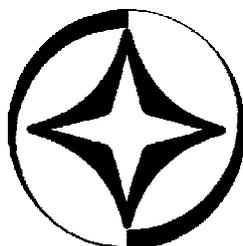


ЮБИЛЕЙНАЯ
XXV САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ
ПО ИНТЕГРИРОВАННЫМ
НАВИГАЦИОННЫМ СИСТЕМАМ

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ



28 – 30 мая 2018

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ, РОССИЯ

ПРИ ПОДДЕРЖКЕ:

- **РОССИЙСКОГО ФОНДА ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ (РФФИ)**
- **МЕЖДУНАРОДНОЙ ОБЩЕСТВЕННОЙ ОРГАНИЗАЦИИ
«АКАДЕМИЯ НАВИГАЦИИ И УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ» (АНУД)**
- **НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО УНИВЕРСИТЕТА ИТМО, РОССИЯ**
- **АМЕРИКАНСКОГО ИНСТИТУТА АЭРОНАВТИКИ И АСТРОНАВТИКИ (AIAA)**
- **ИНСТИТУТА ИНЖЕНЕРОВ ПО ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ И ЭЛЕКТРОНИКЕ –
ОБЩЕСТВА АЭРОКОСМИЧЕСКИХ И ЭЛЕКТРОННЫХ СИСТЕМ (IEEE – AESS)**
- **ФРАНЦУЗСКОГО ИНСТИТУТА НАВИГАЦИИ (IFN)**
- **НЕМЕЦКОГО ИНСТИТУТА НАВИГАЦИИ (DGON)**
- **ЖУРНАЛА «ГИРОСКОПИЯ И НАВИГАЦИЯ», РОССИЯ**

Задача мультилатерации по нескольким моментам передачи сигнала*

Дмитрий Бедин

Отдел динамических систем

ИММ УрО РАН

Екатеринбург, Россия

bedin@imm.uran.ru

Аннотация—Описывается задача мультилатерации. Предлагается постановка, в которой совместно обрабатываются измерения, относящиеся к нескольким последовательным моментам передачи сигнала. Для соответствующих уравнений наблюдения рассчитана нижняя граница точности Рао–Крамера. Рассмотрен метод решения, основанный на минимизации нелинейного функционала. Для оптимизации найдены эффективные численные методы. Приведены результаты работы алгоритма на модельных данных, соответствующих реальному расположению и характеристикам принимающих станций.

Ключевые слова—мультилатерация; нелинейный метод наименьших квадратов; граница точности Рао–Крамера; метод Левенберга–Марквардта

I. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Задача мультилатерации состоит в следующем: в некоторый неизвестный момент времени t объект (воздушное судно), за которым ведется наблюдение и который находится в точке r , передает радиосигнал (например, это может быть сигнал ответчика вторичной системы радиолокации). Этот сигнал принимают несколько станций (обозначим их число m) с известными координатами $\{r_i\}_{i=1}^m$, каждая в свой момент времени t_i , при этом измерение этого момента производится со случайными ошибками w_i . Можно записать следующее уравнение наблюдения (c – скорость света):

$$\begin{cases} t_i = t + \frac{1}{c} \|r - r_i\| + w_i, \\ i = 1, \dots, m. \end{cases} \quad (1)$$

По измерениям $\{t_i\}_{i=1}^m$ необходимо выработать оценку положения \hat{r} , минимизируя ошибку оценивания, под которой будем понимать математическое ожидание квадрата отклонения $E(\hat{r} - r)^2$.

Отметим, что в литературе (например, [1]) часто рассматривается задача мультилатерации для случая, когда непосредственными измерениями являются не моменты $\{t_i\}_{i=1}^m$, а их разности $\{t_i - t_j\}_{i,j \in P}$ по парам P станций.

Однако, исходя из особенностей архитектуры системы, где возможно практическое приложение, автора интересует постановка с непосредственным измерением моментов приема сигнала. Для такого случая математическая постановка задачи мультилатерации практически полностью совпадает с постановкой задачи глобального позиционирования, решаемой в приемниках GPS. Но есть и отличия. Так, в случае GPS неизвестным является не время посылки t , а рассогласование между часами приемника и часами спутников. Также различаются точности измерения времени на приемниках и типичные значения координат станций r_i . В мультилатерации станции, как правило, располагаются на поверхности Земли, а наблюдаемым объектом обычно является самолет, который также находится недалеко от ее поверхности. Как следствие, все векторы $r - r_i$ близки к одной и той же плоскости местного горизонта, что затрудняет численное решение задачи, а в некоторых случаях делает его невозможным. Особенно велика ошибка оценивания по вертикальному направлению.

