

# Множество достижимости для автомобиля Дубинса при несимметричном ограничении на управление

А.С. Симоненко  
Университет ИТМО  
г. Санкт-Петербург  
alena\_simonenko2014@mail.ru

А.А. Федотов  
ИММ УрО РАН  
г. Екатеринбург  
andreyfedotov@mail.ru

## Аннотация

Исследуется множество достижимости в момент для нелинейной управляемой системы третьего порядка, называемой часто «машина Дубинса». Объект перемещается на плоскости с постоянной по величине линейной скоростью и несимметрично заданными ограничениями на повороты вправо и влево. Доказывается утверждение о числе и характере переключений управления, ведущего на границу множества достижимости. Приведены результаты численного построения множеств достижимости.

## 1 Введение

В прикладных работах, опирающихся на математическую теорию управления, очень популярной является модель управляемого объекта, называемая «машина Дубинса». Такая модель задается нелинейной системой дифференциальных уравнений третьего порядка. Две фазовые переменные характеризуют геометрическое положение управляемого объекта на плоскости, третья переменная — угол направления вектора скорости. Величина скорости считается постоянной. Скалярное управляющее воздействие, стесненное геометрическим ограничением, определяет мгновенный радиус разворота.

Машина Дубинса — это управляемый объект (автомобиль или самолет) с простейшей моделью движения в горизонтальной плоскости. В 1957 г. американский математик Л. Дубинс опубликовал теоретическую работу [1] о линии кратчайшей длины с ограниченным радиусом кривизны, соединяющей две точки на плоскости с заданным направлением выхода из первой точки и заданным направлением входа во вторую. Полученные Л. Дубинсом результаты оказались очень полезными при исследовании объектов с ограниченным радиусом разворота и постоянной по величине скоростью передвижения. Именно поэтому такие объекты стали называть машиной Дубинса. В дальнейшем оказалось, что близкие вопросы в 1889 г. изучал российский математик А.А. Марков в работе [2], посвященной проблемам прокладки железных дорог. Динамика простейшего автомобиля использовалась Р. Айзексом в работах по дифференциальным играм [3, 4]. Модель Дубинса применяется при управлении колесными роботами [5], для диспетчерских расчетов в гражданской авиации [6], а также в прикладных работах по построению траекторий движения беспилотных летательных аппаратов в горизонтальной плоскости [7]. В книге [8] Ю.И. Бердышев использовал модель Дубинса для задач оптимального обхода точек на плоскости.

---

*Copyright © by the paper's authors. Copying permitted for private and academic purposes.*

In: A.A. Makhnev, S.F. Pravdin (eds.): Proceedings of the International Youth School-conference «SoProMat-2017», Yekaterinburg, Russia, 06-Feb-2017, published at <http://ceur-ws.org>.

В выкладываемом (<http://sector3.imm.uran.ru/#paper>) тексте исправлено несколько мелких недостатков.

Для машины Дубинса известен синтез оптимального управления в задаче быстродействия в симметричном [9] и несимметричном [10] случаях ограничений на управление. Несимметричный случай возникает, например, при несбалансированности минимальных радиусов разворота вправо и влево.

Целью данной работы является исследование границы множества достижимости *в момент* для несимметричного случая. Существенным образом используется схема рассуждений из статьи [11, 12], в которой рассматривался симметричный случай. Под множеством достижимости  $G(t_f)$  в фиксированный момент времени  $t_f$  понимаем совокупность всех состояний в фазовом пространстве, в каждое из которых возможен перевод системы в момент  $t_f$  из заданного начального состояния при помощи некоторого допустимого управления.

Из анализа структуры множества достижимости в момент вытекают некоторые полезные факты для задачи быстродействия (например, оценка числа переключений и характер переключений оптимального управления). Но в целом, исследование границы множества достижимости в момент и построение оптимального синтеза в задаче быстродействия — это разные задачи.

При исследовании границы множества достижимости используется принцип максимума Понтрягина для управлений, ведущих на границу множества достижимости [13, 14]. Вся граница состоит из нескольких гладких участков, количество которых равно шести для не слишком больших моментов  $t_f$ . С ростом  $t_f$  количество участков может сократиться до четырех. Каждый участок характеризуется своим набором управлений с двумя переключениями, и, таким образом, является двупараметрическим многообразием, задаваемым моментами переключения. На основе доказанного в работе утверждения граница трехмерного множества достижимости в момент может быть рассчитана численно.

Выполнены численные расчеты множеств достижимости с представлением в трехмерном фазовом пространстве.

