ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2013, том 49, № 11, с. 1399–1409

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977.8

ПОЛУГРУППОВОЕ СВОЙСТВО ОПЕРАТОРА ПРОГРАММНОГО ПОГЛОЩЕНИЯ В ИГРАХ С ПРОСТЫМИ ДВИЖЕНИЯМИ НА ПЛОСКОСТИ

© 2013 г. Л. В. Камнева, В. С. Пацко

Оператор программного поглощения ставит в соответствие заданному в момент окончания терминальному множеству некоторое множество, определенное в начальный момент. Для дифференциальных игр с простыми движениями на плоскости получены достаточные условия, при которых полугрупповое свойство имеет место и в случае невыпуклого терминального множества.

DOI: 10.1134/S0374064113110058

1. Введение. Наиболее простым модельным описанием динамики в теории дифференциальных игр является динамика вида

$$\dot{x} = p + q, \quad p \in P, \quad q \in Q.$$

Здесь в правую часть не входит фазовая переменная x, и фазовая скорость $\dot{x}$ определяется только управляющими воздействиями p, q первого и второго игроков, причем ограничения P, Q не зависят от времени. В монографии [1, с. 22, 45] игры с такой динамикой названы играми с простыми движениями.

В численных методах теории дифференциальных игр динамика простых движений совершенно естественно возникает при локальной аппроксимации линейной или нелинейной динамики, когда "замораживаются" возможности игроков по времени и по пространственным переменным. В рамках динамики простых движений выполняются действия, отвечающие очередному шагу применяемой для нахождения функции цены игры итерационной процедуры.

Например, одним из важных классов дифференциальных игр являются игры с линейной динамикой, фиксированным моментом окончания и непрерывной терминальной функцией платы. Для таких игр известен [2, с. 159–161; 3, с. 89–91] переход к новым координатам, имеющим смысл прогноза фазовой переменной на момент окончания в силу "свободного" движения системы при нулевых управляющих воздействиях игроков. Переход осуществляется с помощью матрицы Коши исходной системы. В новой системе в правой части отсутствует фазовая переменная, но управляющие воздействия игроков имеют коэффициенты, зависящие от времени.

При численном построении множеств уровня функции цены ось времени слева от момента окончания разбивают с некоторым шагом и на каждом промежутке разбиения замораживают коэффициенты динамики [4, 5]. Таким образом, на каждом шаге получают динамику простых движений. Задав множество уровня функции платы и пятясь по времени от терминального момента, осуществляют на каждом промежутке разбиения пересчет получаемого множества, используя игру с простыми движениями. Затем переходят к пределу, устремляя к нулю шаг разбиения. При правильно подобранном операторе пересчета (на одном шаге) предельное множество совпадает со множеством уровня (множеством Лебега) функции цены.

Для эффективной реализации описанной схемы очень важен выбор оператора, с помощью которого осуществляется переход в рамках одного шага попятной процедуры. Желательно, чтобы оператор обладал полугрупповым свойством: при замороженной на выделенном промежутке динамике введение дополнительных точек разбиения не изменяет результат.

В настоящей работе исследуется оператор, называемый в теории дифференциальных игр оператором программного поглощения [2, с. 122]. Для него в играх с простыми движениями полугрупповое свойство было установлено ранее [6] для случая, когда оператор действует на выпуклое множество. В данной работе для задач на плоскости формулируются и доказываются достаточные условия, при выполнении которых полугрупповое свойство имеет место и при отсутствии выпуклости.

Полученные результаты могут быть полезны при разработке и обосновании численных методов теории дифференциальных игр.

2. Постановка задачи. Рассмотрим конфликтно-управляемую систему с простыми движениями [1, с. 22, 45]:

$$\frac{dx}{dt} = p + q, \quad p \in P, \quad q \in Q, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

где t – время, P, Q – выпуклые компакты в $\mathbb{R}^n$. Пусть M – компактное множество в $\mathbb{R}^n$.

Введем оператор программного поглощения [2, с. 122; 6; 7]

$$T_\varepsilon(M) := (M - \varepsilon P) \overset{*}{-} \varepsilon Q, \quad \varepsilon > 0, \quad M \subset \mathbb{R}^n.$$

Здесь используются операции алгебраической суммы

$$A + B = \{d:\ d = a + b,\ a \in A,\ b \in B\}$$

и геометрической разности (разность Минковского) [7; 8, с. 203]

$$A \overset{*}{-} B := \{d:\ d + B \subseteq A\}.$$

Кроме того, определим оператор с многократным пересчетом [6]

$$\widetilde{T}_\varepsilon(M) := \bigcap_{\substack{\omega=(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_m)\\ |\omega|=\varepsilon}} T_{\varepsilon_1}(T_{\varepsilon_2}(\ldots T_{\varepsilon_m}(M)\ldots)).$$

Здесь ω – символ разбиения промежутка $[0,\varepsilon]$. Пересечение берется по всем конечным разбиениям.

Действие операторов T_ε и $\widetilde{T}_\varepsilon$ на множество M одинаково, если оператор T_ε обладает *полугрупповым свойством* относительно множества M, т.е. для всех $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, таких, что $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \le \varepsilon$, выполнено равенство

$$T_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}(M) = T_{\varepsilon_1}(T_{\varepsilon_2}(M)). \tag{2}$$

Задача состоит в том, чтобы сформулировать условия на множества M, P, Q и область изменения величин $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, которые обеспечивают равенство (2).

Полугрупповое свойство оператора T_ε анализировалось в работе [6]. Доказано, что для выпуклого множества M полугрупповое свойство имеет место.

Один из вариантов применения полугруппового свойства оператора T_ε состоит в следующем. Рассмотрим антагонистическую игру с динамикой (1), фиксированным моментом окончания ϑ и функцией платы $J(x(\cdot)) = \varphi(x(\vartheta))$, где φ – непрерывная функция в $\mathbb{R}^n$. Пусть первый игрок минимизирует значение J, второй максимизирует. Тогда множество состояний в начальный момент $t = 0$, для которых цена игры не превышает c, совпадает [2, с. 76, 77; 6; 9, с. 209] со множеством $\widetilde{T}_\vartheta(M_c)$, где $M_c = \{x \in \mathbb{R}^n:\ \varphi(x) \le c\}$. При наличии полугруппового свойства $T_\vartheta(M_c) = \widetilde{T}_\vartheta(M_c)$.

