобы для любого набора F линейная независимость векторов $b_i^{(3)}, \ i \in F$, означала бы независимость с показателем $\hat{\zeta} := \hat{\xi}^{q(F)}/2$.

Пусть $F \subset I$ – некоторый набор с линейно независимыми векторами $b_i^{(3)}$, $i \in F$. Если $\zeta \le \hat{\zeta}$ и вектор $b_j^{(3)}$, $j \in I \setminus F$, является ζ-близким к совокупности $b_i^{(3)}$, $i \in F$, то $b_j^{(3)} \in \mathcal{G}(\{b_i^{(3)}\}_{i \in F})$. Следовательно, множество $\mathcal{H}(F, \zeta, t)$ одно и то же при всех $\zeta \le \hat{\zeta}$ и всех $t \in T$.

Для произвольного числа $\xi \le \hat{\xi}$ и множества $H \subset \mathcal{H}(F, \zeta, t)$, $\zeta = \xi^{q(F)}/2$, запишем неравенство (5.1.1) при $\beta = 0$. Перейдем к пределу при $\xi \to 0$. Вместо неравенства (5.1.1) получим неравенство

$$\mathcal{V}(F, t_* + \delta, y^{(1*)}(t_* + \delta)) \le V^{(2)}(t_*, x_*) + 2\lambda\omega \sum_{i \notin F \cup H} \sigma_i \mu_i + \lambda\chi(t_*, t_* + \delta).$$

Используя соотношение

$$2\lambda\omega \sum_{i \notin F \cup H} \sigma_i \mu_i \le 2\lambda\sigma\mu\omega,$$

приходим к неравенству

$$\mathcal{V}(F, t_* + \delta, y^{(1*)}(t_* + \delta)) \le V^{(2)}(t_*, x_*) + 2\lambda\sigma\mu\omega + \lambda\chi(t_*, t_* + \delta), \quad (9.1.1)$$

которое заменяет неравенство (5.1.2) при $\beta = 0$.

Аналогом неравенства (5.2.1) будет неравенство

$$V^{(2)}(t, y^{(1*)}(t)) \ \le V^{(2)}(t_*, x_*) + 2\lambda\sigma\mu\omega + \lambda\chi(t_*, t), \quad t \in [t_*, t^*]. \quad (9.1.2)$$

9.2. Выбор величин c_h, $\mathbf{st}^{[h]}$. Символом h^* обозначим максимальное число линейно независимых векторов $b_i^{(3)}, \ i \in I$.

Величину $c_{h^*} > 0$ задаем произвольно. Положим $\mathbf{st}^{[h^*]} := \vartheta - \vartheta_1$.

Пусть величины $c_h > 0$ и $\mathbf{st}^{[h]}$ введены при некотором $h \in \overline{2, h^*}$. Определим величины c_{h-1}, $\mathbf{st}^{[h-1]}$.

Зафиксируем набор $F_h \subset I$ из h элементов таких, что векторы $b_i^{(3)}$, $i \in F_h$, линейно независимы. Выделим произвольное подмножество F_{h-1} из $h-1$ элементов и оставшееся подмножество F_1 из одного элемента. Опираясь на (У.3.4.1), выберем $c_\sharp \in (0,\, c_h]$ так, чтобы равномерно по $t \in T$ множества $\Pi^{c_\sharp}(F_{h-1}, t)$ и $\Pi^{c_\sharp}(F_1, t)$ вне множества $\mathrm{int}\Pi^{c_h}(F_h, t)$ отстояли друг от друга на конечное расстояние в пределах ограниченного множества $\mathcal{X}_* \subset R^n$, оценивающего сверху совокупность состояний, где могут быть движения системы (1.1.1), начинающиеся в множестве $\mathcal{Y}$. Величина $c_\sharp$ зависит от выбора F_h, F_{h-1} и от значения c_h, т.е. $c_\sharp = c_\sharp(F_h,\, F_{h-1},\, c_h)$.

Пусть $b(F_h,\, F_{h-1},\, c_h,\, c_\sharp)$ – равномерная по $\bar{t} \in T$ оценка снизу времени перехода системы (1.1.1) с множества $\Pi^{c_\sharp}(F_{h-1}, \bar{t}) \cap \mathcal{X}_*$ на множество $\Pi^{c_\sharp}(F_1, t)$, $t \in (\bar{t}, \vartheta]$, если в исходный момент $\bar{t}$ система находится на $(\Pi^{c_\sharp}(F_{h-1}, \bar{t}) \cap \mathcal{X}_*) \setminus \mathrm{int}\Pi^{c_h}(F_h, \bar{t})$. Такую оценку можно сделать, опираясь на свойство непрерывности изменения по t множества $\Pi^{c_\sharp}(F_1, t)$, вытекающее из (У.3.3.2).

Перебираем теперь все наборы F_h из h элементов, такие, что векторы $b_i^{(3)}$, $i \in F_h$, линейно независимы. Для каждого набора рассматриваем все варианты разбиения множества F_h на подмножество F_{h-1} из $h-1$ элементов и подмножество F_1 из одного элемента. Пусть

$$c_{h-1} := \min_{(F_h,\, F_{h-1})} c_\sharp(F_h,\, F_{h-1},\, c_h),$$

$$\mathbf{st}^{[h-1]} := \min_{(F_h,\, F_{h-1})} \{\mathbf{st}^{[h]},\, b(F_h,\, F_{h-1},\, c_h,\, c_\sharp)\}.$$

Отметим, что при $\beta = 0$, вводя последовательно величины c_h, мы не определяем параллельно величины Δ_h, как делалось в случае $\beta > 0$ в разделе 6.

9.3. Формирование петель вдоль движения. Рассмотрим движение $y^{(1)}(\cdot)$ системы (1.1.1) из позиции $(t_0, x_0) \in \mathcal{Y}$, $t_0 < \vartheta$, в силу некоторой стратегии $U \in \mathbf{U}^{c_1}$ первого игрока с шагом $\Delta > 0$ и некоторого допустимого программного управления $v(\cdot)$ второго игрока.

Символом $\mathfrak{H}$ обозначим множество целых чисел $h \in \overline{1, h^*}$, для каждого из которых существуют набор $F \subset I$ с количеством элементов $q(F) = h$

и момент $t \in [t_0, \vartheta]$ такие, что $y^{(1)}(t) \in \Pi^{c_h}(F, t)$ и совокупность векторов $b_i^{(3)}$, $i \in F$, линейно независима.

Если $\mathfrak{H} = \varnothing$, то условимся считать весь промежуток $[t_0, \vartheta]$ свободным промежутком уровня 1.

Предположим, что $\mathfrak{H} \neq \varnothing$. Пусть $h^\flat$ – максимальное из чисел множества $\mathfrak{H}$.

Выделим вдоль движения $y^{(1)}(\cdot)$ петли, связанные с заходом в множества $\Pi^{c_h}(F, t)$, где $q(F) = h$, $h = \overline{1, h^\flat}$. Определим также свободные промежутки.

Пусть $\mathfrak{T}^{[h]}$ – совокупность моментов $t \in [t_0, \vartheta]$ таких, что $y^{(1)}(t) \in \Pi^{c_h}(F, t)$ для некоторого набора F с $q(F) = h$, причем векторы $b_i^{(3)}$, $i \in F$, линейно независимы. Указанное F не обязательно единственно. Отвечающую моменту t совокупность наборов F обозначим $\{F^{[h]}(t)\}$.

