ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
АО “КОНЦЕРН **“ЦНИИ “ЭЛЕКТРОПРИБОР”**

ПРИ ПОДДЕРЖКЕ:

РОССИЙСКОГО ФОНДА ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ (РФФИ)

МЕЖДУНАРОДНОЙ ОБЩЕСТВЕННОЙ ОРГАНИЗАЦИИ
«АКАДЕМИЯ НАВИГАЦИИ И УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ» (АНУД)

НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО УНИВЕРСИТЕТА ИТМО, РОССИЯ

АМЕРИКАНСКОГО ИНСТИТУТА АЭРОНАВТИКИ И АСТРОНАВТИКИ (AIAA)

ИНСТИТУТА ИНЖЕНЕРОВ ПО ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ И ЭЛЕКТРОНИКЕ –
ОБЩЕСТВА АЭРОКОСМИЧЕСКИХ И ЭЛЕКТРОННЫХ СИСТЕМ (IEEE – AESS)

ФРАНЦУЗСКОГО ИНСТИТУТА НАВИГАЦИИ (IFN)

НЕМЕЦКОГО ИНСТИТУТА НАВИГАЦИИ (DGON)

ЖУРНАЛА «ГИРОСКОПИЯ И НАВИГАЦИЯ»

27-29 МАЯ 2019

XXVI
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ ПО ИНТЕГРИРОВАННЫМ НАВИГАЦИОННЫМ СИСТЕМАМ

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
АО “КОНЦЕРН **“ЦНИИ “ЭЛЕКТРОПРИБОР”**

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
АО «КОНЦЕРН «ЦЕНТРАЛЬНЫЙ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ
•ЭЛЕКТРОПРИБОР•

XXVI САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ ПО ИНТЕГРИРОВАННЫМ НАВИГАЦИОННЫМ СИСТЕМАМ

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ

27–29 мая 2019

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ, РОССИЯ

ПРИ ПОДДЕРЖКЕ:

- РОССИЙСКОГО ФОНДА ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ (РФФИ)
- МЕЖДУНАРОДНОЙ ОБЩЕСТВЕННОЙ ОРГАНИЗАЦИИ «АКАДЕМИЯ НАВИГАЦИИ И УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ» (АНУД)
- НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО УНИВЕРСИТЕТА ИТМО, РОССИЯ
- АМЕРИКАНСКОГО ИНСТИТУТА АЭРОНАВТИКИ И АСТРОНАВТИКИ (AIAA)
- ИНСТИТУТА ИНЖЕНЕРОВ ПО ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ И ЭЛЕКТРОНИКЕ – ОБЩЕСТВА АЭРОКОСМИЧЕСКИХ И ЭЛЕКТРОННЫХ СИСТЕМ (IEEE – AESS)
- ФРАНЦУЗСКОГО ИНСТИТУТА НАВИГАЦИИ (IFN)
- НЕМЕЦКОГО ИНСТИТУТА НАВИГАЦИИ (DGON)
- ЖУРНАЛА «ГИРОСКОПИЯ И НАВИГАЦИЯ», РОССИЯ

В настоящем издании опубликованы на русском языке пленарные и стендовые доклады участников конференции из России и Украины.

*Стендовые доклады отмечены знаком ******.

Полностью все доклады представлены в материалах конференции на английском языке – «26th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems».

Главный редактор
академик РАН В. Г. Пешехонов

Уважаемые авторы!
Убедительная просьба проверить тексты ваших докладов. Если вы обнаружите какие-либо ошибки или неточности, сообщите об этом в редакцию по e-mail: **editor@eprib.ru**.
Исправления принимаются до **10 июня 2019 г**.
Далее доклад будет загружен в базу цитирования в том варианте, которым располагает редакция.

© Государственный научный центр Российской Федерации
АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2019

Линейная байесовская оценка для задачи мультилатерации в присутствии выбросов*

Дмитрий Бедин
Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН
Екатеринбург, Россия
bedin@imm.uran.ru

Аннотация—Для задачи мультилатерации в условиях выбросов предлагается байесовская процедура получения оценки неизвестного положения воздушного судна и времени отправки сигнала. В процедуре оценка получается как сумма по различным вариантам, на каких станциях случился выброс.

