

АКАДЕМИЯ НАУК СССР · УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

---

ПОЗИЦИОННОЕ УПРАВЛЕНИЕ  
С ГАРАНТИРОВАННЫМ  
РЕЗУЛЬТАТОМ

СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ

СВЕРДЛОВСК 1988

УДК 517.97

**Позиционное управление с гарантированным результатом:** Сб. науч. трудов. Свердловск: УрО АН СССР, 1988.

Рассматриваются работы, посвященные изучению и численному построению основных элементов, определяющих решение задач гарантированного управления. Исследуются задачи управления для динамических систем, подверженных воздействию неопределенных помех. Управление такими системами осуществляется по принципу обратной связи и должно гарантировать заданное качество управляемого процесса.

Сборник представляет интерес для специалистов по теории управления и ее приложениям.

Ответственные редакторы

доктор физико-математических наук **А. И. Субботин**,  
кандидат физико-математических наук **А. М. Тарасьев**

Рецензент доктор физико-математических наук  
**С. Н. Шиманов**

20204—1498—143 (86)  
П ————— 6—1988      © УрО АН СССР, 1988  
055 (02) 7

*Н. Д. БОТКИН, В. М. КЕЙН, В. С. ПАЦКО*

**ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР  
К ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ САМОЛЕТОМ НА ПОСАДКЕ**

В работе приводятся результаты численного исследования задачи управления движением самолета на посадке в условиях ветрового возмущения. Рассматривается движение на предпоследней прямой до момента пролета торца взлетно-посадочной полосы (ВПП). Качество процесса определяется вертикальным и боковым отклонениями центра масс самолета от стандартной траектории захода и скоростью их изменения в момент пролета торца ВПП. Относительно ветра предполагаются заданными лишь пределы возможных отклонений его скорости от некоторого «среднего» значения и само это значение. Учитываются также характеристики инерционности изменения скорости ветра.

Основная цель данной статьи — построение «наихудшего» ветрового возмущения. Предлагаемый закон формирования такого возмущения представляет функцию обратной связи, при помощи которой генерируется конкретная реализация скорости ветра. При одном варианте управления самолетом на посадке будет одна реализация, при другом — иная. Полученный закон можно использовать в имитаторах ветрового возмущения с целью обучения пилотов навыкам управления в сложных ветровых условиях, а также при сравнительном анализе тех или иных конкретных способов автоматического управления на посадке.

Для нахождения закона формирования наихудшей ветровой помехи использовали численные методы теории антагонистических позиционных дифференциальных игр. В настоящее время такие методы разработаны для некоторых классов линейных дифференциальных игр и реализованы в виде набора стандартных программ. Эти программы применяли для решения вспомогательных линейных задач. Соответственно нелинейные уравнения динамики самолета подменяли линейными. В качестве номинального движения, относительно которого проводили линеаризацию, было взято равномерное движение по прямолинейной глиссаде снижения при условии поддержания заданной воздушной скорости. Полученный на основе линейных задач

закон формирования помехи использовали затем в полной нелинейной модели.

Говоря о дифференциальной игре, будем отождествлять помеху со вторым игроком, а выбор управления — с первым. Стандартные программы позволяют (в рамках линейных моделей) находить оптимальные стратегии каждого из игроков. Для задания ветрового возмущения берется оптимальная стратегия второго игрока. Стратегию первого можно использовать как основу для построения новых, отличных от традиционных алгоритмов автоматического управления на посадке. По теме исследования статья примыкает к [2, 6—8, 12, 16].

### § 1. Динамика системы. Функции $\varphi_*$ , $\varphi^*$

Движение самолета на посадке описывается системой дифференциальных уравнений 12-го порядка, где вектор состояния включает три координаты  $x$ ,  $y$ ,  $z$  центра масс в системе, связанной с поверхностью ВПП (рис. 1), углы тангажа  $\theta$ , рысканья  $\psi$  и крена  $\gamma$ , а также соответствующие линейные и угловые скорости. Конкретный вид уравнений приводится, например, в [3, 10].

Управляющими воздействиями являются отклонения рулей высоты  $\delta_v$ , направления  $\delta_n$ , элеронов  $\delta_o$  и изменение тяги двигателей  $P$ . Положение рулей нельзя изменить мгновенно. Тем более это относится к тяге двигателей. Поэтому к уравнениям самолета добавляются уравнения динамики рулевых приводов и двигателей [14]. Указанные величины входят теперь в расширенный вектор состояния объекта, а управляющими становятся задающие воздействия  $\delta_{vз}$ ,  $\delta_{nз}$ ,  $\delta_{oз}$ ,  $\delta_{Pз}$  на входах соответствующих приводов. Каждое из них ограничено снизу и сверху.