3. Анализ оператора T_ε. Отметим три очевидных свойства:

1) $T_\varepsilon(M) = \bigcap_{q\in Q}(M - \varepsilon(P + q))$;

2) включение $x \in T_\varepsilon(M)$ эквивалентно соотношению $(x + \varepsilon(P + q)) \cap M \ne \emptyset$, $q \in Q$;

3) условие $x \notin T_\varepsilon(M)$ эквивалентно существованию такого $q \in Q$, что $(x+\varepsilon(P+q)) \cap M = \emptyset$.

Известны следующие два утверждения [6].

Лемма 1. *Для всех* $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ *справедливо вложение*

$$T_{\varepsilon_1}(T_{\varepsilon_2}(M)) \subseteq T_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}(M). \tag{3}$$

Доказательство. Пусть $x \in T_{\varepsilon_1}(T_{\varepsilon_2}(M))$. Следовательно, $x + \varepsilon_1 Q \subseteq T_{\varepsilon_2}(M) - \varepsilon_1 P$, т.е. для любого $q \in Q$ найдется такое $p_1 \in P$, что $x + \varepsilon_1 q + \varepsilon_1 p_1 \in T_{\varepsilon_2}(M)$.

Учитывая определение множества $T_{\varepsilon_2}(M)$, найдем такое $p_2 \in P$, что

$$z := (x + \varepsilon_1 q + \varepsilon_1 p_1) + \varepsilon_2 q + \varepsilon_2 p_2 \in M.$$

Положим $p_* = (\varepsilon_1 p_1 + \varepsilon_2 p_2)/(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$. В силу выпуклости P выполнено включение $p_* \in P$. Имеем

$$x + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(p_* + q) = z \in M.$$

Таким образом, для любого $q \in Q$ существует $p_* \in P$, при котором $x+(\varepsilon_1+\varepsilon_2)(p_*+q) \in M$. Следовательно, $x \in T_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}(M)$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть множество* M *выпукло. Тогда при любом* $\varepsilon > 0$ *оператор* T_ε *обладает полугрупповым свойством относительно множества* M, *т.е. справедливо равенство (2) для всех* $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \le \varepsilon$.

Доказательство. В силу леммы 1 осталось доказать вложение

$$T_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}(M) \subseteq T_{\varepsilon_1}(T_{\varepsilon_2}(M)).$$

Пусть $x \in T_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}(M)$. Тогда $x + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)Q \subseteq M - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)P$, т.е. для любого $q_1 \in Q$ существует такое $p_1 \in P$, что $z_1 := x + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(p_1 + q_1) \in M$.

Покажем справедливость включения

$$x + \varepsilon_1(p_1 + q_1) \in T_{\varepsilon_2}(M). \tag{4}$$

Действительно, для любого $q_2 \in Q$ существует такое $p_2 \in P$, что

$$z_2 := x + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(p_2 + q_2) \in M.$$

Учитывая выпуклость множества M, имеем

$$x + \varepsilon_1(p_1 + q_1) + \varepsilon_2(p_2 + q_2) = (\varepsilon_1 z_1 + \varepsilon_2 z_2)/(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \in M.$$

Таким образом, включение (4) выполнено. Следовательно, $x \in T_{\varepsilon_1}(T_{\varepsilon_2}(M))$. Лемма доказана.

Дополнительно потребуются три леммы, формулируемые и доказываемые ниже. Лемма 3 устанавливает неравенство (6), которое необходимо должно выполняться, в частности, если справедливо равенство (2). Аналогичное неравенство закладывается в дальнейшем в теоремы 1, 2 в качестве одного из условий этих теорем. В лемме 4 рассматривается случай выпуклого множества M и поэтому (с учетом леммы 2) отмеченное свойство необходимо выполнено. Доказательство опирается на лемму 3. Лемма 3 используется также при доказательстве леммы 5, которая в свою очередь нужна для доказательства теоремы 3.

Пусть $\rho(\cdot; A)$ – опорная функция компактного множества $A \subset \mathbb{R}^n$, т.е.

$$\rho(\eta; A) = \max\{\langle \eta, x\rangle : \ x \in A\}, \quad \eta \in \mathbb{R}^n.$$

Лемма 3. *Пусть* $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, *множества* $T_{\varepsilon_2}(M)$, $T_{\varepsilon_1}(T_{\varepsilon_2}(M))$ *не пусты,* $\eta \in \mathbb{R}^n$ *и выполнено равенство*

$$\rho(\eta; T_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}(M)) = \rho(\eta; T_{\varepsilon_1}(T_{\varepsilon_2}(M))). \tag{5}$$

Тогда справедливо неравенство

$$\rho(\eta; T_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}(M)) + \varepsilon_1(\min_{p\in P}\langle p, \eta\rangle + \max_{q\in Q}\langle q, \eta\rangle) \le \rho(\eta; T_{\varepsilon_2}(M)). \tag{6}$$

Доказательство. Поскольку $T_{\varepsilon_1}(T_{\varepsilon_2}(M)) \subseteq T_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}(M)$, то $T_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}(M) \neq \emptyset$. По определению множества $T_{\varepsilon_1}(T_{\varepsilon_2}(M))$ имеем вложение

$$T_{\varepsilon_1}(T_{\varepsilon_2}(M)) + \varepsilon_1 Q \subseteq T_{\varepsilon_2}(M) - \varepsilon_1 P.$$

Следовательно, $\rho(\eta; T_{\varepsilon_1}(T_{\varepsilon_2}(M))) + \varepsilon_1 \max\limits_{q\in Q}\langle q, \eta\rangle \leq \rho(\eta; T_{\varepsilon_2}(M)) + \varepsilon_1 \max\limits_{p\in P}\langle -p, \eta\rangle$. Отсюда получаем неравенство (6), учитывая равенства (5) и $\max\limits_{p\in P}\langle -p, \eta\rangle = -\min\limits_{p\in P}\langle p, \eta\rangle$. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть множество M выпукло, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ и множества $T_{\varepsilon_2}(M)$, $T_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}(M)$ не пусты. Тогда для любого $\eta \in \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство (6).*

Доказательство. Поскольку множество M выпукло, то в силу леммы 2 множества $T_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}(M)$ и $T_{\varepsilon_1}(T_{\varepsilon_2}(M))$ совпадают. Следовательно, справедливо равенство (5). Учитывая лемму 3, получаем неравенство (6). Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть $\eta \in \mathbb{R}^n$, $\eta \neq 0$, и существует такое $z_* \in M$, что пересечение $M \cap \Pi_*$ множества M с полупространством $\Pi_* = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x - z_*, \eta\rangle \leq 0\}$ выпукло и его внутренность не пуста.*

Тогда найдется такое $\varepsilon_* > 0$, что для любого $\varepsilon \in [0, \varepsilon_*]$ множество $T_\varepsilon(M)$ не пусто и для любых $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \leq \varepsilon_*$, выполнено неравенство

$$\rho(-\eta; T_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}(M)) + \varepsilon_1\big(\min_{p\in P}\langle p, -\eta\rangle + \max_{q\in Q}\langle q, -\eta\rangle\big) \leq \rho(-\eta; T_{\varepsilon_2}(M)). \tag{7}$$

Доказательство. 1) Пусть $\mu_* := \langle z_*, -\eta\rangle$. Имеем $\mu_* < \rho(-\eta, M)$. Выберем произвольно $\mu \in (\mu_*, \rho(-\eta, M))$ и положим $\Pi_\mu := \Pi_* - (\mu - \mu_*)\eta/\|\eta\|$.

