Том 1 1992

УДК 62.50

МОДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА ИМПУЛЬСНОГО УПРАВЛЕНИЯ С НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ

С. И. Кумков, В. С. Пацко

Рассматривается модельная задача преследования с импульсным управлением. Преследователь замеряет с ошибкой угловую скорость линии визирования и старается минимизировать величину промаха. Предполагается, что ошибка замера стеснена геометрическим ограничением. Задача формализуется как дифференциальная игра с неполной информацией. Предложены три варианта построения стратегий управления. В естественном частном случае все они переходят в одну и ту же стратегию, являющуюся оптимальной. Приведены результаты моделирования.

§ 1. Предварительное описание задачи

Рассмотрим задачу преследования на плоскости одной материальной точки другой с неполной информацией догоняющего P об убегающем E . Совместим начало разностной системы координат с преследователем. Условимся, что в начальный момент t_0 заданы номинальное (расчетное) положение E_{NOM} убегающего в разностной системе, а также номинальный вектор V_{NOM} разностной скорости. Будем считать, что вектор V_{NOM}, приложенный к точке E_{NOM}, направлен на точку P, т.е. к началу координат. Ось x разностной системы направим противоположно вектору V_{NOM} (рис. 1), ось z ортогональна оси x. Направления осей неизменны по t. Истинное положение E в начальный момент может отличаться от номинального, истинный вектор начальной разностной скорости – от предварительно заданного. Модуль вектора V_{NOM} обозначим через e.

Управляющее воздействие преследователя – импульсное. Преследователь скачком может изменять свою, а стало быть, и разностную скорость. Импульсы действуют перпендикулярно оси x , т.е. вдоль оси z. Такое направление действия импульсов обеспечивает экономное расходование ресурса в задаче минимизации промаха. Оговорена величина $\Delta\Upsilon$ одного импульса и общее количество импульсов N. Таким образом, $N\Delta\Upsilon$ – запас преследователя по изменению скорости. Векторное управляющее воздействие v убегающего с компонентами v_x, v_z имеет размерность ускорения и стеснено условием $v \in Q$, где Q – выпуклое замкнутое ограниченное множество, симметричное относительно нуля.

Управление преследователя реализуется в дискретной схеме. Пусть $k(t_i)$ – количество импульсов с предписанным знаком, поданное в момент t_i ($k(t_i)$ – либо целое отрицательное, либо целое положительное, либо нуль). По постановке задачи должно быть выполнено ограничение $\sum_i | k(t_i) | \leq N$. В каждый текущий дискретный момент t_i преследователь замеряет угловую скорость $\omega_M(t_i)$ линии визирования, проходящей через точки P и E. Замеряемое значение и истинная угловая скорость $\omega(t_i)$ связаны соотношением

$$\omega_M(t_i) = \omega(t_i) + \xi(t_i). \tag{1.1}$$

Здесь $\xi(t_i)$ – ошибка замера.

Возможны постановки, где в момент t_i замеряется с ошибкой угол визирования $\alpha(t_i)$ (рис. 1) или же одновременно угол визирования и угловая скорость линии визирования. В данной работе предполагаем, что замеряется только угловая скорость. Считаем, что ошибка замера стеснена ограничением

$$|\, \xi(t_i) \,| \leq c_1 \,|\, \omega(t_i) \,| + c_2, \quad 1 > c_1 \geq 0, \quad c_2 \geq 0. \tag{1.2}$$

Если $c_1 = 0$, то ограничение не зависит от значения истинной угловой скорости. Если равна нулю константа c_2, то соотношение (1.2) задает ограничение на относительную ошибку замера угловой скорости.

Условимся, что начальное положение $(x(t_0), z(t_0))'$ разностной точки задано неточно и удовлетворяет геометрическому ограничению

$$(x(t_0), z(t_0))' \in B. \tag{1.3}$$

Аналогично, начальный вектор разностной скорости

$$(V_x(t_0), V_z(t_0))' \in D. \tag{1.4}$$

Здесь B, D – выпуклые замкнутые ограниченные множества. Соотношения (1.1)–(1.4) известны преследователю.

Цель преследования – минимизация промаха. Под промахом понимаем минимальное значение расстояния $\sqrt{x^2(t) + z^2(t)}$ в процессе движения. Требуется построить управление преследователя по принципу обратной связи, дающее удовлетворительное решение игровой задачи минимизации промаха в условиях неполной информации.

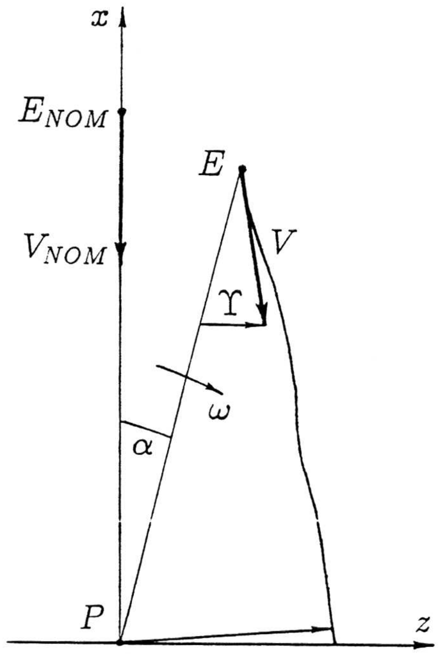


Рис. 1. Движение разностной точки.

Исследование задачи проведем при следующем упрощающем предположении. Будем считать относительно малым изменение вектора разностной скорости, возникающее в процессе движения за счет управлений преследователя и убегающего (слабая управляемость). Предположим также относительно малым размер множества D и размах по оси z множества B.

В статье будет дана формализованная постановка задачи в рамках вспомогательной антагонистической дифференциальной игры двух лиц с неполной информацией. Для вспомогательной игры введены понятия наилучшего гарантированного результата и оптимальных стратегий первого и второго игроков. Предложены стратегии, переходящие в частном случае в оптимальные. Стратегии вспомогательной игры используются в исходной системе. В примере, для которого представлены результаты моделирования, взяты: $e = 5000$м/с, $\Delta\Upsilon = 5$ м/с, $N = 70$ имп., время процесса примерно 16 с.

Главная особенность дифференциальных игр с неполной информацией [1—10] состоит в том, что позицией игры является множество, а не точка, как в "обычных" дифференциальных играх. Это существенно усложняет исследование. Изучаемая в статье задача – одна из немногих (см. также [4, 6, 7]), для которых удается найти оптимальное решение хотя бы в частном случае.

Отметим, что близкая по содержанию задача в предположении о стохастическом характере ошибки замера изучалась в [11, 12] с использованием фильтрации Калмана.