Будем считать, что ветровое возмущение содержит три независимые компоненты  $W_x$ ,  $W_y$ ,  $W_z$ , ограниченные по модулю и отсчитываемые от заданных постоянных значений  $W_{x0}$ ,  $W_{y0}$ ,  $W_{z0}$ . Чтобы учесть инерционность изменения скорости ветра, подчиним каждую из величин  $W_x$ ,  $W_y$ ,  $W_z$  системе дифференциальных уравнений второго порядка, например,

$$\dot{W}_x = k_1(\bar{W}_x - W_x), \quad \dot{\bar{W}}_x = k_2(\omega_x - \bar{W}_x). \quad (1.1)$$

Здесь независимой является величина  $\omega_x$ ; стесним ее тем же ограничением, что и  $W_x$ . Начальные условия для  $W_x$ ,  $\bar{W}_x$  возьмем нулевыми. Положительные константы  $k_1$ ,  $k_2$  считаем заданными. Выписанную систему вместе с аналогичными для  $W_y$ ,  $W_z$  подсоединим к основной. Новые независимые переменные обозначим  $\omega_y$ ,  $\omega_z$ . Полученную в итоге полную систему дифференциаль-

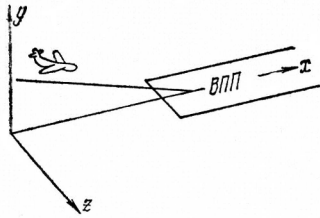


Рис. 1.

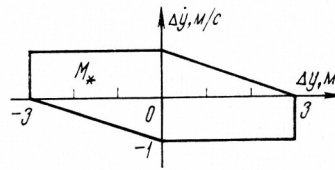


Рис. 2.

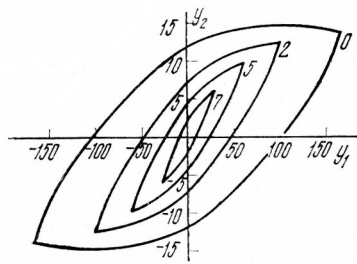


Рис. 3.

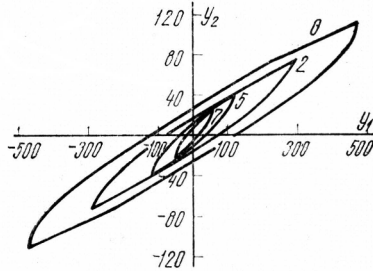


Рис. 4.

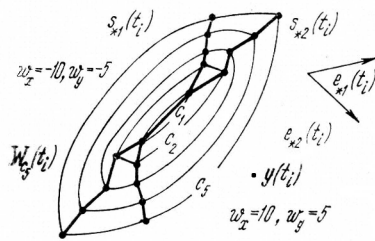


Рис. 5.

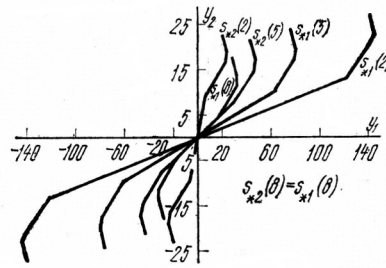


Рис. 6.

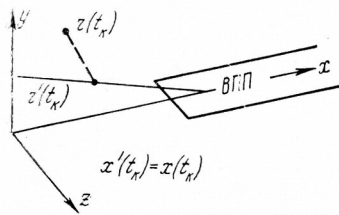


Рис. 7.

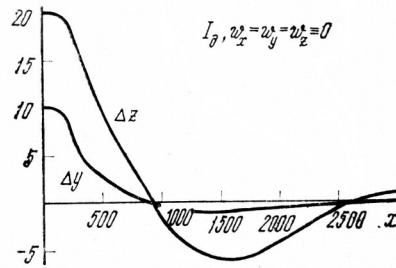


Рис. 8.

ных уравнений в векторной форме запишем в виде

$$\dot{\xi} = f(\xi, \delta_3, \omega). \quad (1.2)$$

Здесь  $\delta_3 = (\delta_{вз}, \delta_{рз}, \delta_{нз}, \delta_{эз})'$  — векторный параметр управления,  $\omega = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)'$  — векторный параметр помехи. Линейные величины будем измерять в метрах, углы — в радианах, время — в секундах.

Полную систему можно разделить [3, 10] на подсистемы продольного и бокового движений. К первой группе координат относятся, в частности,  $x, y, \phi$ , ко второй —  $z, \psi, \gamma$ . Подсистемы продольного и бокового движений не являются независимыми. Однако при малых отклонениях от параметров номинального движения их взаимное влияние мало. Поведение подсистемы продольного движения определяется управляющими воздействиями  $\delta_{вз}, \delta_{рз}$  и параметрами помехи  $\omega_x, \omega_y$ . Боковое движение зависит от  $\delta_{нз}, \delta_{эз}$  и  $\omega_z$ .

