

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТРЁХМЕРНОГО МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ ДЛЯ МАШИНЫ ДУБИНСА ПРИ ИНТЕГРАЛЬНОМ ОГРАНИЧЕНИИ НА УПРАВЛЕНИЕ

ВАЛЕРИЙ ПАЦКО^{1,*}, ГЕОРГИЙ ТРУБНИКОВ², АНДРЕЙ ФЕДОТОВ¹

¹Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского, Екатеринбург, Россия

²Уральский федеральный университет им. Б.Н. Ельцина, Екатеринбург, Россия

Посвящается памяти профессора Josef Shinar

Аннотация. Исследуется трёхмерное множество достижимости для нелинейного управляемого объекта “машина Дубинса”. Управлением является угловая скорость поворота вектора линейной скорости. Управляющее воздействие стеснено интегральным квадратичным ограничением. На основе принципа максимума Понтрягина дано описание движений, порождающих границу множества достижимости. При отождествлении углов по модулю 2π движения, ведущие на границу соответствующего множества достижимости, представляют собой глобально оптимальные эластики Эйлера. Приводятся результаты моделирования.

Ключевые слова. Машина Дубинса, интегральное ограничение на управление, трёхмерное множество достижимости, принцип максимума Понтрягина, эластики Эйлера, численные построения

2020 Mathematics Subject Classification. 33E05, 49K15, 49M05, 93B03, 93C10.

1. ВВЕДЕНИЕ

Эта статья посвящена памяти профессора Josef Shinar. Первый из авторов статьи неоднократно обсуждал с ним модельные постановки задач космического наведения и возможность построения в них множеств разрешимости. Josef Shinar лучше других специалистов по теории дифференциальных игр знал и понимал такие задачи. В рассматриваемой в данной статье задаче нет второго (противоборствующего) игрока, но предмет исследования очень близкий — развивающееся во времени множество достижимости.

Под математической “машиной Дубинса” (другое название – “unicycle”) понимаем объект, передвигающийся на плоскости с постоянной величиной линейной скорости. Не теряя общности, считаем её равной 1. Фазовое состояние включает в себя две координаты x, y геометрического положения и угол φ направления вектора скорости. Углы отсчитываются от положительного направления оси x и не отождествляются по модулю 2π . Скалярное управление u имеет смысл мгновенной угловой скорости поворота. Управление стеснено на промежутке $[0, t_f]$ интегральным квадратичным ограничением

$$\int_0^{t_f} u^2(t) dt \leq \mu \quad (1.1)$$

с заданным значением $\mu > 0$. Цель работы — численное исследование трёхмерного множества достижимости $G(t_f, \mu)$ в момент t_f .

Исследуя задачу о построении множества $G(t_f, \mu)$, опираемся на опыт [8, 9] аналитического описания и численного построения границы множества достижимости для случая геометрических ограничений $|u(t)| \leq \mu$. Принципиальное отличие состоит

*Автор для переписки.

E-mail: patsko@imm.uran.ru (В. Пацко), jora_it@mail.ru (Г. Трубников), andreyfedotov@mail.ru (А. Федотов).
Получена 11 февраля 2023; Принята 14 мая 2024.

в том, что в случае геометрических ограничений многие вычисления можно производить явно при помощи элементарных функций, а в случае интегральных ограничений аналитические вычисления затруднены в силу необходимости использования специальных эллиптических функций. Тем не менее, численные построения множества достижимости $G(t_f, \mu)$ возможны и во многом они делаются по аналогии со случаем геометрических ограничений. В связи с этим в разд. 3, следующим за постановкой задачи, мы даём изображение трёхмерных множеств достижимости при геометрических ограничениях. В разд. 8 приводятся изображения трёхмерных множеств достижимости при интегральных ограничениях и их можно сравнить с теми, что были при геометрических ограничениях.

В основе исследования границы трёхмерного множества достижимости лежит принцип максимума Понтрягина (ПМП). Однако ещё до формулировки ПМП мы можем установить некоторые свойства симметрии, опираясь только на определение множества достижимости и на специфику кинематики машины Дубинса. Одно из свойств симметрии заключается в том, что структура множеств достижимости зависит только от величины $t_f \mu$. Такое свойство симметрии позволяет, зафиксировав, например, $t_f = 1$ (или $\mu = 1$), изучать изменение множества достижимости в зависимости только от μ (соответственно, от t_f). Кроме того, любое φ -сечение трёхмерного множества достижимости симметрично относительно некоторой вспомогательной оси X , зависящей от φ . Поэтому, исследуя конкретное φ -сечение, можно рассматривать только его “половину”. Из специфики кинематики машины Дубинса следует также, что φ -сечения, получаемые при $\varphi > 0$, симметричны φ -сечениям при $\varphi < 0$. Такое свойство даёт возможность ограничиться исследованием φ -сечений только для $\varphi \geq 0$. Свойства симметрии изучаются в разд. 4.

В разд. 5 мы записываем ПМП для программных управлений $u(\cdot)$, ведущих на границу множества достижимости. Здесь используем результат из работы [4] М.И. Гусева и И.В. Зыкова о том, что формулировка ПМП та же самая, что и для задачи минимизации интегрального функционала

$$J(u(\cdot)) = \int_0^{t_f} u^2(t) dt \quad (1.2)$$

при фиксированных в моменты $t_0 = 0$ и t_f трёхмерных краевых условиях. Исключение составляет лишь управление $u(t) \equiv 0$. Очевидно, что оно ведёт на границу множества достижимости. Считая его особым, исключаем из рассмотрения.

При записи ПМП дифференциальные уравнения исходной и сопряжённой систем, дополненные условием максимума, образуют замкнутую систему 6-ого порядка, решение которой полностью определяется трёхмерным начальным условием исходной системы (считаем его нулевым) и заданием трёхмерного краевого условия сопряжённой системы. Перебирая последнее краевое условие, получаем движения исходной системы, среди которых необходимо находятся движения, ведущие на границу трёхмерного множества достижимости. При этом управления, удовлетворяющие ПМП, являются непрерывными. Каждому экстремальному движению соответствует прямая переключения. Управление изменяет знак на этой прямой.

Необходимые условия, которые непосредственно следуют из первоначального рассмотрения ПМП, уточняются в разд. 6. Главное уточнение сводится к тому, что любое программное управление, ведущее на границу множества достижимости, имеет

не более двух моментов смены знака управления. В случае двух моментов t_1 и t_2 ($t_2 > t_1$) смены знака, расположенных на интервале $(0, t_f)$, справедливо неравенство $t_2 - t_1 \geq (t_1 - t_0) + (t_f - t_2)$. Эти утверждения доказываются весьма просто и позволяют сформулировать теорему 6.3 о том, что в любую точку на границе множества достижимости ведёт управление, относящееся к одному из 6 типов, описываемых в теореме. При этом для положительных значений $\varphi(t_f)$ можно ограничиться лишь 4 типами. В разд. 7 мы для $\varphi(t_f) \geq 0$ выписываем конечные соотношения, опираясь на которые, можно найти все движения, которые соответствуют типам управлений, определяющим границу. Результаты численного построения множеств достижимости $G(t_f, \mu)$ представлены в разд. 8.

Если требуется исследовать множество достижимости для случая, когда углы φ отождествляются по модулю 2π (т.е. углы $\varphi \pm 2\pi k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, считаются эквивалентными), это нетрудно сделать, опираясь на умение строить множество $G(t_f, \mu)$ без отождествления углов. Результаты численных построений при отождествлении по модулю 2π обсуждаются в разд. 9, в котором приведены два примера.

Соответствующие функционалу (1.2) при *отождествлении* угла φ по модулю 2π экстремальные движения были классифицированы Л. Эйлером [3] и называются эластичками Эйлера. Хороший исторический обзор, посвящённый эластичкам Эйлера, сделан R. Levien в [7]. Эластички Эйлера были детально исследованы Ю.Л. Сачковым и А.А. Ардентовым в работах [1, 2] с целью выделения среди них глобально оптимальных. В работе М.И. Зеликина [13] анализируются некоторые свойства обобщенных эластичков Эйлера в случае, когда движение происходит в многомерном пространстве R^n , $n \geq 3$. Полученные нами в разд. 10 результаты о выделении глобально оптимальных эластичков могут рассматриваться как дополнительные к исследованиям М.И. Зеликина, Ю.Л. Сачкова и А.А. Ардентова.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть движение управляемого объекта на плоскости описывается системой

$$\dot{x} = \cos\varphi, \quad \dot{y} = \sin\varphi, \quad \dot{\varphi} = u. \quad (2.1)$$

Здесь x, y — координаты геометрического положения, φ — угол наклона вектора скорости, отсчитываемый против часовой стрелки от положительного направления оси x . Величина скорости равна единице. Значения угла φ рассматриваем на промежутке $(-\infty, \infty)$. Начальный момент времени t_0 полагаем равным нулю. Начальные значения $x(t_0), y(t_0), \varphi(t_0)$ также считаем нулевыми. Допустимыми являются измеримые интегрируемые с квадратом управления $u(\cdot)$, удовлетворяющие ограничению

$$\int_0^{t_f} u^2(t) dt \leq \mu. \quad (2.2)$$

Множество достижимости $G(t_f, \mu)$ при $t_f > t_0$, $\mu > 0$ есть совокупность всех точек $(x, y, \varphi)^T$, в каждую из которых возможен перевод системы (2.1) в момент t_f при помощи некоторого допустимого управления.

Обозначим через $G_\varphi(t_f, \mu)$ двумерное сечение множества $G(t_f, \mu)$, отвечающее значению φ угловой координаты.

Пусть ∂ — символ границы множества. Если некоторая точка $(x, y)^T$ принадлежит $\partial G_\varphi(t_f, \mu)$, то точка $(x, y, \varphi)^T$ принадлежит $\partial G(t_f, \mu)$. Обратное, вообще говоря, неверно.

Требуется построить и исследовать трёхмерное множество достижимости $G(t_f, \mu)$, а также движения, ведущие на его границу.

Ради краткости положим $z = (x, y, \varphi)^T$. Обозначим через $z^0(t_f) = (t_f, 0, 0)^T$ точку на $\partial G(t_f, \mu)$, в которую ведёт управление $u(t) \equiv 0$.

3. ИЗВЕСТНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ПРИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ОГРАНИЧЕНИИ

В работах [8, 9, 10] исследовано множество достижимости $G(t_f)$ при геометрическом ограничении на управление. Было показано, что случай несимметричного ограничения (с разными по величине крайними значениями радиусов поворота влево и вправо) сводится к изучению канонического симметричного случая $|u(t)| \leq 1$, $t \in [t_0, t_f]$. В данной статье при исследовании множества $G(t_f, \mu)$ при интегральном ограничении воспользуемся идеологией построения множества достижимости $G(t_f)$ при каноническом геометрическом ограничении. В связи с этим приведём краткое описание структуры множеств достижимости при геометрическом ограничении.

На рис. 1 показано с одного и того же ракурса развитие во времени множества достижимости $G(t_f)$. С некоторым шагом по φ чёрными линиями намечены контуры φ -сечений $G_\varphi(t_f)$.

Установлено [8], что для построения границы множества достижимости можно ограничиться лишь шестью типами кусочно-постоянных программных управлений с не более чем двумя переключениями. На участки границы, отмеченные на рис. 1 синим цветом, ведут управления следующего типа: на первом промежутке времени действует постоянное управление $+1$, на втором используется нулевое управление, на третьем — снова постоянное управление $+1$. Сумма длин трёх промежутков равна t_f , длины промежутков различные для разных точек синей поверхности. Симметричным к участку данного типа является участок поверхности, отмеченный жёлтым цветом. Здесь порядок управляющих воздействий имеет вид $-1, 0, -1$. Зелёным цветом показан участок границы, на который ведут программные управления типа $+1, 0, -1$. Симметричным к нему является участок фиолетового цвета с управлениями $-1, 0, +1$. Участок красного цвета соответствует управлениям $-1, +1, -1$. Здесь особенность состоит в том, что длина среднего промежутка не меньше суммы длин первого и третьего промежутков. Симметричным к участку красного цвета является участок светло-голубого цвета, для него порядок управления $+1, -1, +1$.

Крайние по φ точки множества $G(t_f)$ (т.е. при $\varphi = \pm t_f$) являются точками негладкости границы. Негладким является сочленение красной и голубой поверхностей. Красная и голубая поверхности негладко стыкуются с зелёной и фиолетовой поверхностями.

Между моментами 3π и 4π существует небольшой интервал, для каждого момента t_f из которого множество $G(t_f)$ не является односвязным.

Ракурс для рис. 1 выбран так, чтобы хорошо была видна тыльная часть множества $G(t_f)$. Чтобы показать границу множества на передней (фронтальной) части сделан (но только для $t_f = 1.5\pi$) рис. 2, на котором множество достижимости показано с двух ракурсов. На фронтальной стороне множества (верхняя часть рис. 2) точка

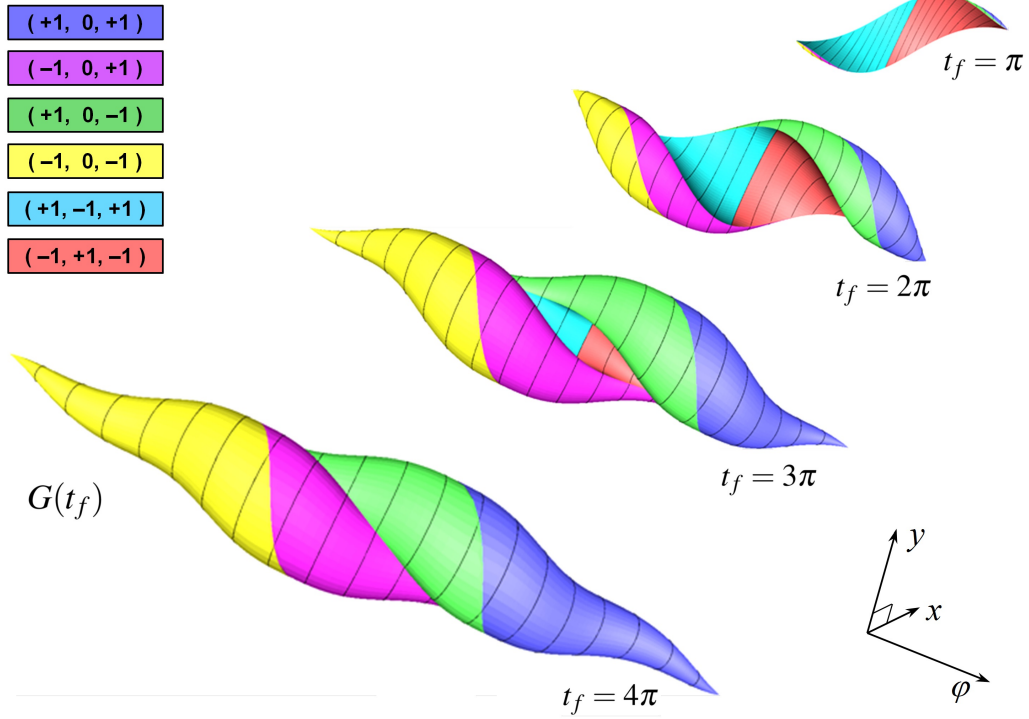


Рис. 1. Развитие во времени трёхмерного множества достижимости $G(t_f)$ при геометрическом ограничении на управление

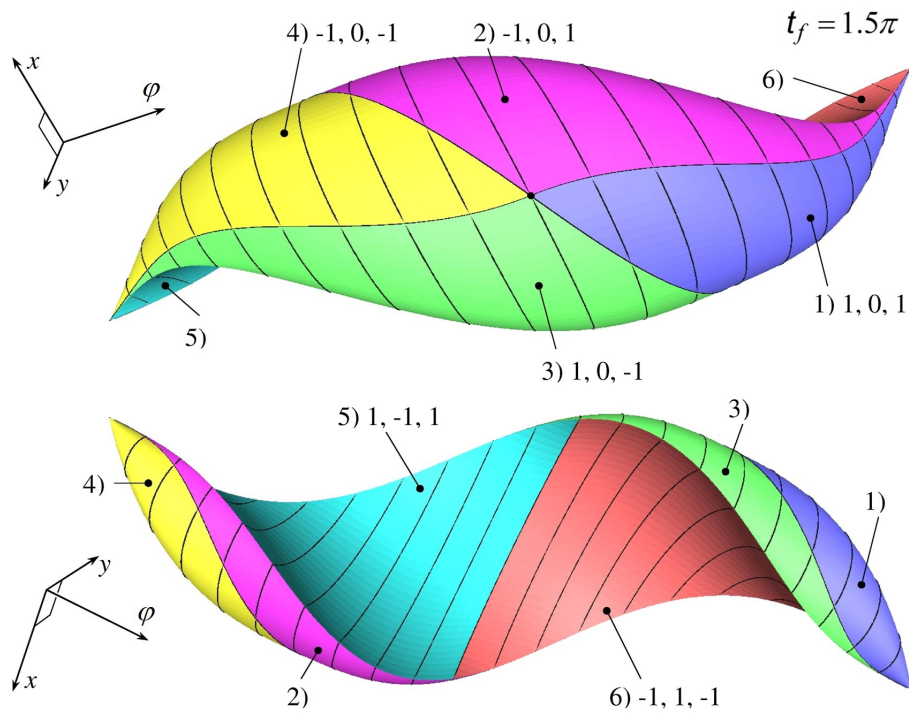


Рис. 2. Множество достижимости $G(t_f)$ при геометрическом ограничении для $t_f = 1.5\pi$ в двух ракурсах

стыковки четырёх участков границы (которые выделены синим, зелёным, жёлтым и фиолетовым цветами), соответствует управлению, тождественно равному нулю. Вдоль четырёх выходящих из этой точки линий попарной стыковки таких поверхностей граница множества $G(t_f)$ является гладкой.