## 2 Постановка задачи

Пусть движение управляемого объекта на плоскости  $XOY$  описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= V \cos \varphi, \\ \dot{y} &= V \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} &= u, \quad u \in [u_{\min}, u_{\max}], \end{aligned} \quad (1)$$

где  $x, y$  — координаты объекта,  $\varphi$  — угол наклона вектора скорости (рис. 1),  $V$  — величина скорости. Допустимыми программными управлениями  $u(\cdot)$  считаются измеримые функции времени со значениями  $u(t) \in [u_{\min}, u_{\max}]$ . Значения угла  $\varphi$  рассматриваются на промежутке  $(-\infty, \infty)$ .

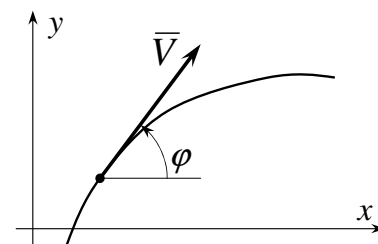


Рис. 1: Система координат.

Фазовый вектор  $(x, y, \varphi)$  системы (1) обозначим через  $z$ . Зафиксируем  $z_0$  — произвольное состояние системы (1) в начальный момент времени  $t_0 = 0$ . Множество достижимости  $G(t_f)$  в момент времени  $t_f \geq t_0$  есть совокупность всех точек  $z$  трехмерного фазового пространства, в каждую из которых возможен перевод системы (1) в момент  $t_f$  при помощи некоторого допустимого управления на промежутке  $[t_0, t_f]$  из начальной точки  $z_0$ .

В работе утверждения из статьи [11, 12] о числе и характере переключения управлений, ведущих на границу множества  $G(t_f)$ , распространяются на случай несимметричного ограничения на управление. Предполагается, что  $u_{\min} < 0 < u_{\max}$ .

## 3 Принцип максимума Понтрягина

Опираясь на результаты из [13, 14], делаем вывод, что множество достижимости  $G(t_f)$  замкнуто, ограничено и для любой точки на границе выполнено утверждение принципа максимума Понтрягина. Запишем соотношения принципа максимума для некоторого допустимого управления  $u^*(\cdot)$ , ведущего на границу множества  $G(t_f)$ . Соответствующее движение системы (1) на интервале  $[t_0, t_f]$  обозначим через  $(x^*(\cdot), y^*(\cdot), \varphi^*(\cdot))$ . Дифференциальные уравнения сопряженной системы имеют вид

$$\dot{\psi}_1 = 0, \quad \dot{\psi}_2 = 0, \quad \dot{\psi}_3 = \psi_1 V \sin \varphi^*(t) - \psi_2 V \cos \varphi^*(t).$$

Принцип максимума устанавливает наличие ненулевого решения  $(\psi_1^*(\cdot), \psi_2^*(\cdot), \psi_3^*(\cdot))$  данной системы, для которого на промежутке  $[t_0, t_f]$  почти всюду выполнено равенство

$$\psi_1^*(t)V \cos \varphi^*(t) + \psi_2^*(t)V \sin \varphi^*(t) + \psi_3^*(t)u^*(t) = \max_{u \in [u_{\min}, u_{\max}]} [\psi_1^*(t)V \cos \varphi^*(t) + \psi_2^*(t)V \sin \varphi^*(t) + \psi_3^*(t)u].$$

По аналогии с [11, 12] отметим следующее. Имеем  $\psi_1^*(t) \equiv \text{const} = \psi_1^*$  и  $\psi_2^*(t) \equiv \text{const} = \psi_2^*$ . Если  $\psi_1^* = 0$  и  $\psi_2^* = 0$ , то  $\psi_3^*(t) = \text{const} \neq 0$ , откуда следует  $u^*(t) \equiv u_{\min}$ , либо  $u^*(t) \equiv u_{\max}$ . В случае, когда хотя бы одно из чисел  $\psi_1^*, \psi_2^*$  не равно нулю, можно записать соотношение для  $\psi_3^*(t)$ :  $\psi_3^*(t) = \psi_1^*y^*(t) - \psi_2^*x^*(t) + C$ .

Исходя из условия  $0 \in (u_{\min}, u_{\max})$ , принцип максимума будет выполнен для  $u^*(t) = 0$ , если  $\psi_3^*(t) = 0$ , т.е. при движении по прямой

$$\psi_1^*y - \psi_2^*x + C = 0. \quad (2)$$

При движении в полуплоскости  $\psi_1^*y - \psi_2^*x + C < 0$  ( $> 0$ ) условие максимума выполнено для  $u^*(t) = u_{\min}$  ( $u^*(t) = u_{\max}$ ). Очевидно, что управления, ведущие на границу множества достижимости и, соответственно, удовлетворяющие условию максимума, могут изменять свое значение только на прямой (2), которую будем называть прямой переключения.