Index Terms—мультилатерация, выбросы, формула Байеса

I. Введение

Мультилатерация — способ позиционирования, в котором несколько станций принимают сигнал, испущенный передатчиком, и записывают времена приёма. По известным временам приёма можно восстановить неизвестное положение передатчика и время трансляции сигнала. Уравнения наблюдения для такой задачи во многом аналогичны уравнениям для системы GPS. Основное отличие состоит в худших по сравнению с GPS типичных геометрических условиях наблюдения, а также в бóльшем числе выбросов, возникающих в данных, в основном, из-за переотражения сигнала или перепутывания сигналов от разных передатчиков (или моментов передачи сигнала).

Обычная стратегия борьбы с выбросами состоит в определении при помощи статистических критериев события выброса, а также станций, на которых произошли выбросы, с последующим удалением определённых выбросов [1]–[3]. Однако в условиях малого числа наблюдений, как правило, невозможно с хорошей достоверностью определить как сам факт выброса, так и «выбросную» станцию. Для задачи мультилатерации число неизвестных равно 4, поэтому «малым числом наблюдений», ориентировочно, является число наблюдений меньше 8.

Предлагается другой подход, в котором не происходит исключения измерений какой-либо станции. Работа алгоритма проверена на задаче определения положения воздушного судна. Проведено моделирование с реальными конфигурациями принимающих станций.

II. Задача мультилатерации

Задача мультилатерации состоит в определении местоположения $r \in \mathbb{R}^3$ воздушного судна по измерениям t_i времени прихода некоторого сигнала на приёмные станции, расположенные в разных геометрических точках $r_i \in \mathbb{R}^3$. Количество станций примем равным m. Существенно, что время посылки сигнала t является неизвестным и измерения имеют случайные аддитивные ошибки w_i. Для удобства выберем масштаб времени так, чтобы скорость света равнялась единице. Используя вектор неизвестных

$$\theta = \begin{bmatrix} t \\ r \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

и функцию модели $g(\cdot)$, запишем уравнения наблюдения для измерений t_i в векторном виде:

$$T = g(\theta) + w\,, \tag{1}$$

$$T = \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_m \end{bmatrix}, \quad g(\theta) = \begin{bmatrix} t + \|r - r_1\| \\ \vdots \\ t + \|r - r_m\| \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix}.$$

Предположим, что есть выбросы, дополнительно влияющие на измерения. Будем моделировать их при помощи случайных величин. А именно, введём две случайные величины: ω — множество станций, на которых случился выброс (количество таких станций будем обозначать $|\omega|$); μ — одномерная величина выброса. Выбросы у разных станций будем считать независимыми реализациями μ. Их совместный вектор по станциям из ω будем обозначать μ_ω. С учётом выбросов уравнение наблюдения принимает следующий вид:

$$T = g(\theta) + H_\omega \mu_\omega + w\,, \quad H_\omega = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \cdots & 0 \\ & \vdots & \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

В матрице $H_\omega \in \mathbb{R}_{m\times|\omega|}$ количество столбцов совпадает с количеством «выбросных» станций, в каждом столбце стоит только одна единица на месте, соответствующем одному из индексов, входящих в ω.

Целью задачи мультилатерации является получение оценки $\hat\theta = \hat\theta(T)$ вектора θ при помощи набора произведённых измерений T. Оценка при этом должна хорошо работать в условиях выбросов. Минимизация

среднеквадратичного отклонения $\mathbf{E}\left\{\|\hat{\theta}-\theta\|^2\right\}$ достигается в случае, если оценка является условным математическим ожиданием $\hat{\theta}=\mathbf{E}\{\theta\,|T\}$, которое в случае выбросов надо брать с учётом их влияния на модель.