При исследовании множества $G(t_f, \mu)$ с интегральным ограничением на управление многие построения делаются аналогично. Будем обращать внимание на сохранение или изменение свойств, перечисленных выше. Ниже установим несколько дополнительных свойств, аналогичных тем, которые были при геометрическом ограничении.

4. СВОЙСТВА СИММЕТРИИ ТРЁХМЕРНОГО МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ И ЕГО φ -СЕЧЕНИЙ

4.1. **Диапазон множества $G(t_f, \mu)$ по φ .** При зафиксированных значениях t_f и μ диапазон значений φ , при которых φ -сечения $G_\varphi(t_f, \mu)$ не являются пустыми, есть $[-\sqrt{t_f \cdot \mu}, \sqrt{t_f \cdot \mu}]$. Крайнее φ -сечение для $\varphi = \sqrt{t_f \mu}$ (соответственно, $\varphi = -\sqrt{t_f \mu}$) состоит из одной точки, которая порождается постоянным управлением $u(t) \equiv \sqrt{\mu/t_f}$ ($u(t) \equiv -\sqrt{\mu/t_f}$).

Приведём схематичное доказательство. Предположим, что допустимое управление $u(\cdot)$, обеспечивающее максимально возможное значение φ_{\max} , не является постоянным. Тогда существуют моменты t_1, t_2 и промежуток времени длины Δt такие, что $t_1 + \Delta t, t_2 + \Delta t$ принадлежат $[0, t_f]$, $t_1 + \Delta t < t_2$ и, кроме того, $\int_{t_1}^{t_1 + \Delta t} u(t) dt > \int_{t_2}^{t_2 + \Delta t} u(t) dt$. Выберем $\Delta u > 0$ так, что

$$\Delta u \cdot \Delta t < \int_{t_1}^{t_1 + \Delta t} u(t) dt - \int_{t_2}^{t_2 + \Delta t} u(t) dt.$$

Введём новое управление $\tilde{u}(\cdot)$, которое отличается от $u(\cdot)$ только на промежутках $[t_1, t_1 + \Delta t]$ и $[t_2, t_2 + \Delta t]$. На первом из этих промежутков положим $\tilde{u}(t) = u(t) - \Delta u$, на втором пусть $\tilde{u}(t) = u(t) + \Delta u$. Тогда $\tilde{\varphi}(t_f) = \varphi(t_f)$. В то же время

$$\int_0^{t_f} \tilde{u}^2(t) dt = \int_0^{t_f} u^2(t) dt + 2\Delta u \left(-\int_{t_1}^{t_1 + \Delta t} u(t) dt + \int_{t_2}^{t_2 + \Delta t} u(t) dt + \Delta u \cdot \Delta t \right) < \int_0^{t_f} u^2(t) dt = \mu.$$

Следовательно, для $\tilde{u}(\cdot)$ интегральный расход управления будет меньше μ . Это противоречит тому, что мы рассматриваем максимально возможное φ в момент t_f при заданном ограничении μ .

Таким образом, последнее φ -сечение при $\varphi > 0$ является точкой. Она порождается постоянным управлением $u(t) \equiv \sqrt{\mu/t_f}$. Соответствующая траектория представляет собой дугу окружности, полную окружность или же окружность с “перехлёстом”. Аналогично для крайнего φ -сечения при $\varphi < 0$, порождённого управлением $u(t) \equiv -\sqrt{\mu/t_f}$.

4.2. Симметрия в пространстве множеств достижимости. Рассматриваемые множества достижимости зависят от параметров t_f и μ . Покажем, что если $t_f^{(1)} \cdot \mu^{(1)} = t_f^{(2)} \cdot \mu^{(2)}$ (т.е. $\mu^{(1)}/\mu^{(2)} = t_f^{(2)}/t_f^{(1)} = \alpha$), то φ -сечения $G_\varphi(t_f^{(1)}, \mu^{(1)})$ и $G_\varphi(t_f^{(2)}, \mu^{(2)})$ жёстко связаны между собой соотношением $G_\varphi(t_f^{(2)}, \mu^{(2)}) = \alpha \cdot G_\varphi(t_f^{(1)}, \mu^{(1)})$, в котором коэффициент подобия α не зависит от φ . Такое свойство симметрии позволяет ограничиться изучением множеств достижимости при фиксированном значении t_f (например, $t_f = 1$), но при разных значениях μ , или, наоборот, при фиксированном значении μ (например, при $\mu = 1$), но при разных t_f .

Лемма 4.1. Пусть значения $t_f^{(1)}, \mu^{(1)}$ и $t_f^{(2)}, \mu^{(2)}$ таковы, что $t_f^{(1)} \mu^{(1)} = t_f^{(2)} \mu^{(2)}$. Тогда области определения по φ множеств $G(t_f^{(1)}, \mu^{(1)})$ и $G(t_f^{(2)}, \mu^{(2)})$ совпадают и для любого φ выполнено соотношение

$$G_\varphi(t_f^{(2)}, \mu^{(2)}) = \alpha G_\varphi(t_f^{(1)}, \mu^{(1)}), \quad \alpha = t_f^{(2)}/t_f^{(1)} = \mu^{(1)}/\mu^{(2)}.$$

Доказательство. Поскольку $t_f^{(1)} \mu^{(1)} = t_f^{(2)} \mu^{(2)}$, то диапазоны по φ множеств $G(t_f^{(1)}, \mu^{(1)})$ и $G(t_f^{(2)}, \mu^{(2)})$ совпадают. Рассмотрим произвольное возможное φ .

1) Возьмём произвольную точку $(x^{(2)}, y^{(2)})^\top \in G_\varphi(t_f^{(2)}, \mu^{(2)})$. Пусть в неё ведёт управление $u^{(2)}(\cdot)$, заданное на $[0, t_f^{(2)}]$ и удовлетворяющее ограничению $\int_0^{t_f^{(2)}} (u^{(2)}(s))^2 ds \leq \mu^{(2)}$. Сформируем управление

$$u^{(1)}(t) = \alpha u^{(2)}(\alpha t), \quad t \in [0, t_f^{(1)}].$$

Получаем $\alpha t \in [0, \alpha t_f^{(1)}] = [0, t_f^{(2)}]$.

Фиксируем произвольный момент $\tilde{t} \in [0, t_f^{(1)}]$. Поставим ему в соответствие момент $\tilde{s} = \alpha \tilde{t}$. Имеем

$$\varphi^{(2)}(\tilde{s}) = \int_0^{\tilde{s}} u^{(2)}(s) ds.$$

Управление $u^{(1)}(\cdot)$ даёт

$$\varphi^{(1)}(\tilde{t}) = \int_0^{\tilde{t}} u^{(1)}(t) dt = \int_0^{\tilde{t}} \alpha u^{(2)}(\alpha t) dt.$$

Применяя связь $s = \alpha t$, получим $ds = \alpha dt$ и значит

$$\varphi^{(1)}(\tilde{t}) = \int_0^{\tilde{s}} u^{(2)}(s) ds = \varphi^{(2)}(\tilde{s}).$$

В частности, $\varphi^{(1)}(t_f^{(1)}) = \varphi^{(2)}(t_f^{(2)}) = \varphi$.

Подсчитаем интегральный расход управления $u^{(1)}(\cdot)$:

$$\int_0^{t_f^{(1)}} (u^{(1)}(t))^2 dt = \int_0^{t_f^{(1)}} \alpha^2 (u^{(2)}(\alpha t))^2 dt = \alpha \int_0^{t_f^{(2)}} (u^{(2)}(s))^2 ds \leq \alpha \mu^{(2)} = \frac{\mu^{(2)} t_f^{(2)}}{t_f^{(1)}} = \mu^{(1)}.$$

Для значения $x^{(1)}(t_f^{(1)})$ получаем

$$x^{(1)}(t_f^{(1)}) = \int_0^{t_f^{(1)}} \cos(\varphi^{(1)}(t)) dt = \frac{1}{\alpha} \int_0^{t_f^{(1)}} \alpha \cos(\varphi^{(2)}(\alpha t)) dt = \frac{1}{\alpha} \int_0^{t_f^{(2)}} \cos(\varphi^{(2)}(s)) ds = \frac{1}{\alpha} x^{(2)}(t_f^{(2)}).$$

Аналогично $y^{(1)}(t_f^{(1)}) = \frac{1}{\alpha} y^{(2)}(t_f^{(2)})$.

Стало быть,

$$G_\varphi(t_f^{(1)}, \mu^{(1)}) \supset \frac{1}{\alpha} G_\varphi(t_f^{(2)}, \mu^{(2)}). \quad (4.1)$$

2) Возьмём точку $(x^{(1)}, y^{(1)})^\top \in G_\varphi(t_f^{(1)}, \mu^{(1)})$. Пусть в неё ведёт управление $u^{(1)}(\cdot)$, заданное на $[0, t_f^{(1)}]$ и удовлетворяющее ограничению $\int_0^{t_f^{(1)}} (u^{(1)}(t))^2 dt \leq \mu^{(1)}$. Сформируем управление

$$u^{(2)}(s) = \frac{1}{\alpha} u^{(1)}\left(\frac{s}{\alpha}\right), \quad s \in [0, t_f^{(2)}].$$

Делая выкладки аналогичные пункту 1), получаем

$$\alpha G_\varphi(t_f^{(1)}, \mu^{(1)}) \subset G_\varphi(t_f^{(2)}, \mu^{(2)}). \quad (4.2)$$

Из (4.1), (4.2) следует

$$\alpha G_\varphi(t_f^{(1)}, \mu^{(1)}) = G_\varphi(t_f^{(2)}, \mu^{(2)}).$$

□

4.3. Симметрия сечений множества $G(t_f, \mu)$ по угловой координате. Пусть $t \rightarrow u(t)$ — допустимое управление, ведущее в момент t_f в некоторую точку $z(t_f)$ множества $G(t_f, \mu)$. Введём “реверсивное” управление $u^\#(t) = u(t_f - t)$, $t \in [0, t_f]$. Очевидно, что новое управление будет допустимым с прежним значением интеграла от квадрата управления.

Рассмотрим движение $t \rightarrow z^\#(t) = (x^\#(t), y^\#(t), \varphi^\#(t))^\top$ в силу управления $u^\#(\cdot)$. Имеем

$$\varphi(t) = \int_0^t u(\tau) d\tau, \quad \varphi^\#(t) = \int_0^t u^\#(\tau) d\tau = \int_0^t u(t_f - \tau) d\tau = \int_{t_f-t}^{t_f} u(\tau) d\tau. \quad (4.3)$$

Поэтому $\varphi^\#(t_f) = \varphi(t_f)$.

Через начало координат системы x, y проведём вспомогательную ось X под углом $\varphi(t_f)/2$ по отношению к направлению оси x (см. рис. 3). Считаем, что ось Y ортогональна оси X . Символами $(X(t_f), Y(t_f))^\top$ и $(X^\#(t_f), Y^\#(t_f))^\top$ обозначим положения точек $(x(t_f), y(t_f))^\top$ и $(x^\#(t_f), y^\#(t_f))^\top$ во вспомогательной системе координат X, Y .

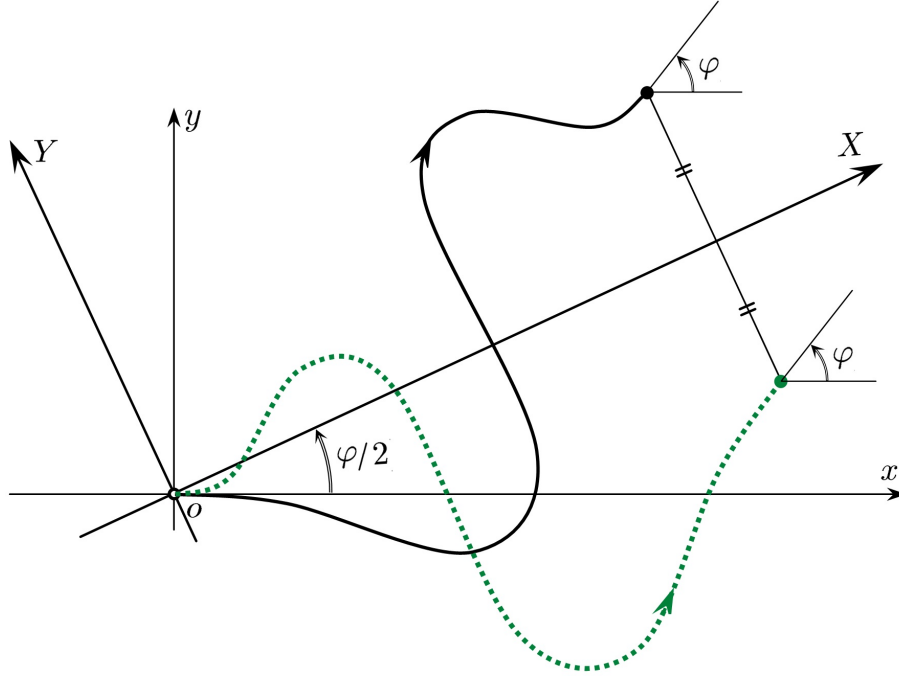


Рис. 3. Вспомогательная система координат. Прямое и реверсивное движения

Лемма 4.2. *Справедливы соотношения $X^\#(t_f) = X(t_f)$, $Y^\#(t_f) = -Y(t_f)$.*

Доказательство. Из формул (4.3) получаем $\varphi^\#(t) = \varphi(t_f) - \varphi(t_f - t)$. Введём углы, отсчитываемые от оси X :

$$\varphi_X(t) = \varphi(t) - \frac{\varphi(t_f)}{2},$$

$$\varphi_X^\#(t) = \varphi^\#(t) - \frac{\varphi(t_f)}{2} = \varphi(t_f) - \varphi(t_f - t) - \frac{\varphi(t_f)}{2} = -\left(\varphi(t_f - t) - \frac{\varphi(t_f)}{2}\right).$$

Тогда

$$Y(t_f) = \int_0^{t_f} \sin\left(\varphi(t) - \frac{\varphi(t_f)}{2}\right) dt,$$

$$Y^\#(t_f) = \int_0^{t_f} \sin\left[-\left(\varphi(t_f - t) - \frac{\varphi(t_f)}{2}\right)\right] dt = -\int_0^{t_f} \sin\left(\varphi(s) - \frac{\varphi(t_f)}{2}\right) ds = -Y(t_f).$$

Заменяя в интегралах \sin на \cos и учитывая, что \cos — чётная функции, получим $X^\#(t_f) = X(t_f)$. \square

Из леммы 4.2 следует, что любое φ -сечение $G_\varphi(t_f, \mu)$ симметрично относительно оси X вспомогательной системы координат. Отметим, что данное свойство симметрии относительно оси X было установлено [9] и при геометрических ограничениях на управление. Более того, ограничение на управление $u(\cdot)$ могло быть и другим. Важно лишь, чтобы допустимость исходного управления влекла за собой допустимость реверсивного управления.

4.4. **Симметрия φ -сечений при $\varphi > 0$ и $\varphi < 0$.** В рассматриваемой задаче есть также симметрия φ -сечений при положительных и отрицательных значениях φ . А именно, φ -сечение $G_{\bar{\varphi}}(t_f, \mu)$ при $\bar{\varphi} < 0$ связано с φ -сечением $G_{\tilde{\varphi}}(t_f, \mu)$, где $\tilde{\varphi} = -\bar{\varphi}$, зеркальным отражением относительно оси x . Это вытекает из того, что движения системы (2.1) из начальной нулевой точки $z(t_0)$ в силу управлений $\bar{u}(\cdot)$ и $\tilde{u}(\cdot) = -\bar{u}(\cdot)$ связаны соотношениями $\bar{x}(\cdot) = \tilde{x}(\cdot)$, $\bar{y}(\cdot) = -\tilde{y}(\cdot)$, $\bar{\varphi}(\cdot) = -\tilde{\varphi}(\cdot)$.

Такой факт имел место и для геометрического ограничения $|u(t)| \leq 1$.

5. ПРИНЦИП МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА

Из общих результатов математической теории управления следует, что множество $G(t_f, \mu)$ замкнуто и ограничено (см., например, [5, 6, 4]). В [4] показано, что для любой точки $z(t_f) \in \partial G(t_f, \mu)$ такой, что $z(t_f) \neq z^0(t_f)$, выполнен принцип максимума Понтрягина (ПМП), записанный для задачи минимизации функционала (1.2) на движениях системы (2.1) с фиксированными краевыми условиями $z(t_0) = 0$ и $z(t_f)$. При этом минимум функционала равен μ .

