Институт математики
и механики
им. Н.Н. Красовского

«Динамические системы: устойчивость, управление, дифференциальные игры» (SCDG2024)

Материалы Международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения академика Н.Н. Красовского

Екатеринбург, 9–13 сентября 2024 г.

"Dynamic Systems: Stability, Control, Differential Games" (SCDG2024)

Proceedings of the International Conference devoted to the 100th anniversary of Academician N.N. Krasovskii

Yekaterinburg, Russia, 9–13 September 2024

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского
Уральского отделения Российской академии наук

«Динамические системы: устойчивость, управление, дифференциальные игры» (SCDG2024)

Материалы Международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения академика Н.Н. Красовского

Екатеринбург, 9–13 сентября 2024 г.

“Dynamic Systems: Stability, Control, Differential Games” (SCDG2024)

Proceedings of the International Conference devoted to the 100th anniversary of Academician N.N. Krasovskii

Yekaterinburg, Russia, 9–13 September 2024

Екатеринбург
2024

УДК 517.977

ББК 22.161.8

У81

«Динамические системы: устойчивость, управление, дифференциальные игры» (SCDG2024): Материалы Международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения академика Н.Н. Красовского, (Екатеринбург, 9–13 сентября 2024 г.). — Екатеринбург: ИММ УрО РАН, ООО «Издательство УМЦ УПИ», 2024. — 521 с.

Редакторы: В.И. Максимов, А.М. Тарасьев, Т.Ф. Филиппова

Конференция организована в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (номер соглашения 075-02-2024-1377).

UDC 517.977

LBC 22.161.8

“Dynamic Systems: Stability, Control, Differential Games” (SCDG2024): Proceedings of the International Conference devoted to the 100th anniversary of Academician N.N. Krasovskii, Yekaterinburg, Russia, 9–13 September 2024.

Editors: T.F. Filippova, V.I. Maksimov, A.M. Tarasyev

Published by: Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of Ural Branch of the Russian Academy of Sciences (IMM UB RAS), Yekaterinburg, Russia

The Conference is organized as part of research conducted in the Ural Mathematical Center with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Agreement number 075-02-2024-1377).

ISBN 978-5-8295-0908-8

мени потенциала. Соответствующее уравнение Шредингера — это линейное дифференциальное уравнение на гильбертовом пространстве H квадратично интегрируемых функций на окружности. Задача состоит в построении периодической по времени унитарной замены переменных на H, преобразующей оператор Шредингера в оператор, не зависящий от времени.

Ключевые слова: оператор Шредингера, периодический по времени потенциал.

On the Infinite-Dimensional Floquet Theory

Dmitry V. Treschev

Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, treschev@mi-ras.ru

Abstract: I consider the Schrödinger operator that describes the dynamics of a quantum particle on a circle in the field of a time-periodic potential. The corresponding Schrödinger equation is a linear differential equation on the Hilbert space H of quadratically integrable functions on the circle. The problem is to construct a time-periodic unitary replacement of variables on H that transforms the Schrödinger operator into a time-independent operator.

УДК 517.977

Аналитика эллиптических функций при построении двумерного множества достижимости машины Дубинса с интегральным ограничением на управление

Г.И. Трубников

УрФУ, Екатеринбург, Россия, jora_it@mail.ru

Аннотация: Исследуется задача о построении множества достижимости машины Дубинса в плоскости геометрических координат. На управление наложено интегральное ограничение, что естественным образом приводит к аналитическим выкладкам с использованием эллиптических функций Якоби и эллиптических интегралов первого и второго рода. На основе свойств системы и типа ограничения в данной задаче получено параметрическое описание траекторий на плоскости, ведущих на границу искомого множества достижимости. Для расчета каждой траектории требуется численное решение одного алгебраического уравнения. На основе полученных соотношений составлен алгоритм численного построения границы множества достижимости как совокупности конечных точек указанных траекторий. Исследована структура двумерного множества достижимости. Приведены результаты построения множеств достижимости для различных значений конечного времени и запаса энергетического ресурса.

Ключевые слова: машина Дубинса, интегральное ограничение на управление, двумерное множество достижимости, принцип максимума Понтрягина, эллиптические функции, численные построения.