§ 2. Исходные уравнения динамики. Уравнения динамики для вспомогательной дифференциальной игры

Уравнения динамики в разностных координатах x, z имеют вид

$$\begin{aligned} \ddot{z}(t) &= v_z - \Delta\Upsilon \textstyle\sum_i k(t_i)\delta(t-t_i), \\ \ddot{x}(t) &= v_x, \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\sum_i \mid k(t_i) \mid \leq N, \qquad (v_x, v_z)' \in Q.$$

Здесь δ – символ дельта-функции. Подсоединим к (2.1) соотношения (1.1)–(1.4), характеризующие неполноту информации:

$$\omega_M(t_i) = \omega(t_i) + \xi(t_i), \qquad \mid \xi(t_i) \mid \leq c_1 \mid \omega(t_i) \mid + c_2, \tag{2.2}$$

$$(x(t_0), z(t_0))' \in B, \qquad (V_x(t_0), V_z(t_0))' \in D. \tag{2.3}$$

Перепишем систему (2.1) в координатах α, ω, x, V_x :

$$\dot{\alpha}(t) = \omega(t),$$

$$\dot{\omega}(t) = -2V_x(t)\omega(t)/x(t) - 2\mathrm{tg}\alpha(t)\omega^2(t) - \sin\alpha(t)\cos\alpha(t)v_x/x(t) +$$

$$+\cos^2\alpha(t)v_z/x(t) - (\cos^2\alpha(t)\Delta\Upsilon/x(t))\sum_i k(t_i)\delta(t-t_i),$$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= V_x(t), \\ \dot{V}_x(t) &= v_x, \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\sum_i |\ k(t_i)\ | \leq N, \qquad (v_x, v_z)' \in Q.$$

Переходя к описанию динамики для вспомогательной дифференциальной игры, упростим систему (2.4). Учтем при этом содержательное предположение о слабой управляемости.

В исследуемой задаче преследователь заинтересован в минимизации промаха. Допущение о слабой управляемости приводит к тому, что (с учетом направления вектора V_{NOM} вдоль оси x) подсчет промаха на конкретном движении можно приближенно заменить подсчетом модуля координаты z в момент пересечения движением оси z (рис. 1). При этом на величину промаха более существенное влияние оказывает изменение скорости по оси z, чем по оси x. Таким образом, упрощая систему (2.4), можем считать $V_x(t_0)$ точно известным и совпадающим с $V_{NOM\,x} = -e$, а управляющее воздействие v_x— тождественно равным нулю. Изменение координаты x опишется соотношением $x(t) = x(t_0) - e(t - t_0)$.

Далее, предположение о слабой управляемости позволяет считать угол α малым на длительном промежутке интервала движения, начиная от начального момента. В самом деле, пусть в некоторый момент t_* угол α большой. Тогда ввиду малости конуса, в котором может идти будущее движение (ось конуса близка к вертикальной), промах в конце будет заведомо значительным, причем тем больше, чем больше время до конца от момента t_*. Следовательно, если нас интересуют не слишком большие промахи, можем считать угол α малым, и в упрощенной постановке вспомогательной задачи заменим $\sin\alpha$ и $\mathrm{tg}\alpha$ на нуль, а $\cos\alpha$ на единицу. Поскольку замеряемой величиной является ω, а угол α не будет теперь входить в соотношение для $\dot{\omega}$, то уравнение $\dot{\alpha}(t) = \omega(t)$ можно опустить. Условимся, наконец, что в упрощенной постановке v_z выбирается из отрезка $[-\nu, \nu]$ – проекции множества Q на ось z. Окончательно получим:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}(t) &= 2e\omega(t)/x(t) + v_z/x(t) - (\Delta\Upsilon/x(t))\textstyle\sum_i k(t_i)\delta(t-t_i), \\ x(t) &= x(t_0) - e(t - t_0), \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\sum_i |\ k(t_i)\ | \leq N, \qquad |\ v_z\ | \leq \nu.$$

При импульсном воздействии в момент t_i координата ω изменяется скачком на величину $-k(t_i)\Delta\Upsilon/x(t_i)$.

Таким образом, описана динамика вспомогательной дифференциальной игры. Соотношения неполноты информации для нее примем в виде

$$\omega_M(t_i) = \omega(t_i) + \xi(t_i), \qquad |\ \xi(t_i)\ | \leq c_1\ |\ \omega(t_i)\ | + c_2,$$

$$x(t_0) \in [x_0, x^0], \qquad \omega(t_0) \in A(x(t_0)).$$

Здесь $[x_0, x^0]$ – проекция множества B на ось x, $A(x(t_0))$ – некоторый отрезок (оценка сверху), содержащий в себе для конкретного $x(t_0)$ все начальные значения $\omega(t_0)$ угловой скорости, возможные в силу ограничений (2.3).

§ 3. Информационное множество. Постановка вспомогательной дифференциальной игры с неполной информацией

Перейдем к формулировке вспомогательной дифференциальной игры двух лиц, в которой состоянием в момент t_i будет пара: информационное множество на плоскости ω, x и количество оставшихся импульсов.

Информационное множество. Считаем ось ω горизонтальной, ось x– вертикальной. Зафиксируем параметр $\varepsilon > 0$. В качестве начального информационного множества $G(t_0)$ возьмем произвольное ограниченное замкнутое множество на плоскости ω, x $(x \geq \varepsilon)$, сечение которого при любом x представляет собой отрезок.

Пусть теперь в пространстве ω, x $(x \geq \varepsilon)$ задано ограниченное замкнутое множество $G(t_i)$, $i \geq 0$, сечение которого при любом x есть отрезок. Таким образом, $G(t_i)$ – обьединение отрезков, параллельных оси ω. В момент t_i поступает замер $\omega_M(t_i)$. Обозначим через $S(t_i)$ соответствующее замеру множество неопределенности – совокупность всех точек на плоскости ω, x, для каждой из которых замер $\omega_M(t_i)$ возможен в соответствии с формулами $\omega_M(t_i) = \omega + \xi$, $\quad | \xi | \leq c_1 | \omega | + c_2$. Множество S представляет собой вертикальную полосу. Его проекция S_ω на ось ω описывается соотношениями

$$S_\omega = \begin{cases} [(\omega_M - c_2)/(1+c_1),\ (\omega_M + c_2)/(1-c_1)], & \text{если} \quad \omega_M \geq c_2, \\ [(\omega_M - c_2)/(1-c_1),\ (\omega_M + c_2)/(1-c_1)], & \text{если} \quad -c_2 < \omega_M < c_2, \\ [(\omega_M - c_2)/(1-c_1),\ (\omega_M + c_2)/(1+c_1)], & \text{если} \quad \omega_M \leq -c_2. \end{cases}$$

Размах S_ω зависит от ω_M. Положим

$$I(t_i) = G(t_i) \bigcap S(t_i).$$

При этом условимся, что такое пересечение не пусто.