1) Запишем соотношения ПМП для задачи минимизации функционала (1.2) с фиксированными краевыми условиями в системе (2.1) (см., например, [13, 1, 4]). Пусть $u(\cdot)$ — не равное тождественно нулю допустимое управление, $(x(\cdot), y(\cdot), \varphi(\cdot))^T$ — соответствующее движение системы (2.1) на промежутке $[t_0, t_f]$. Дифференциальные уравнения сопряжённой системы имеют вид

$$\psi_1 = 0, \quad \psi_2 = 0, \quad \dot{\psi}_3 = \psi_1 \sin \varphi(t) - \psi_2 \cos \varphi(t). \quad (5.1)$$

ПМП означает, что если $u(\cdot)$ — минимизирующее управление, то существует ненулевое решение $(\psi_1(\cdot), \psi_2(\cdot), \psi_3(\cdot))^T$ системы (5.1), для которого почти всюду на $[t_0, t_f]$ выполнено равенство

$$u(t) = \psi_3(t)/2. \quad (5.2)$$

В дальнейшем управление, удовлетворяющее ПМП, полагаем непрерывным.

Функции $\psi_1(\cdot)$ и $\psi_2(\cdot)$ есть константы. Обозначим их ψ_1 и ψ_2 . Если $\psi_1 = 0$ и $\psi_2 = 0$, то $\psi_3(t) \equiv \text{const} \neq 0$. Следовательно, в этом случае $u(t) \equiv \text{const} = \pm \sqrt{\mu/t_f}$. Такие постоянные управления определяют крайние одноточечные φ -сечения $G_\varphi(t_f, \mu)$ для $\varphi = \pm \sqrt{t_f \mu}$.

Пусть теперь хотя бы одно из чисел ψ_1 , ψ_2 не равно нулю. Опираясь на (2.1) и (5.1), можно записать выражение $\dot{\psi}_3(t) = \psi_1 y(t) - \psi_2 x(t) + C$. Отсюда следует, что $\psi_3(t) = 0$ тогда и только тогда, когда точка $(x(t), y(t))^T$ геометрического положения в момент t удовлетворяет уравнению прямой

$$\psi_1 y - \psi_2 x + C = 0. \quad (5.3)$$

Прямая переключения (5.3) не является универсальной: при изменении управления, удовлетворяющего ПМП, изменяется и прямая переключения. В дальнейшем вместо “прямая переключения” пишем ПП.

Дополнив системы (2.1), (5.1) соотношением (5.2), приходим к замкнутой системе дифференциальных уравнений, для которой выполнены стандартные условия теорем существования и единственности решения. Поэтому, в частности, не может быть движений на плоскости x, y , которые подходили бы по касательной к ПП за конечное

время. Аналогично, не может быть движений, которые сходят с ПП после некоторого движения по ней. Возможно лишь пересечение ПП под ненулевым углом, либо сход с неё в начальный момент (соответственно, вход в последний момент) под ненулевым углом. Перебирая дополнительно к фиксированному начальному условию $z(t_0) = 0$ значения $\psi_1, \psi_2, \psi_3(t_0)$, получаем совокупность движений $t \rightarrow z(t)$, среди которых необходимо должны быть все движения, ведущие на $\partial G(t_f)$.

2) С учетом (5.2) уравнения для $\dot{\phi}$ и $\dot{\psi}_3$ (при оговоренных постоянных ψ_1 и ψ_2) запишем в виде одного уравнения второго порядка:

$$\dot{\phi}(t) = \rho \sin(\varphi(t) - \beta). \quad (5.4)$$

Здесь ρ — длина вектора с компонентами $\psi_1/2, \psi_2/2$, а β — угол наклона этого вектора, отсчитываемый против часовой стрелки от оси x . Таким образом, перебор констант $\psi_1, \psi_2, \psi_3(0)$ можно заменить на перебор констант ρ, β и $\dot{\phi}(0) = \psi_3(0)/2$.

Умножая соотношение (5.4) на $2\dot{\phi}(t)$ (по аналогии с [13], стр. 94), имеем

$$\frac{d(\dot{\phi}(t))^2}{dt} = 2\dot{\phi}(t)\ddot{\phi}(t) = 2\dot{\phi}(t)\rho \sin(\varphi(t) - \beta).$$

Стало быть,

$$(\dot{\phi}(t))^2 = c_* - 2\rho \cos(\varphi(t) - \beta). \quad (5.5)$$

При $\dot{\phi}(t) \neq 0$ получаем

$$\dot{\phi}(t) = \pm \sqrt{c_* - 2\rho \cos(\varphi(t) - \beta)}. \quad (5.6)$$

Эту формулу используем на участках движения, где $\dot{\phi}(t) \neq 0$. Знак “+” соответствует управлению $u(t) > 0$, знак “−” означает, что $u(t) < 0$. Вспоминая выражение (5.3) для ПП и учитывая, что $\psi_3(t)/2 = \dot{\phi}(t)$, получаем, что знак “+” перед корнем означает движение в одной полуплоскости, определяемой ПП, а знак “−” отвечает движению в другой полуплоскости. Условимся направление ПП выбирать так, чтобы полуплоскость, где $u > 0$, лежала слева, а полуплоскость с $u < 0$ справа.

Угол β равен углу (отсчитываемому против часовой стрелки) между направлением оси x и направлением ПП. Можно показать, что константы C в (5.3) и c_* в (5.5) связаны соотношением $c_* = 2\rho \cos \beta + C^2/4$. Если в некоторый момент t точка $(x(t), y(t))^T$ лежит на ПП, тогда

$$c_* = 2\rho \cos \beta'. \quad (5.7)$$

Здесь $\beta' = \beta - \varphi(t)$ — угол наклона вектора скорости системы (1.1) в момент t относительно направления ПП (отсчитывается против часовой стрелки от направления вектора скорости).

Из (5.6) имеем

$$dt = \frac{d\varphi}{\pm \sqrt{c_* - 2\rho \cos(\varphi - \beta)}}. \quad (5.8)$$

Формула (5.8) позволяет заменить интегрирование по t интегрированием по φ в полуплоскостях с постоянным знаком управления.

3) За исключением особого движения при $u(\cdot) \equiv 0$, возможны лишь следующие два варианта взаимного расположения траектории движения $(x(\cdot), y(\cdot))^T$ и прямой переключения (рис. 4).

3.1) Траектория не пересекает ПП (рис. 4а). В этом случае функция $\psi_3(\cdot)$ имеет один и тот же знак на всем промежутке $[t_0, t_f]$.

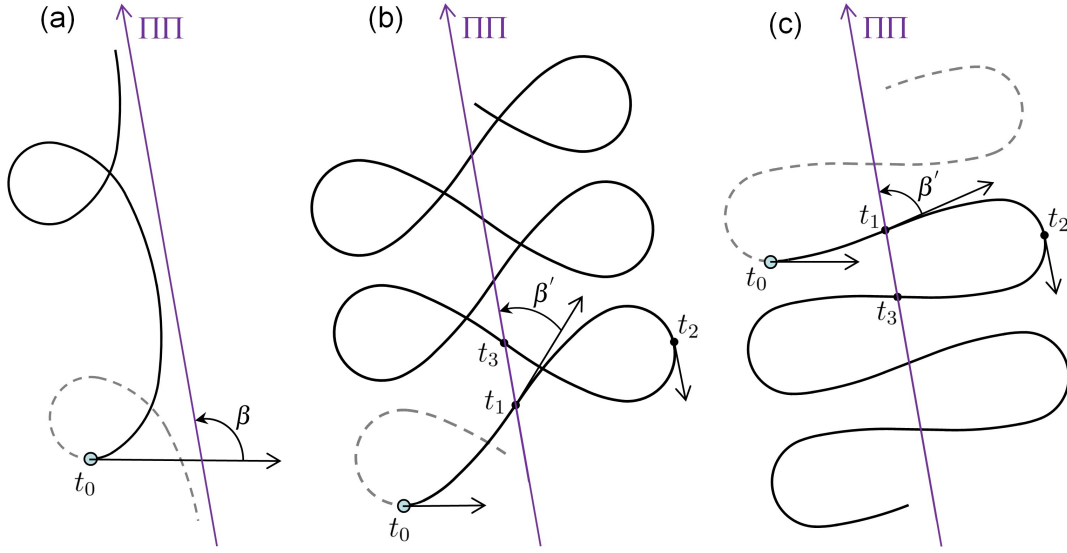


Рис. 4. Взаимное расположение траектории $(x(\cdot), y(\cdot))^T$ и прямой переключения

3.2) Траектория пересекает ПП в некоторый момент t_1 под ненулевым углом. Для определённости рассмотрим вариант смены знака управления с “+” на “-” (рис. 4b, 4c; на первом из них траектория имеет точки самопересечения, на втором их нет). Угол наклона β' равен $\beta - \varphi(t_1)$. Имеем $\beta' \in (0, \pi)$.

Далее при $t > t_1$ угол $\varphi(t)$ убывает и в некоторый момент t_2 направление вектора скорости становится противоположным направлению ПП. При этом $\varphi(t_2) = \varphi(t_1) - \pi + \beta'$ (рис. 4b, 4c). После этого до момента $t_3 = 2t_2 - t_1$ движение идёт симметрично построенному на промежутке от t_1 до t_2 (поскольку величина управления определяется только расстоянием от текущей точки до ПП). В момент t_3 движение попадает на ПП и выполняется равенство $\varphi(t_3) = \varphi(t_2) - \pi + \beta'$. В целом на промежутке от t_1 до t_3 величина накопленного угла отрицательна и равна по модулю $2\pi - 2\beta'$. После переключения знака управления с “+” на “-” (если время t_f ещё не достигнуто) имеем движение с управлением со знаком “+”, центрально-симметричное предыдущему с центром во второй точке смены знака управления.

Таким образом, накопленный угол на каждом участке постоянства знака управления не превышает 2π , и движения между соседними участками постоянства знака управления симметричны друг другу. Из свойства симметрии вытекает, что время между соседними моментами переключения одинаково. Стало быть, функция $\psi_3(\cdot)$ изменяет знак на промежутке $[t_0, t_f]$ конечное число раз.

Изложенное выше позволяет сформулировать следующее утверждение.

Утверждение 5.1. Пусть движение $z(\cdot)$ системы (2.1) на промежутке $[t_0, t_f]$ порождается непрерывным управлением $u(\cdot)$ (не равным тождественно нулю) и при этом выполнен ПМП. Тогда управление $u(\cdot)$ изменяет знак не более чем конечное число раз. Кроме того:

а) точки геометрического положения системы (2.1) на плоскости x, y в моменты смены знака управления $u(\cdot)$ лежат на ПП;

б) если $z(\cdot)$ таково, что движение $(x(\cdot), y(\cdot))^T$ пересекает ПП не менее трёх раз, то время между соседними моментами пересечения ПП одинаково; одинаковым также является соответствующее приращение угла по модулю;

в) если $z(\cdot)$ таково, что движение $(x(\cdot), y(\cdot))^T$ пересекает ПП хотя бы один раз, то накопленный угол по модулю не превосходит 2π на каждом участке постоянства знака управления;

г) если $z(\cdot)$ таково, что движение $(x(\cdot), y(\cdot))^T$ пересекает ПП два раза в некоторые моменты t_1 и $t_2 > t_1$, то неравенство $(t_1 - t_0) + (t_f - t_2) > t_2 - t_1$ эквивалентно неравенству $|\varphi(t_1) - \varphi(t_0)| + |\varphi(t_f) - \varphi(t_2)| > |\varphi(t_2) - \varphi(t_1)|$.

4) Как было сказано в п. 1), принцип максимума позволил записать систему дифференциальных уравнений (2.1), (5.1), замкнутую соотношением (5.2). В этой системе начальные условия по $x(0), y(0), \varphi(0)$ взяты равными нулю. Перебирая значения $\psi_1, \psi_2, \psi_3(0)$, получаем совокупность движений $x(\cdot), y(\cdot), \varphi(\cdot)$, каждое из которых определено на бесконечном промежутке времени. Для любого фиксированного момента t_f и любого краевого условия $x(t_f), y(t_f), \varphi(t_f)$ оптимальное движение, доставляющее равный μ минимум интегральному функционалу, находится среди оговоренной совокупности, рассматриваемой на промежутке $[t_0, t_f]$.

Полученная совокупность движений совпадает с той, что была классифицирована Л. Эйлером в книге [3, Приложение 1]. В дальнейшем экстремальные движения были названы эластичками Эйлера. О глобально оптимальных в смысле функционала (1.2) эластичках Эйлера речь пойдет в разд. 10. Следует иметь в виду, что в постановке Эйлера углы, задаваемые в момент t_f , отождествляются по модулю 2π . Именно поэтому не любое управление, ведущее на границу множества достижимости $G(t_f, \mu)$, является глобально оптимальным (со значением оптимума равным μ) в задаче минимизации функционала (1.2) при отождествлении углов.

В следующем разделе, зафиксировав произвольное значение $\mu > 0$, выявим некоторые дополнительные свойства движений (из рассматриваемой совокупности), которые ведут на границу множества достижимости.

6. УТОЧНЕНИЕ НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ УПРАВЛЕНИЙ, ВЕДУЩИХ НА ГРАНИЦУ МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ

В приводимых ниже утверждениях предполагается, что расход интегрального ресурса на рассматриваемом допустимом управлении равен μ .

Лемма 6.1. Пусть движение $z(\cdot)$ системы (2.1) на промежутке $[t_0, t_f]$ порождается непрерывным управлением $u(\cdot)$, удовлетворяющим ПМП с двумя моментами t_1, t_2 смены знака управления, причём $t_0 < t_1 < t_2 < t_f$. Предположим, что

$$(t_1 - t_0) + (t_f - t_2) > (t_2 - t_1). \quad (6.1)$$

Тогда $z(t_f) \in \text{int}G(t_f)$.

Доказательство. Не теряя общности, примем следующую последовательность знаков управления $u(\cdot)$: $-, +, -$. В этом случае в силу утверждения 5.1г неравенство (6.1) эквивалентно неравенству $-(\varphi(t_1) - \varphi(t_0)) - (\varphi(t_f) - \varphi(t_2)) > \varphi(t_2) - \varphi(t_1)$.

Предположим от противного, что $z(t_f) \in \partial G(t_f)$. Тогда любое управление, ведущее в эту точку, удовлетворяет ПМП. Выберем моменты $\bar{t} \in (t_0, t_1)$ и $\hat{t} \in (t_2, t_f)$ так, чтобы выполнялось равенство

$$-(\varphi(t_1) - \varphi(\bar{t})) - (\varphi(\hat{t}) - \varphi(t_2)) = \varphi(t_2) - \varphi(t_1).$$

Возможность такого выбора следует из непрерывности $\varphi(t)$. Имеем $\varphi(\bar{t}) = \varphi(\hat{t})$.

Рассмотрим на участке $[\bar{t}, \hat{t}]$ реверсивное управление $u^\#(t) = u(\hat{t} - t)$. Заменяя в лемме 4.2 начальное условие $z(t_0) = 0$ на $z(\bar{t})$ и учитывая равенство $\varphi(\bar{t}) = \varphi(\hat{t})$, получаем $(X(\hat{t}), Y(\hat{t}))^\top = (X^\#(\hat{t}), -Y^\#(\hat{t}))^\top$. Построения поясняются на рис. 5, где ось X из леммы 4.2 обозначена через \bar{X} .

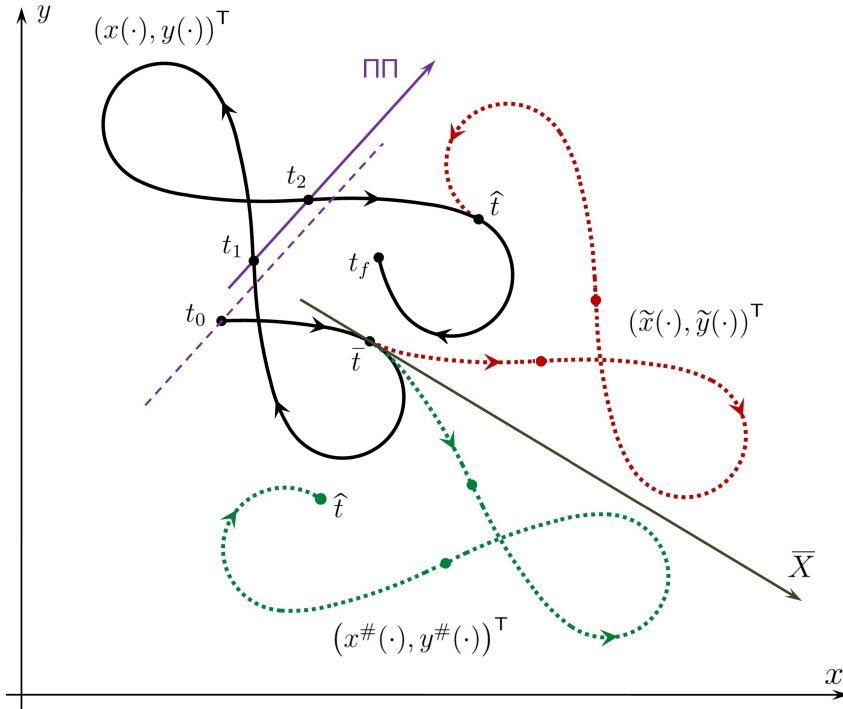


РИС. 5. Пояснение к доказательству леммы 6.1. Сплошная линия — исходное движение $(x(\cdot), y(\cdot))^\top$. Зелёный пунктир — реверсивное движение $(x^\#(\cdot), y^\#(\cdot))^\top$ на $[\bar{t}, \hat{t}]$. Красный пунктир — вспомогательное движение $(\tilde{x}(\cdot), \tilde{y}(\cdot))^\top$ на $[\bar{t}, \hat{t}]$

Возьмём теперь управление $\tilde{u}(t) = -u^\#(t)$, $t \in [\bar{t}, \hat{t}]$. Для соответствующего вспомогательного движения (красный пунктир на рис. 5), выходящего из точки $z(\bar{t})$, получаем $\tilde{z}(\hat{t}) = z(\hat{t})$. Доопределим управление $\tilde{u}(\cdot)$ и соответствующее ему движение $\tilde{z}(\cdot)$ на промежутке $[t_0, t_f]$, полагая $\tilde{u}(t) = u(t)$ при $t \in [t_0, \bar{t}) \cup (\hat{t}, t_f]$. Интегральный расход управления $\tilde{u}(\cdot)$ на $[t_0, t_f]$ совпадает с расходом управления $u(\cdot)$. Имеем $\tilde{z}(t_f) = z(t_f)$. Стало быть, управление $\tilde{u}(\cdot)$ также ведёт на $\partial G(t_f, \mu)$. При этом

$\tilde{u}(\bar{t} - 0) < 0$, а $\tilde{u}(\bar{t} + 0) = -u^\#(\bar{t} + 0) = -u(\hat{t} - 0) > 0$. Аналогично $\tilde{u}(\hat{t} - 0) < 0$, а $\tilde{u}(\hat{t} + 0) = -u(\hat{t} + 0) > 0$. Таким образом, управление $\tilde{u}(\cdot)$, рассматриваемое на $[t_0, t_f]$, является разрывным в моменты \bar{t}, \hat{t} и поэтому не удовлетворяет ПМП. \square

Лемма 6.2. Пусть движение $z(\cdot)$ системы (2.1) на промежутке $[t_0, t_f]$ порождается непрерывным управлением $u(\cdot)$, которое удовлетворяет ПМП с тремя моментами t_1, t_2, t_3 смены знака управления, причём $t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_f$. Тогда $z(t_f) \in \text{int}G(t_f, \mu)$.