С учетом определения числа h^* получаем, что совокупность $\{F^{[h^*]}(t)\}$ одна и та же при любом $t \in \mathfrak{T}^{[h^*]}$.

1. Если $h^\flat = h^*$, то полагаем

$$t_1^{[h^*]} := \min\{t : t \in \mathfrak{T}^{[h^*]}\},$$

$$\hat{t}^{[h^*]} := \max\{t : t \in \mathfrak{T}^{[h^*]}\}.$$

Промежуток $[t_1^{[h^*]},\, \hat{t}^{[h^*]}]$ назовем петлей уровня h^*. Промежутки $[t_0,\, t_1^{[h^*]}]$, $[\hat{t}^{[h^*]},\, \vartheta]$ назовем свободными промежутками уровня h^*.

Если $h^\flat < h^*$, то считаем $[t_0, \vartheta]$ свободным промежутком уровня $h^\flat + 1$.

2. Предположим, что определены петли и свободные промежутки, соответствующие некоторому уровню $h \in \overline{2, h^\flat}$ при $h^\flat = h^*$ и уровню $h \in \overline{2, h^\flat + 1}$ при $h^\flat < h^*$. Пусть $\Theta_j^{[h]} := [\theta_j^{[h]},\, \theta_{j+}^{[h]}]$ – обозначение свободного промежутка с номером j в сквозной нумерации на $[t_0, \vartheta]$.

Рассмотрим свободный промежуток $\Theta_j^{[h]}$. Пусть

$$\tau_{j,1}^{[h-1]} := \min\{t : t \in \mathfrak{T}^{[h-1]} \cap \Theta_j^{[h]}\},$$

$$\tau_{j,i+1}^{[h-1]} := \min\{t : t \in \mathfrak{T}^{[h-1]} \cap [\tau_{j,i}^{[h-1]} + \mathbf{st}^{[h-1]},\, \vartheta_{j+}^{[h]}]\}, \quad i = 1, 2, \ldots.$$

Полученный так набор моментов $\tau_{j,i}^{[h-1]}$ обозначим $\{\tau_j^{[h-1]}\}$.

С каждым моментом $\tau_{j,i}^{[h-1]}$ свяжем петлю уровня $h-1$. Выберем произвольное $F \in \{F^{[h-1]}(t_{j,i}^{[h-1]})\}$. Положим

$$t_{j,i}^{[h-1]} := \tau_{j,i}^{[h-1]},$$

$$t_{j,i+}^{[h-1]} := \max\{t : y^{(1)}(t) \in \Pi^{c_{h-1}}(F,t),\ t \in [\tau_{j,i}^{[h-1]}, \tau_{j,i}^{[h-1]} + \mathbf{st}^{[h-1]}] \cap \Theta_j^{[h]}\}.$$

(У.9.3.1) *На промежутке* $(t_{j,i+}^{[h-1]}, \tau_{j,i}^{[h-1]} + \mathbf{st}^{[h-1]}] \cap \Theta_j^{[h]}$ *нет моментов из* $\mathfrak{T}^{[h-1]}$.

Доказательство. Предположим противное. Пусть $\hat{t}$ — момент из рассматриваемого промежутка, принадлежащий $\mathfrak{T}^{[h-1]}$. Символом $\widehat{F}$ обозначим произвольную совокупность из $\{F^{[h-1]}(\hat{t})\}$. Векторы $b_i^{(3)}$, $i \in \widehat{F}$, линейно независимы.

Допустим вначале, что среди векторов $b_i^{(3)}$, $i \in \widehat{F}$, есть хотя бы один вектор $b_{\hat{i}}^{(3)}$, не принадлежащий линейной оболочке, натянутой на векторы $b_i^{(3)}$, $i \in F$. Тогда векторы $b_i^{(3)}$, $i \in \widetilde{F} = F \cup \{\hat{i}\}$, линейно независимы. Учитывая вложение $[\tau_{j,i}^{[h-1]}, \theta_{j+}^{[h]}] \subset \Theta_j^{[h]}$, получаем

$$y^{(1)}(\tau_{j,i}^{[h-1]}) \notin \mathrm{int}\Pi^{c_h}(\widetilde{F}, t).$$

При этом

$$y^{(1)}(\tau_{j,i}^{[h-1]}) \in \Pi^{c_{h-1}}(F, t).$$

Следовательно, по (У.3.3.2) и (У.3.4.1) с учетом выбора чисел c_{h-1} и $\mathbf{st}^{[h-1]}$ движение $y^{(1)}(t)$ на $[\tau_{j,i}^{[h-1]}, \tau_{j,i}^{[h-1]} + \mathbf{st}^{[h-1]}] \cap \Theta_j^{[h]}$ не может попасть на $\Pi^{c_{h-1}}(\hat{i}, t)$, а значит и на $\Pi^{c_{h-1}}(\widehat{F}, t)$.

Пусть теперь любой вектор $b_i^{(3)}$, $i \in \widehat{F}$, принадлежит линейной оболочке векторов $b_i^{(3)}$, $i \in F$. Поскольку каждая из этих двух совокупностей состоит из $h-1$ линейно независимых векторов, то $\Pi^{c_{h-1}}(F,t) = \Pi^{c_{h-1}}(\widehat{F}, t)$. Следовательно, $y^{(1)}(\hat{t}) \in \Pi^{c_{h-1}}(F, \hat{t})$, что противоречит определению момента $t_{j,i+}^{[h-1]}$. □

Из (У.9.3.1) следует, что каждому моменту $\tau_{j,i}^{[h-1]}$ соответствует лишь одна петля уровня $h-1$, а не серия петель, как было в разделе 7 при $\beta > 0$.

Момент $t_{j,i}^{[h-1]} = \tau_{j,i}^{[h-1]}$ назовем моментом начала петли с номером i уровня $h-1$ на свободном промежутке $\Theta_j^{[h]}$, а момент $t_{j,i+}^{[h-1]}$ – моментом конца этой петли.

Проходя все свободные промежутки уровня h, пронумеруем в сквозной нумерации петли уровня $h-1$. Пусть $\{t^{[h-1]}\}$ – моменты начала петель уровня $h-1$.

9.4. Приращение функции $V^{(2)}$. Для оценки приращения функции $V^{(2)}$ вдоль движения $y^{(1)}(t)$ представим промежуток $[t_0, \vartheta]$ составленным из промежутков петель уровней $h = \overline{1, h^\flat}$ и свободных промежутков уровня 1.