III. Байесовский алгоритм

Распишем подробнее выражение для условного математического ожидания, рассматривая возможные комбинации станций и несовместные события «на станциях ω произошли выбросы, а на остальных станциях выбросов не было»:

$$\mathbf{E}\{\theta\,|T\}=\sum_{\omega\in\Omega}\mathbf{E}\{\theta\,|\omega,T\}\,\mathbf{P}(\omega\,|T)\;. \tag{3}$$

Здесь Ω — все возможные варианты множества ω: $\Omega=\{\varnothing,\{1\},\ldots,\{m\},\{1,2\},\ldots,\{m-1,m\},\{1,2,3\},\ldots\}$.

Условную вероятность того, что станции набора ω являются выбросными, вычислим по формуле Байеса

$$\mathbf{P}(\omega\,|T)=\frac{p\,(T\,|\omega\,)\,\mathbf{P}(\omega)}{\sum\limits_{\omega'\in\Omega}p\,(T\,|\omega'\,)\,\mathbf{P}(\omega')}\,, \tag{4}$$

где $\mathbf{P}(\omega)$ — априорная вероятность события «выбросы произошли на наборе ω», а $p\,(T\,|\omega\,)$ — условная плотность для T при заданном ω (правдоподобие). Справедлива формула

$$\begin{aligned}p\,(T\,|\omega\,)&=\\ &\int\limits_{\theta\in\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mu_\omega\in\mathbb{R}^{|\omega|}}p\,(T\,|\mu_\omega,\theta,\omega\,)\,p\,(\mu_\omega\,|\omega\,)\,p\,(\theta)\,d\theta d\mu_\omega=\\ &\int\limits_{\theta\in\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mu_\omega\in\mathbb{R}^{|\omega|}}p_w\,(T-g(\theta)-H_\omega\mu_\omega)\times\\ &\qquad\prod_{\omega_i\in\omega}p_\mu\,(\mu_{\omega_i})\,p_\theta(\theta)\,d\theta d\mu_\omega\,.\end{aligned} \tag{5}$$

Здесь $p_w(\cdot)$ — плотность величины w; $p_\mu(\cdot)$, $p_\theta(\theta)$ — априорные плотности μ, θ. Точно так же можно конкретизировать вид условного матожидания в (3):

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\{\theta\,|\omega,T\}&=\int\limits_{\theta\in\mathbb{R}^n}\theta\,\frac{p\,(T\,|\theta,\omega\,)\,p(\theta)}{\int\limits_{\theta'\in\mathbb{R}^n}p\,(T\,|\theta',\omega\,)\,p(\theta')d\theta'}d\theta\\ &=\frac{1}{p\,(T\,|\omega\,)}\int\limits_{\theta\in\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mu_\omega\in\mathbb{R}^{|\omega|}}\theta\,p\,(T\,|\mu_\omega,\theta,\omega\,)\,p\,(\mu_\omega\,|\omega\,)\,p(\theta)\,d\theta d\mu_\omega\\ &=\frac{1}{p\,(T\,|\omega\,)}\int\limits_{\theta\in\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mu_\omega\in\mathbb{R}^{|\omega|}}\theta\,p_w\,(T-g(\theta)-H_\omega\mu_\omega)\\ &\qquad\times\prod_{\omega_i\in\omega}p_\mu\,(\mu_{\omega_i})\,p_\theta(\theta)\,d\theta d\mu_\omega\,.\end{aligned} \tag{6}$$

Дальнейшие вычисления будем проводить в условиях сильных предположений о природе выбросов и случайных отклонений. Будем считать, что случайные ошибки распределены нормально с нулевым матожиданием $w_i\sim\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ и одинаковым для всех станций среднеквадратичным отклонением σ. Также будем считать $\mu\sim\mathcal{N}(0,\sigma_\mu^2)$. Среднеквадратичное отклонение σ_μ будем считать намного большим, чем σ: $\sigma\ll\sigma_\mu$.