Доказательство. В силу утверждения 5.1б имеем $t_2 - t_1 = t_3 - t_2$. Стало быть, на промежутке $[t_1, t_f]$ выполнены условия леммы 6.1 с заданием начального положения и начального угла в момент t_1 , а также с моментами t_2 и t_3 смены знака управления (при интегральном ограничении, равным разности исходного ограничения μ и интеграла от квадрата управления на $[t_0, t_1]$). Поэтому рассматриваемое движение в момент t_f приходит во внутренность множества достижимости, построенного на промежутке $[t_1, t_f]$ от начального состояния $z(t_1)$. Отсюда $z(t_f) \in \text{int}G(t_f, \mu)$. \square

Введём типы непрерывных управлений $u(\cdot)$ с не более чем двумя моментами смены знака управления. Тип U_1 характеризуется тем, что $u(t) > 0$ на всем промежутке $[t_0, t_f]$. Аналогично определяем тип U_4 с заменой положительного управления на отрицательное. Тип U_3 имеет один момент смены знака управления, при этом вначале идет знак “+”, потом “−”. Тип U_2 также имеет один момент смены знака, но только с “−” на “+”. Управления, для которых $u(t) > 0$ (соответственно, $u(t) < 0$) при $t \in (t_0, t_f)$, но $u(t_0) = 0$ или же $u(t_f) = 0$, условимся включать в U_3 (соответственно в U_2). Тип U_5 задаётся двумя моментами смены знака и последовательностью +, −, +. Тип U_6 имеет два момента смены знака управления и последовательность −, +, −.

Теорема 6.3. В любую точку $z(t_f) \neq z^0(t_f)$ на $\partial G(t_f, \mu)$ ведёт непрерывное управление, удовлетворяющее ПМП и относящееся к одному из типов $U_1 - U_6$. Других вариантов управлений, ведущих на границу, нет.

Если $\varphi(t_f) > 0$, то в перечне шести типов оставляем лишь четыре: U_1, U_2, U_3, U_6 . В случае $\varphi(t_f) < 0$ ограничиваемся четырьмя типами U_2, U_3, U_4, U_5 . Если $\varphi(t_f) = 0$, оставляем типы U_2, U_3, U_5, U_6 ; при этом управления типов U_5 и U_6 порождают одну и ту же совокупность точек.

Доказательство. В любую точку $z(t_f) \neq z^0(t_f)$ на $\partial G(t_f, \mu)$ ведёт управление, удовлетворяющее ПМП. В силу утверждения 5.1 оно имеет не более конечного числа моментов смены знака управления.

Предположим от противного, что на $\partial G(t_f, \mu)$ есть точка \hat{z} , перевод в которую возможен при помощи управления с тремя или более моментами смены знака. Если таких управлений несколько, то возьмём управление $u^\diamond(\cdot)$ с наименьшим числом моментов смены знака. Порождаемое им движение обозначим $z^\diamond(\cdot)$. Рассмотрим движение $z^\diamond(\cdot)$ на четырёх последних участках постоянства знака управления. В силу леммы 6.2 получаем $z^\diamond(t_f) \in \text{int}G(t_f, \mu)$.

Таким образом, в любую точку $z(t_f) \neq z^0(t_f)$ на $\partial G(t_f, \mu)$ можно перейти при помощи управления, относящегося к одному из типов $U_1 - U_6$. С учетом лемм 4.2 и 6.1

этот факт можно уточнить следующим образом в зависимости от знака угла φ для рассматриваемой точки $z(t_f) = (x(t_f), y(t_f), \varphi(t_f))^T$.

Любое управление типа U_1 ведёт в точку с $\varphi(t_f) > 0$. Для управлений типа U_4 имеем $\varphi(t_f) < 0$. Поэтому типы U_1 и U_4 при $\varphi(t_f) = 0$ исключаем. В силу леммы 4.2 управления U_5 и U_6 для $\varphi(t_f) = 0$ порождают одну и ту же совокупность точек $(x(t_f), y(t_f))^T$.

Пусть $\varphi(t_f) > 0$. Управления типа U_4 исключаем. Управления типа U_5 также исключаем, поскольку в силу леммы 6.1 такие управления ведут во внутренность множества достижимости.

Случай $\varphi(t_f) < 0$ разбирается аналогично. Здесь также получаем четыре варианта управлений: U_2, U_3, U_4, U_5 . \square

Типы управлений $U_1 - U_6$ аналогичны типам, рассмотренным в работах [8, 9] для геометрических ограничений на управление. Отличие заключается в том, что в задаче с интегральными ограничениями при описании типов $U_1 - U_6$ формально нет участков с нулевым управлением. Приведённая выше теорема 6.3 также практически аналогична теореме 1 из [8] и теореме 1 из [10]. Небольшое отличие состоит в том, что при интегральных ограничениях управления $U_1 - U_6$ исчерпывают движения, ведущие на границу.

Далее воспользуемся теоремой 6.3 для описания движений, ведущих на границу множества достижимости. Множество достижимости будем рассматривать в виде набора сечений по φ (φ -сечений). Ограничимся значениями φ из интервала $[0, \sqrt{t_f \mu}]$. Для $\varphi = \sqrt{t_f \mu}$ сечение по φ является одноточечным. Для $\varphi \in [-\sqrt{t_f \mu}, 0)$ сечения получаются из свойства симметрии.

7. СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ РАСЧЁТА ДВИЖЕНИЙ В СИЛУ УПРАВЛЕНИЙ ТИПА U_1, U_2, U_3, U_6

Зафиксируем значения t_f и μ . Предполагаем, что $\varphi = \varphi(t_f) \in [0, \sqrt{t_f \mu}]$. Для описания кривых, из которых набирается граница φ -сечения, будем использовать кривые A_1, A_2, A_3, A_6 , которые порождаются управлениями типа U_1, U_2, U_3, U_6 .

7.1. **Кривая A_1 .** Такая кривая состоит из точек, в каждую из которых ведёт положительное управление. Имеем $\varphi(t_f) > 0$. Справедливы следующие соотношения:

$$t_f = \int_0^{\varphi(t_f)} \frac{d\varphi}{\sqrt{c_* - 2\rho \cos(\varphi - \beta_1)}}, \quad (7.1)$$

$$\mu = \int_0^{\varphi(t_f)} \sqrt{c_* - 2\rho \cos(\varphi - \beta_1)} d\varphi. \quad (7.2)$$

Здесь β_1 — угол, отсчитываемый от оси x (по которой направлен вектор скорости в начальный момент) против часовой стрелки до направления ПП. В разд. 5 этот угол был обозначен через β .

1) Интегралы в соотношениях (7.1), (7.2) несложным преобразованием сводятся к эллиптическим интегралам первого и второго рода [12].

Приведём такое преобразование для интеграла в (7.1). Сделаем замену переменных $\varphi - \beta_1 = 2\gamma - \pi$. Соотношение (7.1) примет вид

$$t_f = 2 \int_0^{(\varphi(t_f) - \beta_1 + \pi)/2} \frac{d\gamma}{\sqrt{c_* + 2\rho \cos 2\gamma}} - 2 \int_0^{(-\beta_1 + \pi)/2} \frac{d\gamma}{\sqrt{c_* + 2\rho \cos 2\gamma}}.$$

Преобразуем подкоренное выражение:

$$c_* + 2\rho \cos 2\gamma = c_* + 2\rho (1 - 2\sin^2 \gamma) = c_* + 2\rho - 4\rho \sin^2 \gamma = (c_* + 2\rho) \left(1 - \frac{4\rho}{c_* + 2\rho} \sin^2 \gamma\right).$$

Учитывая, что $c_* - 2\rho \cos(\varphi - \beta_1) \geq 0$, положим

$$k^2 = \frac{4\rho}{c_* + 2\rho} > 0. \quad (7.3)$$

Отсюда

$$t_f = \frac{2}{\sqrt{c_* + 2\rho}} \left(\int_0^{(\varphi(t_f) - \beta_1 + \pi)/2} \frac{d\gamma}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \gamma}} - \int_0^{(-\beta_1 + \pi)/2} \frac{d\gamma}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \gamma}} \right).$$

В правой части данного выражения имеем два классических эллиптических интеграла первого рода [12].

Аналогично правая часть формулы (7.2) сводится к эллиптическим интегралам второго рода:

$$\mu = 2\sqrt{c_* + 2\rho} \left(\int_0^{(\varphi(t_f) - \beta_1 + \pi)/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \gamma} d\gamma - \int_0^{(-\beta_1 + \pi)/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \gamma} d\gamma \right). \quad (7.4)$$

2) Записывая произведение $t_f \cdot \mu$, получим

$$t_f \cdot \mu = 4 \left(\int_{(-\beta_1 + \pi)/2}^{(\varphi(t_f) - \beta_1 + \pi)/2} \frac{d\gamma}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \gamma}} \right) \cdot \left(\int_{(-\beta_1 + \pi)/2}^{(\varphi(t_f) - \beta_1 + \pi)/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \gamma} d\gamma \right). \quad (7.5)$$

Рассматриваем (7.5) как уравнение относительно k . Поскольку t_f , μ , $\varphi(t_f)$ зафиксированы, то решение зависит только от β_1 . Определив k из (7.5), находим $(c_* + 2\rho)$ из (7.4). Полученное значение подставляем в формулу (7.3) для k^2 . В результате находим значения ρ и c_* (зависящие от β_1).

Далее интегрируем на $[0, t_f]$ первые два уравнения системы (2.1) с учетом (5.6). Получаем движение на плоскости x, y , кончик которого обозначим $A_1(\beta_1)$.

3) Если $\beta_1 = \varphi(t_f)/2$, то соответствующее движение приходит на ось X . При этом направление ПП совпадает с направлением оси X , а рассматриваемое движение лежит строго слева от ПП. Построение кривой A_1 удобно начать именно с этой точки, перебирая β_1 в диапазоне $\left[\frac{\varphi(t_f)}{2}, \frac{\varphi(t_f)}{2} + \pi\right]$.

Увеличиваем β_1 от значения $\varphi(t_f)/2$. Тем самым увеличиваем угол наклона ПП. При $\beta_1 = \frac{\varphi(t_f)}{2} + \pi$ направление ПП будет противоположным направлению оси X .

Проводя численные построения, наращиваем β_1 с некоторым шагом $\Delta\beta_1$ от значения $\frac{\varphi(t_f)}{2}$, контролируя прохождение значения $\beta_1 = \frac{\varphi(t_f)}{2} + \pi$. При достижении такого значения построения прекращаются.

Ниже считаем, что в конце очередного приращения $\Delta\beta_1$ получаем значение β_1 строго меньше $\frac{\varphi(t_f)}{2} + \pi$. В этом случае контролируем прохождение точкой $A_1(\beta_1)$ ситуации, когда касательная к соответствующей траектории становится параллельной ПП в момент t_f . Такое β_1 обозначим $\bar{\beta}_1$. Для $\beta_1 \in \left[\frac{\varphi(t_f)}{2}, \bar{\beta}_1\right]$ значение k меньше 1 и отделено от 1. Поэтому нет трудностей с вычислением эллиптических интегралов.

4) Увеличивая β_1 дальше, работаем в ситуации, когда получаемое $k < 1$, но близко к единице. Находим $\bar{\beta}_1$, при котором $k(\bar{\beta}_1) = 1$. На промежутке $\beta_1 \in [\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_1]$ вычисление эллиптических интегралов (а значит и решение уравнения (7.5) относительно неизвестного k) осуществляется специальными методами.

Геометрически движение, которое строится при $\beta_1 \in \left[\frac{\varphi(t_f)}{2}, \bar{\beta}_1\right)$, обладает следующим свойством. Если $\beta_1 \in \left[\frac{\varphi(t_f)}{2}, \bar{\beta}_1\right]$, то на траектории есть точка, касательная в которой параллельна ПП. Для $\beta_1 \in (\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_1)$ на продолжении траектории за момент t_f (соответственно и расход управления становится больше μ) есть точка, касательная в которой параллельна ПП.

5) При увеличении β_1 от $\bar{\beta}_1$ получаем значение $k > 1$. Здесь снова применяем специальные методы для нахождения k . Получаемая траектория при её продолжении после момента t_f пересекает ПП. Увеличиваем β_1 до тех пор, пока точка пересечения траектории с ПП не совпадёт с точкой $A_1(\beta_1)$. Соответствующее β_1 обозначим $\tilde{\beta}_1$. Кривая, построенная для таких β_1 , имеет симметричную относительно оси X кривую. Объединение двух симметричных частей составляет кривую A_1 .

6) Проверено, что если на текущем шаге реализуется $\beta_1 = \frac{\varphi(t_f)}{2} + \pi$, то точка $A_1\left(\frac{\varphi(t_f)}{2} + \pi\right)$ опускается на ось X (при $\beta_1 < \frac{\varphi(t_f)}{2} + \pi$ точка была слева от оси X). Наращивание β_1 прекращаем.

Построенная кривая $\beta_1 \rightarrow A_1(\beta_1)$, где $\beta_1 \in \left[\frac{\varphi(t_f)}{2}, \frac{\varphi(t_f)}{2} + \pi\right]$, подходит к оси X под прямым углом. Учитывая отражение относительно оси X , получаем кривую A_1 целиком, и она является замкнутой гладкой кривой.

7) Проанализируем существование и единственность решения уравнения (7.5). Удобно рассмотреть два случая: $\beta_1 \in \left[\frac{\varphi(t_f)}{2}, \varphi(t_f)\right]$ и $\beta_1 \in \left(\varphi(t_f), \frac{\varphi(t_f)}{2} + \pi\right]$. Вторым случаем невозможен при $\varphi(t_f) \geq 2\pi$.

Пусть $\beta_1 \in \left[\frac{\varphi(t_f)}{2}, \varphi(t_f) \right]$. При $k = 0$ правая часть (7.5) равна $\varphi^2(t_f) < \varphi_{\max}^2 = t_f \mu$. При $k = 1$ для интеграла первого рода известно [12, стр. 37, формула (35)] выражение

$$\int_0^\varphi \frac{d\gamma}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \gamma}} = \ln \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right).$$

Если $\varphi = \frac{\pi}{2}$, то такой интеграл равен $+\infty$. Отсюда, с учётом того, что в рассматриваемом случае промежуток интегрирования содержит $\frac{\pi}{2}$, следует, что первая скобка в (7.5) равна $+\infty$. Вторая скобка положительна как интеграл от неотрицательной (не равной тождественно нулю) функции на интервале интегрирования длиной $\frac{\varphi(t_f)}{2} > 0$. Таким образом, существование решения при некотором $k \in (0, 1)$ вытекает из того, что правая часть уравнения (7.5) меньше левой для $k = 0$ и больше левой для $k \rightarrow 1$. Отметим, что при $k > 1$ интеграл в первом сомножителе правой части (7.5) не определён в действительных числах, поскольку промежуток интегрирования содержит $\frac{\pi}{2}$. Следовательно, среди таких значений k нет решения уравнения (7.5).