1. Постановка задачи

Требуется построить множество достижимости машины Дубинса в плоскости геометрических координат x, y в заданный момент времени t_f. Кинематика движения описывается соотношениями

$$\dot{x} = \cos\varphi(t), \quad \dot{y} = \sin\varphi(t), \quad \dot{\varphi} = u.$$

На управление $u(t)$ наложено интегральное квадратичное ограничение

$$\int_{t_0}^{t_f} u^2(t)dt \leq \mu.$$

Начальное положение на плоскости и начальное значение угловой координаты считаются равными нулю.

2. Построение множеств достижимости

Опираемся на рассмотренную в [1] систему дифференциальных уравнений 6 порядка, возникающую при применении принципа максимума Понтрягина к кинематике машины Дубинса с интегральным ограничением на управление. Из системы простыми преобразованиями получаем уравнение $\ddot{\varphi} = \rho\sin(\varphi + \beta_3)$ для угловой координаты φ. Параметры ρ, β_3 связаны с константами сопряженной системы принципа максимума. В работах [2, 3] доказан ряд утверждений для управлений, удовлетворяющих условиям выхода на границу множества достижимости. Проинтегрировав уравнение для угловой координаты с учетом этих утверждений, находим закон $\varphi(t)$. Подставив $\varphi(t)$ в уравнения $\dot{x} = \cos\varphi(t)$, $\dot{y} = \sin\varphi(t)$ и применив свойства эллиптических функций Якоби (описанных в [4]), получаем параметрические формулы для движений, приводящих на границу множества достижимости:

$$\begin{cases} x(t,k) = \cos(\beta_3)C(t,k) + \sin(\beta_3)S(t,k), \\ y(t,k) = \cos(\beta_3)S(t,k) - \sin(\beta_3)C(t,k); \\ C(t,k) = -t_f + 2\varepsilon(\sqrt{\rho}(t+\tau),k) - 2\varepsilon(\sqrt{\rho}\,\tau,k), \\ S(t,k) = \dfrac{2k}{\sqrt{\rho}}(\mathrm{cn}(\sqrt{\rho}(t+\tau),k) - \mathrm{cn}(\sqrt{\rho}\,\tau,k)). \end{cases} \qquad (1)$$

Здесь $\mathrm{cn}(a,k)$ — эллиптический косинус, $\varepsilon(a,k)$ — эпсилон-функция Якоби, $t \in [t_0, t_f]$, $t_0 = 0$.

Чтобы выразить параметр τ через k, численно решаем уравнение, обусловленное интегральным ограничением:

$$\mu + \rho(1-k^2)t_f - \sqrt{\rho}(\varepsilon(\sqrt{\rho}(t_f+\tau),k) - \varepsilon(\sqrt{\rho}\,\tau,k)) = 0.$$

Оставшиеся параметры ρ, β_3 выражаются через k и τ аналитически:

$$\rho = \frac{F(\pi/2,k)}{t_f+\tau}, \quad \beta_3 = 2\arcsin(k\ \mathrm{sn}(\sqrt{\rho}\,\tau,k)).$$

При каждом значении параметра k уравнения (1) описывают траекторию, которая совпадает с некоторой эластикой Эйлера [5]. Примеры траекторий показаны красным пунктиром на рис. 1. Зафиксировав $t = t_f$ и изменяя k, получаем часть границы множества достижимости, лежащую выше оси x. Верхней части границы достаточно для построения всего множества достижимости в силу его симметрии относительно оси абсцисс. Так как полученные соотношения отвечают лишь необходимым условиям попадания на границу, то некоторые точки, построенные по ним, будут лежать во внутренности множества достижимости. На рис. 1 такие точки показаны серым пунктиром. Проведенное моделирование показало, что так же, как и для случая геометрических ограничений на управление [6], множество достижимости теряет односвязность при некоторых значениях t_f и μ. Такой эффект можно наблюдать на рис. 1 б, а также на рис. 2 для красного и зеленого множеств достижимости.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Patsko V.S., Trubnikov G.I., and Fedotov A.A.* Reachable Set of the Dubins Car with an Integral Constraint on Control // Doklady Mathematics, 2023. Vol. 108. Suppl. 1. P. S34–S41. DOI: 10.1134/S106456242360080X
2. *Гусев М.И., Зыков И.В.* Об экстремальных свойствах граничных точек множеств достижимости управляемых систем при интегральных ограничениях // Тр. ИММ УрО РАН, 2017. Т. 23. № 1. С. 103–115.
3. *Зыков И.В.* О задаче достижимости для нелинейной управляемой системы с интегральными ограничениями // CEUR Workshop Proc., 2017. Т. 1894. С. 88–97.
4. *Сикорский Ю.С.* Элементы теории эллиптических функций: С приложениями к механике. М.: КомКнига, 2006. 368 с.
5. *Эйлер. Л.* Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума, либо минимума или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле. М., Л.: Гостехиздат, 1934. 600 с.
6. *Cockayne E. J. and Hall G. W. C.* Plane Motion of a Particle Subject to Curvature Constraints // SIAM J. Control Optim., 1975. Vol. 13. No. 1. P. 197–220.