Качество управления по продольному каналу охарактеризуем при помощи функции  $\varphi_*$ , зависящей от отклонений  $\Delta y, \Delta \dot{y}$  координаты  $y$  и ее скорости от номинальных значений в момент пролета торца ВПП. Для задания функции  $\varphi_*$  на плоскости  $\Delta y, \Delta \dot{y}$  рассмотрим выпуклый шестиугольник  $M_*$  (рис. 2), симметричный относительно нуля. Его вершины:  $(-3; 0), (-3; 1), (0; 1), (3; 0), (3; -1), (0; -1)$ . Положим

$$\varphi_*(\Delta y, \Delta \dot{y}) = \min \{c \geq 0 : (\Delta y, \Delta \dot{y}) \in cM_*\}.$$

Функция  $\varphi^*$  есть функция Минковского множества  $M_*$ , которое можно рассматривать как допуск на отклонения  $\Delta y, \Delta \dot{y}$  в момент пролета торца ВПП. Функция  $\varphi_*$  показывает отклонение от допуска.

Для оценки качества управления по боковому каналу введем функцию  $\varphi^*$ , зависящую от отклонений  $\Delta z, \Delta \dot{z}$  в момент пролета торца ВПП. Поскольку номинальные значения  $z$  и  $\dot{z}$  равны нулю, то  $\Delta z = z, \Delta \dot{z} = \dot{z}$ . На плоскости  $z, \dot{z}$  зададим множество  $M^*$  в виде шестиугольника с вершинами  $(-6; 0), (-6; 1,5), (0; 1,5), (6; 0), (6; -1,5), (0; -1,5)$  и определим  $\varphi^*$  как функцию Минковского множества  $M^*$ . Множество  $M^*$  — допуск по координатам  $z, \dot{z}$  в момент пролета торца ВПП.

## § 2. Вспомогательные линейные задачи с фиксированным моментом окончания

Линеаризованная система дифференциальных уравнений продольного движения имеет вид

$$\dot{x} = A_*x + B_*u + C_*v, \quad x \in R^{12}, \quad (2.1)$$

$$A_* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,05 & 0 & -0,10 & -2,64 & 0 & 0,06 & 1 & 0,05 & 0 & 0,10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,24 & 0 & -0,64 & 45,28 & 0 & 1,45 & 0,08 & -0,24 & 0 & 0,64 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,01 & -0,50 & -0,53 & -0,38 & 0 & 0 & 0 & -0,01 & 0 \\ & & & & & & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & -0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ & & & 0 & & & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,5 & 0,5 \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$

$$B_* = \{b_{ij}\}, \quad i = \overline{1,12}, \quad j = 1,2; \quad b_{71} = 4, \quad b_{82} = 2,7; \quad b_{ij} = 0$$

для прочих  $i, j$ ;

$$C_* = \{c_{ij}\}, \quad i = \overline{1,12}, \quad j = 1,2; \quad c_{10,1} = c_{12,2} = 3; \quad c_{ij} = 0$$

для прочих  $i, j$ ;

$$x = (x_1, \dots, x_{12})', \quad u = (\Delta\delta_{вз}, \Delta\delta_{рз})', \quad v = (\omega_x, \omega_y)'$$

Здесь  $x_1, x_3$  — отклонения от номинальных значений по осям  $x, y$  ( $\Delta x$  и  $\Delta y$  в обозначениях § 1),  $x_5$  — отклонение угла тангажа ( $\Delta\theta$ ). Координата  $x_7$  имеет смысл отклонения руля высоты от балансирующего положения ( $\Delta\delta_b$ ),  $x_8$  — отклонение от номинала величины силы тяги, поделенной на массу ( $\Delta P/m$ ). При помощи переменных  $x_9, x_{10}$  описывается изменение составляющей  $W_x$  скорости ветра. Соответствующие уравнения совпадают с (1.1),  $x_9 = W_x$ . Переменные  $x_{11}, x_{12}$  служат для описания изменения составляющей  $W_y$  (при этом  $x_{11} = W_y$ ). Управляющие воздействия первого игрока:  $\Delta\delta_{вз}$  — заданное отклонение руля высоты,  $\Delta\delta_{рз}$  — заданное отклонение органа управления силой тяги. В дальнейшем условимся опускать знак  $\Delta$  в обозначениях заданных отклонений. Параметры  $\omega_x, \omega_y$  служат для формирования ветровой помехи и принадлежат второму игроку. Каждая из указанных величин ограничена по модулю:

$$\begin{aligned} |\delta_{вз}| &\leq 10^\circ\pi/180, & |\delta_{рз}| &\leq 27^\circ\pi/180, \\ |\omega_x| &\leq 10 \text{ м/с}, & |\omega_y| &\leq 5 \text{ м/с}. \end{aligned}$$