В момент t_i (или точнее $t_i + 0$, после получения замера) первый игрок, распоряжающийся выбором импульсов, может применить свое управление. Тогда множество $I(t_i)$ перейдет в множество $H(t_i)$. Преобразование $I(t_i) \to H(t_i)$ есть перенос каждого отрезка (при постоянном x) на величину $-k(t_i)\Delta\Upsilon/x$ вдоль оси ω. В множестве $H(t_i)$ выделим часть $J_\varepsilon(t_i)$, лежащую строго ниже уровня $x = \varepsilon + e(t_{i+1} - t_i)$. Эта часть в момент t_{i+1} уйдет под уровень ε. Положим $H_\varepsilon(t_i) = H(t_i) \setminus J_\varepsilon(t_i)$.

Определим $G(t_{i+1})$ как прогноз положения системы (2.5) на момент t_{i+1} при состоянии $H_\varepsilon(t_i)$ в момент t_i и при нулевом управлении первого игрока на $(t_i, t_{i+1}]$. При построении $G(t_{i+1})$ каждый отрезок из $H_\varepsilon(t_i)$ опускается по x на величину $e(t_{i+1} - t_i)$. Координата по оси ω его левого края принимает значение

$$\omega_*(t_{i+1}) = \omega_*(t_i)\frac{x^2(t_i)}{x^2(t_{i+1})} - \frac{\nu(t_{i+1} - t_i)}{x^2(t_{i+1})}\left(x(t_i) - \frac{e}{2}(t_{i+1} - t_i)\right).$$

Здесь $\omega_*(t_i)$ – координата левого края рассматриваемого отрезка в момент t_i. Соответственно, положение $\omega^*(t_i)$ правого края меняется на

$$\omega^*(t_{i+1}) = \omega^*(t_i)\frac{x^2(t_i)}{x^2(t_{i+1})} + \frac{\nu(t_{i+1}-t_i)}{x^2(t_{i+1})}\left(x(t_i) - \frac{e}{2}(t_{i+1}-t_i)\right).$$

Каждое из множеств $G(t_i)$, $I(t_i)$, $H(t_i)$, $H_\varepsilon(t_i)$ назовем информационным (до замера, после замера, после импульсов, после ε-отсечки). Множество $G(t_i)$ будем называть также множеством прогноза.

Таким образом, рекуррентно определена последовательность информационных множеств. Рис. 2 иллюстрирует переход от множества $G(t_i)$ к множеству $G(t_{i+1})$.

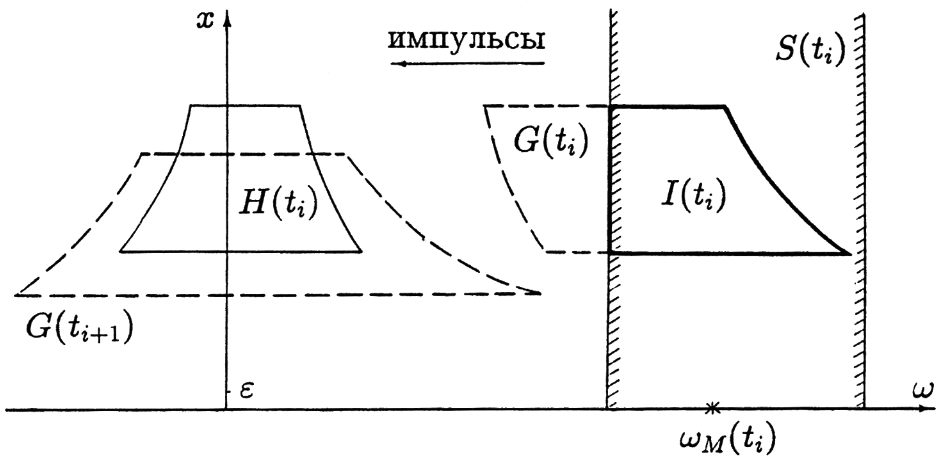


Рис. 2. Построение информационных множеств.

В дифференциальной игре с неполной информацией под движением системы будем понимать изменение во времени информационного множества и количества оставшихся импульсов. Первый игрок распоряжается выбором импульсного управления, второй – подбрасыванием замеров. Влияние параметра v_z учитываем при построении множеств $G(t_i)$. Так как управление первого игрока импульсное, важно разделить во времени действия игроков. Считаем,что импульсное управление в момент t_i применяется после замера, поступившего в этот момент. Введение параметра ε обусловлено тем, что в рассматриваемой задаче окончание связано с прохождением уровня $x = 0$, а система (2.5) имеет особенность при $x = 0$.

Допустимые стратегии. Позицией игры для первого игрока назовем совокупность (t_i, n, I), где t_i – момент времени, n – количество оставшихся импульсов, I – информационное множество после замера. Допустимой стратегией первого игрока назовем правило $U : (t_i, n, I) \to k$, сопоставляющее позиции игры количество импульсов с определенным знаком, $|\, k \,| \leq n$.

Позицией игры для второго игрока условимся считать совокупность (t_i, n, G). Здесь G – информационное множество до замера (множество прогноза). Допустимой стратегией второго игрока назовем правило Ω :

Далее

$$L^{(1)}(t_0, n(t_0), G(t_0), U) = \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} F^{(1)}(t_0, n(t_0), G(t_0), U, \varepsilon),$$

$$\Gamma^{(1)}(t_0, n(t_0), G(t_0)) = \inf_U L^{(1)}(t_0, n(t_0), G(t_0), U).$$

Аналогично за второго игрока:

$$F^{(2)}(t_0, n(t_0), G(t_0), \Omega, \varepsilon) = \underline{\lim_{\Delta\to 0}} \inf_U \Phi(t_0, n(t_0), G(t_0), U, \Omega, \varepsilon, \Delta).$$

$$L^{(2)}(t_0, n(t_0), G(t_0), \Omega) = \underline{\lim_{\varepsilon\to 0}} F^{(2)}(t_0, n(t_0), G(t_0), \Omega, \varepsilon),$$

$$\Gamma^{(2)}(t_0, n(t_0), G(t_0)) = \sup_\Omega L^{(2)}(t_0, n(t_0), G(t_0), \Omega).$$

Величины $\Gamma^{(1)}$, $\Gamma^{(2)}$ определяют наилучшие гарантированные результаты первого и второго игроков во вспомогательной задаче. Стратегии, на которых достигаются наилучшие гарантированные результаты, назовем оптимальными.