Движение вне прямой переключения представляет собой дугу окружности. Пересечение таких участков движения с прямой переключения происходит под одинаковым углом, откуда по аналогии с [11, 12] следует конечность участков постоянства управления. В качестве управления  $u^*(\cdot)$ , порождающего движение  $z^*(\cdot)$  и удовлетворяющего принципу максимума, берём кусочно-постоянное управление с возможными значениями  $u_{\min}, 0, u_{\max}$  и конечным числом переключений на промежутке  $[t_0, t_f]$ . Для определенности будем считать такое управление кусочно-непрерывным справа. Момент  $t_f$  не включаем в число моментов переключения.

Типовые движения системы (1), удовлетворяющие условию максимума, показаны на рис. 2. Условимся называть циклом участок движения с постоянным управлением  $u(t) = u_{\min}$  или  $u(t) = u_{\max}$ , вдоль которого фазовая переменная  $\varphi$  изменяется на  $\pm 2\pi$ .

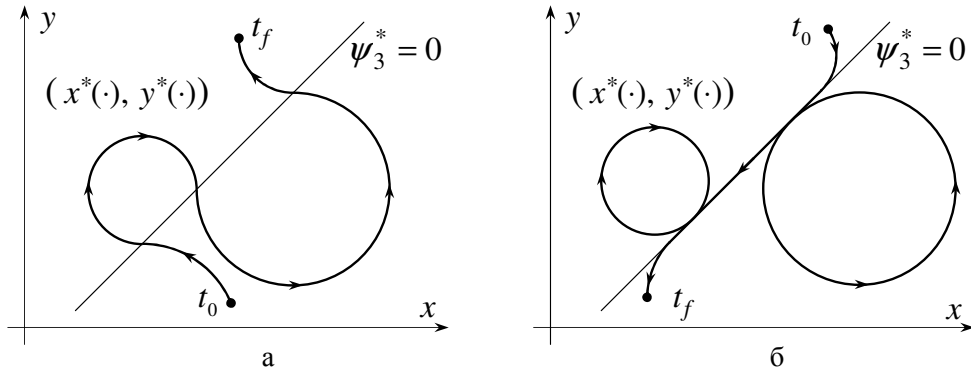


Рис. 2: Траектории принципа максимума и прямая переключения.

Рассмотрев варианты возможного взаимного расположения траектории движения  $(x^*(\cdot), y^*(\cdot))$  и прямой переключения (2) (включая случай, когда они не пересекаются), можно сформулировать следующее утверждение для движений, ведущих на границу множества достижимости.

**Л е м м а 1.** Пусть движение  $z^*(\cdot)$  порождается кусочно-постоянным управлением  $u^*(\cdot)$  и при этом выполнен принцип максимума. Тогда

а) Точки геометрического положения системы (1) на плоскости  $x, y$  в моменты переключения управления лежат на одной прямой — прямой переключения (2).

б) Если на движении  $z^*(\cdot)$  нет участков с нулевым управлением и нет циклов, то время  $\Delta t_{\min}$  между соседними моментами переключения на всех участках движения с управлением  $u_{\min}$  является одинаковым. Аналогично, для управления  $u_{\max}$  время между соседними переключениями постоянно (обозначим его  $\Delta t_{\max}$ ). Справедливо соотношение  $\Delta t_{\min} \cdot u_{\min} + \Delta t_{\max} \cdot u_{\max} = 0$ .

в) Если на движении  $z^*(\cdot)$  нет участков с нулевым управлением и есть хотя бы один цикл, то все точки геометрического положения в моменты переключения совпадают.

г) Если на движении  $z^*(\cdot)$  есть совпадающие точки геометрического положения в моменты переключения, то на этом движении имеется хотя бы один цикл.

д) Если на движении  $z^*(\cdot)$  есть участок с нулевым управлением, то любой участок постоянства управления со значением  $u_{\min}$  или  $u_{\max}$ , не лежащий на краю, представляет собой один или несколько подряд идущих циклов.

## 4 Свойства движений, удовлетворяющих принципу максимума

Из записанных выше соотношений принципа максимума Понтрягина нельзя напрямую сделать заключение о числе переключений управления при формировании границы множества достижимости. Для этого потребуется вывод ряда свойств, определяющих длительность последовательно идущих участков управления при выполнении условий принципа максимума.