Рассмотрим антагонистическую дифференциальную игру [6, 9, 11] с динамикой (2.1), фиксированным моментом окончания  $T$  и платой  $\Phi_*$ . Первый игрок минимизирует значение платы  $\Phi_*$  в момент  $T$ , второй — максимизирует. В новых обозначениях функция  $\Phi_*$  зависит от координат  $x_3, x_4$ . Примем  $T = 15$  с. Оптимальная стратегия второго игрока в игре (2.1) будет использована для задания экстремальных ветровых возмущений по продольному каналу в полной нелинейной модели (1.2).

Линеаризованная система бокового движения имеет вид

$$\dot{\mathbf{x}} = A^* \mathbf{x} + B^* u + C^* v, \quad \mathbf{x} \in R^{10}, \quad (2.2)$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,08 & -5,56 & 0 & 9,27 & 0 & -1,49 & 0 & 0,08 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,01 & -0,93 & -0,26 & -0,09 & -0,03 & -0,25 & -0,05 & 0,01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,05 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,03 & -2,39 & -0,95 & -0,23 & -1,46 & -0,23 & -0,69 & 0,03 & 0 \\ & & & & & & -4 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & & & 0 & -4 & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & -0,5 & 0,5 \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$

$$B^* = \{b_{ij}\}, \quad i = \overline{1,10}, \quad j = 1,2; \quad b_{71} = b_{82} = 4; \quad b_{ij} = 0 \text{ для прочих } i, j;$$

$$C^* = \{c_i\}, \quad i = \overline{1,10}; \quad c_{10} = 3; \quad c_i = 0, \quad i \neq 10;$$

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{10})', \quad u = (\delta_{нз}, \delta_{эз})', \quad v = \omega_z.$$

Символ  $x_1$  — отклонение по оси  $z$  (в старых обозначениях  $\Delta z$ ),  $x_3$  и  $x_5$  — отклонения от номинальных значений углов рысканья и крена ( $\Delta\psi$ ,  $\Delta\gamma$ ). Координаты  $x_7$ ,  $x_8$  имеют смысл отклонений руля направления и элеронов ( $\Delta\delta_{н}$ ,  $\Delta\delta_{э}$ ). При помощи переменных  $x_9$ ,  $x_{10}$  описывается изменение боковой составляющей  $W_z$  скорости ветра ( $x_9 = W_z$ ). Управляющие воздействия первого игрока:  $\delta_{нз}$  — заданное отклонение руля направления,  $\delta_{эз}$  — заданное отклонение элеронов. Параметр  $\omega_z$  служит для формирования ветровой помехи и принадлежит второму игроку. Каждая из перечисленных величин ограничена по модулю:

$$|\delta_{нз}| \leq 25^\circ\pi/180, \quad |\delta_{эз}| \leq 10^\circ\pi/180, \quad |\omega_z| \leq 10 \text{ м/с.}$$

Рассмотрим дифференциальную игру с динамикой (2.2), фиксированным моментом окончания  $T = 15$  с и платой  $\varphi^*$ . Значения  $\varphi^*$  зависят от координат  $x_1$ ,  $x_2$  и подсчитываются в момент  $T$ . Оптимальная стратегия второго игрока в игре (2.2) будет использована для задания экстремальных ветровых возмущений по боковому каналу в полной модели (1.2).

### § 3. Решение линейных задач

Поскольку момент  $T$  зафиксирован и функция платы  $\varphi_*$  (соответственно  $\varphi^*$ ) зависит лишь от двух координат фазового вектора, то игра (2.1) сводится [9, 11] к эквивалентной игре второго порядка:

$$\dot{\mathbf{y}} = D_*(t) u + E_*(t) v, \quad (3.1)$$



$$D_*(t) = X_*(T, t)B_*, \quad E_*(t) = X_*(T, t)C_*, \\ u = (\delta_{вз}, \delta_{рз})', \quad v = (\omega_x, \omega_y)'$$

а игра (2.2) — к эквивалентной игре

$$\dot{\mathbf{y}} = D^*(t)u + E^*(t)v, \quad (3.2) \\ D^*(t) = X^*(T, t)B^*, \quad E^*(t) = X^*(T, t)C^*, \\ u = (\delta_{нз}, \delta_{эз})', \quad v = \omega_z.$$

Здесь  $X_*(T, t)$  ( $X^*(T, t)$ ) — матрица, состоящая из 3 и 4-й (1 и 2-й) строк матрицы Коши  $\exp A_*(T-t)$  ( $\exp A^*(T-t)$ ) для однородной части системы (2.1) ((2.2)). Связь между фазовым вектором эквивалентной и исходной игры задается соотношением

$$\mathbf{y}(t) = X_*(T, t)\mathbf{x}(t) \quad (\mathbf{y}(t) = X^*(T, t)\mathbf{x}(t)).$$

Функцию цены в игре (3.1) ((3.2)) обозначим символом  $\Gamma_*$  ( $\Gamma^*$ ).