Поскольку внутренность пересечения $M \cap \Pi_\mu$ не пуста (ввиду того, что множество $M \cap \Pi_*$ выпукло и его внутренность не пуста), то

$$T_\varepsilon(M) \cap \Pi_\mu \neq \emptyset \tag{8}$$

при достаточно малых $\varepsilon > 0$. Таким образом, найдется такое $\varepsilon_1^* > 0$, что для всех $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1^*]$ выполнено соотношение (8).

Пусть $\alpha := \min\limits_{p\in P}\min\limits_{q\in Q}\langle p + q, -\eta\rangle$. Число $\varepsilon_2^* > 0$ выберем так, что $\varepsilon\alpha \geq \mu_* - \mu$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2^*]$. Поскольку $\mu_* - \mu < 0$, то при $\alpha \geq 0$ подходит любое $\varepsilon_2^* > 0$, в противном случае подбираем достаточно малое $\varepsilon_2^* > 0$.

Полагаем $\varepsilon_* = \min\{\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*\}$. (Таким образом, величина ε_* зависит от выбора μ.)

2) Пусть $\varepsilon \in [0, \varepsilon_*]$. Покажем, что

$$T_\varepsilon(M) \cap \Pi_\mu \subseteq T_\varepsilon(M \cap \Pi_*). \tag{9}$$

Пусть $x \in T_\varepsilon(M) \cap \Pi_\mu$, $q \in Q$. Имеем $x + \varepsilon q \in M - \varepsilon P$, $\langle x, -\eta\rangle \geq \mu$.

Из левого включения следует существование такого $p_* \in P$, что $x + \varepsilon q + \varepsilon p_* \in M$. В силу правого неравенства имеем

$$-\langle x, -\eta\rangle + \mu_* \leq -\mu + \mu_* \leq \varepsilon\alpha \leq \varepsilon\langle q + p_*, -\eta\rangle.$$

Отсюда следует, что $\langle x + \varepsilon q + \varepsilon p_*, -\eta\rangle \geq \mu_*$, т.е. $x + \varepsilon q + \varepsilon p_* \in \Pi_*$. Таким образом,

$$x + \varepsilon q + \varepsilon p_* \in M \cap \Pi_*$$

и, значит, $x + \varepsilon q \in (M \cap \Pi_*) - \varepsilon P$. Поскольку $q \in Q$ выбрано произвольно, то

$$x \in \bigcap_{q\in Q}((M \cap \Pi_*) - \varepsilon(P + q)) = T_\varepsilon(M \cap \Pi_*).$$

Вложение (9) доказано.

3) Пусть $\varepsilon_1+\varepsilon_2 \in [0,\varepsilon_*]$. В силу соотношения (8) множества $T_{\varepsilon_2}(M)$ и $T_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}(M)\cap\Pi_\mu$ не пусты. Учитывая вложение (9), выпуклость множества $M\cap\Pi_*$, лемму 2 и свойство монотонности оператора T_ε, получаем соотношения

$$T_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}(M)\cap\Pi_\mu \subseteq T_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}(M\cap\Pi_*) = T_{\varepsilon_1}(T_{\varepsilon_2}(M\cap\Pi_*)) \subseteq T_{\varepsilon_1}(T_{\varepsilon_2}(M)).$$

Отсюда следует, что $T_{\varepsilon_1}(T_{\varepsilon_2}(M))\neq\emptyset$ и

$$\rho(-\eta;T_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}(M)\cap\Pi_\mu) \le \rho(-\eta;T_{\varepsilon_1}(T_{\varepsilon_2}(M))). \tag{10}$$

Так как Π_μ – полупространство с вектором внешней нормали η и пересечение $T_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}(M)\cap\Pi_\mu$ не пусто, то $\rho(-\eta;T_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}(M)) = \rho(-\eta;T_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}(M)\cap\Pi_\mu)$. Учитывая неравенство (10), имеем

$$\rho(-\eta;T_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}(M)) \le \rho(-\eta;T_{\varepsilon_1}(T_{\varepsilon_2}(M))).$$

С другой стороны, в силу леммы 1 верно противоположное неравенство. Таким образом,

$$\rho(-\eta;T_{\varepsilon_1}(T_{\varepsilon_2}(M))) = \rho(-\eta;T_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}(M)).$$

Отсюда, используя лемму 3, получаем требуемое неравенство (7). Лемма доказана.

4. Полугрупповое свойство оператора T_ε для невыпуклых множеств на плоскости. Будем рассматривать случай плоскости $\mathbb{R}^2$. *Многоугольником* называем часть плоскости, ограниченную замкнутой ломаной линией без самопересечений. Считаем, что ломаная имеет конечное число звеньев.

Предположим, что множество P представляет собой либо невырожденный отрезок, либо выпуклый многоугольник. Множества M, Q – компакты на плоскости, при этом множество Q выпуклое.

Пусть $\mathcal{V}$ – множество единичных внешних нормалей к сторонам P. Если P – отрезок, то множество $\mathcal{V}$ образовано двумя противоположно направленными векторами, ортогональными отрезку P.

Для компактного множества $A\subset\mathbb{R}^2$ определим пересечение полуплоскостей

$$\widetilde{\Pi}(A) := \bigcap_{\nu\in\mathcal{V}} \{x\in\mathbb{R}^2:\ \langle x,-\nu\rangle \le \rho(-\nu;A)\}.$$

Имеем $A\subset\widetilde{\Pi}(A)$. Если P – отрезок, то $\widetilde{\Pi}(A)$ – замкнутая полоса; если же P – многоугольник, то $\widetilde{\Pi}(A)$ – выпуклое компактное множество.