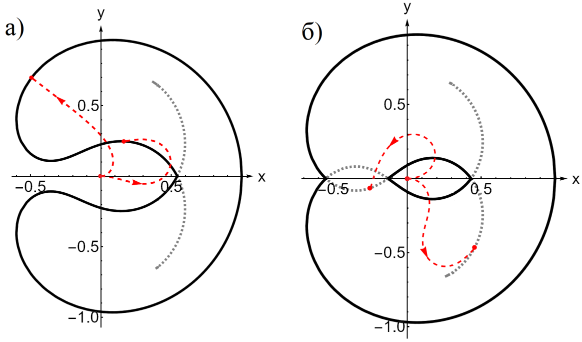

Рис. 1. Примеры множеств достижимости а) односвязное при $t_f = 1,\ \mu = 20$; б) неодносвязное при $t_f = 1,\ \mu = 25$.

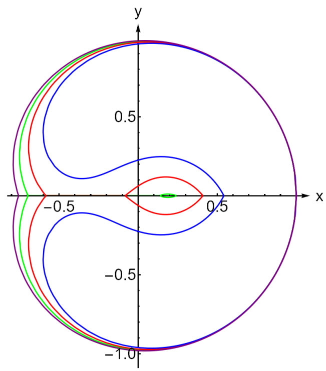

Рис. 2. Развитие множества достижимости при фиксированном $t_f = 1$. Параметр μ принимает значения 20, 26, 32, 38.

Analytics of Elliptic Functions in the Construction of a Two-Dimensional Reachability Set of a Dubins Car with an Integral Constraint on Control

G.I. Trubnikov

Ural Federal University, Yekaterinburg, Russia, jora_it@mail.ru

Abstract: The problem of constructing a reachable set for a Dubin's car in the plane of geometric coordinates is studied. An integral constraint is imposed on the control, which naturally leads to analytical calculations using Jacobi elliptic functions and elliptic integrals of the first and second kind. Based on the properties of the system and the type of constraint in this problem, a parametric description of the plane trajectories leading to the boundary

of the desired reachable set is obtained. To calculate each trajectory, a numerical solution of one algebraic equation is required. Based on the obtained relations, an algorithm has been elaborated for numerical constructing the reachable set boundary as a set of endpoints of the indicated trajectories. The structure of the two-dimensional reachable set is studied. The results of constructing the reachable sets for various values of the final time and energy resource reserve are presented.

УДК 518.9

Дифференциально-игровые модели олигополии Курно с дополнительными эффектами

Г.А. Угольницкий[1], **А.В. Королев**[2]

[1] Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича ЮФУ, Ростов-на-Дону, Россия, gaugolnickiy@sfedu.ru
[2] НИУ ВШЭ, Санкт-Петербург, Россия, avkorolev@hse.ru

Аннотация: Описана дифференциально-игровая модель олигополии Курно с учётом воздействия на окружающую среду и сетевой структуры взаимодействия игроков. Получены явные выражения для равновесных стратегий и соответствующих выигрышей. На основе данной модели построена дифференциальная игра в форме характеристической функции Громовой — Петросяна. Найдено сильно динамически устойчивое подъядро с использованием процедуры распределения дележа. Рассмотрен случай дифференциальной сетевой игры на основе олигополии Курно с прямым взаимодействием и двумя типами игроков. Изучены игры в нормальной форме и в форме характеристической функции, проанализирована динамическая устойчивость их решений. Проведено сравнение результатов, намечены перспективы дальнейших исследований.

Ключевые слова: динамическая устойчивость, дифференциальная игра, олигополия Курно, сетевая структура, характеристическая функция.

Введение

В теории игр хорошо известна проблема неэффективности равновесий: общий выигрыш игроков (общественное благосостояние) при эгоистичном поведении или наличии иерархии не превосходит (обычно строго меньше) общего выигрыша при кооперации. Однако, основная проблема здесь в том, что интересы общества в целом не всегда совпадают с интересами отдельных игроков. Как правило, кооперация выгодна слабым игрокам, в то время как сильные предпочитают сохранять независимость или бороться