В основе численного решения игр (2.1), (2.2) лежит переход к эквивалентной игре второго порядка и нахождение при помощи попятной конструкции сечений максимальных стабильных мостов [1, 9, 11]. Символом  $\mathbf{W}_{*c}(t)$  ( $\mathbf{W}_c^*(t)$ ) обозначим сечение в момент  $t$  максимального стабильного моста игры (3.1), ((3.2)), построенного от множества  $cM_*$  ( $cM^*$ ). Иначе говоря,  $\mathbf{W}_{*c}(t)$  ( $\mathbf{W}_c^*(t)$ ) есть множество уровня  $\{\mathbf{y} : \Gamma_*(t, \mathbf{y}) \leq c\}$  ( $\{\mathbf{y} : \Gamma^*(t, \mathbf{y}) \leq c\}$ ) функции цены в игре (3.1) ((3.2)) на момент  $t$ . Построение сечений осуществляется на заданной сетке значений  $c$  и  $t$ . На рис. 3 (4) показаны сечения  $\mathbf{W}_{*c}(t)$  ( $\mathbf{W}_c^*(t)$ ) для  $c=1$  и моментов  $t=0, 2, 5, 7$ .

Опишем задание оптимальной стратегии второго игрока в игре (2.1). Считаем, что стратегия будет использована в дискретной схеме [9] с некоторым шагом по  $t$ . Обозначим через  $e_{*1}(t)$ ,  $e_{*2}(t)$  первый и второй столбцы матрицы  $E_*(t)$ . Обработывая при помощи векторов  $e_{*1}(t_i)$ ,  $e_{*2}(t_i)$  сечения  $\mathbf{W}_{*c}(t_i)$ , построенные для момента  $t_i$  на сетке значений  $c$ , получаем [2, 5, 13] линии переключения  $s_{*1}(t_i)$ ,  $s_{*2}(t_i)$ , определяющие выбор параметров  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  в момент  $t_i$ . Правило построения линий переключения поясняется на рис. 5. Выбор параметра  $\omega_x$  осуществляется следующим образом. Пусть в момент  $t_i$  состояние системы (2.1) есть  $\mathbf{x}(t_i)$ . Просчитываем точку  $\mathbf{y}(t_i) = X_*(T, t_i)\mathbf{x}(t_i)$ . Если она расположена относительно линии  $s_{*1}(t_i)$  по направлению вектора  $e_{*1}(t_i)$  (см. рис. 5), то на очередном интервале дискретной схемы полагаем  $\omega_x = 10$ . При противоположном расположении точки  $\mathbf{y}(t_i)$  относительно линии  $s_{*1}(t_i)$  полагаем  $\omega_x = -10$ . Аналогично на основе линии  $s_{*2}(t_i)$  и вектора  $e_{*2}(t_i)$  производится выбор значения  $\omega_y$ . Подчеркнем, что воздействия  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  выбираются независимо, каждое на основе своей линии переключения. Такой выбор обоснован в [5, 13] и является в практическом смысле оптимальным. В строгом теоретическом смысле существуют крайне

редкие случаи, когда оптимальность разрушается. Просчитанные на ЭВМ линии переключения  $s_{*1}(t)$ ,  $s_{*2}(t)$  для  $t = 2, 5, 8$  показаны на рис. 6.

В игре (2.2) воздействие  $v = \omega_z$  — скалярное. Оптимальный выбор его производится на основе линий переключения  $s^*(t)$ , получаемых путем обработки сечений  $W_c^*(t)$  с использованием вектора  $E^*(t)$ . Таким образом, для выбора воздействий второго игрока, реализующих оптимальную стратегию, следует хранить набор линий переключения, построенных на сетке  $\{t_i\}$  моментов времени. Управление первого игрока в задачах (2.1), (2.2) также можно определить при помощи линий переключения. Такой способ будет использован для формирования воздействий  $\delta_{вз}$  и  $\delta_{эз}$ .

#### § 4. Результаты моделирования

Приведем результаты моделирования на ЭВМ движений полной нелинейной системы (1.2), когда ветровое возмущение задается при помощи линий переключения, полученных из решения задач (2.1), (2.2).