Пусть $[t_*, t^*]$ – промежуток некоторой петли уровня h. Тогда с учетом (9.1.1) приращение $\mathrm{Var}(V^{(2)}, [t_*, t^*])$ функции $V^{(2)}$ оценивается в виде

$$\mathrm{Var}(V^{(2)}, [t_*, t^*]) \leq 2\lambda\sigma\mu\Delta + c_h + \lambda\chi(t_*, t^*).$$

Если $[t_*, t^*]$ – свободный промежуток уровня 1, то в силу (9.1.2)

$$\mathrm{Var}(V^{(2)}, [t_*, t^*]) \leq 2\lambda\sigma\mu\Delta + \lambda\chi(t_*, t^*).$$

Обозначим

$$\mathbf{sh}^{[*]} := 2\lambda\sigma\mu\Delta; \quad \mathbf{sh}^{[h]} := 2\lambda\sigma\mu\Delta + c_h, \quad h = \overline{1, h^\flat}. \tag{9.4.1}$$

Таким образом, для оценки приращения функции $V^{(2)}$ на промежутке петли уровня h будем использовать неравенство

$$\mathrm{Var}(V^{(2)}, [t_*, t^*]) \leq \mathbf{sh}^{[h]} + \lambda\chi(t_*, t^*), \tag{9.4.2}$$

а на свободном промежутке уровня 1 – неравенство

$$\mathrm{Var}(V^{(2)}, [t_*, t^*]) \leq \mathbf{sh}^{[*]} + \lambda\chi(t_*, t^*). \tag{9.4.3}$$

Для каждого $h = \overline{1, h^\flat}$ символом $a^{[h]}$ обозначим число петель уровня h, символом $m^{[h]}$ – число свободных промежутков уровня h на $[t_0, \vartheta]$. Условимся, что $m^{[h^\flat+1]} := 1$.

С учетом (9.4.2) и (9.4.3), приращение функции $V^{(2)}$ на $[t_0, \vartheta]$ оценивается неравенством

$$\mathrm{Var}(V^{(2)}, [t_0, \vartheta]) \leq \sum_{h=1}^{h^\flat} a^{[h]}\mathbf{sh}^{[h]} + m^{[1]}\mathbf{sh}^{[*]} + \lambda\chi(t_0, \vartheta). \tag{9.4.4}$$

1. Оценим сверху возможное число петель и свободных промежутков. Если $h^\flat = h^*$, то

$$a^{[h^\flat]} = 1, \qquad m^{[h^\flat]} \leq 2. \tag{9.4.5}$$

В случае $h^\flat < h^*$ справедливы оценки

$$a^{[h^\flat]} \leq [\![(\vartheta - t_0)/\mathbf{st}^{[h^\flat]}]\!] + 1, \qquad m^{[h^\flat]} \leq a^{[h^\flat]} + 1. \tag{9.4.6}$$

Здесь двойные квадратные скобки означают целую часть.

Для $h \in \overline{1, (h^\flat - 1)}$ имеем

$$a^{[h]} \leq [\![(\vartheta - t_0)/\mathbf{st}^{[h]}]\!] + m^{[h+1]}, \qquad m^{[h]} \leq a^{[h]} + m^{[h+1]}. \tag{9.4.7}$$

A) Покажем, что при любом $h \in \overline{1, h^\flat}$ выполнено неравенство

$$m^{[h]} \leq \sum_{p=1}^{h^\flat - h + 1} 2^{(p-1)} [\![(\vartheta - t_0)/\mathbf{st}^{[h+p-1]}]\!] + 2^{(h^\flat - h + 1)}. \tag{9.4.8}$$

Если $h = h^\flat$, то указанное неравенство выполнено. Предположим, что для $h+1$, где $h \in \overline{1,\ (h^\flat - 1)}$, неравенство (9.4.8) установлено, т.е.

$$m^{[h+1]} \leq \sum_{p=1}^{h^\flat - h} 2^{(p-1)} [\![(\vartheta - t_0)/\mathbf{st}^{[h+p]}]\!] + 2^{(h^\flat - h)}.$$

Тогда, используя (9.4.5) $-$ (9.4.7), получим

$$m^{[h]} \leq a^{[h]} + m^{[h+1]} \leq [\![(\vartheta - t_0)/\mathbf{st}^{[h]}]\!] + 2m^{[h+1]} \leq$$

$$\leq [\![(\vartheta - t_0)/\mathbf{st}^{[h]}]\!] + \sum_{p=1}^{h^\flat - h} 2^p [\![(\vartheta - t_0)/\mathbf{st}^{[h+p]}]\!] + 2^{(h^\flat - h + 1)} =$$

$$= \sum_{p=1}^{h^\flat - h + 1} 2^{(p-1)} [\![(\vartheta - t_0)/\mathbf{st}^{[h+p-1]}]\!] + 2^{(h^\flat - h + 1)}.$$

Таким образом, (9.4.8) доказано.

Принимая во внимание, что $\mathbf{st}^{[h]} \leq \mathbf{st}^{[h+1]} \leq ... \leq \mathbf{st}^{[h^\flat]}$, из неравенства (9.4.8) выводим

$$\begin{aligned} m^{[h]} &\leq \Big(\sum_{p=1}^{h^\flat - h + 1} 2^{(p-1)}\Big) [\![(\vartheta - t_0)/\mathbf{st}^{[h]}]\!] + 2^{(h^\flat - h + 1)} = \\ &= (2^{(h^\flat - h + 1)} - 1) [\![(\vartheta - t_0)/\mathbf{st}^{[h]}]\!] + 2^{(h^\flat - h + 1)}. \end{aligned} \tag{9.4.9}$$

В частности, при $h = 1$ имеем

$$m^{[1]} \leq (2^{(h^\flat)} - 1)[\![(\vartheta - t_0)/\mathbf{st}^{[1]}]\!] + 2^{h^\flat}. \qquad (9.4.10)$$

Б) Опираясь на (9.4.5) – (9.4.7), запишем неравенство

$$\sum_{h=1}^{h^\flat} a^{[h]} \leq \sum_{h=1}^{h^\flat} [\![(\vartheta - t_0)/\mathbf{st}^{[h]}]\!] + \sum_{h=1}^{h^\flat} m^{[h+1]}. \qquad (9.4.11)$$

Используя (9.4.9), получаем

$$\sum_{h=1}^{h^\flat} m^{[h+1]} = \sum_{h=2}^{h^\flat} m^{[h]} + 1 \leq$$

$$\leq \sum_{h=2}^{h^\flat} (2^{(h^\flat - h + 1)} - 1)[\![(\vartheta - t_0)/\mathbf{st}^{[h]}]\!] + \sum_{h=2}^{h^\flat} 2^{(h^\flat - h + 1)} + 1.$$

Подставляя оценку для $\sum\limits_{h=1}^{h^\flat} m^{[h+1]}$ в (9.4.11), приходим к неравенствам

$$\sum_{h=1}^{h^\flat} a^{[h]} \leq [\![(\vartheta - t_0)/\mathbf{st}^{[1]}]\!] + \sum_{h=2}^{h^\flat} 2^{(h^\flat - h + 1)} [\![(\vartheta - t_0)/\mathbf{st}^{[h]}]\!] + \sum_{h=2}^{h^\flat} 2^{(h^\flat - h + 1)} + 1 \leq$$

$$\leq [\![(\vartheta - t_0)/\mathbf{st}^{[1]}]\!] + (\sum_{h=2}^{h^\flat} 2^{(h^\flat - h + 1)})[\![(\vartheta - t_0)/\mathbf{st}^{[2]}]\!] + \sum_{h=2}^{h^\flat} 2^{(h^\flat - h + 1)} + 1.$$

