Институт математики
и механики
им. Н.Н. Красовского

«Динамические системы: устойчивость, управление, дифференциальные игры» (SCDG2024)

Материалы Международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения академика Н.Н. Красовского

Екатеринбург, 9–13 сентября 2024 г.

“Dynamic Systems: Stability, Control, Differential Games” (SCDG2024)

Proceedings of the International Conference devoted to the 100th anniversary of Academician N.N. Krasovskii

Yekaterinburg, Russia, 9–13 September 2024

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского
Уральского отделения Российской академии наук

«Динамические системы: устойчивость, управление, дифференциальные игры» (SCDG2024)

Материалы Международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения академика Н.Н. Красовского

Екатеринбург, 9–13 сентября 2024 г.

“Dynamic Systems: Stability, Control, Differential Games” (SCDG2024)

Proceedings of the International Conference devoted to the 100th anniversary of Academician N.N. Krasovskii

Yekaterinburg, Russia, 9–13 September 2024

Екатеринбург
2024

УДК 517.977

ББК 22.161.8

У81

«Динамические системы: устойчивость, управление, дифференциальные игры» (SCDG2024): Материалы Международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения академика Н.Н. Красовского, (Екатеринбург, 9–13 сентября 2024 г.). — Екатеринбург: ИММ УрО РАН, ООО «Издательство УМЦ УПИ», 2024. — 521 с.

Редакторы: В.И. Максимов, А.М. Тарасьев, Т.Ф. Филиппова

Конференция организована в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (номер соглашения 075-02-2024-1377).

UDC 517.977

LBC 22.161.8

“Dynamic Systems: Stability, Control, Differential Games” (SCDG2024): Proceedings of the International Conference devoted to the 100th anniversary of Academician N.N. Krasovskii, Yekaterinburg, Russia, 9–13 September 2024.

Editors: T.F. Filippova, V.I. Maksimov, A.M. Tarasyev

Published by: Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of Ural Branch of the Russian Academy of Sciences (IMM UB RAS), Yekaterinburg, Russia

The Conference is organized as part of research conducted in the Ural Mathematical Center with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Agreement number 075-02-2024-1377).

ISBN 978-5-8295-0908-8

УДК 517.977

Машина Дубинса с интегральным ограничением на управление: двумерное множество достижимости

В.С. Пацко, Г.И. Трубников, А.А. Федотов

ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия,
patsko@imm.uran.ru

Аннотация: Рассматривается кинематическая модель "машина Дубинса", в которой скалярное управление стеснено квадратичным интегральным ограничением. Фиксируется трехмерное начальное фазовое состояние и строится двумерное множество достижимости "в момент" на плоскости геометрических координат. Исследуются движения, идущие на границу множества достижимости. В частности, установлено, что любые такие движения имеют не более одного момента смены знака управления. В основе анализа лежит принцип максимума Понтрягина. Приводятся примеры численного построения множества достижимости. Делается сравнение со случаем геометрического ограничения на управление.

Ключевые слова: машина Дубинса, интегральное ограничение на управление, двумерное множество достижимости в геометрических координатах, принцип максимума Понтрягина, численные построения

1. Введение и постановка задачи

"Машина Дубинса" (другое название — "unicycle") — одна из наиболее популярных нелинейных кинематических моделей движения управляемого объекта на плоскости. Переменные x, y задают точечное положение объекта на плоскости, угол φ — направление вектора скорости. Величина скорости считается постоянной (обычно полагают равной 1). Скалярное управление $u(t)$ определяет мгновенную угловую скорость. Уравнения движения:

$$\dot{x} = \cos\varphi, \quad \dot{y} = \sin\varphi, \quad \dot{\varphi} = u(t). \tag{1}$$

Описанную модель с геометрическим ограничением $|u(t)| \le \mu$ на управление широко используют при упрощенном рассмотрении движения самолета в горизонтальной плоскости, при решении различных задач управляемого движения морских судов, подводных аппаратов и т.д. Для решения многих задач полезным является понятие двумерного множества достижимости: совокупность всех точек $(x, y)^{\mathsf{T}}$, в каждую из которых возможен перевод системы (1) в момент t_f из фиксированного начального трехмерного фазового состояния. Наиболее полно двумерное множество достижимости для случая геометрического ограничения на управление описано в статье [1].