Пусть $\mathcal{P}$ – множество вершин отрезка или многоугольника P. Для вершины $p\in\mathcal{P}$ определим пучок единичных векторов

$$\mathcal{N}(p) := \{(p-x)/\|p-x\|:\ x\in P\setminus\{p\}\}.$$

Если P – отрезок, то у него две вершины и множество $\mathcal{N}(p)$ одноэлементно.

Для луча с началом в точке $a\in\mathbb{R}^2$ и направлением вдоль вектора $\eta\in\mathbb{R}^2$ введем обозначение $l(a,\eta) := \{a+\alpha\eta : \alpha\ge 0\}$.

Лемма 6. *Пусть числа $\varepsilon_1,\varepsilon_2>0$ таковы, что множества $T_{\varepsilon_2}(M)$, $T_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}(M)$ не пусты и выполнены следующие условия:*

A_1) *если $x\in\mathbb{R}^2$, $\varepsilon>0$, $(x+\varepsilon P)\cap T_{\varepsilon_2}(M)=\emptyset$, $(x+\varepsilon P)\cap\widetilde{\Pi}(T_{\varepsilon_2}(M))\neq\emptyset$, то найдется такое $p_*\in\mathcal{P}$, что $l(x+\varepsilon p_*,\eta)\cap T_{\varepsilon_2}(M)\neq\emptyset$, $\eta\in\mathcal{N}(p_*)$;*

A_2) *если $x\in\mathbb{R}^2$, $\varepsilon>0$, $p\in\mathcal{P}$, $(x+\varepsilon P)\cap M=\emptyset$ и для любого $\eta\in\mathcal{N}(p)$ существует такое $\alpha_\eta>0$, что $(x+\varepsilon P+\alpha_\eta\eta)\cap M\neq\emptyset$, то $l(x+\varepsilon p,-\eta)\cap M=\emptyset$, $\eta\in\mathcal{N}(p)$;*

A_3) *при любом $\nu\in\mathcal{V}$ имеет место неравенство*

$$\rho(-\nu;T_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}(M)) + \varepsilon_1\bigl(\min_{p\in P}\langle p,-\nu\rangle + \max_{q\in Q}\langle q,-\nu\rangle\bigr) \le \rho(-\nu;T_{\varepsilon_2}(M)). \tag{11}$$

Тогда для рассматриваемых ε_1, ε_2 выполнено равенство (2).

Доказательство. Предположим, что равенство (2) нарушено. Тогда, учитывая лемму 1, имеем $Y := T_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}(M) \setminus T_{\varepsilon_1}(T_{\varepsilon_2}(M)) \neq \emptyset$.

Выберем $y \in Y$. В силу свойства 3) оператора T_ε найдется такое $q_1 \in Q$, что

$$(y + \varepsilon_1(P + q_1)) \cap T_{\varepsilon_2}(M) = \emptyset. \tag{12}$$

Множество $T_{\varepsilon_2}(M)$ компактно. Пусть $\widetilde{\Pi} := \widetilde{\Pi}(T_{\varepsilon_2}(M))$, $G_1 := y + \varepsilon_1(P + q_1)$.

I. Предположим, что

$$G_1 \cap \widetilde{\Pi} \neq \emptyset. \tag{13}$$

а) Докажем существование такого $q_2 \in Q$, что

$$(G_1 + \varepsilon_2(P + q_2)) \cap M = \emptyset. \tag{14}$$

Согласно соотношениям (12), (13) и условию $A_1)$ (для $x = y + \varepsilon_1 q_1$ и $\varepsilon = \varepsilon_1$), найдется $p_* \in \mathcal{P}$, обеспечивающее выполнение соотношения

$$l(y + \varepsilon_1(p_* + q_1), \eta) \cap T_{\varepsilon_2}(M) \neq \emptyset, \quad \eta \in \mathcal{N}(p_*). \tag{15}$$

Для краткости обозначим $a_* = y + \varepsilon_1(p_* + q_1)$. Поскольку $a_* \in G_1$ и выполнено соотношение (12), то $a_* \notin T_{\varepsilon_2}(M)$ и найдется такое управление $q_2 \in Q$, что

$$(a_* + \varepsilon_2(P + q_2)) \cap M = \emptyset. \tag{16}$$

В силу соотношения (15) для любого $\eta \in \mathcal{N}(p_*)$ существует $\alpha_\eta > 0$, при котором $a_* + \alpha_\eta \eta \in T_{\varepsilon_2}(M)$. Отсюда, учитывая свойство 2) оператора T_ε, получаем, что при любом $\eta \in \mathcal{N}(p_*)$ найдется $\alpha_\eta > 0$, при котором

$$(a_* + \alpha_\eta \eta + \varepsilon_2(P + q_2)) \cap M \neq \emptyset. \tag{17}$$

В силу соотношений (16), (17) и условия $A_2)$ (для $x = a_* + \varepsilon_2 q_2$, $\varepsilon = \varepsilon_2$, $p = p_*$) имеем

$$l(a_* + \varepsilon_2 q_2 + \varepsilon_2 p_*, -\eta) \cap M = \emptyset, \quad \eta \in \mathcal{N}(p_*). \tag{18}$$

Поскольку для любых $z \in G_1$ и $p \in P$ справедливо представление

$$z + \varepsilon_2(p + q_2) = a_* + \varepsilon_2(p_* + q_2) - \eta_*, \quad \eta_* := (a_* - z) + \varepsilon_2(p_* - p), \quad \eta_*/\|\eta_*\| \in \mathcal{N}(p_*),$$

то с учетом соотношения (18) $(z + \varepsilon_2(P + q_2)) \cap M = \emptyset$ для любого $z \in G_1$. Следовательно, выполнено условие (14).

б) Пусть $\widetilde{q} = (\varepsilon_1 q_1 + \varepsilon_2 q_2)/(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$. Тогда

$$y + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(P + \widetilde{q}) = y + \varepsilon_1(P + q_1) + \varepsilon_2(P + q_2) = G_1 + \varepsilon_2(P + q_2).$$

В силу соотношения (14) имеем $(y + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(P + \widetilde{q})) \cap M = \emptyset$. Используя свойство 3) оператора T_ε, получаем, что $y \notin T_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}(M)$, а это противоречит выбору y из множества $Y \subseteq T_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}(M)$.

Таким образом, предположение (13) неверно.