Пусть начальное положение  $x(0) = 0$  по оси  $x$  находится на расстоянии  $d = 3000$  м от торца ВПП. Номинальное движение по глиссаде, соответствующее заданным постоянным составляющим скорости ветра  $W_{x0} = -5$ ,  $W_{y0} = 0$ ,  $W_{z0} = 0$ , имеет скорость  $V_{x0}$  по оси  $x$ , равную  $67,13$  м/с и, значит, проходит над торцом полосы через  $d/V_{x0} = 3000/67,13 \approx 44,7$  с. Предположим, что на промежутке  $[0, T] = [0, 15]$  с шагом  $\kappa = 0,2$  заранее построены линии переключения в задачах (2.1), (2.2). Формирование помехи будем вести с шагом  $\Delta$ , также равным  $0,2$  (совпадение шагов  $\kappa$  и  $\Delta$  не обязательно).

Рассмотрим произвольный момент  $t_k = k\Delta$ . Положим

$$\bar{\tau}_k = \min \{T, (d - x(t_k))/V_{x0}\}, \quad \bar{t}_k = T - \bar{\tau}_k.$$

Пусть  $\tilde{t}_k$  — ближайший к  $\bar{t}_k$  момент из совокупности моментов  $\{0, \kappa, 2\kappa, \dots, T\}$ , для которых заготовлены линии переключения. Введем вектор  $\eta(t_k)$ , получаемый сдвигом вектора  $\xi(t_k)$ . А именно, пусть  $r(t_k)$  — точка с координатами  $x(t_k)$ ,  $y(t_k)$ ,  $z(t_k)$  в пространстве  $x, y, z$  (рис. 7) и  $r'(t_k) = (x'(t_k), y'(t_k), z'(t_k))$  — точка на глиссаде, для которой  $x'(t_k) = x(t_k)$ . Координаты вектора  $\eta(t_k)$  по осям  $x, y, z$  примем равными

$$x(t_k) - x'(t_k) = 0, \quad y(t_k) - y'(t_k), \quad z(t_k) - z'(t_k) = z(t_k).$$

Остальные координаты вектора  $\eta(t_k)$  получим из соответствующих координат вектора  $\xi(t_k)$  центрированием координатами номинального движения (все координаты номинального движения, за исключением  $x$  и  $y$ , не зависят от  $t$ ). Символом  $\eta_*(t_k)$  обозначим вектор, составленный из координат вектора  $\eta(t_k)$ , отвечающих продольному (боковому) движению. Выбор воздействий  $\omega_x, \omega_y$

в момент  $t_h$  будем производить на основе анализа расположения точки  $X_*(T, \tilde{t}_h) \eta_*(t_h)$  относительно линий  $s_{*1}(\tilde{t}_h), s_{*2}(\tilde{t}_h)$ . Выбор воздействия  $\omega_z$  делаем, анализируя расположение точки  $X^*(T, \tilde{t}_h) \times \eta^*(t_h)$  относительно линии  $s^*(\tilde{t}_h)$ .

Таким образом, пока расстояние по оси  $x$  до торца ВПП больше  $TV_{x0} \approx 1007$  м, величина  $\tilde{t}_h$  равна нулю и воздействия  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  определяются при помощи линий  $s_{*1}(0), s_{*2}(0), s^*(0)$ . Когда указанное расстояние меньше  $TV_{x0}$ , величина  $\tilde{t}_h$  монотонно растет и соответственно этому меняются линии переключения.

Символом  $\Pi_*$  обозначим способ задания помехи, когда при помощи линий переключения формируются воздействия  $\omega_x$  и  $\omega_y$ , в то время как  $\omega_z$  полагается тождественно равным нулю. Способ  $\Pi_*$  задает помеху по продольному каналу. Символ  $\Pi^*$  будет означать экстремальную помеху по боковому каналу: воздействие  $\omega_z$  формируется при помощи линий переключения, воздействия  $\omega_x$  и  $\omega_y$  считаются нулевыми.

Опишем два варианта задания управляющих воздействий  $\delta_{вз}, \delta_{рз}, \delta_{нз}, \delta_{эз}$ . Первый (обозначим его  $I_d$ ) основан на использовании принятых в настоящее время (действующих) алгоритмов [14], опирающихся на теорию автоматического регулирования. Во втором варианте ( $I_n$  — игровой способ) воздействия  $\delta_{вз}, \delta_{эз}$  будем формировать при помощи линий переключения подобно тому, как это описано для помехи, воздействия  $\delta_{рз}, \delta_{нз}$  — как в варианте  $I_d$ . Шаг выбора управления в обоих вариантах примем равным 0,05.