Еще одна особенность мультилатерации заключается в том, что часто отсутствует прием сигнала на какой-либо станции i из-за затенения пути распространения радиоволн преградами на поверхности Земли. В этом случае нет соответствующего измерения t_i . Если число оставшихся станций, которые приняли сигнал, меньше четырех, по оставшимся измерениям определить оценку \hat{r} в принципе невозможно.

Такое свойство привело к идее объединять измерения, полученные от нескольких последовательных моментов передачи сигнала объектом, и строить по ним общую оценку. Можно было бы использовать все доступные с начала наблюдения измерения, и осуществлять фильтрацию с задействованием модели движущегося объекта [2]. Но такое решение не выглядит универсальным – для разных воздушных судов приходилось бы использовать разные фильтры со специфическими настройками. Объединение измерений в небольшую «пачку» и использование самого простого предположения о движении, прямолинейного и равномерного, лишено такого недостатка. При этом такая обработка позволяет уменьшить влияние пропадающих измерений и увеличить точность наблюдения.

II. МОДЕЛЬ НАБЛЮДЕНИЯ.
ГРАНИЦА ТОЧНОСТИ РАО–КРАМЕРА

Модель наблюдения для задачи с несколькими моментами передачи сигнала базируется на уравнениях (1). Как и раньше, обозначим момент времени, на который нужно обеспечить выработку оценки \hat{r} , символом t . Будем считать, что моменты времени передачи сигнала – это $t^j = t + \Delta^j$, их количество – n . Моменты времени измерений и их случайные ошибки обозначаются t_i^j и w_i^j соответственно. Выполнено:

$$\begin{cases} t_i^j = t + \Delta^j + \frac{1}{c} \|r + v\Delta^j - r_i\| + w_i^j, \\ i \in I^j, \quad j = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь I^j – набор индексов станций, которые приняли сигнал, отправленный в момент t^j (это могут быть не все станции, и каждый раз набор может быть другим); r и v – подлежащие определению положение и скорость объекта в момент времени t . Далее будем рассматривать частный случай, когда $t = t^n$, $\Delta^n = 0$, то есть определяется положение на момент последней передачи сигнала.

В модели наблюдения (2) присутствует $7 + n$ переменных: $r, v \in R^3$, $t, \Delta^1, \dots, \Delta^n \in R^1$. Равенство $\Delta^n = 0$ убирает одно из неизвестных, однако все равно их количество остается значительным. Зачастую на практике для разностей моментов передачи Δ^j либо известно стандартное значение (периодическое испускание сигнала), либо их легко восстановить. Будем считать разности Δ^j известными. Оставшиеся параметры для краткости будем записывать совместно при помощи вектора $\theta = [r^T \quad v^T \quad t]^T$.

Для модели наблюдения (2) можно построить границу точности Рао–Крамера [3, 4], которая показывает потенциально достижимую точность при применении несмещенных оценок. Введем единичные векторы направлений в точку $r + v\Delta^j$ (положение объекта в момент t^j) из точки расположения станции r_i :

$$e_i^j = \frac{r + v\Delta^j - r_i}{\|r + v\Delta^j - r_i\|}.$$

Плотность распределения $\rho_t(t_i^j)$ измерений t_i^j выражается через плотность $\rho_w(\cdot)$ случайной величины w_i^j (будем считать, что это независимые, одинаково распределенные величины) и невязку:

$$\begin{aligned} f_i^j(\theta) &= t_i^j - t - \Delta^j - \frac{1}{c} \|r + v\Delta^j - r_i\|, \\ \rho_t(t_i^j) &= \rho_w(f_i^j(\theta)). \end{aligned} \quad (3)$$

Информационная матрица Фишера имеет вид:

$$\begin{aligned} I(\theta) &= E \left(\frac{\partial \ln f_i^j}{\partial \theta} \right)^T \left(\frac{\partial \ln f_i^j}{\partial \theta} \right) = \\ &= \frac{\kappa}{c^2} \sum_{j=1}^n \sum_{i \in I^j} \begin{bmatrix} e_i^j e_i^{jT} & \Delta^j e_i^j e_i^{jT} & c e_i^j \\ \Delta^j e_i^j e_i^{jT} & (\Delta^j)^2 e_i^j e_i^{jT} & c \Delta^j e_i^j \\ c e_i^j e_i^{jT} & c \Delta^j e_i^j e_i^{jT} & c^2 \end{bmatrix} = \frac{\kappa}{c^2} D(\theta), \end{aligned} \quad (4)$$