Будем рассматривать кусочно-постоянные управления  $u(\cdot)$  со значениями  $u_{\min}, 0, u_{\max}$ . Исходя из принципа максимума, таких управлений достаточно для построения границы множества достижимости. Условимся обозначать символом  $\partial$  границу множества, а символом  $\text{int}$  — внутренность. Ниже в леммах 2 и 3 рассматриваются движения без участков с нулевым управлением. Лемма 4 посвящена случаю с участком нулевого управления. В Лемме 5 оговаривается ситуация, при которой количество переключений может быть снижено.

**Л е м м а 2.** Пусть движение  $z(\cdot)$  на промежутке  $[t_0, t_f]$  порождается кусочно-постоянным управлением  $u(\cdot)$  с двумя моментами переключения  $t_1, t_2$ , причем  $u(t) \neq 0$  на каждом участке постоянства. Значения  $u(t)$  на трех последовательных участках обозначим  $u_1, u_2, u_3$  соответственно. Предположим, что точки геометрического положения на плоскости  $x, y$  в моменты переключения не совпадают. Тогда если  $(t_1 - t_0) + (t_f - t_2) > (t_1 - t_2) \cdot u_2 / u_1$ , то  $z(t_f) \in \text{int } G(t_f)$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Обозначим через  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$  точки геометрического положения в моменты переключения  $t_1, t_2$  (по условию леммы  $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$ ). Длительность трех участков с постоянным управлением составляет  $\Delta t_1 = t_1 - t_0, \Delta t_2 = t_2 - t_1, \Delta t_3 = t_f - t_2$ . Приращение угла на соответствующих участках равно  $\Delta \varphi_1 = \Delta t_1 \cdot u_1, \Delta \varphi_2 = \Delta t_2 \cdot u_2$  и  $\Delta \varphi_3 = \Delta t_3 \cdot u_3$ . Из условия  $u(t) \neq 0$  делаем вывод, что управления  $u_1, u_2, u_3$  могут последовательно принимать только два варианта значений:  $\{u_{\min}, u_{\max}, u_{\min}\}$  или  $\{u_{\max}, u_{\min}, u_{\max}\}$ . Следовательно,  $u_1 = u_3$ .

Предположим от противного, что  $z(t_f) \in \partial G(t_f)$ . Тогда управление  $u(\cdot)$  удовлетворяет принципу максимума. Поскольку точки  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$  не совпадают, то, опираясь на утверждение в) из Леммы 1, движение  $z(\cdot)$  на промежутке  $[t_0, t_f]$  не имеет циклов.

Рассмотрим вспомогательное движение  $\tilde{z}(\cdot) = (\tilde{x}(\cdot), \tilde{y}(\cdot), \tilde{\varphi}(\cdot))$  на промежутке  $[\tilde{t}_0, \tilde{t}_f]$ , порождаемое кусочно-постоянным управлением  $\tilde{u}(\cdot)$  с четырьмя моментами переключения  $\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \tilde{t}_3, \tilde{t}_4$  и с соответствующими значениями  $\tilde{u}_1 = u_1, \tilde{u}_2 = u_2, \tilde{u}_3 = u_1, \tilde{u}_4 = u_2, \tilde{u}_5 = u_1$  на участках постоянства управления. Моменты переключения управления  $\tilde{u}(\cdot)$  запишем следующим образом:

$$\begin{aligned}\tilde{t}_1 &= t_1 + \Delta t_1 \cdot (\Delta \varphi_2 / (\Delta \varphi_1 + \Delta \varphi_3)), \\ \tilde{t}_2 &= \tilde{t}_1 - \Delta t_3 \cdot (\Delta \varphi_2 / (\Delta \varphi_1 + \Delta \varphi_3)), \\ \tilde{t}_3 &= \tilde{t}_2 + \Delta t_2, \\ \tilde{t}_4 &= t_2 + \tilde{t}_2 - \tilde{t}_1.\end{aligned}$$

Из оговоренного в формулировке леммы неравенства следует, что  $t_0 < \tilde{t}_1 < \tilde{t}_2 < \tilde{t}_3 < \tilde{t}_4 < t_f$ . Стало быть, управление  $\tilde{u}(\cdot)$  является допустимым. Непосредственно интегрируя систему (1) с управлением  $\tilde{u}(\cdot)$ , можно убедиться в том, что вспомогательное и исходное движения приходят в одну и ту же фазовую точку, т.е.  $z(t_f) = \tilde{z}(t_f)$ . Фактически следует проделать выкладки, аналогичные тем, что были сделаны в работе [11, 12] на стр. 11–12, где рассматривался симметричный случай с  $u_1 = -1, u_2 = 1, u_3 = -1$ . Таким образом, условие леммы позволяет построить вспомогательное движение, пример которого показан на рис. 3.