II. Предположим теперь, что $G_1 \cap \widetilde{\Pi} = \emptyset$. Имеем

$$G_1 \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \widetilde{\Pi} = \bigcup_{\nu \in \mathcal{V}} \{x \in \mathbb{R}^2 : \ \langle x, -\nu \rangle > \rho(-\nu; T_{\varepsilon_2}(M))\}.$$

Поскольку G_1 – многоугольник, для которого $\mathcal{V}$ – множество внешних нормалей к его сторонам, то найдется такое $\nu_0 \in \mathcal{V}$, что

$$\langle z, -\nu_0 \rangle > \rho(-\nu_0; T_{\varepsilon_2}(M)), \quad z \in G_1. \tag{19}$$

Кроме того, в силу включения $y \in T_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}(M)$ справедливо неравенство

$$\langle y, -\nu_0\rangle \le \rho(-\nu_0; T_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}(M)). \tag{20}$$

Пусть

$$p_0 \in \operatorname{Arg}\max_{p\in P}\langle p, \nu_0\rangle, \quad z_0 = y + \varepsilon_1(p_0 + q_1).$$

Так как $z_0 \in G_1$, то в силу неравенств (19), (20) и соотношений

$$\langle p_0, -\nu_0\rangle = \min_{p\in P}\langle p, -\nu_0\rangle, \quad \langle q_1, -\nu_0\rangle \le \max_{q\in Q}\langle q, -\nu_0\rangle$$

будем иметь

$$\rho(-\nu_0; T_{\varepsilon_2}(M)) < \langle z_0, -\nu_0\rangle = \langle y, -\nu_0\rangle + \varepsilon_1\langle p_0 + q_1, -\nu_0\rangle \le$$
$$\le \rho(-\nu_0; T_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}(M)) + \varepsilon_1(\min_{p\in P}\langle p, -\nu_0\rangle + \max_{q\in Q}\langle q, -\nu_0\rangle),$$

что противоречит неравенству (11).

Таким образом, предположение о нарушении равенства (2) приводит к противоречию. Лемма доказана.

Множество A называется *линейно связным* [10, т. 1, с. 92] (или кратко *связным*), если две его произвольные точки могут быть соединены непрерывной кривой, лежащей во множестве A.

Для случая, когда P – невырожденный отрезок, символом $l_P(x)$ обозначим прямую, проходящую через точку $x \in \mathbb{R}^2$ параллельно отрезку P.

Теорема 1. *Пусть P – невырожденный отрезок и выполнены следующие условия:*

$T_{1.1}$) *для любого $x \in \mathbb{R}^2$ пересечение $l_P(x) \cap M$, если оно не пусто, представляет собой отрезок;*

$T_{1.2}$) *величины $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ таковы, что множества $T_{\varepsilon_2}(M)$, $T_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}(M)$ не пусты, множество $T_{\varepsilon_2}(M)$ связно и*

$$\rho(\pm\nu; T_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}(M)) + \varepsilon_1(\langle p_0, \pm\nu\rangle + \max_{q\in Q}\langle q, \pm\nu\rangle) \le \rho(\pm\nu; T_{\varepsilon_2}(M)), \tag{21}$$

где точка $p_0 \in P$ выбрана произвольно, а ν – ненулевой вектор, ортогональный отрезку P.

Тогда для рассматриваемых ε_1, ε_2 выполнено равенство (2).

Доказательство. Проверим выполнение условий A_1) – A_3) леммы 6.

Заметим, что множество $\mathcal{P}$ двухэлементно (концы отрезка P) и для любого $p \in \mathcal{P}$ множество $\mathcal{N}(p)$ одноэлементно.

A_1) Пусть $x \in \mathbb{R}^2$, $\varepsilon > 0$, $P_1 = x + \varepsilon P$, $P_1 \cap T_{\varepsilon_2}(M) = \emptyset$, $P_1 \cap \widetilde{\Pi}(T_{\varepsilon_2}(M)) \neq \emptyset$. Поскольку множество P_1 – отрезок, параллельный P, а множество $\widetilde{\Pi}(T_{\varepsilon_2}(M))$ – полоса, параллельная P, то справедливо вложение $P_1 \subset \widetilde{\Pi}(T_{\varepsilon_2}(M))$. В силу связности множества $T_{\varepsilon_2}(M)$ существует такое $p_* \in \mathcal{P}$, что $l(x + \varepsilon p_*, \eta_*) \cap T_{\varepsilon_2}(M) \neq \emptyset$, $\mathcal{N}(p_*) = \{\eta_*\}$. Следовательно, условие A_1) выполнено.

A_2) Пусть $x \in \mathbb{R}^2$, $\varepsilon > 0$, $P_1 = x + \varepsilon P$, $p \in \mathcal{P}$, $\mathcal{N}(p) = \{\eta\}$, $P_1 \cap M = \emptyset$ и существует такое $\alpha_\eta > 0$, что $(P_1 + \alpha_\eta \eta) \cap M \neq \emptyset$. Тогда $l(x + \varepsilon p, \eta) \cap M \neq \emptyset$. Имеем

$$l_P(x + \varepsilon p) = l(x + \varepsilon p, \eta) \cup l(x + \varepsilon p, -\eta), \quad P_1 \subset l(x + \varepsilon p, -\eta).$$

Так как пересечение $l_P(x + \varepsilon p) \cap M$ связно, то $l(x + \varepsilon p, -\eta) \cap M = \emptyset$, т.е. и условие A_2) выполнено.

Условие A_3) леммы 6 также выполнено в силу неравенства (21). Теорема доказана.

Множество $A \subset \mathbb{R}^2$ называется *односвязным* [10, т. 2, с. 281], если любое непрерывное отображение окружности в A гомотопно некоторой точке из A. Геометрически это означает отсутствие "дырок" во множестве A.

Положим $\Pi_M(x, \nu) := \{z \in M : \langle z - x, \nu\rangle \le 0\}$, $x \in \mathbb{R}^2$, $\nu \in \mathcal{V}$.

Теорема 2. *Пусть P – выпуклый многоугольник и выполнены следующие условия:*

$T_{2.1}$) *множество M односвязно и для любых $x \in \mathbb{R}^2$, $\nu \in \mathcal{V}$ множество $\Pi_M(x,\nu)$ связно;*

$T_{2.2}$) *величины $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ таковы, что множества $T_{\varepsilon_2}(M)$, $T_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}(M)$ не пусты, множество $T_{\varepsilon_2}(M)$ связно и при любом $\nu \in \mathcal{V}$ выполнено неравенство (11).*

Тогда для рассматриваемых ε_1, ε_2 справедливо равенство (2).

Доказательство. Проверим выполнение условий $A_1)-A_3)$ леммы 6.