Для характеристики используемых в варианте  $I_d$  алгоритмов приведем графики переходных процессов системы (1.2) по координатам  $y, z$ , полученные при отсутствии помехи. На рис. 8 показаны зависимости отклонений  $\Delta y$  и  $\Delta z$  в виде функций пройденного расстояния. В начальный момент для первой кривой от номинала отличалась лишь координата  $y$ , для второй — координата  $z$ .

Результаты численного моделирования при различных вариантах формирования управления и помехи представлены на рис. 9—14. Всюду по горизонтали откладывается пройденное расстояние. Рис. 9—11 соответствуют случаю, когда начальное отклонение  $\Delta y$  равно 10 м, остальные отклонения нулевые. Для рис. 12—14 в начальный момент  $\Delta z = 20$  м, отклонения остальных координат вектора  $\xi(0)$  от номинала нулевые. Принятые на рисунках обозначения означают:  $I_n, \Pi^*$  — управление строилось по варианту  $I_n$ , помеха — при помощи варианта  $\Pi^*$ ;  $\omega_x \equiv 10, \omega_y \equiv -5, \omega_z \equiv 0$  — воздействия  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  тождественно постоянны по  $t$ . Из рис. 9, 12 видно, что управление по варианту  $I_d$  не дает удовлетворительного результата при столкновении с экстремальной помехой. Результаты для варианта  $I_n$  существенно лучше. Рис. 10, 13 соответствуют комбинациям  $I_n, \Pi_*$  и  $I_n, \Pi^*$ . Здесь повторены графики для  $\Delta y, \Delta z$  и приведены

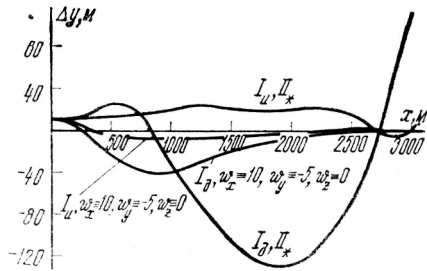


Рис. 9.

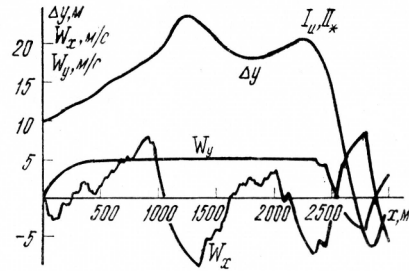


Рис. 10.

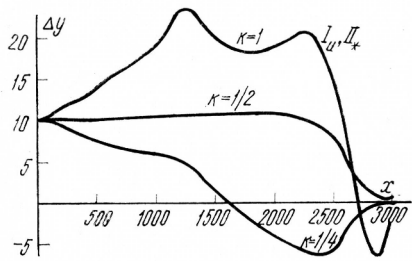


Рис. 11.

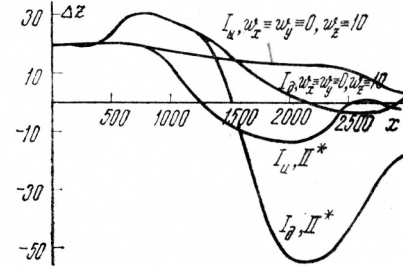


Рис. 12.

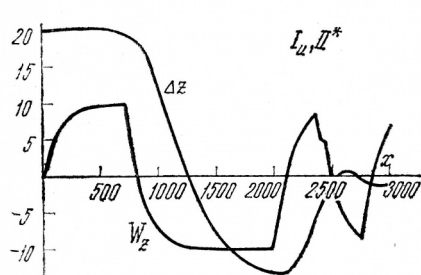


Рис. 13.

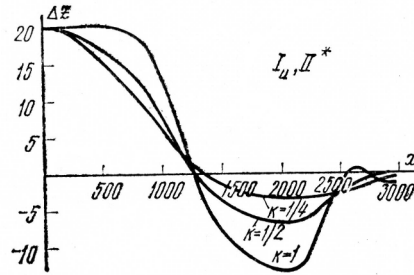


Рис. 14.