Пусть теперь $\beta_1 \in \left(\varphi(t_f), \frac{\varphi(t_f)}{2} + \pi \right]$. Здесь также при $k = 0$ правая часть (7.5) равна $\varphi^2(t_f)$. Промежуток интегрирования в рассматриваемом случае принадлежит интервалу $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$. Поскольку в (7.5) подкоренные выражения должны быть неотрицательными, то при каждом значении β_1 можно указать максимальное значение $k^*(\beta_1) > 1$ такое, что для всех $k \in [0, k^*(\beta_1)]$ правая часть (7.5) будет определена (и конечна). Значение $k^*(\beta_1)$ задаётся формулой

$$k^*(\beta_1) = 1/\alpha(\beta_1), \quad \alpha(\beta_1) = \max \left\{ \left| \sin \left(\frac{-\beta_1 + \pi}{2} \right) \right|, \left| \sin \left(\frac{\varphi(t_f) - \beta_1 + \pi}{2} \right) \right| \right\}.$$

Если правая часть (7.5) при $k = k^*(\beta_1)$ больше или равна, чем $t_f \mu$, то решение уравнения (7.5) существует на интервале $(0, k^*(\beta_1)]$. Иначе на этом интервале решения нет. При $k > k^*(\beta_1)$ правая часть (7.5) не определена, и, стало быть, решений нет.

Доказательство единственности решений в рассматриваемых случаях опирается на анализ производной правой части по параметру k . Можно убедиться, что такая производная положительна для всех допустимых значений $k > 0$, при которых правая часть (7.5) определена (в первом случае для $k \in (0, 1)$ и во втором случае для $k \in (0, k^*(\beta_1)]$). Отсюда следует единственность решения (7.5) по k (во втором случае – если оно существует).

Введённое в пункте 5) значение $\tilde{\beta}_1$ является наибольшей величиной, при которой для всех $\beta_1 \in \left[\frac{\varphi(t_f)}{2}, \tilde{\beta}_1 \right]$ решение (7.5) существует и единственно.

7.2. Кривая A_3 . Если $\tilde{\beta}_1 < \frac{\varphi(t_f)}{2} + \pi$, то точка $A_1(\tilde{\beta}_1)$ находится слева от оси X . Угол между вектором скорости в точке $A_1(\tilde{\beta}_1)$ и направлением соответствующей ПП больше нуля. Обозначим такой угол через $\tilde{\beta}_3$. Продолжаем кривую A_1 кривой A_3 .

При построении кривой A_3 перебираем все управления с одним моментом смены знака с “+” на “-”, дающие в момент t_f значение угла равное $\varphi(t_f)$. Каждая траектория полностью определяется значениями t_f , μ , $\varphi(t_f)$ и углом β_3 наклона траектории в момент пересечения ПП (угол отсчитывается против часовой стрелки от направления вектора скорости до направления ПП; на рис. 4b,c этот угол обозначен β'). Поэтому можем, взяв вспомогательную начальную точку на ПП, отдельно рассмотреть участок движения из этой точки *в прямом времени* с отрицательным управлением, удовлетворяющим ПМП, и заданным углом β_3 . Строим такой участок до тех пор, пока изменение угла φ на нем не достигнет по модулю зафиксированного числа $\varphi_3 \geq 0$. Затем *в обратном времени* из той же вспомогательной точки при том же угле β_3 рассматриваем движение с положительным управлением на промежутке времени, на котором изменение угла φ будет $\varphi_3 + \varphi(t_f)$.

Значение φ_3 при взятом β_3 выбираем так, чтобы суммарное время на двух участках равнялось t_f и расход интегрального ресурса был равен μ . Склеив две полученные траектории в одну через их общую начальную точку, получим траекторию на промежутке $[0, t_f]$, итоговое изменение угла вдоль которой равно $\varphi(t_f)$. Перенеся её начальную точку в начало координат исходной системы x, y и совместив направление вектора скорости в начальный момент с направлением оси x , получим требуемое движение. Его конечную точку обозначим $A_3(\beta_3)$.

Перечисленные условия приводят к следующей системе соотношений:

$$t_f = \int_0^{\varphi_3} \frac{d\varphi}{\sqrt{c_* - 2\rho \cos(\varphi + \beta_3)}} + \int_0^{\varphi_3 + \varphi(t_f)} \frac{d\varphi}{\sqrt{c_* - 2\rho \cos(\varphi + \beta_3)}}, \quad (7.6)$$

$$\mu = \int_0^{\varphi_3} \sqrt{c_* - 2\rho \cos(\varphi + \beta_3)} d\varphi + \int_0^{\varphi_3 + \varphi(t_f)} \sqrt{c_* - 2\rho \cos(\varphi + \beta_3)} d\varphi. \quad (7.7)$$

Учитывая, что вспомогательная начальная точка лежит на ПП, полагаем $c_* = 2\rho \cos \beta_3$. Перемножая равенства (7.6) и (7.7), получаем уравнение относительно φ_3 . При каждом β_3 в некотором диапазоне $[\hat{\beta}_3, \tilde{\beta}_3]$ находим из такого уравнения единственное φ_3 , а затем единственное ρ из соотношения (7.7). На базе полученных значений φ_3 и ρ строим две ветви искомой геометрической кривой. Склеенную кривую переносим в начало координат исходной системы, как описано выше.

Значение $\hat{\beta}_3 \in (\tilde{\beta}_3, \pi)$, при котором построения прекращаются, определяется реализацией хотя бы одного из условий: а) ветвь кривой, строящейся в обратном времени из вспомогательной начальной точки, вторично попадает на ПП; б) значение φ_3 становится равным нулю.

Перебирая $\beta_3 \in [\hat{\beta}_3, \tilde{\beta}_3]$, получаем кривую A_3 . Кривая A_2 симметрична кривой A_3 относительно оси X . В каждую точку кривой A_2 в силу леммы 4.2 ведёт реверсивное управление.

Возможен случай, когда при β сколь угодно близком к $\tilde{\beta}_3$ сверху, система (7.6) и (7.7) не имеет решения. В этом случае полагаем $\hat{\beta}_3 = \tilde{\beta}_3$. Считаем кривую A_3 вырожденной и состоящей из одной точки $A_3(\tilde{\beta}_3)$. Аналогично вырожденной полагаем кривую A_2 .

7.3. **Кривая A_6 .** Пусть $\widehat{\varphi}_{6,1} \geq 0$ есть значение φ_3 , получаемое для $\beta_3 = \widehat{\beta}_3$. При построении кривой A_6 считаем $\widehat{\varphi}_{6,1} > 0$ и в качестве одномерного параметра возьмём $\varphi_{6,1}$, уменьшая его от значения $\widehat{\varphi}_{6,1}$. Движение, ведущее при рассматриваемом $\varphi_{6,1}$ в точку $A_6(\varphi_{6,1})$, состоит из трёх участков, равных по угловой величине соответственно $-\varphi_{6,2}$ (участок лежит справа от ПП), $\varphi_{6,2} + \varphi_{6,1} + \varphi(t_f)$ (участок лежит слева от ПП), $-\varphi_{6,1}$ (справа от ПП). Здесь $\varphi_{6,2}, \varphi_{6,1}, \varphi(t_f)$ считаются положительными. Справедливо равенство

$$2\pi - 2\beta_6 - \varphi_{6,2} - \varphi_{6,1} = \varphi(t_f). \quad (7.8)$$

Угол β_6 определяется так же, как угол β_3 , но соответствует второму в прямом времени попаданию движения на ПП.

Запишем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} t_f &= \int_0^{\varphi_{6,2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{c_* - 2\rho \cos(\varphi + \beta_6)}} + \\ &+ \int_0^{\varphi_{6,1}} \frac{d\varphi}{\sqrt{c_* - 2\rho \cos(\varphi + \beta_6)}} + \int_0^{\varphi_{6,2} + \varphi_{6,1} + \varphi(t_f)} \frac{d\varphi}{\sqrt{c_* - 2\rho \cos(\varphi + \beta_6)}}, \\ \mu &= \int_0^{\varphi_{6,2}} \sqrt{c_* - 2\rho \cos(\varphi + \beta_6)} d\varphi + \\ &+ \int_0^{\varphi_{6,1}} \sqrt{c_* - 2\rho \cos(\varphi + \beta_6)} d\varphi + \int_0^{\varphi_{6,2} + \varphi_{6,1} + \varphi(t_f)} \sqrt{c_* - 2\rho \cos(\varphi + \beta_6)} d\varphi. \end{aligned}$$

Полагаем в них $c_* = 2\rho \cos \beta_6$. Указанные соотношения с учетом равенства (7.8) дают систему относительно β_6 и ρ при фиксированном $\varphi_{6,1}$.

Мы строим кривую A_6 до тех пор, пока она не достигнет оси X с равенством $\varphi_{6,1} = \varphi_{6,2}$. Рассматривая в силу леммы 4.2 симметричную относительно оси X кривую, получаем объединённую кривую A_6 . Кривая A_6 соединяет концы кривых A_3 и A_2 . Кривая A_6 гладко сопрягается с кривыми A_3 и A_2 . Кривая A_6 не строится, если $\widehat{\varphi}_{6,1} = 0$.

7.4. **Граница φ -сечения без кривой A_6 .** Значение $\widehat{\varphi}_{6,1}$ зависит от $\varphi(t_f)$. Мы проверили численно существование такого $\varphi^*(t_f)$, что $\widehat{\varphi}_{6,1} = 0$ при $\varphi(t_f) = \varphi^*(t_f)$ и $\widehat{\varphi}_{6,1} > 0$, если $\varphi(t_f) < \varphi^*(t_f)$. В случае $\varphi(t_f) > \varphi^*(t_f)$ нет экстремальных управлений с двумя моментами смены знака, т.е. относящихся к типу U_6 . Поэтому при $\varphi(t_f) > \varphi^*(t_f)$ кривая A_6 не строится. Можно сказать, что она вырождается в точку для $\varphi(t_f) = \varphi^*(t_f)$. Такая точка лежит на вспомогательной оси X . Она одновременно является последней точкой $A_3(\widehat{\beta}_3)$ кривой A_3 . Прямая переключения, соответствующая $\widehat{\beta}_3$, проходит по оси X , но противоположна ей по направлению.

Когда $\varphi(t_f)$ становится больше $\varphi^*(t_f)$, то для последней точки $A_3(\widehat{\beta}_3)$ кривой A_3 , как и при $\varphi(t_f) = \varphi^*(t_f)$, выполнено условие $\varphi_3 = 0$. При этом точка $A_3(\widehat{\beta}_3)$ вновь расположена слева от оси X . При её построении в системе (7.6), (7.7) зануляются первые интегральные слагаемые справа. Можно показать, что эта система переходит в систему (7.1), (7.2). Соответствующее доказательство использует замену переменной φ в подынтегральном выражении на новую переменную $\varphi^b = \varphi(t_f) - \varphi$. Дополнительно

принимая во внимание, что $\beta_3 = \beta_1 - \varphi(t_f)$, а также то, что соотношение $c_* = 2\rho \cos \beta_3$ в (7.6), (7.7) в силу (5.7) совпадает с выражением для c_* в (7.1), (7.2).

При $\varphi(t_f) > \varphi^*(t_f)$ после построения кривой A_3 мы строим второй участок кривой A_1 , увеличивая β_1 , но теперь начиная с $\beta_1 = \hat{\beta}_3 + \varphi(t_f)$, до попадания кривой на ось X . С ростом $\varphi(t_f)$ дуга A_3 “сокращается”, затем вырождается в точку и исчезает. До вырождения кривой A_3 (и, соответственно, A_2) граница φ -сечения состоит из кривых A_3 , A_2 и двух участков кривой A_1 . После вырождения кривой A_3 граница множества $G_\varphi(t_f, \mu)$ состоит только из кривой A_1 .

8. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО ПОСТРОЕНИЯ ТРЁХМЕРНОГО МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ И ЕГО φ -СЕЧЕНИЙ

Исследование трёхмерного множества достижимости сводим к изучению его φ -сечений для $\varphi \geq 0$. При $\varphi < 0$ φ -сечения $G_\varphi(t_f, \mu)$ могут быть получены на основе сечений при $\varphi > 0$ в силу свойства симметрии, описанного в подразд. 4.4.

1) Начнём со случая, когда величины t_f и μ таковы, что максимально возможное $\varphi_{\max} = \sqrt{t_f \mu} \leq 2\pi$. В этом случае для каждого φ -сечения $G_\varphi(t_f, \mu)$, где $0 < \varphi < \varphi_{\max}$, его граница составляется из последовательно соединённых кривых A_1 , A_3 , A_6 и A_2 . То есть кривая $\mathcal{A} = A_1 \cup A_3 \cup A_6 \cup A_2$ не имеет самопересечений и составляет границу множества $G_\varphi(t_f, \mu)$. При этом для $\varphi(t_f)$, близких к φ_{\max} , кривые A_6 , A_3 , A_2 вырождаются и граница φ -сечения определяется только кривой A_1 . Если $\varphi = 0$, то исчезает кривая A_1 . Граница множества $G_\varphi(t_f, \mu)$ составляется из кривых A_3 , A_6 , A_2 . Кривые A_3 и A_2 замыкаем в особой точке, соответствующей управлению $u \equiv 0$. Отметим, что для $\varphi = 0$ в соответствии с теоремой 6.3 множество точек, порождаемое управлением типа U_5 (кривая A_5), совпадает с кривой A_6 .

На рис. 6 для $\mu = 4$, $t_f = 4$ дано наглядное представление множества $G(t_f, \mu)$ в виде набора его φ -сечений, выведенных с некоторым шагом $\Delta\varphi$. Поверхности, образующие границу трёхмерного множества достижимости, строятся на базе этих φ -сечений с использованием триангуляции. Мы сохраняем за такими поверхностями обозначения A_1 , A_3 , A_6 , A_2 .

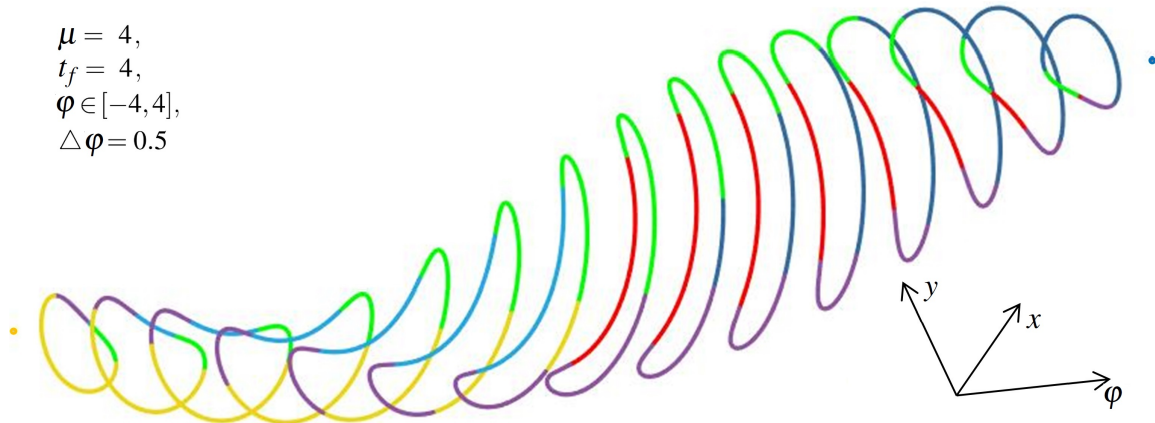


Рис. 6. Набор φ -сечений для представления трёхмерного множества достижимости

На рис. 7 показано φ -сечение для $\mu = 4$, $t_f = 4$, $\varphi(t_f) = 2$. Представлены примеры движений, ведущих на кривые A_1 , A_3 , A_6 . Одновременно показаны ПП, соответствующие этим движениям. Прямая переключения, соответствующая движению, ведущему в точку на кривой A_1 , визуально касается траектории этого движения. На самом деле траектория лежит по одну сторону от ПП (а именно, слева). Граница φ -сечения образуется последовательным соединением кривых A_1 , A_3 , A_6 , A_2 . Такой случай является самым простым при применении теоремы 6.3 для анализа границы φ -сечения.

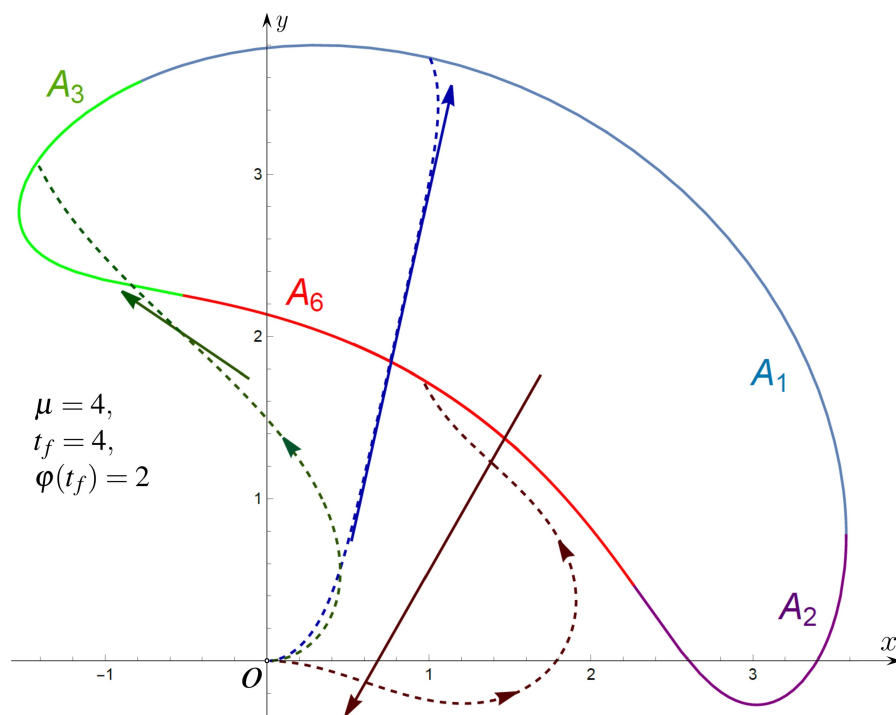


Рис. 7. Граница φ -сечения полностью определяется соединением кривых A_1 , A_2 , A_3 , A_6

С ростом значения $\varphi = \varphi(t_f)$ происходит “уменьшение” кривой A_6 , и при некотором φ она исчезает. Рассматриваемое φ -сечение становится выпуклым. Свойство выпуклости сохраняется при дальнейшем росте $\varphi(t_f)$.