Распределение θ предполагаем вырожденным. Технически это будет выражаться в подстановке $p_\theta(\theta)=1$ в интегралы (5), (6). Несмотря на то, что функция $p_\theta(\theta)\equiv1$ не является функцией плотности и после подстановки интеграл (5) не является выражением правдоподобия $p\,(T\,|\omega\,)$, подобный приём соответствует пределу по параметру масштаба $\varepsilon\to0$ в выражениях (4), (6) в случае плотности вида $p_\theta(\theta)=\varepsilon\rho(\varepsilon\theta)$ (для любой заданной наперёд «базовой» функции плотности $\rho(\theta)$).

В указанных предположениях подынтегральные выражения в (5), (6) принимают вид

$$\begin{aligned}p\,(T\,|\mu_\omega,\theta,\omega\,)\,p\,(\mu_\omega\,|\omega\,)\,p(\theta)&=\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{m/2}}\frac{1}{(2\pi\sigma_\mu^2)^{|\omega|/2}}\\ &\times\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(T-g(\theta)-H_\omega\mu_\omega\right)^2-\frac{1}{2\sigma_\mu^2}\mu_\omega^2\right\}\,.\end{aligned} \tag{7}$$

Интеграл (5) от выражения (7) по θ нельзя взять аналитически из-за нелинейной зависимости g. Для преодоления этой трудности проще всего пойти по следующему пути. Начальную оценку θ^* для θ можно вычислить путём минимизации среднего квадрата ошибки [4], [5]:

$$J(\theta)=\sum_{i=1}^m\left(t_i-g_i(\theta)\right)^2\,,\quad\theta^*=\operatorname*{argmin}_\theta J(\theta)\,. \tag{8}$$

Далее можно использовать линейное приближение к $g(\theta)$ в окрестности θ^*:

$$g(\theta)=\theta^*+\frac{d}{d\theta}\,g(\theta^*)(\theta-\theta^*)\,.$$

В условиях линейного приближения интегрирование становится лёгким. Введём обозначения:

$$H=\frac{d}{d\theta}\,g(\theta),\quad D=\left(H^\mathsf{T}H\right)^{-1},\quad R=I-HDH^\mathsf{T}\,.$$

В формуле (5) удобно производить интегрирование сначала по θ, а потом по μ. После интегрирования получаем:

$$\begin{aligned}p\,(T\,|\omega\,)&=\frac{(2\pi\sigma^2)^{n/2}(2\pi\sigma^2)^{|\omega|/2}}{(2\pi\sigma^2)^{m/2}(2\pi\sigma_\mu^2)^{|\omega|/2}}\frac{|\det D|^{1/2}}{|\det R_\omega|^{1/2}}\times\\ &\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(T-g(\theta^*))^\mathsf{T}\left(I-H_\omega R_\omega^{-1}{H_\omega}^\mathsf{T}\right)(T-g(\theta^*))\right\}\,,\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}_\omega&=\mathbf{E}\{\mu_\omega|\omega,T\}=R_\omega^{-1}{H_\omega}^\mathsf{T}(T-g(\theta^*))\,,\\ \tilde{\theta}&=\mathbf{E}\{\theta|\omega,T\}=\theta^*-DH^\mathsf{T}H_\omega R_\omega^{-1}{H_\omega}^\mathsf{T}(T-g(\theta^*))\,.\end{aligned} \tag{10}$$

Здесь $R_\omega={H_\omega}^\mathsf{T}RH_\omega+\sigma^2/\sigma_\mu^2I_{|\omega|\times|\omega|}$ — часть матрицы R по набору ω с малой регуляризующей добавкой $\sigma^2/\sigma_\mu^2I_{|\omega|\times|\omega|}$.

Итоговая оценка получается следующим образом:

1) Для каждого возможного ω по выражению (9) определяется правдоподобие $p\,(T\,|\omega\,)$.