где $\kappa = \int \frac{\rho(w)^2}{\rho(w)} dw$ – константа, зависящая только от свойств случайных ошибок измерений w_i^j , а матрица $D(\theta)$ выражает геометрические свойства задачи наблюдения. Неравенство Рао–Крамера [3]

$$E(\hat{\theta} - \theta)(\hat{\theta} - \theta)^T \geq I(\theta)^{-1} = \kappa^{-1} D(\theta)^{-1} \quad (5)$$

понимается в смысле неотрицательной определенности. Точность оценивания вектора θ не может быть лучше, чем граница (5) (в случае несмещенных оценок) [3]. Точность оценивания части θ , например, важной для нашего случая компоненты r , задается соответствующей частью матрицы $I(\theta)^{-1}$.

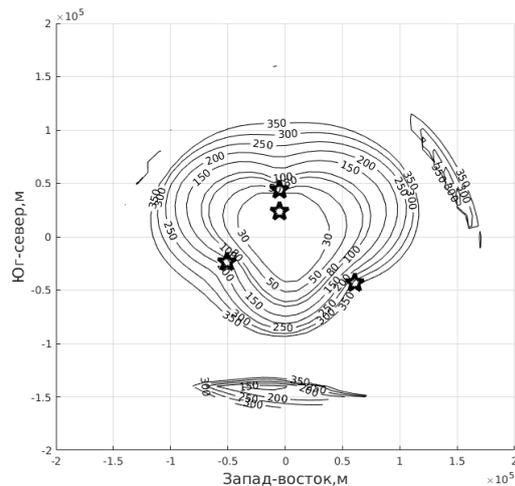


Рис. 1. Линии уровня для нижней границы точности Рао–Крамера определения горизонтальных координат воздушного судна для заданного расположения приемных станций (отмечены звездочками). Точность задана в метрах

Задавшись характеристиками системы мультilaterации (расположением приемных станций, характеристиками ошибок w_i^j), можно для каждого положения в зоне наблюдения построить границу точности по формуле (5). Векторы e_i^j практически совпадают для разных j для разумных значений v и Δ^j , как следствие, зависимость матрицы (4) от v очень слабая и ей при вычислениях можно пренебречь. На рис. 1 показаны линии уровня границы

точности (5) определения горизонтальных координат воздушного судна, вычисленные для конкретного расположения принимающих станций на местности (показаны звездочками) и нормальных ошибок наблюдения w_i^j со среднеквадратичным отклонением, равным 1 мкс, при этом считалось, что воздушное судно находится на высоте 2000 м.

III. ОЦЕНКА НЕЛИНЕЙНОГО МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ. МИНИМИЗАЦИЯ ФУНКЦИОНАЛА

Решение задачи мультилатерации и выработку оценки \hat{r} можно производить различными путями, однако, по-видимому, наиболее перспективным является построение оценок максимального правдоподобия [1]. В частном случае нормально распределенных ошибок наблюдения w_i^j , такая оценка соответствует минимизации функционала среднего квадрата невязок (3)

$$J(\theta) = \sum_{j=1}^n \sum_{i \in I^j} (f_i^j(\theta))^2 \quad (6)$$

и в пределе при увеличении количества измерений достигает границы точности (5) (асимптотическая эффективность) [3]. Даже в случае если распределение ошибок w_i^j не является нормальным, оценка $\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} J(\theta)$ обладает хорошими свойствами.

Функционал (6) не является выпуклым, поэтому его оптимизация весьма затруднена. Значительную трудность также доставляет различный масштаб переменных. Метод градиентного спуска, примененный для минимизации, показал крайне низкую скорость сходимости, требуя для своей работы большое (порядка 10^4) количество итераций. При этом сходимость достигалась далеко не всегда, в достаточном большом проценте случаев в численной процедуре возникали колебания решения и резкие «скачки».