Отметим упрощение, возникающее в частном случае, когда $x(t_0)$ предполагается известным точно, т.е. при $x_0 = x^0$. В этом случае информационное множество состоит из одного отрезка; момент окончания в игре становится зафиксированным и равным $t_0 + x(t_0)/e$; при заданных ε, Δ существует единственный момент t_i, когда $J_\varepsilon(t_i) \neq \emptyset$.

§ 4. Несколько вариантов стратегий первого игрока

Укажем три варианта построения стратегий первого игрока во вспомогательной дифференциальной игре. Стратегии не являются оптимальными. Они получены из эмпирических соображений, имеют аналоги в "обычной" теории дифференциальных игр, просты по реализации. В частном случае $x_0 = x^0$ рассматриваемые стратегии переходят в одну и ту же стратегию, являющуюся оптимальной.

Стратегия поддержания симметрии прогнозируемого промаха. Обозначим через $\partial^* I$ совокупность правых концов отрезков, из которых составлено множество I. Аналогично, $\partial_* I$ – совокупность левых концов. Положим

$$\pi^*(I) = \max_{(\omega,x)\in\partial^* I} \left\{ \frac{\omega\, x^2}{e} + \frac{\nu}{2}\left(\frac{x}{e}\right)^2 \right\}, \tag{4.1}$$

$$\pi_*(I) = \min_{(\omega,x)\in\partial_* I} \left\{ \frac{\omega\, x^2}{e} - \frac{\nu}{2}\left(\frac{x}{e}\right)^2 \right\}. \tag{4.2}$$

Символами (ω^*, x^*), (ω_*, x_*) обозначим точки, на которых достигается максимум в (4.1) и минимум в (4.2). Отрезок с концами $\pi_*(I)$, $\pi^*(I)$ назовем отрезком прогнозируемого промаха, соответствующим множеству I.

$(t_i, n, G) \to \omega_M$, сопоставляющее позиции игры замер ω_M. При этом потребуем, чтобы $G \bigcap S \neq \emptyset$, где S – множество неопределенности, построенное по ω_M.

Задав пару допустимых стратегий U, Ω, шаг Δ (связывающий соседние дискретные моменты времени t_i и t_{i+1}), параметр ε и начальную позицию $(t_0, n(t_0), G(t_0))$, можем говорить о движении системы во времени.

Функция платы. Определим на движении вспомогательной дифференциальной игры значение платы. Для произвольной пары ω, x $(x > 0)$ положим

$$\Pi(\omega, x) = \frac{|\,\omega\,|\, x^2}{e}. \tag{3.1}$$

Величина $\Pi(\omega, x)$ приближенно имеет смысл пассивного прогнозируемого промаха из состояния ω, x, т.е. промаха при пересечении оси z свободным движением системы (2.5). Для точного подсчета пассивного прогнозируемого промаха следовало бы помимо ω, x задать угол α: $|\,\omega\,|\, x^2/(e\cos^2\alpha)$. Смысл формулы понятен из того, что $\omega x/\cos^2\alpha$ – величина нескомпенсированной линейной скорости Υ (рис. 1), а x/e – время, оставшееся до пересечения оси z. Пренебрегая малым углом α, получаем формулу (3.1). Пусть

$$\hat{\Pi}(\omega, x) = \Pi(\omega, x) + \frac{\nu}{2}\left(\frac{x}{e}\right)^2.$$

Добавка $\nu(x/e)^2/2$ – максимально возможное увеличение промаха за счет ускорения v_z, $|\,v_z\,| \leq \nu$. Произвольному множеству K в пространстве ω, x $(x > 0)$ поставим в соответствие число

$$\check{\Pi}(K) = \sup_{(\omega,x)\in K} \hat{\Pi}(\omega, x).$$

Для конкретного движения информационного множества символом T_ε обозначим совокупность моментов t_i таких, что $J_\varepsilon(t_i) \neq \emptyset$. Число

$$\Phi(t_0, n(t_0), G(t_0), U, \Omega, \varepsilon, \Delta) = \max_{t_i \in T_\varepsilon} \check{\Pi}(J_\varepsilon(t_i))$$

назовем промахом, соответствующим начальной позиции $(t_0, n(t_0), G(t_0))$, стратегиям U, Ω, дискрету Δ и параметру ε.

Поясним смысл величины Φ. При заданном ε фактически считаем, что импульсное управление перестает действовать после момента t_i для части информационного множества, которая в момент t_{i+1} окажется ниже уровня ε. Одноточечные движения, развивающиеся из этой части, как бы заканчиваются, в то время как движения из части выше уровня ε продолжаются. Множество $J_\varepsilon(t_i)$ и определяет заканчивающиеся одноточечные движения. Плата для $J_\varepsilon(t_i)$ естественно вводится как $\check{\Pi}(J_\varepsilon(t_i))$. Затем берем максимум по моментам t_i, для которых $J_\varepsilon(t_i)$ не пусто.

Наилучшие гарантированные результаты игроков. Гарантию первого игрока при зафиксированных t_0, $n(t_0)$, $G(t_0)$, U, ε определим соотношением

$$F^{(1)}(t_0, n(t_0), G(t_0), U, \varepsilon) = \varlimsup_{\Delta\to 0} \sup_{\Omega} \Phi(t_0, n(t_0), G(t_0), U, \Omega, \varepsilon, \Delta).$$

Если в текущий момент первый игрок применяет управление из k импульсов, то промах для бывшей максимизирующей точки в (4.1) изменится мгновенно на величину

$$\frac{\Delta\omega x^{*2}}{e} = -\frac{k\Delta\Upsilon x^{*2}}{x^{*}e} = -\frac{k\Delta\Upsilon x^{*}}{e},$$

а для минимизирующей точки в (4.2) – на величину

$$\frac{\Delta\omega x_{*}^{2}}{e} = -\frac{k\Delta\Upsilon x_{*}}{e}.$$

Составим соотношение симметрии

$$\pi^{*} - \frac{k\Delta\Upsilon x^{*}}{e} = -\left(\pi_{*} - \frac{k\Delta\Upsilon x_{*}}{e}\right).$$

Разрешая его относительно целочисленного неизвестного k, получим

$$k_s = \left[\frac{(\pi^{*} + \pi_{*})e}{(x^{*} + x_{*})\Delta\Upsilon}\right]. \tag{4.3}$$

Здесь квадратные скобки означают целую часть.