Так как

$$\sum_{h=2}^{h^\flat} 2^{(h^\flat - h + 1)} = 2^{h^\flat} - 2$$

и $\mathbf{st}^{[1]} \leq \mathbf{st}^{[2]}$, то

$$\sum_{h=1}^{h^\flat} a^{[h]} \leq [\![(\vartheta - t_0)/\mathbf{st}^{[1]}]\!] + 2^{h^\flat} [\![(\vartheta - t_0)/\mathbf{st}^{[1]}]\!] - 2[\![(\vartheta - t_0)/\mathbf{st}^{[1]}]\!] + 2^{h^\flat} - 1 =$$

$$= (2^{h^\flat} - 1)[\![(\vartheta - t_0)/\mathbf{st}^{[1]}]\!] + 2^{h^\flat} - 1.$$

Таким образом,

$$\sum_{h=1}^{h^\flat} a^{[h]} \leq (2^{h^\flat} - 1)[\![(\vartheta - t_0)/\mathbf{st}^{[1]}]\!] + 2^{h^\flat} - 1. \qquad (9.4.12)$$

2. Обозначим для краткости

$$\varkappa^\flat := (2^{h^\flat} - 1)[\![(\vartheta - t_0)/\mathbf{st}^{[1]}]\!] + 2^{h^\flat}.$$

Тогда в силу (9.4.1), (9.4.4), (9.4.10) и (9.4.12) получаем

$$\mathrm{Var}(V^{(2)},\, [t_0,\, \vartheta]) \leq (\varkappa^\flat - 1)\mathbf{sh}^{[h^\flat]} + \varkappa^\flat \mathbf{sh}^{[*]} + \lambda\chi(t_0,\, \vartheta) =$$

$$= (2\varkappa^\flat - 1)2\lambda\sigma\mu\Delta + (\varkappa^\flat - 1)c_{h^\flat} + \lambda\chi(t_0,\, \vartheta).$$

Число $h^\flat$ связано с движением $y^{(1)}(\cdot)$. Чтобы исключить такую зависимость, оценим $h^\flat$ через h^* и $c_{h^\flat}$ через c_{h^*}. Имеем

$$\mathrm{Var}(V^{(2)},\, [t_0,\, \vartheta]) \leq (2\varkappa^* - 1)2\lambda\sigma\mu\Delta + (\varkappa^* - 1)c_{h^*} + \lambda\chi(t_0,\, \vartheta), \qquad (9.4.13)$$

где

$$\varkappa^* := (2^{h^*} - 1)[\![(\vartheta - t_0)/\mathbf{st}^{[1]}]\!] + 2^{h^*}.$$

На основе (9.4.13) получаем неравенство

$$\begin{gathered}\gamma^{(1)}(y^{(1)}(\vartheta)) \leq V^{(2)}(t_0, x_0) + (2\varkappa^* - 1)2\lambda\sigma\mu\Delta + \\ + (\varkappa^* - 1)c_{h^*} + \lambda\chi(t_0,\, \vartheta) + \|\gamma^{(1)} - \gamma^{(2)}\|_{\mathcal{M}}.\end{gathered} \qquad (9.4.14)$$

Величина $\mathbf{st}^{[1]}$, от которой зависит $\varkappa^*$, определяется величинами $c_1, c_2, ..., c_{h^*}$ и не возрастает с их уменьшением. Поэтому второе и третье слагаемые в правой части стремятся к нулю при $\Delta \to 0$, $c_{h^*} \to 0$. В целом, оценка (9.4.14) не является конструктивной, поскольку неконструктивно на основе c_{h^*} задаются последовательно величины $c_{h^*-1}, ..., c_2, c_1$.

Из оценки (9.4.14) вытекает утверждение теоремы 1 при $\beta = 0$.

10. Случай скалярного управления первого игрока

Теорема 1 справедлива для общего случая $k \geq 1$. В скалярном случае $k = 1$ результат можно усилить.

10.1. Упрощения, возникающие в скалярном случае. При $q(F) = k$, т.е. когда $F = I$, формулировка основной леммы (У.2.2.1) существенно упрощается. Становится пустым множество H, лишними являются предположение (2.2.2) и предположение о правильных управлениях для индексов $i \in I \setminus (F \cup H)$. В оценке (2.2.3) исчезают третье и четвертое слагаемые справа. Формулировка леммы принимает следующий вид.

(У.10.1.1) *Предположим, что* $F = I$ *и* $(t_*, x_*) \in Z$, $\delta > 0$, $t_* + \delta \leq \vartheta$. *Пусть* $y^{(1*)}(\cdot)$ – *движение системы* (1.1.1) *в силу допустимых программных управлений* $u(\cdot), v(\cdot)$, *выходящее в момент* t_* *из точки* x_*. *Тогда справедлива оценка*

$$\mathcal{V}(F, t_* + \delta,\, y^{(1*)}(t_* + \delta)) \leq$$

$$\leq V^{(2)}(t_*,\, x_*) + \lambda\delta^2 \sum_{i=1}^{k} \beta_i \mu_i + \lambda\chi(t_*,\, t_* + \delta).$$

Перепишем теперь (У.2.5.1) для случая $F = \varnothing$, $H = \varnothing$.

(У.10.1.2) *Пусть* $(t_*, x_*) \in Z$, $t^* \in (t_*, \vartheta]$. *Пусть* $0 \leq \omega \leq t^* - t_*$ *и вдоль движения* $y^{(1*)}(\cdot)$, *выходящего в момент* t_* *из точки* x_*, *для любого* $i \in I$ *либо* $y^{(1*)}(t) \in \Pi_+(i, t)$ *на промежутке* $[t_* + \omega,\, t^*]$ *и при этом* $u_i(t) = \mu_i$, *либо* $y^{(1*)}(t) \in \Pi_-(i, t)$ *и при этом* $u_i(t) = -\mu_i$. *Тогда при любом* $t \in [t_*, t^*]$ *справедлива оценка*

$$V^{(2)}(t,\, y^{(1*)}(t)) \;\leq\; V^{(2)}(t_*, x_*) + 2\lambda\omega \sum_{i=1}^{k} \sigma_i \mu_i + \lambda\chi(t_*, t).$$

Будем использовать утверждения (У.10.1.1) и (У.10.1.2) в случае скалярного управления первого игрока, т.е. при $k = 1$.

Итак, считаем, что управляющее воздействие первого игрока стеснено ограничением $|u| \leq \mu$, матрицы $B^{(1)}(t)$ и $B^{(2)}(t)$ представляют собой столбцы размерности n. При каждом t имеем дело с одной поверхностью переключения, которую, опуская символ F, будем обозначать $\Pi(t)$. Аналогично будем опускать символ F в обозначении r-окрестности поверхности $\Pi(t)$, а также частей пространства R^n, определяемых этими множествами.

В скалярном случае автоматически выполнено условие 2. Нет необходимости в рассмотрении c-окрестностей поверхностей переключения и лишним становится утверждение (У.3.4.1). Можно обойтись также без введения параметра малости ξ. Появляется возможность получения явной оценки для результата, гарантированного первому игроку стратегией, основанной на поверхностях переключения $\Pi(t)$ и применяемой с произвольным шагом $\Delta > 0$ дискретной схемы управления.