2) По выражению (4) определяются условные вероятности $p(\omega\,|T)$.
3) По выражению (10) определяется условное математическое ожидание θ для каждого варианта ω.
4) Вычисляется общая оценка по формуле (3):

$$\mathbf{E}\{\theta\,|T\} = \theta^* - \tag{11}$$
$$DH^{\mathsf{T}}\left(\sum_{\omega\in\Omega}\mathbf{P}(\omega\,|T)\,H_\omega R_\omega^{-1}H_\omega{}^{\mathsf{T}}\right)(T-g(\theta^*))\,.$$

IV. Сравнение со стандартными методами борьбы с выбросами

Общепринятым в обработке измерений GPS методом работы с выбросами [2], [3] является:

1) обнаружение события выброса;
2) детекция, на какой станции он произошёл;
3) удаление выбросного измерения, и решение задачи определения параметров без него.

Поскольку математическая формулировка задачи мультилатерации (1), (2) в основном повторяет формулировку задачи GPS-навигации, было бы естественно воспользоваться теми же самыми методами. Однако из-за худших геометрических условий наблюдения, и, видимо, большего числа выбросов, зачастую эти методы не работают в полной мере.

Так, наиболее трудными случаями в борьбе с выбросами являются те, когда событие выброса является малозаметным, а при этом его влияние на получаемую оценку достаточно существенное. В задаче мультилатерации типичным является достаточно малое количество измерений m, а при малом количестве измерений выбросы трудно обнаружить.

Обнаружение события выброса обычно проводят при помощи анализа значения $J(\theta^*)$ функционала J в оптимальной точке [1]–[3]. Величина $J(\theta^*)$ является случайной из-за наличия случайных ошибок. В случае, если выбросов нет и выполняется уравнение (1), величина $J(\theta^*)$ имеет распределение хи-квадрат χ^2_{m-4} с $m-4$ степенями свободы. В случае, если произошёл выброс и выполнено уравнение (2), при зафиксированных ω, μ_ω величина $J(\theta^*)$ будет иметь нецентральное распределение хи-квадрат $\chi^2_{\hat\mu,m-4}$ с $m-4$ степенями свободы и параметром нецентральности $\hat\mu = (H_\omega\mu_\omega)^{\mathsf{T}}RH_\omega\mu_\omega$.

На рис. 1 изображены эмпирические функции распределения $J(\theta^*)$ для малого числа станций $m=5$. Синим показана эмпирическая функция распределения $J(\theta^*)$ для случая отсутствия выбросов. Красным — такая же функция распределения для выброса на одной из станций. В моделировании значение выброса было зафиксировано, не менялось и имело величину 300 м. Вертикальной зелёной линией отмечен порог, выше которого находится только 5% значений $J(\theta^*)$. Обнаружение выброса обычно делают при помощи порогового правила. Для данной ситуации видно, что предлагаемое пороговое правило при уровне значимости 5%

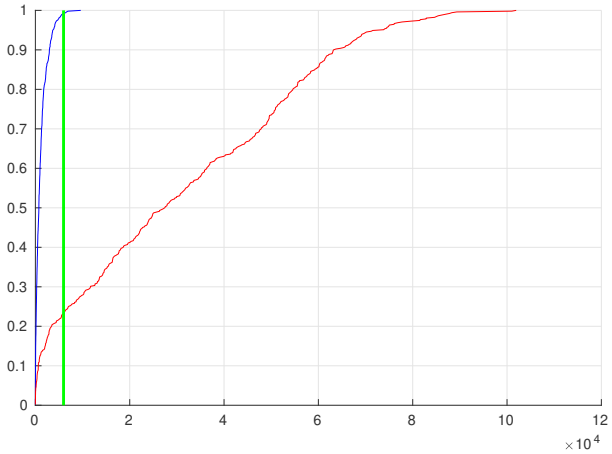

Рис. 1. Эмпирические функции распределения для значений $J(\theta^*)$ без выбросов (синяя) и с выбросом (красная)

имеет большое количество пропущенных событий — примерно 23%.

Детекцию того, где именно произошёл выброс, обычно строят двумя путями. Первый вариант состоит в анализе невязок $T-g(\theta^*)$. Второй связан с перебором подвыборок α станций: по каждой подвыборке снова решается задача МНК

$$J_\alpha(\theta) = \sum_{i\in\alpha}(t_i - g_i(\theta))^2\,, \quad \theta^*_\alpha = \operatorname*{argmin}_\theta J_\alpha(\theta)\,,$$

пока не найдётся подвыборка α^*, удовлетворяющая статистическому тесту на отсутствие выбросов (либо просто берётся подвыборка, имеющая минимальное значение $J_\alpha(\theta^*_\alpha)$).