Из принятого предположения  $z(t_f) = \tilde{z}(t_f) \in \partial G(t_f)$  следует, что для вспомогательного управления  $\tilde{u}(\cdot)$  должны быть выполнены утверждения Леммы 1. Однако, записав соотношение б) для моментов переключения  $\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \tilde{t}_3$ , нетрудно убедиться, что оно нарушается, поскольку  $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$ . Пришли к

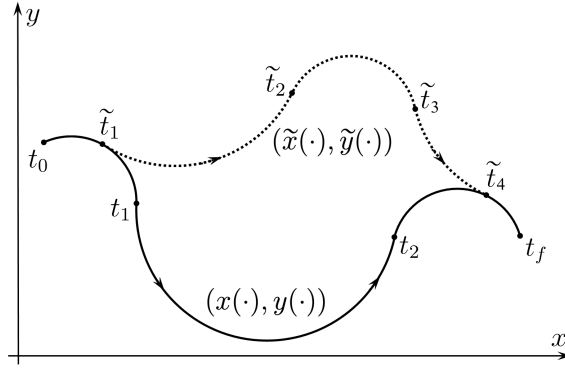


Рис. 3: Пример вспомогательной траектории.

противоречию. (В силу Леммы 1 положения системы (1) в моменты переключения должны лежать на одной прямой. На рис. 3 видно, что это условие также нарушается.) Лемма доказана.

**Примечание.** Условие Леммы 2 может быть записано в эквивалентном виде  $(\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_3)/\Delta\varphi_2 < -1$ .

**Лемма 3.** Пусть движение  $z(\cdot)$  на промежутке  $[t_0, t_f]$  порождается кусочно-постоянным управлением  $u(\cdot)$  с тремя моментами переключения, причем  $u(t) \neq 0$  на каждом участке постоянства. Тогда  $z(t_f) \in \text{int } G(t_f)$ .

**Доказательство.** Моменты переключения обозначим  $t_1, t_2, t_3$ . Для данных моментов времени рассмотрим точки геометрического положения системы (1):  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ . Управление  $u(\cdot)$  на первом и втором участках постоянства обозначим  $u_1$  и  $u_2$ . На третьем и четвертом участках управление также принимает значения  $u_1$  и  $u_2$  соответственно. По аналогии с доказательством Леммы 2 введем углы поворота на последовательно рассматриваемых участках постоянства управления:  $\Delta\varphi_1 = \Delta t_1 \cdot u_1$ ,  $\Delta\varphi_2 = \Delta t_2 \cdot u_2$ ,  $\Delta\varphi_3 = \Delta t_3 \cdot u_1$  и  $\Delta\varphi_4 = \Delta t_4 \cdot u_2$ .

Предположим от противного, что  $z(t_f) \in \partial G(t_f)$ .

1) Будем считать вначале, что среди точек  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$  нет совпадающих. Тогда, в силу Леммы 2, справедливы соотношения

$$(\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_3)/\Delta\varphi_2 \geq -1, \quad (\Delta\varphi_2 + \Delta\varphi_4)/\Delta\varphi_3 \geq -1.$$

Поскольку значения  $\Delta\varphi_1, \Delta\varphi_3$  имеют одинаковый знак и не равны нулю, то из первого соотношения получаем  $\Delta\varphi_3/\Delta\varphi_2 > -1$ . Аналогично, из второго соотношения получаем неравенство  $\Delta\varphi_2/\Delta\varphi_3 > -1$ , противоречащее первому.

2) Пусть среди точек  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$  есть совпадающие. Тогда в силу Леммы 1 на движении  $z(\cdot)$  есть хотя бы один цикл и точки  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$  совпадают. Рассмотрим вспомогательное движение  $\tilde{z}(\cdot)$  с измененными относительно исходного движения моментами переключения:  $\tilde{t}_1 = t_1 - \Delta\tilde{t}$ ,  $\tilde{t}_2 = t_2 - \Delta\tilde{t}$ ,  $\tilde{t}_3 = t_3$ , где  $\Delta\tilde{t} = \min\{\Delta t_1/2; \pi/|u_1|\}$ . Нетрудно убедиться, что  $z(t_f) = \tilde{z}(t_f)$ . В то же время, используя выражение для  $\Delta\tilde{t}$ , получаем  $(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \neq (x_3, y_3)$ . Пришли к противоречию.