Стратегию U_s поддержания симметрии прогнозируемого промаха определим как функцию, сопоставляющую позиции (t_i, n, I) число k_s, вычисляемое по формуле (4.3), если $| k_s | \leq n$, и число $n \operatorname{sign} k_s$, если $| k_s | > n$.

Стратегия U_s введена при помощи вспомогательной величины – прогнозируемого промаха и учитывает "одномерность" этой величины. Понятие прогнозируемого промаха используется очень часто как в инженерной практике, так и в теоретических работах [13, 14]. В дифференциальных играх аналогом введенной стратегии может служить стратегия, доставляющая оптимальное решение в задаче "мальчик и крокодил" [15].

Отметим, что в (4.1) или в (4.2) экстремум может достигаться не обязательно на одном элементе. Тогда в качестве (ω^{*}, x^{*}) или (ω_{*}, x_{*}) берем любой из них. При этом определяемое по формуле (4.3) число k_s может зависеть от выбранной экстремальной точки.

Уточним вид стратегии U_s при $x_0 = x^0$. В этом случае I – отрезок. Следовательно $x_{*} = x^{*} = x$ и

$$k_s = \left[\frac{(\omega^{*} + \omega_{*})x^{2}e}{e2x\Delta\Upsilon}\right] = \left[\frac{(\omega^{*} + \omega_{*})x}{2\Delta\Upsilon}\right].$$

Полусумма $(\omega^{*} + \omega_{*})/2$ – центр отрезка I по оси ω, обозначим его ω_c. Таким образом,

$$k_s = \left[\frac{\omega_c x}{\Delta\Upsilon}\right]. \tag{4.4}$$

Поскольку $\Delta\Upsilon/x$ – изменение ω (по модулю) при действии одного импульса, то вычисления по формуле (4.4) можно трактовать как сравнение величины ω_c (с учетом знака) с порогом, равным эффективности одного импульса.

Стратегия U_s является оптимальной для случая $x_0 = x^0$. Доказательство этого факта является достаточно длинным и будет опубликовано в отдельной работе. Если $x^0 - x_0$ мало, стратегию U_s можно считать квазиоптимальной.

Стратегия, основанная на расчете точки максимума некомпенсируемого промаха. Для каждой позиции (t_i, n, I) введем величину

$$\bar{\pi}(n, I) = \max_{(\omega, x)\in I} \left\{ \frac{|\,\omega\,|\,x^2}{e} + \frac{\nu}{2}\left(\frac{x}{e}\right)^2 - \frac{n\Delta\Upsilon x}{e} \right\}. \tag{4.5}$$

Первые два слагаемых в фигурных скобках дают прогноз промаха (по модулю) при нулевом управлении первого игрока. Третье — максимально возможную компенсацию за счет управления первого игрока. В целом выражение в фигурных скобках имеет смысл некомпенсируемого промаха для точки (ω, x) и может принимать отрицательные значения. Пусть $(\tilde{\omega}, \tilde{x})$ — точка из I, на которой реализуется максимум в (4.5). Выделим в I отрезок, содержащий (на своем краю) точку $(\tilde{\omega}, \tilde{x})$. Пусть $\tilde{\omega}_c$ — центр этого отрезка по координате ω. Положим

$$\tilde{k} = \left[\frac{\tilde{\omega}_c \tilde{x}}{\Delta\Upsilon}\right]. \tag{4.6}$$

Значение стратегии $\tilde{U}$ в позиции (t_i, n, I) примем равным $\tilde{k}$, если $|\,\tilde{k}\,| \le n$, и $n \operatorname{sign} \tilde{k}$, если $|\,\tilde{k}\,| > n$.

Используя стратегию $\tilde{U}$, в каждый момент t_i выделяем из информационного множества $I(t_i)$ отрезок, на котором реализуется максимум некомпенсируемого промаха. Его центр по координате ω сравниваем с порогом, соответствующим этому отрезку. Вырабатываемое управляющее воздействие переводит центр (с учетом дискретности импульсов) в нуль. В дифференциальных играх аналогом такой стратегии в какой-то мере может служить стратегия прицеливания по наихудшей точке, просчитываемой через множества достижимости [1]. В частном случае $x_0 = x^0$ стратегия $\tilde{U}$ совпадает со стратегией U_s и является оптимальной.

Стратегия эмпирической логики выбора отрезка. Укажем еще одно, эмпирическое, правило выбора отрезка из информационного множества, учитывающее относительный размах множества по x.

Пусть x^{**}, x_{**} — максимальное и минимальное значения координаты x в информационном множестве I (более точно: $x^{**}(I)$, $x_{**}(I)$). Величина

$$\eta = \frac{x^{**}}{x_{**}} = \frac{e\tau^{**}}{e\tau_{**}} = \frac{\tau^{**}}{\tau_{**}}$$

имеет смысл оценки отношения максимального τ^{**} и минимального τ_{**} времени до конца процесса.

Задав вспомогательную эмпирическую зависимость

$$\eta \to s(\eta): \ \eta \ge 1, \quad s(\eta) \in [0, 1], \quad s(1) = 1,$$

можем при помощи формулы

$$x(\eta) = s(\eta)(x^{**} - x_{**}) + x_{**}$$

выбирать отрезок из I как функцию от η. Например, если $s(\eta) = 1/\eta$, то при $\eta \approx 1$ выбираем отрезок с координатой x, близкой к x^{**}, а при достаточно большом η — с координатой x, близкой к x_{**}.

Взяв отрезок, соответствующий $x(\eta)$, находим его центр $\omega_c(\eta)$ по ω, далее аналогично (4.6) вычисляем

$$k_e = \left[\frac{\omega_c(\eta)x(\eta)}{\Delta\Upsilon}\right], \qquad (4.7)$$

определяя тем самым значение стратегии U_e в рассматриваемой позиции.

В случае $x_0 = x^0$ информационное множество состоит из одного отрезка, поэтому $\eta = 1$ и значение k_e, найденное по формуле (4.7), совпадает с результатами вычислений по формулам (4.4), (4.6).

§ 5. Стратегия второго игрока

Опишем один вариант построения стратегии второго игрока во вспомогательной дифференциальной игре. Этот способ, так же, как и второй из сформулированных выше законов управления первого игрока, основан на выборе точки, на которой достигается максимум некомпенсируемого промаха. Отличие в том, что наихудшая точка будет выбираться не в множестве I, а в множестве G.