В случае малого количества станций m, статистический тест по подвыборке имеет ещё меньшую мощность при заданном уровне значимости, чем тест по полной выборке. Как следствие, увеличивается количество ошибок, когда станции с выбросами на самом деле не исключаются из решения, а исключается станция, не имеющая ошибки.

Байесовский метод, изложенный выше, вместо определения «выбросной» станции, ставит в соответствие каждой станции условную вероятность $\mathbf{P}(\omega\,|T)$ того, что именно на ней был выброс. По этой причине он защищён от такого рода крайних явлений, когда «выбросная» станция определяется неправильно.

Для моделирования точности алгоритмов было проведено статистическое испытание. Рассматривалась система из 6 станций, воздушное судно находилось на высоте 2000 м. Для сетки заданных истинных положений производился расчёт времён измерений и формировались выбросы. Для каждой шестёрки измерений $\{t_i\}$ одно было обязательно выбросным (по случайно выбранной станции). Величина выброса полагалась 300 м (или 1 мкс) со случайным знаком.

На рисунках ниже указаны линии уровня горизонтальной точности — СКО определения горизонтально-

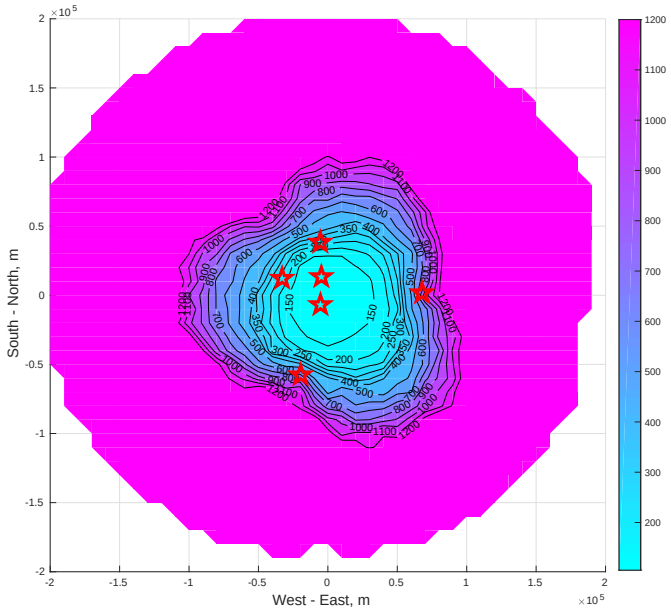

Рис. 2. Горизонтальная точность исходного МНК-решения

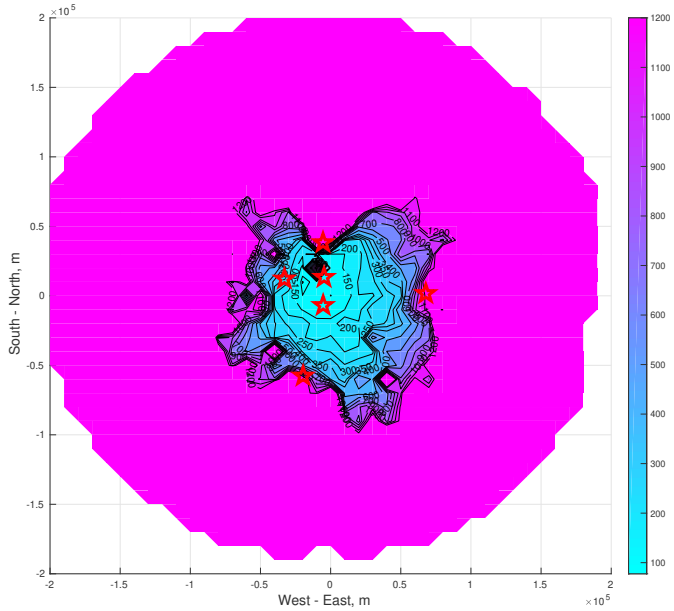

Рис. 3. Горизонтальная точность решения, основанного на отбрасывании предполагаемого выброса