10.2. Доказательство теоремы 2. Зафиксируем число $r \geq 0$. Рассмотрим движение $y^{(1)}(\cdot)$ системы (1.1) из позиции $(t_0, x_0) \in \mathcal{Y},\ t_0 < \vartheta$, в силу некоторой стратегии $U \in \mathbf{U}^r$ первого игрока с шагом Δ дискретной схемы управления и некоторого $v(\cdot) \in K^{(1)}$.

1. Пусть $\beta > 0$. Положим

$$\mathbf{st} := \sqrt{\frac{2\sigma\mu\Delta + r}{\beta\mu}}. \qquad (10.2.1)$$

A) Выделим вдоль движения $y^{(1)}(\cdot)$ петли, связанные с заходом в множества $\Pi^r(t)$. Определим также свободные промежутки.

Положим

$$t_1 := \min\{t : y^{(1)}(t) \in \Pi^r(t),\ t \in [t_0,\, \vartheta]\}.$$

Момент t_1 назовем моментом начала первой петли. Далее отмечаем момент t_{1+} окончания первой петли:

$$t_{1+} := \max\{t : y^{(1)}(t) \in \Pi^r(t),\ t \in [t_1,\, t_1 + \mathbf{st}] \cap [t_0,\, \vartheta]\}.$$

Момент t_{1+}, в частности, может совпадать с t_1.

В качестве момента t_2 начала второй петли возьмем момент

$$t_2 := \min\{t : y^{(1)}(t) \in \Pi^r(t),\ t \in [t_1 + \mathbf{st},\ \vartheta]\}.$$

Затем отмечаем момент t_{2+} окончания второй петли:

$$t_{2+} := \max\{t : y^{(1)}(t) \in \Pi^r(t),\ t \in [t_2,\, t_2 + \mathbf{st}] \cap [t_0,\, \vartheta]\}.$$

Продолжая такой процесс, получим набор петель на $[t_0, \vartheta]$.

Выкидываем из $[t_0, \vartheta]$ внутренность промежутков построенных петель. Получаем упорядоченный набор отрезков. Каждый из них называем свободным промежутком. Свободный промежуток может быть вырожденным, т.е. состоящим из одной точки.

Если на $[t_0, \vartheta]$ петли отсутствуют, то считаем $[t_0, \vartheta]$ свободным промежутком.

Б) Пусть $[\rho,\, \eta]$ – некоторый свободный промежуток. Покажем, что приращение функции $V^{(2)}$ на нем описывается неравенством

$$\mathrm{Var}_{\mathcal{D}}(V^{(2)},\, [\rho,\, \eta]) \leq 2\lambda\sigma\mu\Delta + \lambda\chi(\rho,\, \eta). \tag{10.2.2}$$

Здесь нижний индекс $\mathcal{D}$ подчеркивает, что изменение функции $V^{(2)}$ подсчитывается на свободном промежутке.

Вдоль движения $y^{(1)}(\cdot)$ реализуется некоторое управление $u(\cdot)$. Значение $u(t)$ называем "правильным", если $u(t) = \mu$ $(u(t) = -\mu)$ при $y^{(1)}(t) \in \Pi_+(t)$ $(y^{(1)}(t) \in \Pi_-(t))$.

На внутренности свободного промежутка точка $y^{(1)}(t)$ находится вне множества $\Pi^r(t)$, а стало быть, не попадает на множество $\Pi(t)$. Поэтому при $\Delta \leq \eta - \rho$ управление $u(t)$ является правильным на $[\rho + \Delta,\, \eta)$ и произвольным разве лишь на $[\rho,\, \rho + \Delta)$. Оценка (10.2.2) следует непосредственно из (У.10.1.2) при $\omega = \Delta,\ t_* = \rho,\ t^* = \eta$.

Если $\Delta > \eta - \rho$, то применяем (У.10.1.2) при $\omega = \eta - \rho,\ t_* = \rho,\ t^* = \eta$. Вновь получаем оценку (10.2.2).

В) Будем говорить, что $[\rho,\, \eta]$ – промежуток вида E, если он составлен из некоторой петли $[t_i,\, t_{i+}]$ и примыкающего к ней справа свободного промежутка. Промежуток $[\rho,\, \eta]$ вида E при дополнительном условии $\rho + \mathbf{st} \leq \eta$ будем называть промежутком вида $\mathcal{E}$.

Оценим приращение функции $V^{(2)}$ вдоль движения $y^{(1)}(\cdot)$ на промежутке вида E.

Рассмотрим промежуток петли $[t_i,\, t_{i+}]$. Применяя (У.10.1.1) при $\delta = t_{i+} - t_i$, имеем

$$\mathcal{V}(t_{i+},\, y^{(1)}(t_{i+})) \leq V^{(2)}(t_i,\, y^{(1)}(t_i)) + \lambda\beta\mu\,(t_{i+} - t_i)^2 + \lambda\chi(t_i,\, t_{i+}).$$

Поскольку $t_{i+} - t_i \leq \mathbf{st}$, то

$$\mathcal{V}(t_{i+},\, y^{(1)}(t_{i+})) \leq V^{(2)}(t_i,\, y^{(1)}(t_i)) + \lambda\beta\mu\,\mathbf{st}\cdot(t_{i+} - t_i) + \lambda\chi(t_i,\, t_{i+}).$$

Учитывая неравенство

$$V^{(2)}(t_{i+},\, y^{(1)}(t_{i+})) \leq \mathcal{V}(t_{i+},\, y^{(1)}(t_{i+})) + \lambda r,$$

приходим к соотношению

$$\mathrm{Var}(V^{(2)},\, [t_i,\, t_{i+}]) \leq \lambda\beta\mu\,\mathbf{st}\cdot(t_{i+} - t_i) + \lambda r + \lambda\chi(t_i,\, t_{i+}). \tag{10.2.3}$$

На свободном промежутке $[t_{i+},\,\eta]$ в силу (10.2.2) имеем

$$\mathrm{Var}_{\mathcal{D}}(V^{(2)},\,[t_{i+},\,\eta]) \le 2\lambda\sigma\mu\Delta + \lambda\chi(t_{i+},\,\eta). \tag{10.2.4}$$

Объединяя (10.2.3) и (10.2.4), с учетом неравенства $t_{i+} - t_i \le \eta - \rho$, получим

$$\mathrm{Var}_{E}(V^{(2)},\,[\rho,\,\eta]) \le \lambda\beta\mu\,\mathbf{st}\cdot(\eta-\rho) + 2\lambda\sigma\mu\Delta + \lambda r + \lambda\chi(\rho,\,\eta). \tag{10.2.5}$$

Нижний индекс E подчеркивает, что подсчет приращения функции $V^{(2)}$ происходит на промежутке вида E.