Пусть $(\overline{\omega}, \overline{x})$ – точка из G, на которой достигается максимум выражения

$$\overline{\pi}(n, G) = \max_{(\omega, x)\in G}\left\{\frac{|\,\omega\,|\,x^2}{e} + \frac{\nu}{2}\left(\frac{x}{e}\right)^2 - \frac{n\Delta\Upsilon x}{e}\right\}.$$

Выделим из G отрезок, содержащий $(\overline{\omega}, \overline{x})$, спроектируем его на ось ω. Если $\overline{\omega}$ – правый край такой проекции, то выберем $\omega_M \le \overline{\omega}$ так, чтобы проекция S_ω множества неопределенности $S(\omega_M)$ на ось ω содержала $\overline{\omega}$ на своем правом краю. Если $\overline{\omega}$ – левый край, то выберем $\omega_M \ge \overline{\omega}$ так, чтобы $\overline{\omega}$ лежала на левом краю проекции S_ω. Такое подбрасывание замера обеспечивает попадание точки $(\overline{\omega}, \overline{x})$ в информационное множество $I = G\bigcap S$. Символом $\overline{\Omega}$ обозначим стратегию второго игрока, основанную на выборе точки $(\overline{\omega}, \overline{x})$. В частном случае $x_0 = x^0$ стратегия $\overline{\Omega}$ является оптимальной.

§ 6. Результаты моделирования

Моделируется движение системы (2.1), неполнота информации задается соотношениями (2.2), (2.3). Формулы алгоритмов управления взяты из вспомогательной дифференциальной игры с неполной информацией. Предусмотрена возможность задания нескольких вариантов формирования замеров (в том числе на основе стратегии второго игрока из вспомогательной дифференциальной игры), а также управляющих воздействий v_x и v_z убегающего.

Перечень исходных данных (в разностных координатах):
– номинальное начальное расстояние по вертикали $x_{NOM} = 80000$ м,
– множество, ограничивающее возможные начальные положения,

$$B = \{(x, z): \ |\,x - 80000\,| \le 10000, \ \ |\,z\,| \le 2000\},$$

– номинал вектора начальной скорости по вертикали $V_{NOMx} = -5000$ м/с,
– множество, ограничивающее возможные начальные скорости,

$$D = \{(V_x, V_z): \ |\,V_x + 5000\,| \le 100, \ \ |\,V_z\,| \le 100\},$$

– величина одного импульса $\Delta\Upsilon = 5$ м/с,
– количество импульсов $N = 70$,
– множество, ограничивающее ускорения убегающего,

$$Q = \{(v_x, v_z): \ | v_x | \leq \mu, \ \ | v_z | \leq \nu\}, \quad \mu = 2, \quad \nu = 2,$$

– константы в ограничении на максимальную величину погрешности замера угловой скорости линии визирования $c_1 = 0.3$, $c_2 = 0.0008$ рад/с.

Указанные исходные данные известны преследователю. Подчеркнем, что B, D – предварительно заданные множества, в которых должны лежать положение и скорость разностной точки. Какой-либо более точной информацией преследователь (до начала процесса) не обладает.

Будем применять за преследователя три способа управления по принципу обратной связи, соответствующих тем, что введены в § 4. Выберем шаг Δ дискретной схемы наблюдения и управления равным 0.1 с.

Начальное информационное множество $G(t_0)$: $[x_0, x^0] = [70000,\ 90000]$, сечение при любом $x \in [x_0, x^0]$ – отрезок, крайние точки (в проекции на ось ω) возьмем в виде

$$\omega_0(x) = \frac{-100x - 5100 \cdot 2000}{x^2}, \qquad \omega^0(x) = \frac{100x + 5100 \cdot 2000}{x^2}.$$

Поскольку истинное значение угловой скорости в момент t подсчитывается по формуле

$$\omega(t) = \frac{\dot{z}(t)x(t) - \dot{x}(t)z(t)}{x^2(t) + z^2(t)},$$

то $G(t_0)$ охватывает все возможные положения пар $\omega(t_0), x(t_0)$ на плоскости ω, x, согласованные с ограничениями (2.3) при указанных выше множествах B, D.

Информационное множество при численной реализации задается конечным числом отрезков. В представленных ниже результатах количество отрезков в начальном множестве $G(t_0)$ принято равным 21. По ходу процесса число отрезков в информационном множестве может убывать. Если в какой-то момент число отрезков становится меньше заданного числа (в нашем случае 11), вводятся дополнительные, чтобы общее число отрезков удвоилось. В алгоритме построения информационных множеств используем величину ограничения на ускорение убегающего по оси z несколько больше заданной, а именно 2.5 м/с^2 вместо 2 м/с^2. Это делается для того, чтобы обеспечить невырождение информационных множеств при численной реализации. Возьмем порог $\varepsilon = 500$ м. Управление преследователя прекращается, когда информационное множество, просчитываемое им по формулам § 3, целиком уходит по координате x под уровень ε, или же когда расстояние от истинной разностной точки $(x(t), z(t))'$ до нуля становится меньше ε. Последнее условие ранее не упоминалось. Оно учитывает тот факт, что при малом расстоянии до убегающего преследователь перестает получать информацию об угловой скорости линии визирования.

Говоря о способах формирования замеров $\omega_M(t_i)$, $i = 0, 1, 2, ...$, и управляющих воздействий v_x и v_z, укажем два варианта.

1). Значение $\omega_M(t_i)$ в каждый момент t_i вырабатывается при помощи датчика случайных чисел с равномерным распределением в диапазоне

$[\omega(t_i)-\chi,\ \omega(t_i)+\chi]$, где $\chi = c_1 \mid \omega(t_i) \mid + c_2$, а $\omega(t_i)$ – истинная угловая скорость. Воздействия v_x и v_z являются постоянными на всем интервале времени и выбираются в начальный момент t_0 из множества Q при помощи датчика случайных чисел с равномерным распределением.

2). Второй вариант формирования ω_M, v_x, v_z назовем игровым. В этом варианте ω_M вырабатывается подобно правилу построения стратегии $\overline{\Omega}$, описанному в § 5, но с учетом дополнительного требования (там отсутствовавшего), что замер $\omega_M(t_i)$ должен лежать в промежутке $[\omega(t_i)-\chi,\ \omega(t_i)+\chi]$. Выбор ω_M: если точка $(\overline{\omega}, \overline{x})$ лежит на правом (левом) краю множества $G(t_i)$, то задаем $\omega_M(t_i)$ так, чтобы правый (левый) край множества неопределенности $S(\omega_M(t_i))$ был максимально приближен к этой точке. Выбор управляющих воздействий v_x, v_z определим следующим образом. Если $x(t_0) \geq (x_0 + x^0)/2$, положим $v_x \equiv \mu$; в случае $x(t_0) < (x_0 + x^0)/2$ пусть $v_x \equiv -\mu$. Таким образом, управление v_x постоянно на всем промежутке движения. Управление v_z выбираем заново в каждый момент t_i и держим постоянным на $[t_i, t_{i+1})$: если просчитанная на момент t_{i+1} точка $(\overline{\omega}, \overline{x})$ лежит на правом краю множества $G(t_{i+1})$, примем $v_z(t_i) = \nu$; если на левом, то $v_z(t_i) = -\nu$.