го положения воздушного судна в метрах. На рис. 2 показана точность исходного МНК-решения (8). На рис. 3 показана точность алгоритма, сделанного по мотивам публикаций [1], [3], в котором производится подобная работа с решениями по подвыборкам. Как видно, точность такого алгоритма даже хуже, чем точность исходного МНК-решения, где борьбы с выбросами не производится вообще. На рис. 4 показана точность предлагаемого байесовского алгоритма. Для него полагалось $\mathbf{P}(\omega = \varnothing) = 0.61$, $\mathbf{P}(\omega = \{1\}) = \ldots = \mathbf{P}(\omega = \{6\}) = 0.065$, $\sigma = 30$ м, $\sigma_\mu = 300$ м. Следует отметить, что предположения о вероятностном законе выбросов, заложенные в алгоритме, не совпадают с предположениями, согласно которым распределены данные в моделировании. Тем не менее, получена хорошая точность определения положения воздушного судна.

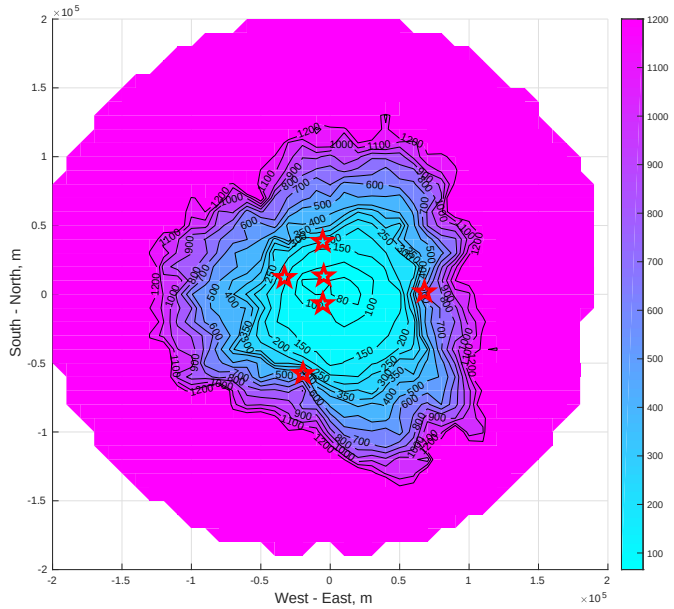

Рис. 4. Горизонтальная точность байесовского алгоритма

Благодарности

Автор благодарит ООО «Фирма «НИТА» за постановку задачи и обсуждение полученных результатов.

Список литературы

[1] Brown, R. G., A Baseline GPS RAIM Scheme and a Note on the Equivalence of Three RAIM Methods. Navigation: Journal of The Institute of Navigation, 1992, vol. 39, no. 3, pp. 301–316. doi:10.1002/j.2161-4296.1992.tb02278.x

[2] Parkinson, B. W., Axelrad, P., Autonomous GPS Integrity Monitoring Using the Pseudorange Residual. Navigation: Journal of The Institute of Navigation, 1988, vol. 35, no. 2, pp. 255–274. doi:10.1002/j.2161-4296.1988.tb00955.x.

[3] Kuusniemi, H., User-Level Reliability and Quality Monitoring in Satellite-Based Personal Navigation, PhD thesis, Tampere, 2005.

[4] Bedin, D. A., Problem of Multilateration with Several Transmisson Instants. Integrated Navigation Systems — ICINS 2018: 25th Saint Petersburg Intern. Conf., proceedings. SPb, 2018. pp. 1–3.

[5] Bedin, D. A., Localization with Several Instants of Signal Transmission in Multilateration Systems. IFAC-PapersOnLine, 2018, vol.51, iss.32, pp. 659–662.