Перейдем к оценке приращения функции $V^{(2)}$ вдоль движения $y^{(1)}(\cdot)$ на промежутке вида $\mathcal{E}$. Поскольку в этом случае $\eta-\rho \ge \mathbf{st}$, то из (10.2.1) следует неравенство

$$2\lambda\sigma\mu\Delta + \lambda r \le \lambda\beta\mu\,\mathbf{st}\cdot(\eta-\rho).$$

Привлекая (10.2.5), получим

$$\mathrm{Var}_{\mathcal{E}}(V^{(2)},\,[\rho,\,\eta]) \le 2\lambda\beta\mu\,\mathbf{st}\cdot(\eta-\rho) + \lambda\chi(\rho,\,\eta). \tag{10.2.6}$$

Г) Рассмотрим промежуток $[t_0,\vartheta]$. Представим его составленным из первого свободного промежутка $[t_0, t^{\#}]$, конечного числа промежутков вида $\mathcal{E}$, идущих друг за другом от момента $t^{\#}$ до некоторого момента $t^{\diamondsuit}$ (их суммарный промежуток есть $[t^{\#},\,t^{\diamondsuit}]$), и остаточного промежутка $[t^{\diamondsuit},\vartheta]$ вида E. Применяя последовательно оценки (10.2.2), (10.2.6) и (10.2.5), имеем

$$\begin{gathered}\mathrm{Var}(V^{(2)},\,[t_0,\,\vartheta]) = \mathrm{Var}_{\mathcal{D}}(V^{(2)},\,[t_0,\,t^{\#}]) + \mathrm{Var}(V^{(2)},\,[t^{\#}, t^{\diamondsuit}]) +\\ +\mathrm{Var}_{E}(V^{(2)},\,[t^{\diamondsuit},\,\vartheta]) \le 2\lambda\sigma\mu\Delta + 2\lambda\beta\mu\,\mathbf{st}\cdot(t^{\diamondsuit}-t^{\#}) +\\ +\lambda\beta\mu\,\mathbf{st}\cdot(\vartheta - t^{\diamondsuit}) + 2\lambda\sigma\mu\Delta + \lambda r + \lambda\chi(t_0,\,\vartheta) \le\\ \le 2\lambda\beta\mu\,\mathbf{st}\cdot(\vartheta-t_0) + 4\lambda\sigma\mu\Delta + \lambda r + \lambda\chi(t_0,\vartheta).\end{gathered}$$

Подставляя $\mathbf{st}$ по формуле (10.2.1), получим

$$\begin{gathered}\mathrm{Var}(V^{(2)},\,[t_0,\,\vartheta]) \le 2\lambda\sqrt{(2\sigma\mu\Delta + r)\beta\mu}\,(\vartheta-t_0) +\\ +4\lambda\sigma\mu\Delta + \lambda r + \lambda\chi(t_0,\,\vartheta).\end{gathered} \tag{10.2.7}$$

2. Пусть $\beta = 0$. Положим

$$t_1 := \min\{t : y^{(1)}(t) \in \Pi^r(t),\ t\in[t_0,\,\vartheta]\},$$

$$\hat{t} := \max\{t : y^{(1)}(t) \in \Pi^r(t),\ t \in [t_0,\, \vartheta]\}.$$

Имеем

$$y^{(1)}(t) \notin \Pi^r(t), \quad t \in [t_0,\, t_1) \cup (\hat{t},\, \vartheta].$$

Для промежутков $[t_0,\, t_1]$ и $[\hat{t},\, \vartheta]$, опираясь на (У.10.1.2) (так же, как при выводе неравенства (10.2.2)), получим

$$\mathrm{Var}(V^{(2)},\, [t_0,\, t_1]) \leq 2\lambda\sigma\mu\Delta + \lambda\chi(t_0, t_1), \tag{10.2.8}$$

$$\mathrm{Var}(V^{(2)},\, [\hat{t},\, \vartheta]) \leq 2\lambda\sigma\mu\Delta + \lambda\chi(\hat{t},\, \vartheta). \tag{10.2.9}$$

Для промежутка $[t_1,\, \hat{t}\,]$, обращаясь к (У.10.1.1) при $\beta = 0$, имеем

$$\mathcal{V}(\hat{t},\, y^{(1)}(\hat{t}\,)) \leq V^{(2)}(t_1,\, y^{(1)}(t_1)) + \lambda\chi(t_1,\, \hat{t}\,)$$

и поэтому, учитывая неравенство

$$V^{(2)}(\hat{t},\, y^{(1)}(\hat{t}\,)) \leq \mathcal{V}(\hat{t},\, y^{(1)}(\hat{t}\,)) + \lambda r,$$

приходим к оценке

$$\mathrm{Var}(V^{(2)},\, [t_1,\, \hat{t}\,]) \leq \lambda r + \lambda\chi(t_1,\, \hat{t}\,). \tag{10.2.10}$$

Объединяя (10.2.8) $-$ (10.2.10), получим

$$\mathrm{Var}(V^{(2)},\, [t_0,\, \vartheta]) \leq 4\lambda\sigma\mu\Delta + \lambda r + \lambda\chi(t_0, \vartheta). \tag{10.2.11}$$

3. Опираясь на (10.2.7) в случае $\beta > 0$ и на (10.2.11) в случае $\beta = 0$, имеем оценку

$$\begin{aligned} V^{(2)}(\vartheta,\, y^{(1)}(\vartheta)) \leq V^{(2)}(t_0, x_0) + 2\lambda\sqrt{(2\sigma\mu\Delta + r)\beta\mu}\,(\vartheta - t_0) + \\ +4\lambda\sigma\mu\Delta + \lambda r + \lambda\chi(t_0, \vartheta). \end{aligned} \tag{10.2.12}$$

Поскольку

$$\gamma^{(2)}(y^{(1)}(\vartheta)) = V^{(2)}(\vartheta,\, y^{(1)}(\vartheta)),\ \ \gamma^{(1)}(y^{(1)}(\vartheta)) \leq \gamma^{(2)}(y^{(1)}(\vartheta)) + \|\gamma^{(1)} - \gamma^{(2)}\|_{\mathcal{M}}$$

и правая часть (10.2.12) не зависит от выбранного $v(\cdot) \in K^{(1)}$, то

$$\Gamma^{(1)}(t_0, x_0, U, \Delta) \leq V^{(2)}(t_0, x_0) + 2\lambda\sqrt{(2\sigma\mu\Delta + r)\beta\mu}\,(\vartheta - t_0) +$$

$$+4\lambda\sigma\mu\Delta + \lambda r + \lambda\chi(t_0, \vartheta) + \|\gamma^{(1)} - \gamma^{(2)}\|_{\mathcal{M}},$$

что завершает доказательство теоремы 2. □

11. Опыт численного построения поверхностей переключения в дифференциальных играх

В данной работе не обсуждаются алгоритмы численного построения поверхностей переключения. Ограничимся кратким описанием публикаций, где изложены результаты компьютерного моделирования с использованием поверхностей переключения.

Наиболее простым является случай $n = 2$, т.е. когда значения функции платы в момент окончания игры определяются лишь некоторыми двумя координатами фазового вектора.

Для этого случая в Институте математики и механики УрО РАН в начале 80-х годов были разработаны [15—21] эффективные алгоритмы построения t-сечений множеств уровня функции цены. Построения ведутся в рамках аппроксимирующей игры (1.2.1) на заданной сетке $\{t_j\}$ моментов времени и на некоторой сетке $\{c_p\}$ значений функции цены. Каждое сечение $W_{c_p}^{(2)}(t_j)$ представляет собой выпуклый многоугольник на плоскости. Переход от построенного сечения $W_{c_p}^{(2)}(t_j)$ к сечению $W_{c_p}^{(2)}(t_{j-1})$, $t_{j-1} < t_j$, осуществляется при помощи специальной попятной процедуры, использующей операцию овыпукления положительно-однородной кусочно линейной функции в пространстве R^2 или же эквивалентную ей операцию пересечения ломаных на плоскости.