Лемма доказана.

**Лемма 4.** Пусть движение  $z(\cdot)$  на промежутке  $[t_0, t_f]$  порождается кусочно-постоянным управлением  $u(\cdot)$  со значениями  $u_1, u_2, u_3$  и двумя моментами переключения  $t_1, t_2$ . При этом  $(u_1, u_2, u_3) = (u_{\min}, u_{\max}, 0)$  или  $(u_1, u_2, u_3) = (u_{\max}, u_{\min}, 0)$ . Тогда  $z(t_f) \in \text{int } G(t_f)$ .

**Доказательство.** Предположим от противного, что  $z(t_f) \in \partial G(t_f)$ . В силу Леммы 1 движение  $z(\cdot)$  на промежутке  $[t_1, t_2]$  представляет собой один или несколько подряд идущих циклов  $((x_1, y_1) = (x_2, y_2))$ . Возьмем вспомогательное движение  $\tilde{z}(\cdot)$  с тремя моментами переключения, указанными в лемме 3, и управлениями  $\tilde{u}_1 = u_1, \tilde{u}_2 = u_2, \tilde{u}_3 = u_1, \tilde{u}_4 = u_3$ . Здесь также получаем  $\tilde{z}(t_f) = z(t_f)$ . В то же время приращение угла на третьем участке вспомогательного движения строго меньше  $2\pi$ , что противоречит Лемме 1 при наличии участка с нулевым движением. Таким образом,  $z(t_f) \in \text{int } G(t_f)$ .

Лемма доказана.

**Примечание.** Лемма 4 справедлива и для случаев, когда  $(u_1, u_2, u_3) = (0, u_{\min}, u_{\max})$  и  $(u_1, u_2, u_3) = (0, u_{\max}, u_{\min})$ .

**Л е м м а 5.** Пусть движение  $z(\cdot)$  на промежутке  $[t_0, t_f]$  порождается кусочно-постоянным управлением  $u(\cdot)$  со значениями  $u_1, u_2, u_3$  и двумя моментами переключения  $t_1, t_2$ . Предположим, что  $(u_1, u_2, u_3) = (0, u_{\min}, 0)$ , либо  $(u_1, u_2, u_3) = (0, u_{\max}, 0)$ . Если при этом выполнено условие максимума, то в конечную точку  $z(t_f)$  соответствующего движения можно перевестись при помощи кусочно-постоянного управления с одним переключением, снизив тем самым количество переключений на единицу.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** В силу Леммы 1 движение  $z(\cdot)$  на промежутке  $[t_1, t_2]$  представляет собой один или несколько подряд идущих циклов  $((x_1, y_1) = (x_2, y_2))$ . Рассмотрим новое движение  $\tilde{z}(\cdot)$  с одним моментом переключения  $\tilde{t}_1 = t_2 - (t_1 - t_0)$  и управлением  $\tilde{u}_1 = u_2$  на первом участке и  $\tilde{u}_2 = 0$  на втором. Имеем  $\tilde{z}(t_f) = z(t_f)$ . Новое движение приходит в момент  $t_f$  в ту же точку, но имеет на одно переключение меньше.

Лемма доказана.

Сформулируем основное утверждение.

**Т е о р е м а.** В каждую точку границы множества достижимости системы (1) можно перейти при помощи кусочно-постоянного управления с не более чем двумя переключениями. При этом в случае двух переключений можно ограничиться шестью вариантами последовательности управлений:

$$\begin{array}{lll} 1) u_{\min}, 0, u_{\min}; & 2) u_{\min}, 0, u_{\max}; & 3) u_{\max}, 0, u_{\min}; \\ 4) u_{\max}, 0, u_{\max}; & 5) u_{\min}, u_{\max}, u_{\min}; & 6) u_{\max}, u_{\min}, u_{\max}. \end{array} \quad (3)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Предположим от противного, что на границе множества достижимости  $G(t_f)$  есть точка  $z(t_f)$ , перевод в которую возможен лишь при помощи управления с тремя или более переключениями. Если таких управляющих функций несколько, то возьмем управление с наименьшим числом переключений. Обозначим выбранное управление через  $u(\cdot)$ , а порождаемое им движение – через  $z(\cdot)$ . Рассмотрим движение  $z(\cdot)$  на промежутке  $[t_0, t_f]$  с четырьмя последними участками постоянства управления со значениями  $u_1, u_2, u_3, u_4$ . В силу Лемм 3 и 4 среди данных управлений два имеют нулевое значение и при этом они не лежат на краях одновременно. Получаем в результате два возможных варианта: либо  $u_1 = 0, u_2 \neq 0, u_3 = 0, u_4 \neq 0$ , либо  $u_1 \neq 0, u_2 = 0, u_3 \neq 0, u_4 = 0$ . В обоих случаях количество переключений может быть снижено на единицу (Лемма 5), что противоречит сделанному предположению о выборе управления  $u(\cdot)$  с наименьшим числом переключений.