В данной работе двумерное множество достижимости (обозначим его $\mathcal{G}(t_f, \mu)$) исследуется при интегральном квадратичном ограничении

$$\int_{t_0}^{t_f} u^2(t)dt \leq \mu.$$

Ограничение на мгновенные значения $u(t)$ отсутствует.

Задачам с такой же кинематикой, как в машине Дубинса, но с оптимизацией интегрального функционала

$$J\left(u(\cdot)\right) = \int_{t_0}^{t_f} u^2(t)dt$$

посвящен большой раздел (Приложение 1) в книге Л. Эйлера [2]. “Эластиками Эйлера” стали называть движения с трехмерными краевыми условиями $(x(t_0), y(t_0), \varphi(t_0))^{\mathsf{T}}$ и $(x(t_f), y(t_f), \varphi(t_f))^{\mathsf{T}}$, удовлетворяющие необходимым условиям оптимальности. Вопросам локальной и глобальной оптимальности эластик Эйлера, когда правое краевое условие является трехмерным, посвящены работы Ю. Л. Сачкова и А. А. Ардентова (см., например, [3, 4]). Если правое краевое условие является двумерным и задано в координатах x, y, то такие эластики называются свободными [5]. Исследование оптимальности свободных эластик тесно связано с изучением границы двумерного множества достижимости $\mathcal{G}(t_f, \mu)$.

2. Управления, ведущие на границу двумерного множества достижимости

Изучая двумерное множество достижимости $\mathcal{G}(t_f, \mu)$, используем факты, установленные при интегральном ограничении для трехмерного множества достижимости $G(t_f, \mu)$. Соответствующие утверждения, базирующиеся на принципе максимума Понтрягина (ПМП) с уточнением из работы [6] для движений, ведущих на границу множества $G(t_f, \mu)$, приведены в [7].

В работе [8] обосновано дополнительное краевое условие для сопряженной системы ПМП, которому удовлетворяют движения, ведущие на границу двумерного множества $\mathcal{G}(t_f, \mu)$. Опираясь на него, доказываем утверждение о том, что любое программное управление $u(\cdot)$, осуществляющее перевод на границу множества $\mathcal{G}(t_f, \mu)$, является непрерывным и имеет не более одного момента смены знака управления. Это позволяет численно построить границу множества достижимости $\mathcal{G}(t_f, \mu)$ с выделением на его границе дуг, куда ведут управления без смены знака, и участков, переход на которые требует одного момента смены знака управления.

Структурные свойства границы множества $\mathcal{G}(t_f, \mu)$ во многом аналогичны тому, что имеет место для двумерного множества достижимости при геометрическом ограничении на управление. Множество достижимости $\mathcal{G}(t_f, \mu)$ симметрично относительно оси x. Структура границы зависит только от произведения $t_f \cdot \mu$. Последнее позволяет ограничиться изучением закономерности изменения границы при $t_f = 1$ или же, наоборот, при $\mu = 1$. При $\mu = 1$ существует промежуток $[t_f^{(1)}, t_f^{(2)})$, для любого t_f из которого множество $\mathcal{G}(t_f, \mu = 1)$ не является односвязным.

3. Результаты моделирования

На рис. 1 показаны двумерные множества достижимости при $\mu = 1$ для возрастающего набора значений t_f. Начальный момент t_0 и начальное фазовое состояние $(x_0, y_0, \varphi_0)^\top$ полагаем нулевыми.