Методы второго порядка, основанные на методе Ньютона, имеют очень высокую скорость сходимости [4], однако непосредственное применение для оптимизации функционала (6) требует регуляризации. Так, классический метод Ньютона [5] имеет вид:

$$\theta_{k+1} = \theta_k - (\nabla^2 J(\theta_k))^{-1} \nabla J(\theta_k), \quad (7)$$

где $\nabla^2 J(\theta_k)$ — матрица вторых производных, вычисленная в точке текущего приближения θ_k . Однако основным требованием, чтобы процедура (7) сходилась, является положительная определенность $\nabla^2 J(\theta_k)$, которая не имеет места в случае функционала (6). Для преодоления этой трудности использовалась модификация Левенберга–Марквардта метода Ньютона [5], которая строится следующим образом. Рассмотрим матрицу вторых производных:

$$\nabla^2 J(\theta) = \sum_{j=1}^n \sum_{i \in I^j} \left(\nabla f_i^j(\theta) \nabla f_i^j(\theta)^T + f_i^j(\theta) \nabla^2 f_i^j(\theta) \right).$$

За нарушение положительной определенности ответственно второе слагаемое. Но вблизи оптимальной точки оно не может быть большим по модулю, так как значения невязок f_i^j малы. Следовательно, можно сделать приближенную матрицу Q_λ , для которой выполняется положительная определенность

$$Q_\lambda = \sum_{j=1}^n \sum_{i \in I^j} \left(\nabla f_i^j(\theta) \nabla f_i^j(\theta)^T + \lambda I \right) \geq \nabla^2 J(\theta), \quad Q_\lambda > 0,$$

и которую можно использовать вместо $\nabla^2 J(\theta_k)$ в (7):

$$\theta_{k+1} = \theta_k - Q_\lambda^{-1} \nabla J(\theta_k). \quad (8)$$

Метод (8), примененный непосредственно, показал хорошую скорость сходимости в отдельных случаях с константой λ порядка 10^{-3} , однако зачастую останавливался далеко от минимума функционала (6). Ситуацию удалось преодолеть при помощи динамического изменения константы регуляризации λ . В случае если функционал перестал убывать, а значение J остается большим, константа увеличивается $\lambda := 2\lambda$. В случае если длина шага мала, но при этом имеется стабильное уменьшение функционала, на нескольких итерациях предпринимается попытка, наоборот, уменьшить λ .

С такой модификацией метод Левенберга–Марквардта показал хорошую работу на модельных данных в части восстановления горизонтальных составляющих координат r . На рис. 2 показаны линии уровня точности для той же самой конфигурации принимающих станций, что и на рис. 1. В качестве оценки точности взято эмпирическое среднеквадратичное отклонение по N реализациям $\hat{\sigma}(r) = \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (r - r)^2 \right)^{1/2}$. Сравнивая рис. 2 и рис. 1, можно заключить, что точность оценки, полученной минимизацией функционала (6) при помощи метода (8), сравнима с границей точности Рао–Крамера.

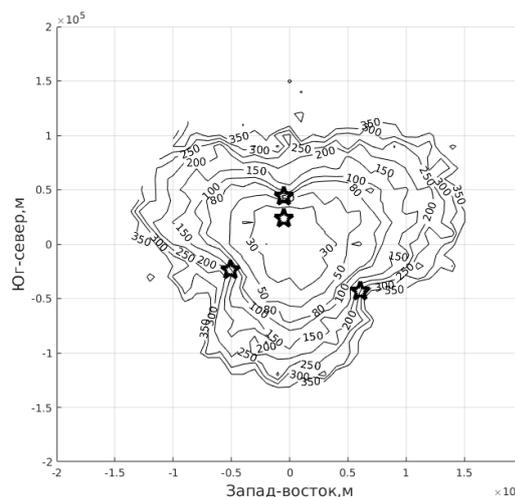


Рис. 2. Линии уровня для эмпирического среднеквадратичного отклонения определения горизонтальных координат воздушного судна для данного расположения приемных станций (отмечены звездочками). Точность задана в метрах

БЛАГОДАРНОСТЬ

Работа подготовлена при поддержке программы президиума РАН №30 «Теория и технологии многоуровневого децентрализованного группового управления в условиях конфликта и кооперации».

Автор благодарит компанию ООО «Фирма “Новые информационные технологии в авиации”» (Фирма «НИ-ТА», Санкт-Петербург) за постановку задачи, предоставление данных и плодотворное обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Mantilla-Gaviria, I.A., Leonardi, M., Galati, G., Balbastre-Tejedor, J.V., Localization algorithms for multilateration (MLAT) systems in airport surface surveillance // *Signal Image and Video Processing*, 2015, vol. 9, pp. 1549–1558.
- [2] Bar-Shalom, Y., Li, X.R., Kirubarajan, T. Estimation with applications to tracking and navigation: Theory Algorithms and Software, John Wiley & Sons, 2004.
- [3] Боровков А.А. Математическая статистика. М.: Наука, 1984. 472 с.
- [4] Chernyak, V., Using potential accuracy of object localisation with multilateration systems, *Proceedings of ESAV'08*, September 3–5, Capri, Italy.
- [5] Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Наука, 1987. 598 с.