Таким образом, в любую точку на границе множества достижимости  $G(t_f)$  можно перейти при помощи кусочно-постоянного управления с не более чем двумя переключениями. Что касается возможных вариантов последовательности управлений, кроме указанных в формулировке теоремы вариантов управлений с двумя переключениями, логически возможны еще шесть вариантов:

$$\begin{array}{llll} 7) 0, u_{\min}, u_{\max}; & 8) 0, u_{\max}, u_{\min}; & 9) u_{\min}, u_{\max}, 0; & 10) u_{\max}, u_{\min}, 0; \\ 11) 0, u_{\min}, 0; & 12) 0, u_{\max}, 0. \end{array}$$

Управления вида 7–10 не могут приводить на границу множества достижимости в силу Леммы 4. Для вариантов 11 и 12 число переключений может быть снижено на единицу в силу Леммы 5.

Теорема доказана.

## 5 Численные построения

Доказанное в работе утверждение позволяет построить границу  $\partial G(t_f)$  с помощью шести участков поверхности, каждый из которых является двухпараметрическим семейством точек  $z(t_f)$  для указанных в теореме вариантов управлений с моментами переключения  $t_1$  и  $t_2$ . При этом для вариантов 5) и 6) необходимо дополнительно учесть условия Леммы 2, т.е. рассматривать только те движения, для которых выполнено условие  $(t_1 - t_0) + (t_f - t_2) \leq (t_1 - t_2) \cdot u_2 / u_1$ .

В силу стационарности системы (1) берем начальный момент времени  $t_0 = 0$ . Специфика системы (1) такова, что начальное состояние  $z_0$  влияет на множество достижимости лишь с точностью до поворота и переноса.

Пример численного построения границы множества  $G(t_f)$  для  $t_f = 6\pi$ ,  $u_{\min} = -0.25$ ,  $u_{\max} = 1.0$  показан на рис. 4. Здесь граница множества достижимости состоит из шести участков. Значения кусочно-постоянного управления, ведущего на каждый из них, указаны при помощи выносок.

Разработана программа подготовки множеств достижимости для печати на 3d-принтере [15]. Образец напечатанного множества для  $t_f = 5\pi$ ,  $u_{\min} = -0.25$ ,  $u_{\max} = 1.0$  показан на рис. 5.

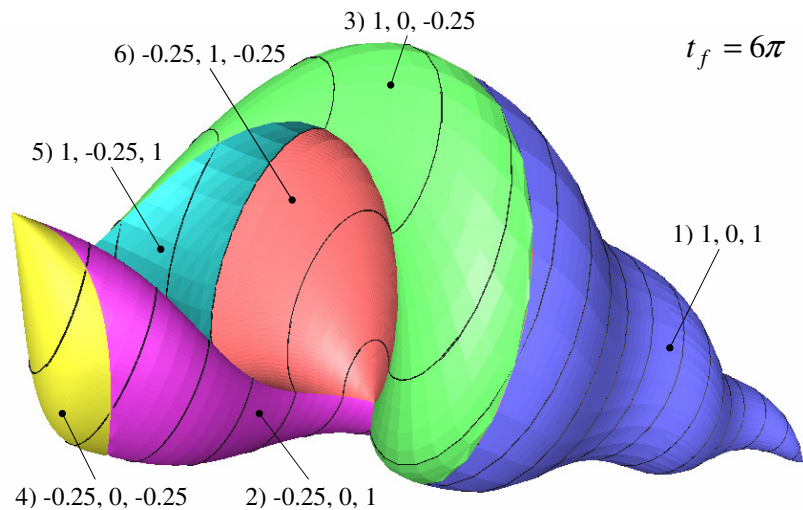


Рис. 4: Множество достижимости для несимметричных ограничений на управление.



Рис. 5: Образец несимметричного множества достижимости, напечатанный на 3d-принтере.