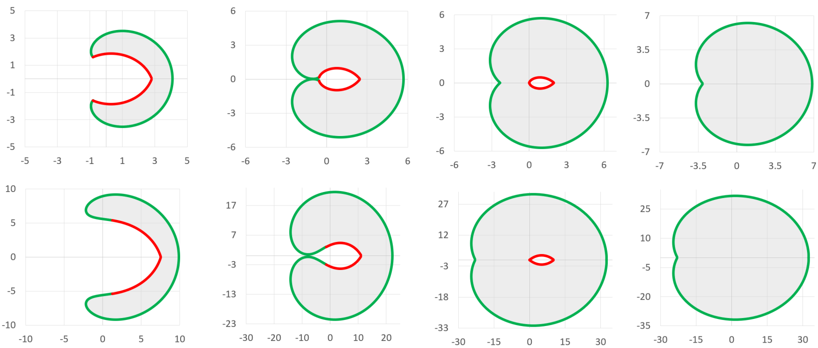

Рис. 1. Двумерные множества достижимости при $\mu = 1$. Верхний ряд – геометрическое ограничение на управление: $t_f = 1.3\pi$, $t_f = 1.81\pi$, $t_f = 2\pi$, $t_f = 2.178\pi$. Нижний ряд – интегральное ограничение: $t_f = (\pi)^2$, $t_f = (1.5166\pi)^2$, $t_f = (1.6843\pi)^2$, $t_f = (1.8166\pi)^2$.

Верхний ряд соответствует геометрическому ограничению на управление, нижний — интегральному. Моменты времени t_f подобраны так, чтобы была видна похожесть структуры множеств достижимости при геометрическом и интегральном ограничениях. Зеленым цветом отмечены участки границы, куда ведут управления без смены знака, красным — с одним моментом смены знака. Второе и третье множества в каждом ряду не являются односвязными.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Cockayne E.J., Hall G.W.C.* Plane Motion of a Particle Subject to Curvature Constraints // SIAM J. Control Optim., 1975. Vol. 13. No. 1. P. 197–220.

2. *Эйлер Л.* Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума, либо минимума или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле. М., Л.: Гостехиздат, 1934. 600 с.
3. *Ардентов А.А.* Кратные решения в задаче Эйлера об эластиках // АиТ, 2018. Т. 7. С. 22–40.
4. *Ардентов А.А., Сачков Ю.Л.* Решение задачи Эйлера об эластиках // АиТ, 2009. Т. 4. С. 78–88.
5. *Miura T.* Polar tangential angles and free elasticae // Mathematics in Engineering, 2021. Vol. 3. P. 1-–12. DOI: 10.3934/mine.2021034
6. *Гусев М.И., Зыков И.В.* Об экстремальных свойствах граничных точек множеств достижимости управляемых систем при интегральных ограничениях // Тр. ИММ УрО РАН, 2017. Т. 23. № 1. С. 103–115.
7. *Patsko V.S., Trubnikov G.I., Fedotov A.A.* Reachable Set of the Dubins Car with an Integral Constraint on Control // Doklady Math., 2023. Vol. 108. Suppl. 1. P. S34-—S41. DOI: 10.1134/S106456242360080X
8. *Зыков И.В.* О задаче достижимости для нелинейной управляемой системы с интегральными ограничениями // CEUR Workshop Proceedings, 2017. Т. 1894. С. 88–97.

Dubins Car with Integral Control Constraint: Two-Dimensional Reachable Set

V.S. Patsko, G.I. Trubnikov, A.A. Fedotov

IMM UB RAS, Yekaterinburg, Russia, patsko@imm.uran.ru

Abstract: We consider the kinematic model "Dubins car", in which scalar control is constrained by a quadratic integral constraint. The three-dimensional initial phase state is fixed and a two-dimensional reachable set "at the moment" is constructed on the plane of geometric coordinates. Motions going to the boundary of the reachable set are studied. In particular, it has been established that any such motions have no more than one instant of changing the control sign. The analysis is based on the Pontryagin maximum principle. Examples of numerical construction of the reachable set are given. A comparison is made with the case of a geometric control constraint.