Несложная обработка [5, 6, 19, 21, 22] многоугольников $W_{c_p}^{(2)}(t_j)$, $c \in \{c_p\}$, дает для каждой компоненты u_i, $i = \overline{1, k}$, управляющего воздействия u первого игрока линию переключения, соответствующую моменту t_j. Просчитанные на сетке $\{t_j\}$ линии переключения определяют способ управления по компоненте u_i. Наборы линий переключения хранятся в памяти и используются в дискретной схеме управления.

В работах [19, 21—34] рассмотрена задача о посадке самолета в условиях ветрового возмущения. Исследовался процесс посадки до момента пролета торца взлетно-посадочной полосы. При линеаризации нелинейных уравнений динамики относительно номинального движения по прямолинейной глиссаде снижения получаем линейную систему, распадающуюся на две подсистемы: в одной из них участвуют фазовые переменные и управляющие воздействия, влияющие на вертикальное отклонение от номинала (подсистема продольного канала), в другой — на боковое отклонение (подсистема бокового канала). Соответственно рассматривались две вспомогательные линейные дифференциальные игры с фиксированным моментом окончания. В первой функция платы зависит от вертикального отклонения в момент окончания и скорости его изменения. Управляющие воздействия – отклонение руля высоты и изменение силы тяги. Во второй плата определяется боковым отклонением и его скоростью. Управляющие воздействия – отклонение элеронов и руля направления.

Для каждой из двух вспомогательных линейных дифференциальных игр просчитывались на заданной сетке моментов времени линии переключения, определяющие близкий к оптимальному (в рамках линейной модели) способ управления первого игрока. Тестирование проводилось в рамках исходной нелинейной системы. Применялись различные варианты задания ветровой помехи: формирование помехи по принципу обратной связи на основе решения вспомогательных линейных дифференциальных игр [23, 25, 26, 28], использование моделей микровзрыва ветра [36–38], формирование помехи при помощи датчика случайных чисел. Полученные результаты моделирования процесса посадки сравнивались с теми, что дают традиционные способы управления.

Способ управления при помощи наборов линий переключения тестировался также на модельных задачах посадки и взлета, предложенных А.Миеле и его сотрудниками в статьях [35, 38, 39]. Результаты исследования отражены в работах [25, 40–43]. Для задачи взлета проведено сравнение с результатами Д.Лейтмана и его сотрудников, представленными в статьях [44, 45], в которых управление строилось с использованием специально подобранных функций Ляпунова.

В статье [46] рассмотрена задача разбега самолета по взлетно-посадочной полосе в условиях ветрового возмущения. Исследуемый способ управления был основан на построении линий переключения.

В работах [47, 48] изучалась в игровой постановке задача о перемещении груза с подвижной точкой подвеса. Были построены линии переключения, определяющие оптимальный способ управления.

Пакет программ для построения поверхностей переключения в случае $n = 3$ описан в статье [49].

Список литературы

1. Красовский Н. Н., Субботин А. И. *Позиционные дифференциальные игры.* М.: Наука, 1974, 456 с.

2. Krasovskii N. N., and Subbotin A. I. *Game-Theoretical Control Problems.* New York – Berlin: Springer-Verlag, 1988, 517 p.

3. Красовский Н. Н. Дифференциальные игры. Аппроксимационные и формальные модели. *Матем. сб.*, 1978, **107**(4), 541–571.

4. Субботина Н. Н. Универсальные оптимальные стратегии в позиционных дифференциальных играх. *Дифференц. уравнения,* 1983, **19**(11), 1890–1896.

5. Боткин Н. Д., Пацко В. С. Универсальная стратегия в дифференциальной игре с фиксированным моментом окончания. *Проблемы управления и теории информации,* 1982, **11**(6), 419–432.

6. Боткин Н. Д., Пацко В. С. Позиционное управление в линейной дифференциальной игре. *Изв. АН СССР. Техн. кибернетика,* 1983, 4, 78–85.

7. Зарх М. А., Пацко В. С. Позиционное управление второго игрока в линейной дифференциальной игре с фиксированным моментом окончания. Свердловск, 1985, 84 с. (Рукопись деп. в ВИНИТИ, № 5756–85)

8. Зарх М. А., Пацко В. С. Построение управления второго игрока в линейной дифференциальной игре на основе свойства отталкивания. В кн.: *Управление с гарантированным результатом.* Сб. научн. тр., А.И. Субботин и В.Н. Ушаков ред., Свердловск: ИММ УНЦ АН СССР, 1987, 37–70.

9. Зарх М.А. Универсальная оптимальная стратегия второго игрока в линейной дифференциальной игре. Свердловск, 1985, 35 с. (Рукопись деп. в ВИНИТИ, № 7438–В–85)

10. Зарх М.А. Универсальная стратегия второго игрока в линейной дифференциальной игре. *ПММ,* 1990, **54**(3), 395–400.

11. Боткин Н.Д. Оптимальная универсальная стратегия в линейной дифференциальной игре. *Дифференц. уравнения,* 1989, **25**(9), 1475–1480.

12. Кейн В. М. *Оптимизация систем управления по минимаксному критерию.* М.: Наука, 1985, 248 с.

13. Красовский Н. Н. *Игровые задачи о встрече движений.* М.: Наука, 1970, 420 с.

14. Субботин А. И., Ченцов А. Г. *Оптимизация гарантии в задачах управления.* М.: Наука, 1981, 288 с.

15. Исакова Е. А., Логунова Г. В., Пацко В. С. Построение стабильных мостов в линейной дифференциальной игре с фиксированным моментом окончания. В кн.: *Алгоритмы и программы решения линейных дифференциальных игр.* Сб. научн. тр., А.И. Субботин и В.С. Пацко ред., Свердловск: ИММ УНЦ АН СССР, 1984, 127–158.

16. Боткин Н.Д. Численное построение сечений множества позиционного поглощения в линейной дифференциальной игре. Там же, 1984, 5–38.

17. Боткин Н.Д., Зарх М.А. Оценка погрешности построения множества позиционного поглощения в линейной дифференциальной игре. Там же, 1984, 39–80.

18. Боткин Н. Д., Пацко В. С. Численное решение линейных дифференциальных игр. В кн.: *Differential Equations and Applications*, I, Rousse, Bulgaria, 1985, I. Dimovski and J. Stoyanov eds., Rousse: 'Angel Kancev' Tech. Univ., 1987, 543–546.

19. Botkin N.D., Zarkh M.A., and Patsko V.S. Numerical Solution of Linear Differential Games. In: *Differential Games – Developments in Modelling and Computation. Lecture Notes in Control and Information Sciences*, **156**. Berlin–New York: Springer-Verlag, 1991, 226–234.

20. Patsko V.S. Special Aspects of Convex Hull Constructing in Linear Differential Games of Small Dimension. In: *Proceedings of the 10th IFAC Workshop "Control Applications of Optimization"* (December 19–21, 1995. Haifa, Israel). London: Pergamon Press, 1996, 19–24.

21. Боткин Н. Д., Кейн В. М., Красов А. И., Пацко В. С. Управление боковым движением самолета на посадке в условиях ветрового возмущения. Ленинград–Свердловск, 1983, 78 с. (Отчет зарегистрирован в ВИНИТИ, № гос. регистрации 81104592, инв. № 02830078880)

22. Боткин Н. Д., Кейн В. М., Пацко В. С. Модельная задача об управлении боковым движением самолета на посадке. *ПММ,* 1984, **48**(4), 560–567.