После исчезновения кривой A_6 на некотором малом промежутке значений $\varphi(t_f)$ граница φ -сечения определяется кривыми A_1 , A_3 и A_2 . При этом кривая A_1 состоит из двух частей. Появляющаяся дополнительно вторая часть соединяет кривые A_3 и A_2 вместо исчезнувшей кривой A_6 . Соответствующий пример показан на рис. 8.

При дальнейшем увеличении $\varphi(t_f)$ исчезают кривые A_3 и A_2 . Граница φ -сечения полностью определяется кривой A_1 (см. рис. 9). Эта кривая симметрична относительно оси X .

Рис. 8 и 9 просчитаны для $\mu = 4$, $t_f = 4$. Значения $\varphi(t_f)$ равны соответственно 3.6 и 3.8. На этих рисунках разным цветом выделены участки кривой A_1 , о которых было сказано в подразд. 7.1, пункты 3), 4), 5). Участок 1 соответствует пункту 3) в подразд. 7.1, участок 2 (два сегмента) — пункту 4) и участок 3 — пункту 5). Показаны также варианты движений, ведущих на эти участки, а также соответствующие ПП.

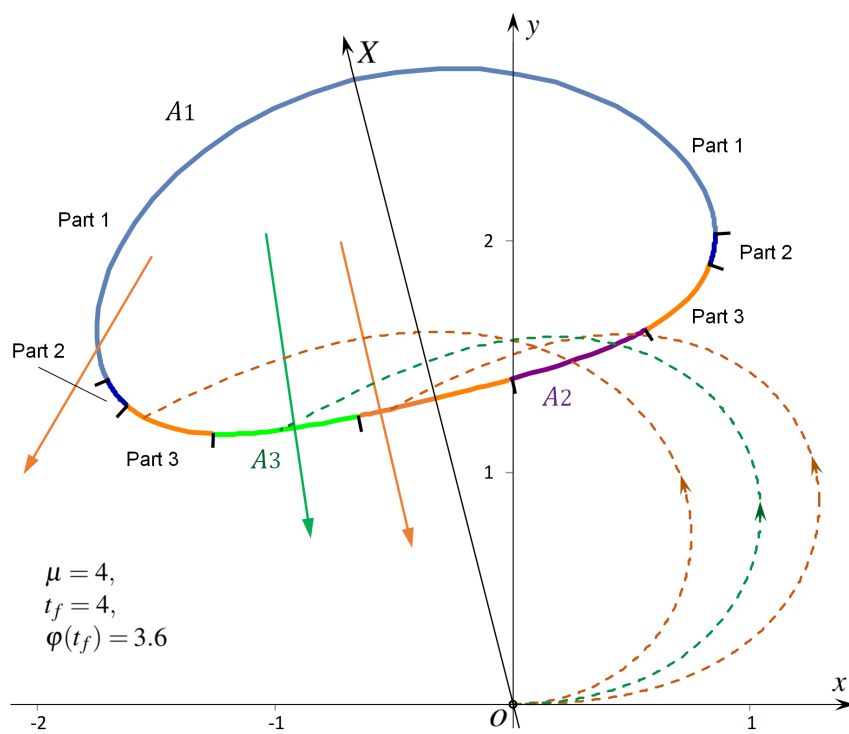


Рис. 8. Граница φ -сечения определяется кривыми A_1, A_3, A_2

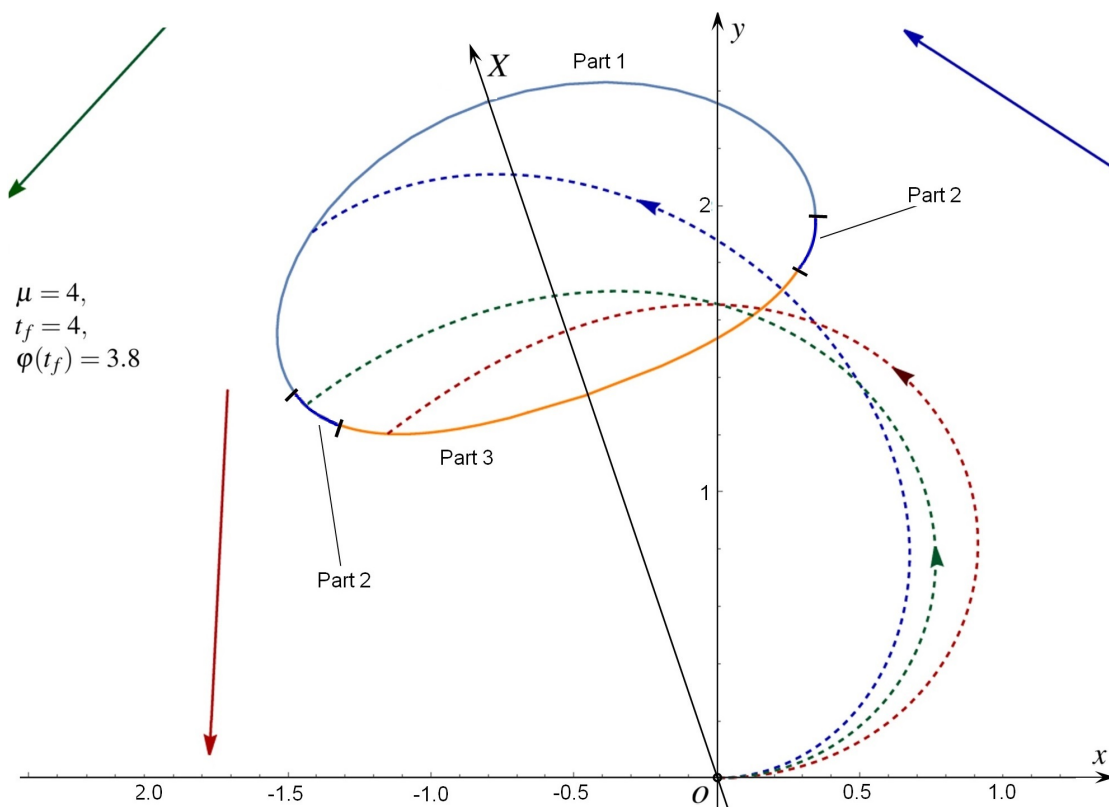


Рис. 9. Граница φ -сечения определяется только кривой A_1

На рис. 10 с двух ракурсов показано трёхмерное множество $G(t_f, \mu)$ для $t_f = (1.5\pi)^2$ и $\mu = 1$. Цветом выделены участки границы, на которые ведут различные типы управлений: U_1 — положительное управление (синий цвет), U_4 — отрицательное управление (желтый цвет), U_3 — управление с одним моментом смены знака с “+” на “-” (зелёный цвет), U_2 — управление с одним моментом смены знака с “-” на “+” (фиолетовый цвет). Точка $z^0(t_f)$, в которую ведёт тождественно равное нулю управление, лежит на стыке четырёх указанных участков. Чёрными линиями намечены с некоторым шагом по оси φ контуры сечений трёхмерного множества $G(t_f, \mu)$. Этот рисунок можно сравнить с аналогичным рис. 2, который был сделан для геометрического ограничения. Данный рисунок отличается от рис. 2 гладкостью границы для крайних значений φ , а также гладким сочленением поверхностей A_6 и A_5 (составляемых, соответственно, из кривых A_6 и A_5) с поверхностями A_2 и A_3 (составляемых из кривых A_2 и A_3). Сохраняется негладкость стыковки при $\varphi = 0$ поверхностей A_6 и A_5 .

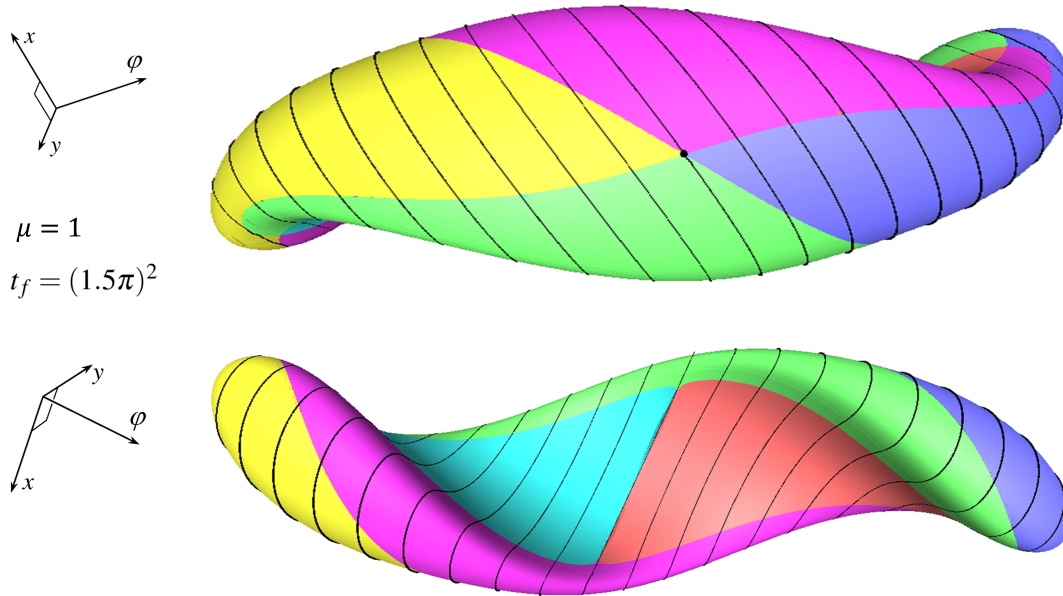


Рис. 10. Трёхмерное множество достижимости с двух ракурсов

2) Трёхмерное множество достижимости $G(t_f, \mu)$, просчитанное при $\mu = 100$ для момента $t_f = 0.95$, показано на рис. 11 слева (здесь мы уже имеем дело со случаем $\varphi_{\max} > 2\pi$). Множество $G(t_f, \mu)$ не является односвязным: имеется полость, ему не принадлежащая. Она не видна, когда смотрим на множество снаружи.

Чтобы показать неодносвязность трёхмерного множества, на рис. 11 справа представлено его φ -сечение $G_\varphi(t_f, \mu)$ при $\varphi = 0$. Поскольку $\varphi = 0$, то вспомогательная ось X , относительно которой φ -сечение является симметричным, совпадает с осью x . Кривая A_1 на $\partial G_\varphi(t_f)$ отсутствует. Точка $(x^0(t_f), y^0(t_f))^T$ принадлежит данному φ -сечению и расположена на оси x . Кривые A_3 и A_2 симметричны друг другу и отходят от этой точки. Их дуги до точки P_1 первого пересечения дают “внешнюю” границу φ -сечения. Открытые дуги A_3 и A_2 от точки P_1 до точки P_2 второго пересечения лежат во внутренности φ -сечения. Кривая A_6 и примыкающие к ней участки кривых A_3 и A_2 после точки P_2 составляют границу “дырки”, не принадлежащей $G_\varphi(t_f, \mu)$.

Пунктиром показаны траектории четырёх движений, ведущих на границу φ -сечения (а стало быть, и на границу трёхмерного множества достижимости). Траектории, ведущие в точки e_1 , e_2 и e_3 , имеют одну точку перегиба (точка смены знака управления). Траектория, ведущая в точку e_4 на кривой A_6 , имеет две точки перегиба.

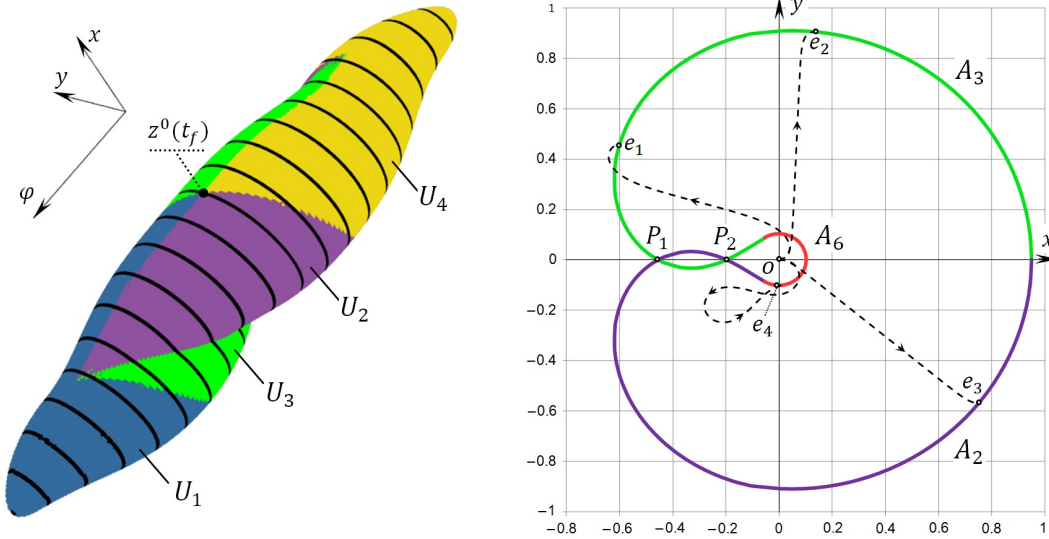


Рис. 11. Трёхмерное множество достижимости $G(t_f, \mu)$ (слева) и его φ -сечение при $\varphi = 0$ (справа); $\mu = 100$, $t_f = 0.95$

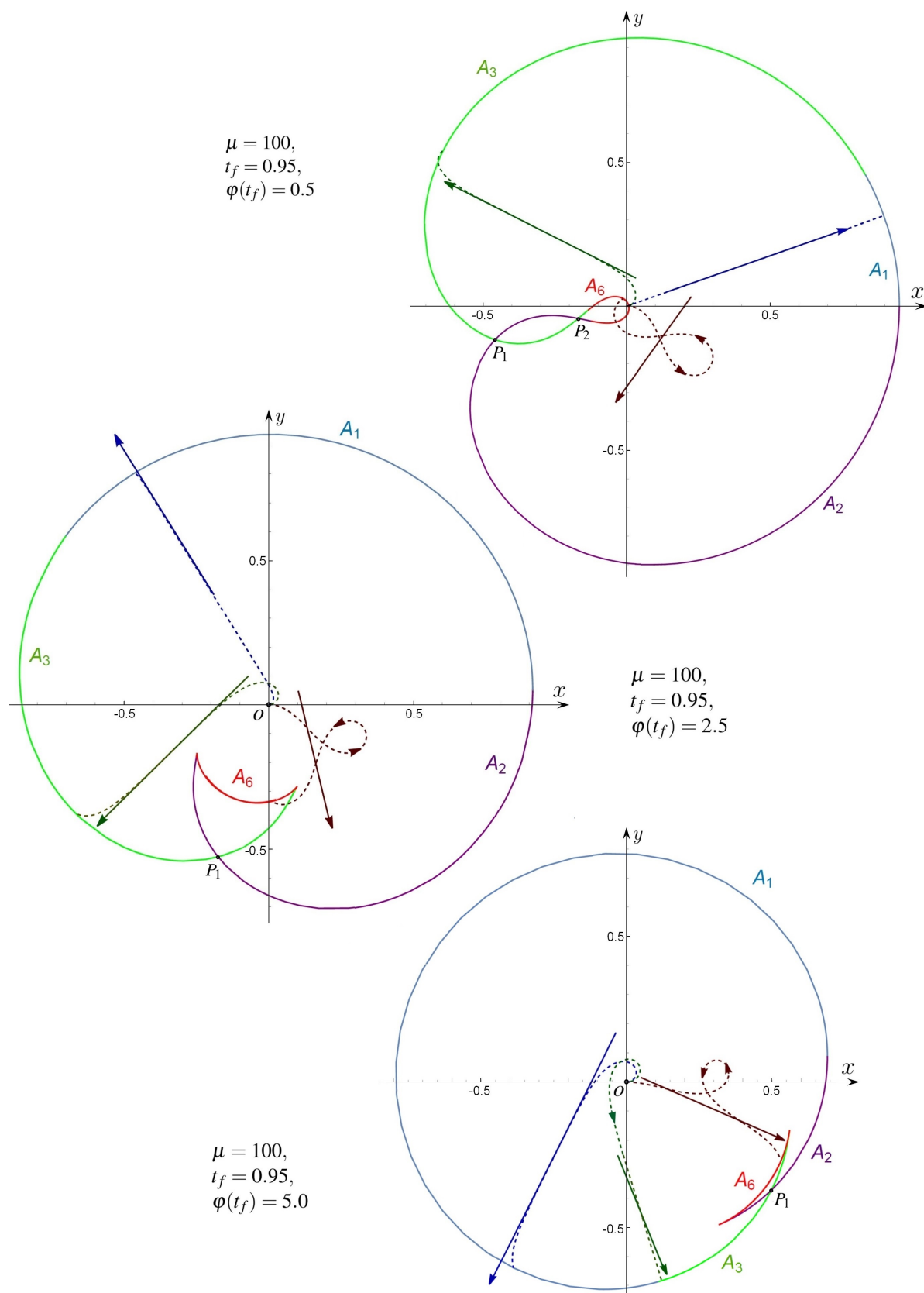
Дальнейшее изменение φ -сечений $G_\varphi(t_f, \mu)$ дано на рис. 12. Для каждого $\varphi(t_f)$ показаны три движения (а также соответствующие ПП), ведущие на кривые A_1 , A_3 , A_6 .