Текущее значение $\omega(t_i)$ истинной угловой скорости линии визирования вычисляем по координатам $x(t_i)$, $z(t_i)$, $\dot{x}(t_i)$, $\dot{z}(t_i)$ системы (2.1).

Поскольку результаты преследования в каждой отдельной реализации носят "случайный" характер (многое зависит, в частности, от последнего импульса перед прохождением уровня ε), то эффективность того или иного выбранного закона управления будем оценивать при помощи статистического моделирования. Суть его в следующем. Фиксируем способ управления преследователя, а также один из вариантов формирования замеров и ускорений убегающего. Задаем некоторые подмножества $B^\diamond$, $D^\diamond$ множеств B, D. Просчитываем 100 реализаций движения. Разброс начальных положений и скоростей осуществляем в множествах $B^\diamond$, $D^\diamond$ при помощи датчика случайных чисел с равномерным распределением. Для каждой реализации движения подсчитываем минимальное расстояние вдоль движения (фактический промах) и количество истраченных импульсов. По 100 реализациям строим интегральный закон распределения вероятностей промаха в практически интересном интервале от 0 до 5 м. Реализации с промахом больше 5 м проявляются в том, что график закона не достигает единицы. Энергетические затраты преследователя характеризуем графиком интегрального закона распределения вероятностей расхода импульсов.

Приведем результаты статистического моделирования для случая, когда

$$B^\diamond = \{(x,z):\ \mid x - 80000 \mid \leq 25,\ \ \mid z - 100 \mid \leq 25\},$$

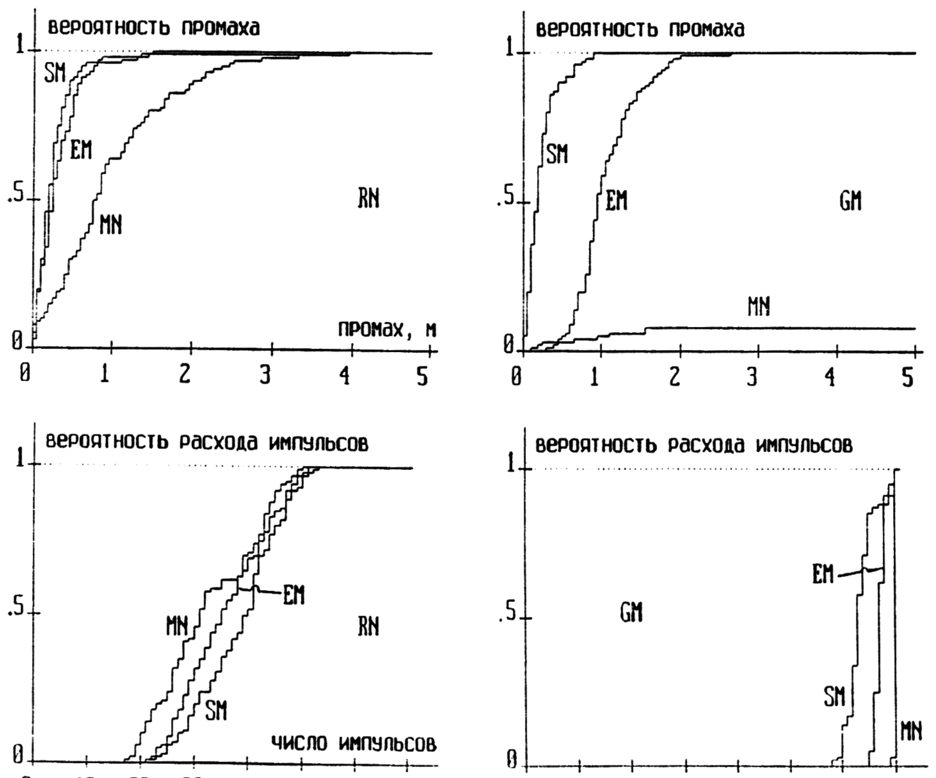
$$D^\diamond = \{(V_x,V_z):\ \mid V_x + 5000 \mid \leq 5,\ \ \mid V_z - 10 \mid \leq 5\}.$$

Таким образом, фактический разброс осуществляем вблизи начального положения $x = 80000$ м, $z = 100$ м и начальной скорости $V_x = -5000$ м/с, $V_z = 10$ м/с. Множества $B^\diamond$, $D^\diamond$ неизвестны преследователю.

Графики законов распределения вероятностей промаха и числа истраченных импульсов представлены на рис. 3. Используются следующие обозначения способов управления преследователя: SM – управление, основанное на стратегии поддержания симметрии прогнозируемого промаха, MN – способ, базирующийся на расчете точки максимума некомпенсируемого промаха, EM – эмпирический выбор отрезка из информационного множества. В эмпирическом способе функция s взята в виде $s(\eta) = 1/\eta$. Первый (второй) вариант формирования замеров и ускорений убегающего обозначим через RN (GM). Для сочетания MN–GM в большинстве реализаций 70 импульсов растрачиваются намного раньше момента окончания процесса, поэтому промах для них существенно больше 5 м.

Второй способ управления преследователя дает более плохие результаты, чем первый или третий.

Графики на рис. 4 показывают изменение параметров вдоль единичных реализаций для сочетаний SM–RN и SM–GM. Начальные координаты: $x(t_0) = 80000$ м, $z(t_0) = 100$ м, $\dot{x}(t_0) = -5000$ м/с, $\dot{z}(t_0) = 10$ м/с. Представлены зависимости от t замеряемой ω_M и истинной ω угловых скоростей, графики текущего импульсного управления. В отличие от способа RN при игровом способе GM график $\omega_M(t)$ не носит характера случайной функции – скорее это функция того же типа, что и $\omega(t)$. Промах для сочетания SM–RN составляет 0.17 м, для сочетания SM–GM он равен 1.88 м. В первом варианте израсходовано 43 импульса, во втором – 64 импульса.



А Б

Рис. 3. Законы распределения вероятностей промаха и числа истраченных импульсов; А – случайная помеха, Б – игровая помеха.