23. Боткин Н.Д., Пацко В.С. Анализ применения методов теории дифференциальных игр для имитации ветровых возмущений. Свердловск, 1987, 46 с. (Отчет зарегистрирован в ВИНИТИ, № гос. регистрации 188003467, инв. № 02880044271)

24. Боткин Н.Д., Пацко В.С., Турова В.Л. Разработка алгоритмов построения экстремальных ветровых возмущений. Свердловск, 1987, 58 с. (Отчет зарегистрирован в ВИНИТИ, № гос. регистрации 188003467, инв. № 02880054701)

25. Боткин Н.Д., Турова В.Л., Иванов А.Г. Рекомендации по имитации экстремальных ветровых возмущений. Свердловск, 1988, 51 с. (Отчет зарегистрирован в ВИНИТИ, № гос. регистрации 188003467, инв. № 02890045178)

26. Боткин Н.Д., Турова В.Л. Разработка пакета прикладных программ синтеза экстремальных ветровых возмущений на этапе посадки. Свердловск, 1988, 39 с. (Отчет зарегистрирован в ВИНИТИ, № гос. регистрации 188003467, инв. № 02880069889)

27. Боткин Н.Д., Кейн В.М., Пацко В.С. Решение задачи о посадке самолета в минимаксной постановке. В кн.: *Оптимизация управления летательными аппаратами и их системами.* Сб. научн. тр., Москва, Изд-во МАИ, 1988, 8–15.

28. Боткин Н.Д., Кейн В.М., Пацко В.С. Применение методов теории дифференциальных игр к задаче управления самолетом на посадке. В кн.: *Позиционное управление с гарантированным результатом.* Сб. научн. тр., А.И. Субботин и А.М. Тарасьев ред., Свердловск: ИММ УрО АН СССР, 1988, 33–44.

29. Botkin N.D., Kein V.M., Patsko V.S., and Turova V.L. Aircraft Landing Control in the Presence of Windshear. *Problems of Control and Information Theory*, 1989, **18**(4), 223–235.

30. Кейн В.М., Пацко В.С., Турова В.Л. Задача о посадке самолета в условиях сдвига ветра. В кн.: *Управление в динамических сис-*

темах. Сб. научн. тр., А.И. Субботин и В.Н. Ушаков ред., Свердловск: ИММ УрО АН СССР, 1990, 52–64.

31. Боткин Н.Д., Жуков С.П., Красов А.И. Комбинированный способ управления самолетом на посадке. Там же, 1990, 18–30.

32. Кейн В.М., Пацко В.С., Турова В.Л. Управление самолетом при сдвиге ветра. В кн.: *Гагаринские научные чтения по космонавтике и авиации.* М.: Наука, 1990, 53–56.

33. Боткин Н.Д., Зарх М.А., Кейн В.Н., Пацко В.С., Турова В.Л. Дифференциальные игры и задачи управления самолетом при ветровых помехах. *Изв. РАН. Техническая кибернетика*, 1993, 1, 68–76.

34. Patsko V.S., Botkin N.D., Kein V.M., Turova V.L., and Zarkh M.A. Control of an Aircraft Landing in Windshear. *Journal of Optimization Theory and Applications*, November, 1994, **83**(2), 237–267.

35. Miele A., Wang T., and Melvin W. W. Optimal Take-Off Trajectories in the Presence of Windshear. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1986, **49**(1), 1–45.

36. Ivan M. A Ring-Vortex Downburst Model for Real-Time Flight Simulation of Severe Windshears. *AIAA Flight Simulation Technologies Conf.*, 1985, July 22–24, St. Louis, Miss., 1985, 57–61.

37. Zhu S., and Etkin B. Model of Wind Field in a Downburst. *Journal of Aircraft*, 1985, **22**(7), 595–601.

38. Miele A., Wang T., Tzeng C.Y., and Melvin, W.W. Optimal Abort Landing Trajectories in the Presence of Windshear. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1987, **55**(2), 165–202.

39. Miele A., Wang T., Wang H., and Melvin W.W. Optimal Penetration Landing Trajectories in the Presence of Windshear. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1988, **57**(1), 1–40.

40. Иванов А. Г. Моделирование движения самолета на этапе посадки. В кн.: *Проблемы управления с гарантированным результатом.* Сб. научн. тр., А.И. Субботин и С.А. Брыкалов ред., Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 1992, 15–26.

41. Турова В.Л. Исследование задач взлета и прекращения посадки самолета при помощи численных методов теории дифференциальных игр. Свердловск, 1992, 38 с. (Рукопись деп. в ВИНИТИ, № 2546–В–92)

42. Turova V.L. Take-off Control in a Windshear. *Preprint of the Institute of Mathematics and Mechanics*, Ekaterinburg, 1991, 12 p.

43. Турова В.Л. Применение численных методов теории дифференциальных игр к задачам о взлете и прекращении посадки самолета. *Труды Института математики и механики УрО РАН,* 1992, **2**, 188–201.

44. Chen Y. H., and Pandey S. Pobust Control Strategy for Take-Off Performance in a Windshear. *Optimal Control Applications and Methods*, 1989, **10**(1), 65–79.

45. Leitmann G., and Pandey S. Aircraft Control for Flight in an Uncertain Environment: Take-off in Windshear. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1991, **70**(1), 25–55.

46. Боткин Н.Д., Красов А.И. Позиционное управления в модельной задаче о разбеге самолета. В кн.: *Позиционное управление с гарантированным результатом.* Сб. научн. тр., А.И. Субботин и А.М. Тарасьев ред., Свердловск: ИММ УрО АН СССР, 1988, 22–32.

47. Соколов Б.Н., Турова В.Л. Оптимальное управление маятником в условиях неопределенных помех. *Препринт № 336.* Москва: ИПМ АН СССР, 1988, 38 с.

48. Соколов Б.Н., Турова В.Л. Синтез оптимального управления маятника при наличии активных помех. *Изв. РАН. Механика твердого тела*, 1988, **23**(5), 14–23.

49. Зарх М.А. Пакет программ для решения трехмерных дифференциальных игр. В кн.: *Анализ и синтез динамических систем в условиях неопределенности.* Сб. научн. тр., Москва: Изд-во МАИ, 1990, 35–41.

Содержание

Научное издание

Валерий Семенович Пацко

Поверхности переключения в линейных дифференциальных играх

Препринт

Рекомендовано к изданию Ученым советом Института математики и механики и НИСО УрО РАН

ЛР N 020764 от 24.04.98 г.

Ответственный за выпуск Л.В. Камнева

НИСО УрО РАН N 53(04)
Подписано в печать 05.07.04. Формат $60 \times 84/16$.
Бумага типографская. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 5,0. Уч-изд. л. 3,5. Тираж 150. Заказ

620 219, Екатеринбург, ГСП–384, ул. С.Ковалевской, 16,
Институт математики и механики УрО РАН

Размножено с готового оригинал-макета в типографии УрО РАН
620219, Екатеринбург, ГСП–169, ул. С.Ковалевской, 18.