## Благодарности

Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных исследований УрО РАН, проект № 15-16-1-13, а также при поддержке РФФИ, грант № 15-01-07909.

## Список литературы

- [1] L.E. Dubins. On curves of minimal length with a constraint on average curvature and with prescribed initial and terminal positions and tangents. *American Journal of Mathematics*, 79: 497–516, 1957.
- [2] A.A. Markov. A few examples of solving special problems on the largest and smallest values. *The communications of the Kharkov mathematical society*, series 2, volume 1, issue 2, 250–276, 1889 (in Russian). = А.А. Марков. Несколько примеров решения особого рода задач о наибольших и наименьших величинах. *Сообщ. Харьков. матем. общ., 2-я сер.*, том 1, выпуск 2, 250–276, 1889.
- [3] R. Isaacs. *Differential Games*. John Wiley and Sons, New York, 1965.
- [4] R. Isaacs. *Differential Games*. Mir, Moscow, 1967 (in Russian). = Р. Айзекс. *Дифференциальные игры*. Мир, Москва, 1967.
- [5] J.-P. Laumond (ed.). *Robot Motion Planning and Control / Lecture Notes in Control and Information Sciences, volume 229*. Springer Berlin Heidelberg, 1998.
- [6] S.G. Pyatko, A.I. Krasov et al. *Automated systems of air traffic control*. publisher Polytechnic, Saint Petersburg, 2004 (in Russian). = С.Г. Пятко, А.И. Красов и др. *Автоматизированные системы управления воздушным движением*. Политехника, Санкт-Петербург, 2004.

- [7] Y. Meyer, T. Shima, P. Isayah. On Dubins paths to intercept a moving target. *Automatica*, 256–263, 2015.
- [8] Yu.I. Berdyshev. *Nonlinear Problems in Sequential Control and Their Application*. IMM UB RAS, Ekaterinburg: UB RAS, 2015 (in Russian). = Ю.И. Бердышев. *Нелинейные задачи последовательного управления и их приложения*. ИММ УрО РАН, Екатеринбург, 2015.
- [9] T. Pecsvaradi. Optimal horizontal guidance law for aircraft in the terminal area. *IEEE Trans. on Automatic Control*, AC-17(6): 763–772, 1972.
- [10] E. Bakolas, P. Tsiotras. Optimal synthesis of the asymmetric sinistral/dextral Markov-Dubins problem. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 150(2): 233–250, 2011.
- [11] V.S. Patsko, S.G. Pyatko, A.A. Fedotov. Three-dimensional reachability set for a nonlinear control system. *Izv. RAS. Theory and control systems*, 8–16, 2003 (in Russian). = В.С. Пацко, С.Г. Пятко, А.А. Федотов. Трехмерное множество достижимости нелинейной управляемой системы. *Известия РАН. ТуСУ*, 8–16, 2003.
- [12] V.S. Patsko, S.G. Pyatko, A.A. Fedotov. Three-dimensional reachability set for a nonlinear control system. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 42(3): 320–328, May 2003.
- [13] E.B. Lee, L. Markus. *Foundations of Optimal Control Theory*. Wiley and Sons, New York, 1967.
- [14] E.B. Lee, L. Marcus. *Foundations of Optimal Control Theory*. Nauka, Moscow, 1972 (in Russian). = Э.Б. Ли, Л. Маркус. *Основы теории оптимального управления*. Наука, Москва, 1972.
- [15] I.S. Starodubtsev, A.A. Fedotov, V.L. Averbukh, V.S. Patsko. Reachable Sets for Dubins Car in Control Problems: Physical Visualization. *24th International Conference in Central Europe on Computer Graphics, Visualization and Computer Vision. WSCG 2016*, Posters Proceedings, 49–52, Plzen, Czech Republic, May 30 – June 3, 2016.



# Reachable set for the Dubins car under asymmetric constraint on control

*Alena S. Simonenko*<sup>1</sup>, *Andrey A. Fedotov*<sup>2</sup>

1 – ITMO University (Saint Petersburg, Russia)

2 – IMM UB RAS (Ekaterinburg, Russia)

**Keywords:** Dubins Car, reachable set, asymmetric constraints of turning radius.

For a control system of the third order, a reachable set at the instant is investigated. Such a system is often called the Dubins Car. An object moves in the plane with linear velocity constant and with asymmetric bounds onto the right and left turns. A statement is proved on the number and character of the control switches that leads onto the boundary of the reachable set. Results are shown for numerical constructing the reachable sets.