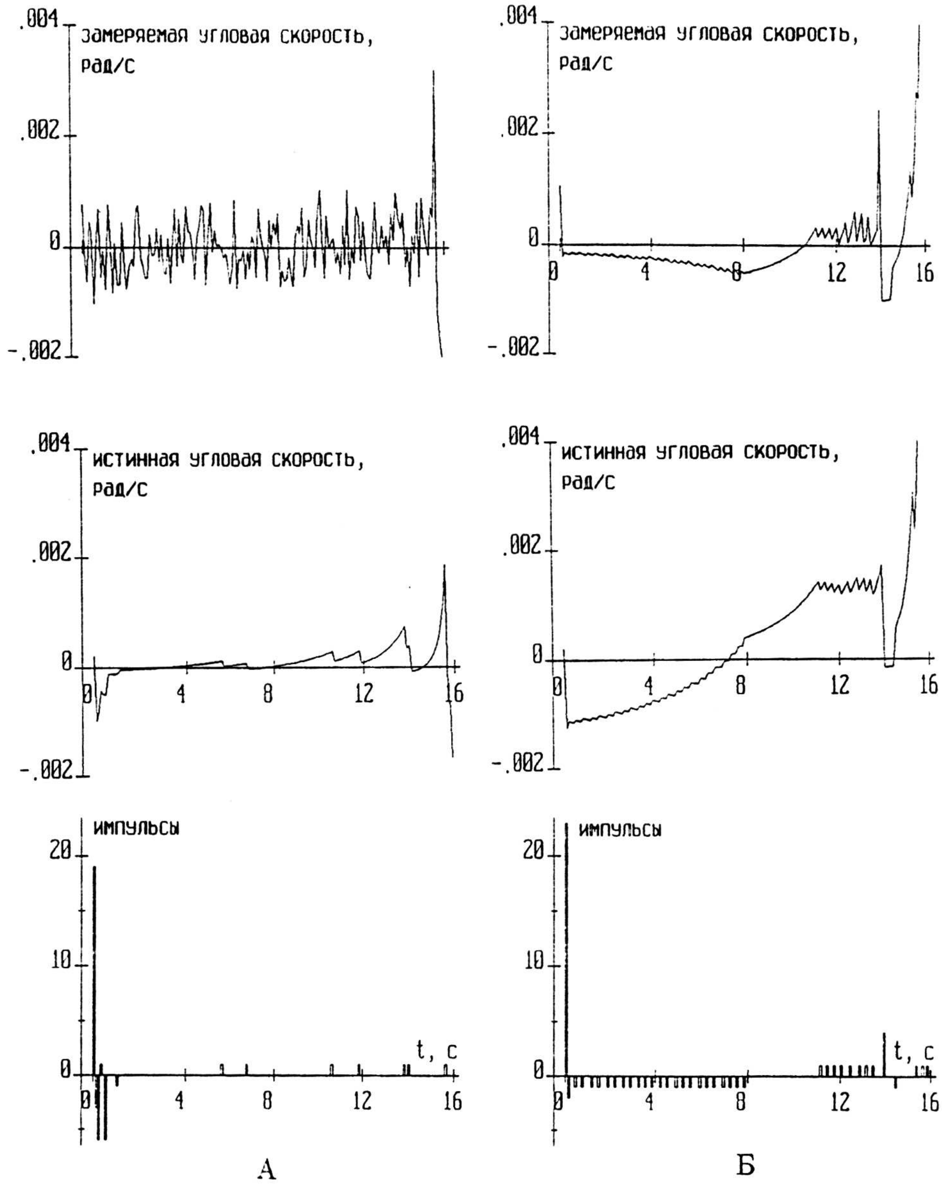


Рис. 4. Изменение параметров вдоль единичных реализаций; А — случайная помеха, Б — игровая помеха.

Замечание

Предложенное решение плоской задачи преследования можно использовать и в пространственном трехмерном случае, когда помимо координаты z добавляется аналогичная ей координата y. Пусть импульсное управляющее воздействие может подаваться по произвольному направлению в плоскости y, z (поперечная плоскость). Поступим следующим образом. Используя результаты решения плоской задачи, рассчитываем фиктивные управляющие воздействия (без огрубления с учетом дискретности) по компонентам y, z. Обозначим их k_y, k_z. Затем вычисляем

$\sqrt{k_y^2 + k_z^2}$ и огрубляем до целого числа. Направление действия найденного числа импульсов задаем через k_y, k_z.

Поступила 13.10.91

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н.** Игровые задачи о встрече движений.– М.: Наука, 1970.– 420 с.
2. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры.– М.: Наука, 1974.– 456 с.
3. **Куржанский А.Б.** Управление и наблюдение в условиях неопределенности.– М.: Наука, 1977.– 392 с.
4. **Черноусько Ф.Л., Меликян А.А.** Игровые задачи управления и поиска.– М.: Наука, 1978.– 270 с.
5. **Шелементьев Г.С.** Об одной задаче коррекции движения // Прикл. математика и механика.– 1969.– Т.33, Вып.2.– С.251–260.
6. **Пацко В.С.** Модельный пример игровой задачи преследования с неполной информацией. I, II// Дифференц. уравнения.– 1971.– Т.7, N. 3.– С.424–435.; 1972.– Т.8, N. 8.– С.1423–1434.
7. **Меликян А.А., Черноусько Ф.Л.** Некоторые минимаксные задачи управления с неполной информацией // Прикл. математика и механика.– 1971.– Т.35, Вып.6.– С.952–961.
8. **Красовский Н.Н., Осипов Ю.С.** Задача управления с неполной информацией // Изв. АН СССР. Механика твердого тела.– 1973.– N. 4.– С.9–14.
9. **Кряжимский А.В., Филиппов С.Д.** Об одной игровой задаче сближения двух точек на плоскости в условиях неполной информации // Задачи упр. с неполной информацией. Свердловск,– 1976.– С.62–77.
10. **Субботина Н.Н., Субботин А.И.** Игровая задача управления при неполной информации // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика.– 1977. N. 5. – С.14–23.
11. **Merz A.W.** Stochastic guidance laws in satellite pursuit-evasion // Comput. Math. Appl. – 1987.– V.13, N. 1–3.– P.151-156.
12. **Merz A.W.** Noisy satellite pursuit-evasion guidance // J. Guidance. – 1989.– V.12, N. 6.– P.901–905.
13. **Неупокоев Ф.К.** Стрельба зенитными ракетами.– М.: Воениздат,– 1991.– 343 с.
14. **Розыев И., Субботин А.И., Тарасьев А.М.** Об одной игровой задаче сближения для двух слабо управляемых объектов / ИММ УНЦ АН СССР.– Свердловск.– 1986.– 25 с.– Деп. в ВИНИТИ 29.12. 86, N 8976 - В.
15. **Пашков А.Г.** Об одной игре сближения // Прикл. математика и механика.– 1970.– Т.34, Вып.5.– С.804–811.