A_1) Пусть $x \in \mathbb{R}^2$, $\varepsilon > 0$, $P_1 = x + \varepsilon P$, $P_1 \cap T_{\varepsilon_2}(M) = \emptyset$ и

$$P_1 \cap \widetilde{\Pi}(T_{\varepsilon_2}(M)) \neq \emptyset. \tag{22}$$

Докажем существование такого $p_* \in \mathcal{P}$, что

$$l(x + \varepsilon p_*, \eta) \cap T_{\varepsilon_2}(M) \neq \emptyset, \quad \eta \in \mathcal{N}(p_*). \tag{23}$$

Предположим противное, т.е. что для любого $p \in \mathcal{P}$ найдется такое $\eta \in \mathcal{N}(p)$, при котором

$$l(x + \varepsilon p, \eta) \cap T_{\varepsilon_2}(M) = \emptyset. \tag{24}$$

Множество P_1 – выпуклый многоугольник. Поэтому

$$P_1 = \bigcap_{\nu \in \mathcal{V}} \Pi_1(\nu), \quad \Pi_1(\nu) := \{z \in \mathbb{R}^2\colon\ \langle z, \nu\rangle \le \rho(\nu, P_1)\}.$$

В силу соотношения (24) и связности множества $T_{\varepsilon_2}(M)$ найдется такое $\nu_* \in \mathcal{V}$, что

$$\Pi_1(\nu_*) \cap T_{\varepsilon_2}(M) = \emptyset \tag{25}$$

(рис. 1). Пусть $\Pi_2 := \{z \in \mathbb{R}^2 :\ \langle z, -\nu_*\rangle \le \rho(-\nu_*; T_{\varepsilon_2}(M))\}$. Учитывая соотношение (25), имеем $\Pi_1(\nu_*) \cap \Pi_2 = \emptyset$. Поскольку $P_1 \subset \Pi_1(\nu_*)$ и $\widetilde{\Pi}(T_{\varepsilon_2}(M)) \subset \Pi_2$, то $P_1 \cap \widetilde{\Pi}(T_{\varepsilon_2}(M)) = \emptyset$, что противоречит предположению (22). Таким образом, соотношение (23) доказано.

A_2) Пусть $x \in \mathbb{R}^2$, $\varepsilon > 0$, $P_1 = x + \varepsilon P$, $p \in \mathcal{P}$,

$$P_1 \cap M = \emptyset \tag{26}$$

и для любого $\eta \in \mathcal{N}(p)$ существует $\alpha_\eta > 0$, при котором

$$(P_1 + \alpha_\eta \eta) \cap M \neq \emptyset. \tag{27}$$

Покажем, что

$$l(x + \varepsilon p, -\eta) \cap M = \emptyset, \quad \eta \in \mathcal{N}(p). \tag{28}$$

Пусть $p^{\pm}$ – вершины многоугольника P, соседние с вершиной p (рис. 2). Имеем $p^+ \neq p^-$. Для определенности будем считать, что обход вершин p^-, p, p^+ происходит против часовой стрелки. Положим $b = x + \varepsilon p$, $\eta^{\pm} = p - p^{\pm}$ и пусть $\nu^{\pm}$ – внешние нормали к сторонам P с концами в точках p и $p^{\pm}$.

Доказательство соотношения (28) проведем в два этапа. На первом этапе докажем вспомогательное утверждение. На втором этапе, предположив, что (28) не выполнено, получим противоречие с односвязностью множества M.

Этап I. Покажем, что найдется непрерывная кривая γ (рис. 3), соединяющая некоторые точки $e^+ \in l(b, \eta^+)$ и $e^- \in l(b, \eta^-)$, такая, что

$$\gamma \subset (b + K) \cap M, \tag{29}$$

где $K := \{\alpha\eta\colon\ \eta \in \mathcal{N}(p),\ \alpha \ge 0\}$.

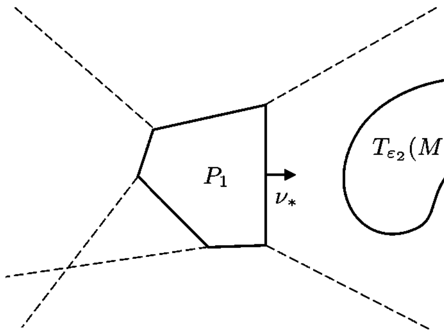

Рис. 1.

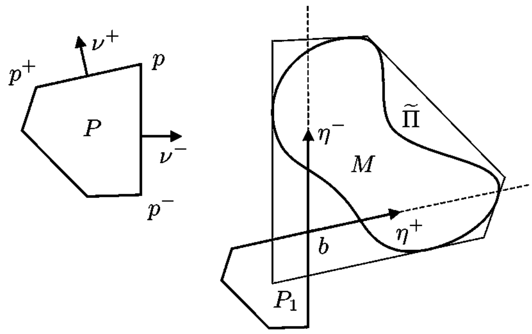

Рис. 2.

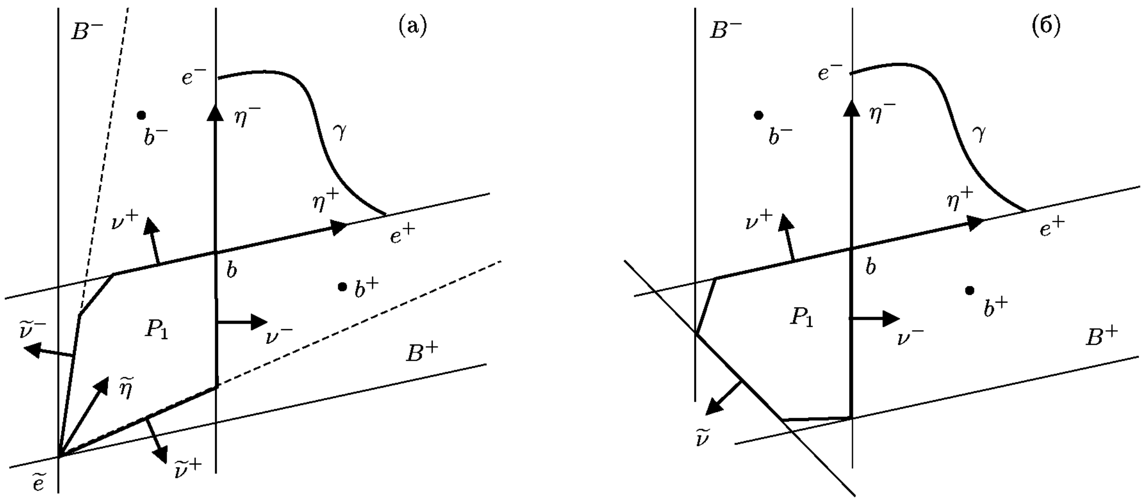

Рис. 3.