Неодносвязность φ -сечения сохраняется для $\varphi(t_f) = 0.5$ (рис. 12а). Внешняя граница φ -сечения при этом определяется кривой A_1 и дугами кривых A_3 и A_2 до точки P_1 их первого пересечения. Кривая A_6 и примыкающие к ней участки кривых A_3 и A_2 до точки P_2 составляют границу “дырки”. На рис. 12b и 12c φ -сечения являются односвязными. Граница φ -сечений определяется кривой A_1 и примыкающими к ней дугами кривых A_3 и A_2 до точки P_1 их первого пересечения.

Пример на рис. 13 для $t_f \approx 1.1244$, $\mu = 100$, $\varphi(t_f) = 0$ подобран так, чтобы показать движения в виде лемнискат. Здесь кривая A_6 выродилась в точку, совпадающую с началом координат. На рисунке справа показано шесть кривых из семейства лемнискат. Все траектории представляют собой одну и ту же геометрическую лемнискату, но точка её приложения к началу координат исходной системы изменяется. Каждая траектория начинается и заканчивается в начале координат с направлением вектора скорости по оси x . При сколь угодно малом уменьшении μ возникает “дырка” и точка начала координат уже не принадлежит φ -сечению для $\varphi = 0$.

Детальное исследование замкнутых траекторий движения (замкнутых эластик Эйлера) содержится в статье [11]. Доказано, что лемниската не является глобально оптимальной траекторией в задаче минимизации функционала (1.2) при отождествлении угла φ по модулю 2π . Такое движение доставляет локальный оптимум.

На рис. 14 примерно в том же ракурсе, что и для рис. 1, показаны трёхмерные множества достижимости $G(t_f, \mu)$ для $\mu = 1$ и $t_f = \pi^2, (2\pi)^2, (3\pi)^2, (4\pi)^2$. Мы можем сравнить их с множествами достижимости при геометрическом ограничении.

Рис. 12. Эволюция φ -сечений с ростом $\varphi(t_f)$

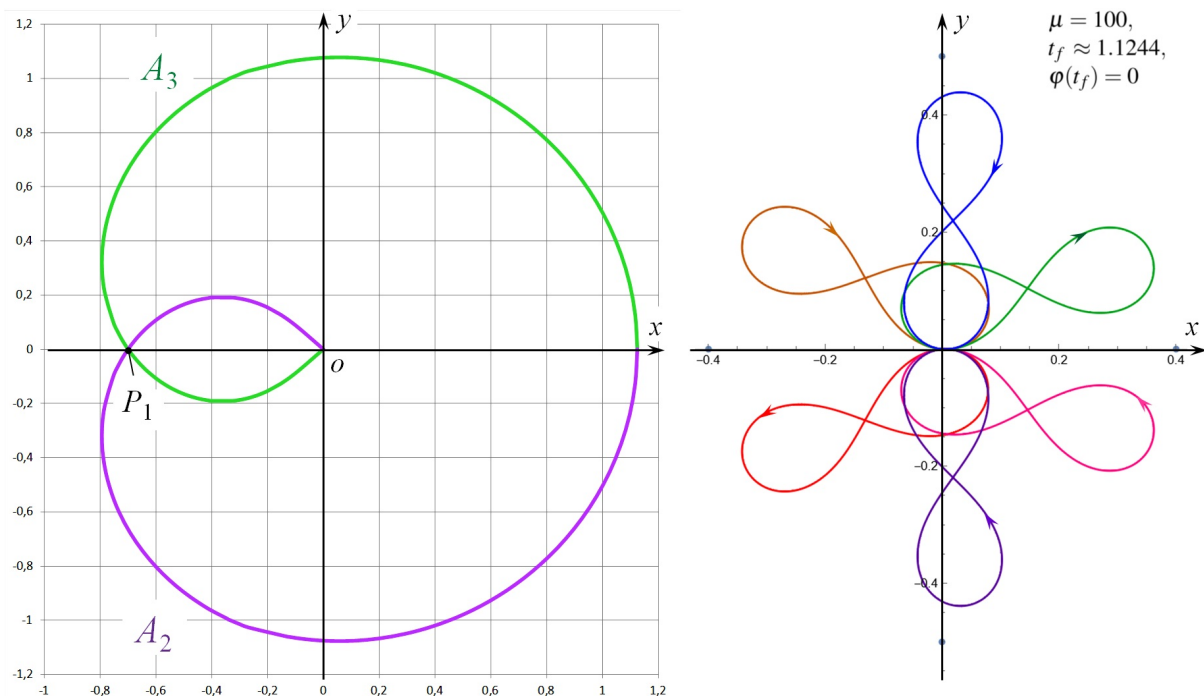


РИС. 13. Пример траекторий движения (эластик Эйлера) в форме лемнискат

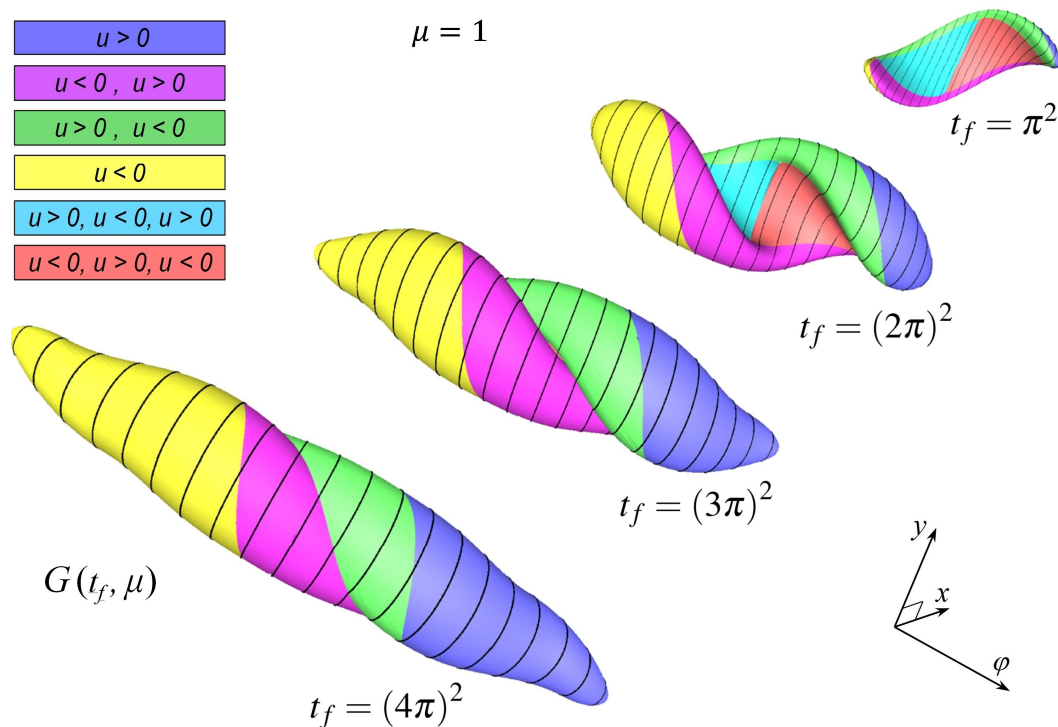


РИС. 14. Развитие во времени трёхмерного множества достижимости $G(t_f, \mu)$ при интегральном квадратичном ограничении

9. ОТОЖДЕСТВЛЕНИЕ УГЛОВ ПО МОДУЛЮ 2π

В прикладных задачах угол φ часто отождествляется по модулю 2π . Используя алгоритм построения множества $G(t_f, \mu)$, нетрудно построить множество достижимости $\check{G}(t_f, \mu)$ при приравнивании углов, отличающихся сдвигом на $k2\pi$. Справедлива следующая формула:

$$\check{G}_{\check{\varphi}}(t_f, \mu) = \bigcup G_{\varphi}(t_f, \mu), \quad \varphi = \check{\varphi} \pm k2\pi, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad \check{\varphi} \in [-\pi, \pi).$$

Уже из самой этой формулы видно, что множество $\check{G}(t_f, \mu)$ выглядит “коряво”. На рис. 15 множества $\check{G}(t_f, \mu)$ показаны для $\mu = 1$, $t_f = (1.5\pi)^2$ and $t_f = (2\pi)^2$.

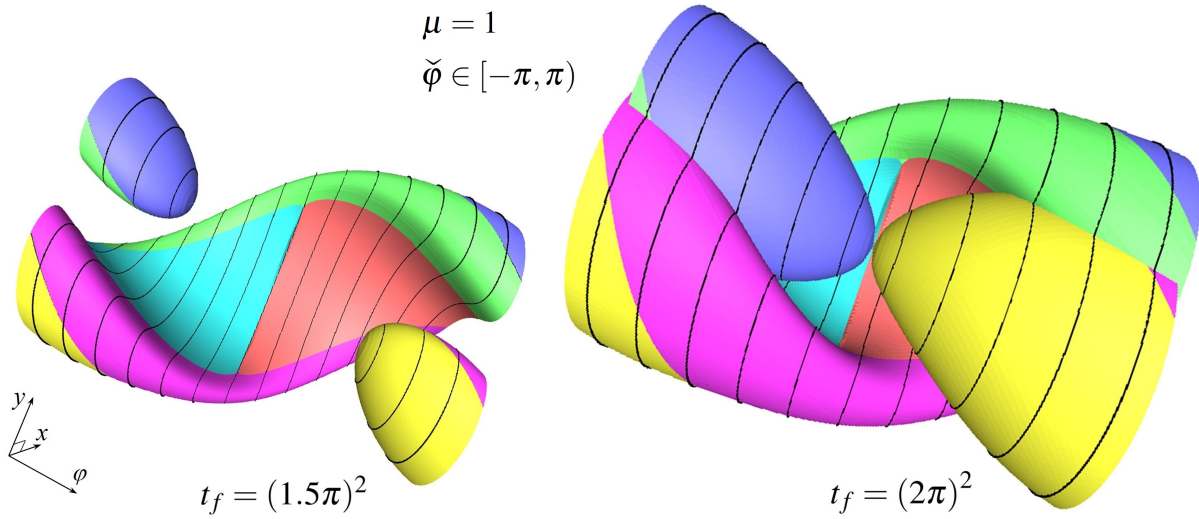


Рис. 15. Трёхмерное множество достижимости $\check{G}(t_f, \mu)$ для случая, когда углы φ отождествляются по модулю 2π

10. НАХОЖДЕНИЕ ГЛОБАЛЬНО ОПТИМАЛЬНЫХ ЭЛАСТИК ЭЙЛЕРА

Считаем заданными момент t_f , точку $(\check{x}, \check{y})^T$ и угол $\check{\varphi} \in (-\pi, \pi]$. Символом μ^* обозначим минимальное значение интегрального функционала (1.2), при котором возможен перевод системы (2.1) в точку $(\check{x}, \check{y})^T$ в момент t_f с заданным углом $\check{\varphi}$, отождествляемым по модулю 2π . Требуется указать способ вычисления оптимального значения μ^* , а также построить все движения (глобально оптимальные эластики Эйлера), каждое из которых осуществляет перевод из начального состояния в конечное с оптимальным показателем μ^* . Для краткости обозначим $\check{a} = (\check{x}, \check{y})^T$.

10.1. Глобальный минимум и оптимальные эластики: φ -сечения для их поиска. Точку $\check{x} = t_f$, $\check{y} = 0$ с $\check{\varphi} = 0$ исключаем, ибо перевод в неё осуществляется при $u(t) \equiv 0$ и, стало быть, для неё минимальное $\mu^* = 0$. Для остальных точек перевод в момент t_f возможен, лишь когда $\sqrt{\check{x}^2 + \check{y}^2} < t_f$.

Обозначим

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \min\{\mu : \check{a} \in G_{\check{\varphi}}(t_f, \mu)\}, \\ \mu_- &= \min\{\mu : \check{a} \in G_{\check{\varphi}-2\pi}(t_f, \mu)\}, \quad \mu_+ = \min\{\mu : \check{a} \in G_{\check{\varphi}+2\pi}(t_f, \mu)\}. \end{aligned}$$

1) Вначале предположим, что $\check{\varphi} \in (0, \pi]$. Покажем, что для поиска всех глобально оптимальных эластик следует использовать только два φ -сечения $G_{\check{\varphi}}(t_f, \mu_0)$ и $G_{\check{\varphi}-2\pi}(t_f, \mu_-)$. Доказательство проведём от противного.

Предположим, что существует такое целое число $k_+ \geq 1$, что $\check{a} \in G_{\check{\varphi}+2\pi k_+}(t_f, \mu^*)$. Учитывая размах $[-\sqrt{t_f \mu^*}, \sqrt{t_f \mu^*}]$ множества $G(t_f, \mu^*)$ по координате φ , заключаем, что $\check{\varphi} + 2\pi k_+ \leq \sqrt{t_f \mu^*}$.

Так как $\check{\varphi} + 2\pi k_+ > 2\pi$ и для глобально оптимального движения (глобально оптимальной эластике Эйлера) выполнен ПМП, то любое управление $u(\cdot)$, ведущее в точку \check{a} , не может иметь моментов смены знака управления. Это вытекает из утверждения 5.1в. Следовательно, $\check{a} \in A_1$. При этом кривая A_1 образует границу φ -сечения $G_{\check{\varphi}+2\pi k_+}(t_f, \mu^*)$.

Выделим на рассматриваемом оптимальном движении два момента t_1 и t_2 такие, что $t_2 > t_1$ и $\varphi(t_2) - \varphi(t_1) = 2\pi$. Сформируем на $[t_1, t_2]$ вспомогательное движение $(\tilde{x}(\cdot), \tilde{y}(\cdot))^T$ практически по образцу того, что было в доказательстве леммы 6.1. Отличие только в том, что в доказательстве леммы 6.1 мы рассматривали два момента \bar{t} и \hat{t} такие, что $\varphi(\hat{t}) = \varphi(\bar{t})$, а здесь два момента t_1 и t_2 такие, что $\varphi(t_2) = \varphi(t_1) + 2\pi$. Поскольку для углов φ , отличающихся на 2π , ось симметрии X одна и та же (с точностью до направления), это отличие несущественно.

Рис. 16 поясняет построение вспомогательного движения (показано точечной линией) на $[t_1, t_2]$. Новое движение на промежутках $[0, t_1]$ и $[t_2, t_f]$ совпадает с первоначальным. На $[t_1, t_2]$ оно идет по вспомогательному движению. Новое движение также приходит в точку \check{a} , но имеет значение $\varphi(t_f) = \check{\varphi} + 2\pi k_+ - 4\pi$. Следовательно, точка \check{a} принадлежит φ -сечению $G_{\check{\varphi}+2\pi k_+-4\pi}(t_f, \mu^*)$. Однако ПМП не выполнен для сконструированного движения: управление разрывно в моменты t_1 и t_2 . Поэтому $\check{a} \in \text{int}G_{\check{\varphi}+2\pi k_+-4\pi}(t_f, \mu^*)$.

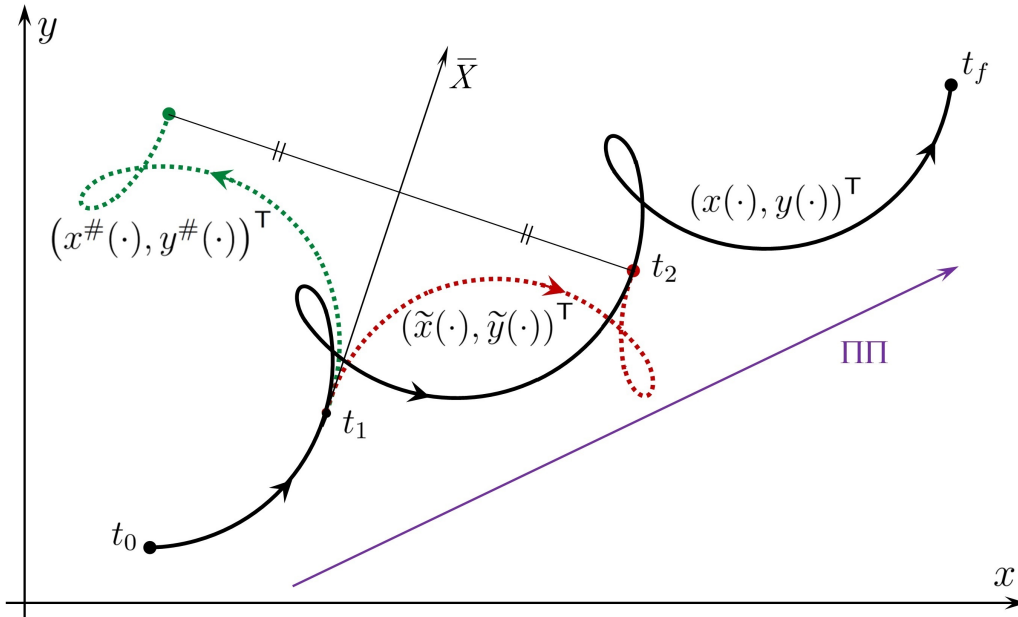


Рис. 16. Построение вспомогательного движения в доказательстве теоремы 10.1

Пусть $\check{z} = (\check{x}, \check{y}, \check{\varphi} + 2\pi k_+ - 4\pi)^\top$. Точка \check{z} не может совпадать с какой-либо из двух крайних по координате φ точек трёхмерной “дырки” в множестве $G(t_f, \mu^*)$. В самом деле, при совпадении такая точка лежала бы на границе множества $G(t_f, \mu^*)$ и ПМП должен бы быть выполнен для любого движения, ведущего в эту точку. Поскольку $\check{\varphi} > 0$, то $\check{\varphi} + 2\pi k_+ - 4\pi \neq 0$. Следовательно, точка \check{z} не может также совпадать с точкой $(0, 0, 0)^\top$ вырождения трёхмерной “дырки”.