Таблица 1

Значения функций  $\varphi_*$ ,  $\varphi^*$  в момент пролета торца ВПП ( $\Delta y = 10$  м)

Вариант	Функция	$\Pi_*$	$\Pi^*$	$w_x = 10, w_y = -5,$ $w_z = 0$
$I_{II}$	$\varphi_*$	2,34	0,08	0,85
	$\varphi^*$	0	0,11	0
$I_{II}$	$\varphi_*$	54,85	1,07	0,19
	$\varphi^*$	0	3,85	0

Таблица 2

Значения функций  $\varphi_*$ ,  $\varphi^*$  в момент пролета торца ВПП ( $\Delta z = 20$  м)

Вариант	Функция	$\Pi_*$	$\Pi^*$	$w_x = w_y = 0,$ $w_z = 10$
$I_{II}$	$\varphi_*$	2,48	0,10	0,12
	$\varphi^*$	0	0,33	0,51
$I_{II}$	$\varphi_*$	69,66	1,30	0,12
	$\varphi^*$	0,53	2,85	1,76

получающиеся реализации составляющих  $W_x$ ,  $W_y$ ,  $W_z$  скорости ветра. Рис. 11, 14 иллюстрируют зависимость результатов от максимально допустимых значений, ограничивающих воздействия  $w_x$ ,  $w_y$ ,  $w_z$ , а значит, и составляющие  $W_x$ ,  $W_y$ ,  $W_z$ . Кривые на рис. 11 построены для комбинации  $I_{II}$ ,  $\Pi_*$ , кривые на рис. 14 соответствуют комбинации  $I_{II}$ ,  $\Pi^*$ . Для каждой кривой выбор воздействий  $w_x$ ,  $w_y$ ,  $w_z$  проводили так же, как и ранее, но выбранные значения умножались на коэффициент  $k$ . В табл. 1, 2 даны значения функций платы  $\varphi_*$ ,  $\varphi^*$ , просчитанные в момент пролета торца ВПП.

Приведенные в этом разделе результаты отражают лишь одну из возможностей использования решений задач (2.1), (2.2) для построения экстремальных ветровых возмущений. В современной литературе имеется значительное число работ (см., например, [4, 15]), в которых описывается механизм воз-

никновения резких порывов ветра. Решение задач (2.1), (2.2) можно включить в качестве определенного звена в модель, реализующую такой механизм. Тем самым можно добиться, чтобы реализации экстремальных ветровых возмущений были более реалистичными по сравнению с теми, что получаются при описанном выше моделировании.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Алгоритмы и программы решения линейных дифференциальных игр (материалы по математическому обеспечению ЭВМ). Свердловск: УНЦ АН СССР, 1984. 295 с.
2. Боткин Н. Д., Кейн В. М., Пацко В. С. Модельная задача об управлении боковым движением самолета на посадке.— ПММ, 1984, т. 48, вып. 4, с. 560—567.
3. Бюшгенс Г. С., Студнев Р. В. Динамика самолета. Пространственное движение. М.: Машиностроение, 1983. 320 с.
4. Дитенбергер М. А., Хейнс П. А., Луэрс Дж. К. Реконструкция условий авиакатастрофы в Новом Орлеане.— Аэрокосмическая техника, 1986, № 5, с. 3—15.
5. Зарх М. А., Пацко В. С. Построение управления второго игрока в линейной дифференциальной игре на основе свойства отталкивания.— В кн.: Управление с гарантированным результатом. Свердловск, 1987, с. 37—70.
6. Кейн В. М. Оптимизация систем управления по минимаксному критерию. М.: Наука, 1985. 248 с.
7. Кейн В. М., Париков А. Н., Смуров М. Ю. Об одном способе оптимального управления по методу экстремального прицеливания.— ПММ, 1980, т. 44, вып. 3, с. 434—440.
8. Корнеев В. А., Меликян А. А., Титовский И. Н. Стабилизация глиссады самолета при ветровых возмущениях в минимаксной постановке.— Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1985, № 3, с. 132—139.
9. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
10. Системы цифрового управления самолетом / Под ред. А. Д. Александрова, С. М. Федорова. М.: Машиностроение, 1983. 223 с.
11. Субботин А. И., Ченцов А. Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 281 с.
12. Титовский И. Н. Игровой подход к задаче синтеза управления самолетом при заходе на посадку.— Уч. зап. ЦАГИ, 1981, т. 12, № 1, с. 85—92.
13. Универсальная оптимальная стратегия второго игрока в линейной дифференциальной игре / М. А. Зарх; Уральск. гос. ун-т. Свердловск, 1985, 35 с. Рукопись деп. в ВИНТИ 25.10.85, № 7438-В-85 Деп.
14. Федоров С. М., Драбкин В. В., Михайлов О. И., Кейн В. М. Автоматическое управление самолетами и вертолетами. М.: Транспорт, 1977. 246 с.
15. Ivan M. A ring-vortex downburst model for real-time flight simulation of severe wind shears.— In: AIAA Flight Simulation Technologies Conf., St. Louis, Missouri, July 22—24, 1985, p. 57—61.
16. Miele A., Wang T., Melvin W. W. Optimal take-off trajectories in the presence of windshear.— J. Opt. Theory Appl., 1986, vol. 49, N 1, p. 1—45.