Пусть $B^\pm=\{z+\alpha\eta^\pm:\ \alpha>0,\ z\in P_1\}\setminus P_1$. Используя соотношение (27) для $\eta=\eta^\pm/\|\eta^\pm\|$, имеем $B^\pm\cap M\neq\emptyset$. Зафиксируем произвольные точки $b^\pm\in B^\pm\cap M$. Поскольку $B^+\cap B^-=\emptyset$, то $b^+\neq b^-$.

а) Предположим, что

$$\operatorname{Arg}\min_{z\in P_1}\langle z,\nu^+\rangle=\operatorname{Arg}\min_{z\in P_1}\langle z,\nu^-\rangle=:E.$$

В этом случае в силу выпуклости P_1 множество E одноэлементно, т.е. $E=\{\widetilde{e}\}$, и $\widetilde{e}$ – вершина многоугольника P_1 (рис. 3а).

Пусть $\widetilde{\nu}^\pm$ – внешние нормали к сторонам многоугольника P_1, примыкающим к вершине $\widetilde{e}$, причем поворот от $\widetilde{\nu}^-$ к $\widetilde{\nu}^+$ на угол, меньший π, происходит против часовой стрелки. Обозначим $\widetilde{K}:=\{\alpha(z-\widetilde{e}):\ \alpha\geq 0,\ z\in P_1\}$ и заметим, что $\widetilde{K}\subset K$, $\partial\widetilde{K}\cap\partial K=\{0\}$,

$$b^\pm\in\Pi_M(\widetilde{e},\widetilde{\nu}^\mp). \tag{30}$$

Кроме того, используя условие $T_{2.1})$, заключаем, что множество $\Pi_M(\widetilde{e},\widetilde{\nu}^\pm)$ связно.

Пусть $\widetilde{\eta}\in\widetilde{K}$. Применяя соотношение (27) для $\eta=\widetilde{\eta}/\|\widetilde{\eta}\|$, устанавливаем существование такого $\widetilde{\alpha}>0$, что $(P_1+\widetilde{\alpha}\widetilde{\eta})\cap M\neq\emptyset$. Выберем $c\in(P_1+\widetilde{\alpha}\widetilde{\eta})\cap M$. Заметим, что

$$c\in\Pi_M(\widetilde{e},\widetilde{\nu}^\pm). \tag{31}$$

Возможны следующие варианты: i) $c\in(B^+\cup B^-)$; ii) $c\notin(B^+\cup B^-)$.

i) Пусть $c\in B^\pm$. Учитывая включения (30), (31) и связность множества $\Pi_M(\widetilde{e},\widetilde{\nu}^\pm)$, заключаем, что существует непрерывная кривая $\gamma_1\subset\Pi_M(\widetilde{e},\widetilde{\nu}^\pm)$, соединяющая точки c и $b^\mp$. Точки

c и $b^{\mp}$ во множестве $\Pi_M(\widetilde{e},\widetilde{\nu}^{\pm})$ разделены множеством $P_1\cup(b+K)$. В силу соотношения (26) из кривой γ_1 можно выделить искомую непрерывную кривую γ без самопересечений, лежащую во множестве $b+K$ и соединяющую некоторые точки $e^+\in l(b,\eta^+)$ и $e^-\in l(b,\eta^-)$.

ii) Пусть $c\notin(B^+\cup B^-)$. В этом случае точка c принадлежит внутренности множества $b+K$. Имеем $c,b^+\in\Pi_M(\widetilde{e},\widetilde{\nu}^-)$, $c,b^-\in\Pi_M(\widetilde{e},\widetilde{\nu}^+)$. Учитывая связность множества $\Pi_M(\widetilde{e},\widetilde{\nu}^{\pm})$, получаем, что существуют непрерывная кривая $\gamma_1\subset\Pi_M(\widetilde{e},\widetilde{\nu}^+)$, соединяющая точки c и b^+, и непрерывная кривая $\gamma_2\subset\Pi_M(\widetilde{e},\widetilde{\nu}^-)$, соединяющая точки b^- и c. В силу соотношения (26) из составной кривой $\gamma_1\gamma_2$ можно выделить искомую непрерывную кривую γ без самопересечений, лежащую во множестве $b+K$ и соединяющую некоторые точки $e^+\in l(b,\eta^+)$ и $e^-\in l(b,\eta^-)$.

б) Осталось рассмотреть случай

$$\operatorname{Arg}\min_{z\in P_1}\langle z,\nu^+\rangle\neq\operatorname{Arg}\min_{z\in P_1}\langle z,\nu^-\rangle.$$

В этом случае (рис. 3б) найдется такое $\widetilde{\nu}\in\mathcal{V}$, что $B^{\pm}\subset\Pi_3:=\{z\in\mathbb{R}^2:\ \langle z,\widetilde{\nu}\rangle\leq\rho(\widetilde{\nu};P_1)\}$. Поскольку $b^+,b^-\in\Pi_3$, то, согласно условию $T_{2.1})$, существует непрерывная кривая $\gamma_1\subset\Pi_3\cap M$, соединяющая точки b^+ и b^-. Точки b^+ и b^- в полуплоскости Π_3 разделены множеством $P_1\cup(b+K)$. В силу соотношения (26) из кривой γ_1 можно выделить искомую непрерывную кривую γ без самопересечений, лежащую во множестве $b+K$ и соединяющую некоторые точки $e^+\in l(b,\eta^+)$ и $e^-\in l(b,\eta^-)$.

Таким образом, существование кривой γ с требуемыми свойствами доказано.

Этап II. Предположим, что соотношение (28) нарушено, т.е. найдется такое $\eta_0\in\mathcal{N}(p)$, что $l(b,-\eta_0)\cap M\neq\emptyset$. Пусть $b_0\in l(b,-\eta_0)\cap M$ (рис. 4).

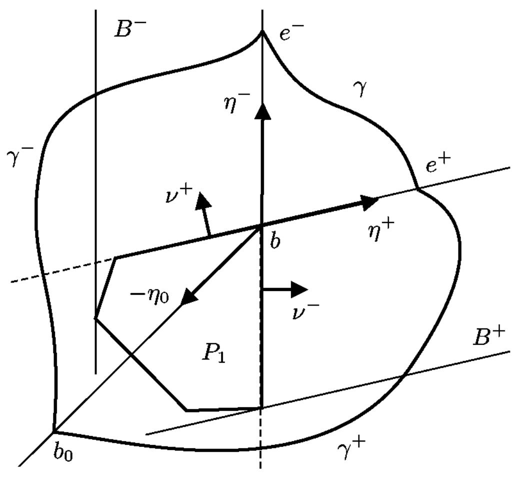

Рис. 4.