В итоге заключаем, что можно уменьшить значение μ до некоторого $\hat{\mu} < \mu^*$ так, что $\check{a} \in G_{\check{\varphi} + 2\pi k_+ - 4\pi}(t_f, \hat{\mu})$. Это противоречит тому, что μ^* — минимальное значение интегрального показателя для перевода в точку \check{a} с углом $\check{\varphi}$, отождествляемым по модулю 2π .

Таким образом, включение $\check{a} \in G_{\check{\varphi} + 2\pi k_+}(t_f, \mu^*)$ невозможно.

Случай, когда существует целое отрицательное число $k_- \leq -2$ такое, что $\check{a} \in G_{\check{\varphi} + 2\pi k_-}(t_f, \mu^*)$, рассматривается аналогично. Здесь $\check{\varphi} + 2\pi k_- \leq \check{\varphi} - 4\pi \leq -3\pi$. Выделив моменты t_1, t_2 такие, что $t_2 > t_1$ и $\varphi(t_2) - \varphi(t_1) = -2\pi$, переходим к новому движению, имеющему $\varphi(t_f) = \check{\varphi} + 2\pi k_- + 4\pi$. Рассуждения повторяются.

Таким образом, при $\check{\varphi} \in (0, \pi]$ получаем $\mu^* = \min\{\mu_0, \mu_-\}$.

2) Пусть $\check{\varphi} \in (-\pi, 0)$. Поскольку φ -сечения при положительных и отрицательных φ симметричны, то для поиска глобально оптимальных эластик можно ограничиться рассмотрением двух φ -сечений $G_{\check{\varphi}}(t_f, \mu_0)$ и $G_{\check{\varphi} + 2\pi}(t_f, \mu_+)$. Поэтому $\mu^* = \min\{\mu_0, \mu_+\}$.

3) Если $\check{\varphi} = 0$, то следует рассмотреть три φ -сечения $G_{\check{\varphi}=0}(t_f, \mu_0)$, $G_{\check{\varphi}=2\pi}(t_f, \mu_+)$ и $G_{\check{\varphi}=-2\pi}(t_f, \mu_-)$. В этом случае $\mu^* = \min\{\mu_0, \mu_+, \mu_-\}$. Однако при $\varphi = \pm 2\pi$ вспомогательная ось X одна и та же и совпадает с точностью до направления с осью x . Поэтому, с учётом свойств симметрии из подразделов 4.3 и 4.4, при любых t_f и μ таких, что $\sqrt{t_f \mu} \geq 2\pi$, справедливо равенство $G_{\varphi=2\pi}(t_f, \mu) = G_{\varphi=-2\pi}(t_f, \mu)$. Отсюда $\mu_+ = \mu_-$. Стало быть, если $\check{\varphi} = 0$, то $\mu^* = \min\{\mu_0, \mu_-\} = \min\{\mu_0, \mu_+\}$.

Предположим, что оптимальное значение μ^* совпадает с $\mu_- = \mu_+$. Тогда $\check{a} \in \partial G_{\varphi=-2\pi}(t_f, \mu_-)$. В силу свойства симметрии относительно оси x получаем $\check{b} = (\check{x}, -\check{y})^\top \in G_{\varphi=-2\pi}(t_f, \mu_-)$. Пусть $u_{\check{b}}(t)$, $t \in [0, t_f]$, — отрицательное управление, ведущее в точку \check{b} . Тогда положительное управление $-u_{\check{b}}(t)$, $t \in [0, t_f]$, ведёт в точку \check{a} . Стало быть, в точку \check{a} ведут два управления $u_{\check{a}}(t)$ и $-u_{\check{b}}(t)$, $t \in [0, t_f]$. Первое отрицательное, второе положительное. Оба являются глобально оптимальными.

Из приведённых выкладок вытекает следующая теорема.

Теорема 10.1. Пусть заданы момент t_f , точка $\check{a} = (\check{x}, \check{y})^\top \neq (t_f, 0)^\top$ и угол $\check{\varphi} \in (-\pi, \pi]$. Тогда глобально оптимальное значение μ^* определяется формулой

$$\mu^* = \begin{cases} \min\{\mu_0, \mu_-\}, & \text{если } \check{\varphi} \in (0, \pi], \\ \min\{\mu_0, \mu_+\}, & \text{если } \check{\varphi} \in (-\pi, 0), \\ \min\{\mu_0, \mu_-\} = \min\{\mu_0, \mu_+\}, & \text{если } \check{\varphi} = 0. \end{cases}$$

Соответственно, для поиска всех глобально оптимальных эластик при $\check{\varphi} \in (0, \pi]$ достаточно рассмотреть два φ -сечения $G_{\check{\varphi}}(t_f, \mu_0)$ и $G_{\check{\varphi}-2\pi}(t_f, \mu_-)$; при $\check{\varphi} \in (-\pi, 0)$ два φ -сечения $G_{\check{\varphi}}(t_f, \mu_0)$ и $G_{\check{\varphi}+2\pi}(t_f, \mu_+)$; при $\check{\varphi} = 0$ достаточно рассмотреть два φ -сечения $G_{\check{\varphi}=0}(t_f, \mu_0)$ и $G_{\check{\varphi}=-2\pi}(t_f, \mu_-)$ (или, что равноценно, $G_{\check{\varphi}=0}(t_f, \mu_0)$ и $G_{\check{\varphi}=2\pi}(t_f, \mu_+)$).

10.2. **Пример четырёх глобально оптимальных эластик.** Не приводя в данной работе детального исследования, связанного с количеством оптимальных эластик и их реализации при помощи различных типов управления, ограничимся примером, в котором в заданную точку \check{a} при $\check{\varphi} = 0$ ведут четыре глобально оптимальные элаستي-ки. Этот пример заимствован из работы [2]. Покажем (см. рис. 17), как он возникает при рассмотрении указанных выше φ -сечений.

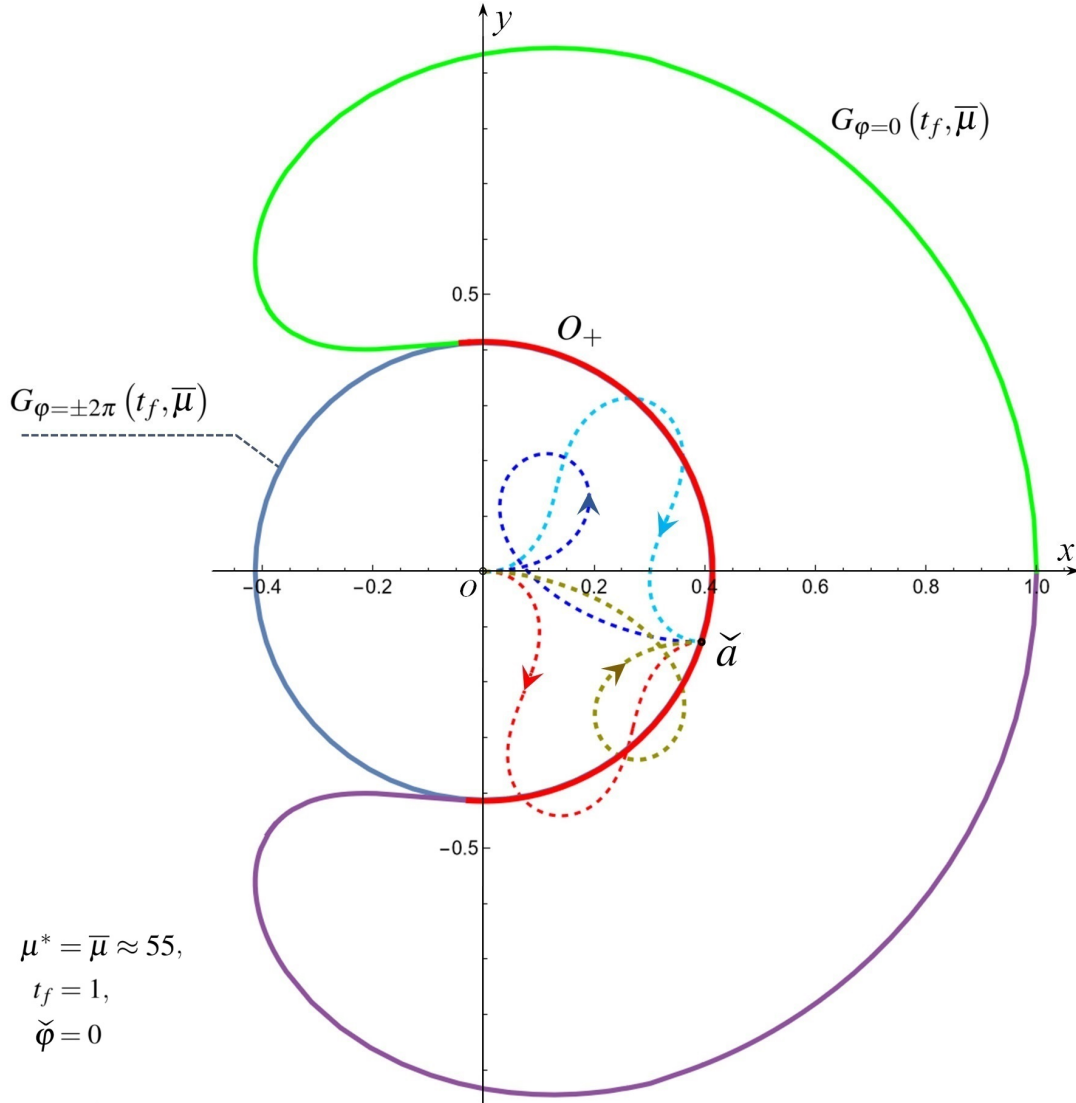


Рис. 17. Четыре глобально оптимальные эластики Эйлера

Положим $t_f = 1$. Зафиксируем такое μ , что $\sqrt{t_f \mu} = \sqrt{\mu} > 2\pi$. Граница φ -сечения $G_{\varphi=0}(t_f, \mu)$ совпадает с кривой \mathcal{A} , составленной из последовательного соединения кривых A_1, A_3, A_6 и A_2 . Численно убеждаемся, что часть кривой A_6 , расположенная в полуплоскости $x \geq 0$, представляет собой полуокружность с центром в начале координат. Далее рассматриваем φ -сечения $G_{\varphi=-2\pi}(t_f, \mu)$ и $G_{\varphi=2\pi}(t_f, \mu)$. Они совпадают. Численно убеждаемся, что граница каждого из них является окружностью

с центром в начале координат. Подбираем $\bar{\mu}$ так, чтобы такая окружность содержала полуокружность O_+ , лежащую на кривой A_6 на границе множества $G_{\varphi=0}(t_f, \bar{\mu})$. Для любого $\mu < \bar{\mu}$ полуокружность O_+ расположена вне множеств $G_{\varphi=0}(t_f, \mu)$ и $G_{\varphi=-2\pi}(t_f, \mu) = G_{\varphi=2\pi}(t_f, \mu)$. Поэтому для любой точки $\check{a} \in O_+$ и $\check{\varphi} = 0$ глобально оптимальное значение μ^* совпадает с $\bar{\mu}$. Численный подбор значения $\bar{\mu}$ дает $\mu^* = \bar{\mu} \approx 55$.

Множества $G_{\varphi=0}(t_f, \bar{\mu})$ и $G_{\varphi=-2\pi}(t_f, \bar{\mu}) = G_{\varphi=2\pi}(t_f, \bar{\mu})$ представлены на рис. 17. Для некоторой точки \check{a} показаны глобально оптимальные эластики.

Кривая A_6 на границе φ -сечения $G_{\varphi=0}(t_f, \bar{\mu})$ отмечена красным цветом. Радиус круговых φ -сечений $G_{\varphi=-2\pi}(t_f, \bar{\mu}) = G_{\varphi=2\pi}(t_f, \bar{\mu})$ равен примерно 0.41. Поскольку при $\varphi = 0$ кривые A_5 и A_6 совпадают, то в каждую точку на них ведут две глобально оптимальные эластики. Одна из таких эластик показана красным цветом. Она порождается управлением типа U_6 с двумя моментами смены знака. Другая эластика отмечена светло-голубым цветом, и она порождается управлением типа U_5 также с двумя моментами смены знака. В ту же точку \check{a} ведёт эластика, заканчивающаяся на кривой A_1 в φ -сечении при $\varphi = 2\pi$. Она порождается управлением типа U_1 и изображена тёмно-голубым цветом. Четвёртая эластика, ведущая в ту же точку, порождается управлением типа U_4 и показана жёлтым цветом. Следовательно, в рассматриваемую точку ведут четыре глобально оптимальные эластики. Такое свойство справедливо для любой точки на правой полуокружности O_+ .

Таким образом, рассмотрение φ -сечений и правильное понимание, как устроена их граница, помогает находить и классифицировать глобально оптимальные эластики и их количество.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Опираясь на принцип максимума Понтрягина и специфические свойства кинематики машины Дубинса, в статье описаны 6 типов программных управлений, которые ведут на границу трёхмерного множества достижимости $G(t_f, \mu)$ в заданный момент времени t_f при заданном ограничении μ на интегральный квадратичный расход управления. С содержательной точки зрения эти 6 типов аналогичны тем, что были установлены ранее для случая геометрического ограничения на мгновенные значения управления. Это позволило численно построить границу множества достижимости.

Подчеркнём, что статья носит характер численного исследования трёхмерного множества достижимости при интегральном ограничении. Вероятно, многие факты, обнаруженные численно, могут быть обоснованы аналитически. В частности, принципиальным является вопрос об аналитическом описании кривых A_1 , A_3 , A_2 и A_6 , из дуг которых составляется граница φ -сечений множества достижимости при $\varphi \geq 0$.

Благодарности

Авторы благодарны Рецензенту за очень полезные замечания. Авторы также благодарны Л.В. Камневой и А. Белан за помощь в переводе статьи на английский язык.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. А. Ардентов, Ю. Л. Сачков, Решение задачи Эйлера об эластиках, Автомат. и телемех., 4 (2009) 78-88.
- [2] А. А. Ардентов, Кратные решения в задаче Эйлера об эластиках, Автомат. и телемех., 7 (2018) 22-40.
- [3] Л. Эйлер, Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума, либо минимума или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле, М.; Л.: Гостехиздат, 1934.
- [4] М. И. Гусев, И. В. Зыков, Об экстремальных свойствах граничных точек множеств достижимости управляемых систем при интегральных ограничениях, Труды Института математики и механики УрО РАН, 23, № 1 (2017) 103-115.
- [5] K. G. Guseinov, A. S. Nazlipinar, On the continuity properties of the attainable sets of nonlinear control systems with integral constraint on controls, Abstr. Appl. Anal. 2008 (2008) 1-14.
- [6] N. Huseyin, A. Huseyin, Compactness of the set of trajectories of the controllable system described by an affineintegral equation, Appl. Math. Comput. 219 (2013) 8416-8424.
- [7] R. Levien, The elastica: a mathematical history, Electrical Engineering and Computer Sciences University of California at Berkeley, Technical Report No. UCSB/EECS-2008-103, 2008.
- [8] В. С. Пацко, С. Г. Пятко, А. А. Федотов, Трехмерное множество достижимости нелинейной управляемой системы, Известия РАН. ТиСУ, 3 (2003) 8-16.
- [9] V. S. Patsko, A. A. Fedotov, Three-dimensional reachable set for the Dubins car: Foundation of analytical description, Communications in Optimization Theory 2022 (2022) 23.
- [10] В. С. Пацко, А. А. Федотов, Трехмерное множество достижимости для машины Дубинса: сведение общего случая ограничений на повороты к каноническому, Известия РАН. ТиСУ, 4 (2023) 25-49.
- [11] Yu. L. Sachkov, Closed Euler elasticae, Дифференциальные уравнения и динамические системы, Сборник статей, Труды МИАН, 278 (2012) 227-241.
- [12] Ю. С. Сикорский, Элементы теории эллиптических функций: С приложениями к механике, М.: КомКнига, 2006.
- [13] М. И. Зеликин, Теория и приложения задачи об эйлеровых эластиках, УМН, 67, вып. 2 (2012) 93-108.