Построим непрерывную замкнутую кривую без самопересечений, лежащую во множестве M и охватывающую множество P_1. Имеем $e^+,b_0\in\in\Pi_M(b,\nu^+)$, $e^-,b_0\in\Pi_M(b,\nu^-)$. По условию $T_{2.1})$ существуют непрерывная кривая $\gamma^+\subset\Pi_M(b,\nu^+)$, соединяющая точки b_0 и e^+, и непрерывная кривая $\gamma^-\subset\Pi_M(b,\nu^-)$, соединяющая точки e^- и b_0. Не ограничивая общности, можно считать, что $\gamma^{\pm}$ – кривые без самопересечений.

Составная кривая $\gamma^+\gamma\gamma^-\subset M$ непрерывна, замкнута, не имеет самопересечений и охватывает множество P_1. Учитывая соотношение (26), получаем противоречие с односвязностью множества M.

Условие $A_3)$ леммы 6 выполнено в силу неравенства (11). Теорема доказана.

Замечание 1. Теорема 1 сформулирована для случая, когда множество P – невырожденный отрезок, а теорема 2 – для случая, когда множество P – выпуклый многоугольник. Условия $T_{1.1})$ и $T_{2.1})$ этих теорем накладываются только на множества M и P, носят геометрический характер и легко проверяемы. Отметим также, что условие $T_{2.1})$ имеет смысл и для случая, когда P – отрезок. Нетрудно показать, что если P – отрезок и M связно, то условие $T_{1.1})$ эквивалентно условию $T_{2.1})$.

Замечание 2. В условиях теорем 1, 2 значения ε_1, ε_2 фиксированы. Для того чтобы при заданном множестве M (с определенным геометрическим свойством по отношению ко множеству P) говорить о равенстве операторов T_ε, $\widetilde{T}_\varepsilon$ на некотором промежутке длины ε, следует потребовать выполнение условия $T_{1.2})$ теоремы 1 (соответственно условия $T_{2.2})$ теоремы 2) для любых $\varepsilon_1,\varepsilon_2>0$, таких, что $\varepsilon_1+\varepsilon_2\leq\varepsilon$.

Справедлива

Теорема 3. *Пусть M – многоугольник, P – невырожденный отрезок (выпуклый многоугольник) и выполнено условие $T_{1.1})$ (соответственно условие $T_{2.1})$). Тогда существует та-*

кое $\bar{\varepsilon} > 0,$ *что оператор* $T_{\bar{\varepsilon}}$ *обладает полугрупповым свойством, т.е. для любых* $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0,$ $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \leq \bar{\varepsilon},$ *справедливо равенство (2).*

Доказательство. Заметим, что при малых $\varepsilon > 0$ множество $T_\varepsilon(M)$ будет связным.

Рассмотрим отдельно случай отрезка P и случай выпуклого многоугольника $P.$

1) Пусть P – невырожденный отрезок и ν – ненулевой вектор, ортогональный отрезку $P.$ В силу условия $T_{1.1})$ для любых $x \in \mathbb{R}^2$ множество $\Pi_M(x, \pm\nu)$ связно. Поскольку M – многоугольник, то при $\eta = \nu$ и $\eta = -\nu$ можно выбрать такое $z_* \in M,$ что множество $\Pi_M(z_*, \eta)$ будет либо треугольником, либо трапецией. Тогда выполнены условия леммы 5 для $\eta = \pm\nu.$ Следовательно, найдется такое $\bar{\varepsilon} > 0,$ что для значений $\varepsilon_1,$ $\varepsilon_2,$ удовлетворяющих соотношению $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \in (0, \bar{\varepsilon}],$ выполнены условия теоремы 1, обеспечивающие требуемое полугрупповое свойство.

2) Пусть P – выпуклый многоугольник и $\mathcal{V}$ – множество единичных внешних нормалей к сторонам $P.$ В силу условия $T_{2.1})$ для любых $x \in \mathbb{R}^2$ и $\nu \in \mathcal{V}$ множество $\Pi_M(x, \nu)$ связно. Так как M – многоугольник, то можно выбрать такое $z_* \in M,$ что множество $\Pi_M(z_*, \nu)$ будет либо треугольником, либо трапецией. Тогда выполнены условия леммы 5 для $\eta = \nu.$ Следовательно, найдется такое $\bar{\varepsilon} > 0,$ что для значений $\varepsilon_1,$ $\varepsilon_2,$ удовлетворяющих соотношению $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \in (0, \bar{\varepsilon}],$ выполнены условия теоремы 2, обеспечивающие требуемое полугрупповое свойство. Теорема доказана.

Авторы благодарят рецензента за замечания.

Работа выполнена в рамках программы Президиума РАН “Фундаментальные проблемы нелинейной динамики в математических и физических науках” при финансовой поддержке УрО РАН (проект 12-П-1-1012), а также Российского фонда фундаментальных исследований (проект 12-01-00537).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. М., 1967.
2. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М., 1974.
3. *Krasovskii N.N., Subbotin A.I.* Game-Theoretical Control Problems. New York, 1988.
4. *Боткин Н.Д.* Численное построение сечений множества позиционного поглощения в линейной дифференциальной игре // Алгоритмы и программы решения линейных дифференциальных игр: Сб. науч. тр. / Под ред. Субботина А.И. и Пацко В.С. Свердловск, 1984. С. 5–38.
5. *Исакова Е.А., Логунова Г.В., Пацко В.С.* Построение стабильных мостов в линейной дифференциальной игре с фиксированным моментом окончания // Алгоритмы и программы решения линейных дифференциальных игр: Сб. науч. тр. / Под ред. Субботина А.И. и Пацко В.С. Свердловск, 1984. С. 127–158.
6. *Пшеничный Б.Н., Сагайдак М.И.* О дифференциальных играх с фиксированным временем // Кибернетика. 1970. № 2. С. 54–63.
7. *Понтрягин Л.С.* Линейные дифференциальные игры. II // Докл. АН СССР. 1967. Т. 175. № 4. С. 764–766.
8. *Хадвигер Г.* Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии. М., 1966.
9. *Субботин А.И.* Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка: перспективы динамической оптимизации. Москва; Ижевск, 2003.
10. *Шварц Л.* Анализ. Т. 1, 2. М., 1972.

Институт математики и механики УрО РАН,
г. Екатеринбург

Поступила в редакцию
14.03.2012 г.