

**РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ**

**ТРУДЫ
ИНСТИТУТА
МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ**

Том 20, № 4

2014

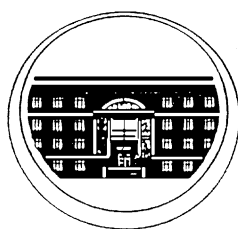
ТРУДЫ
ИНСТИТУТА
МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
УрО РАН

ВЫХОДЯТ 4 РАЗА В ГОД

Том 20

№ 4

2014



ЕКАТЕРИНБУРГ

Труды Института математики и механики УрО РАН. Том 20, № 4. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2014. 332 с.

ISSN 0134-4889

Главный редактор акад. РАН В. И. Бердышев
Зам. гл. редактора д-р физ.-мат. наук В. В. Кабанов

Научные редакторы д-р физ.-мат. наук А. Л. Агеев,
д-р физ.-мат. наук А. Р. Данилин

Редакционная коллегия

канд. физ.-мат. наук Н. В. Маслова (*отв. секретарь*),
д-р физ.-мат. наук А. Г. Бабенко, д-р физ.-мат. наук А. В. Васильев,
д-р физ.-мат. наук Вэньбинь Го (Китай),
М. И. Гомоюнов, д-р физ.-мат. наук М. И. Гусев,
д-р физ.-мат. наук А. Ф. Клейменов, д-р физ.-мат. наук А. С. Кондратьев,
д-р физ.-мат. наук А. И. Короткий, канд. физ.-мат. наук П. Д. Лебедев,
д-р физ.-мат. наук Н. Ю. Лукоянов, д-р физ.-мат. наук В. И. Максимов,
д-р физ.-мат. наук А. Д. Медных, д-р физ.-мат. наук В. С. Монахов (Беларусь),
д-р физ.-мат. наук И. Ф. Сивергина (США),
д-р физ.-мат. наук И. Д. Супруненко (Беларусь), д-р физ.-мат. наук М. Ю. Хачай

Редакционный совет

чл.-корр. РАН С. М. Асеев, чл.-корр. РАН В. В. Васин,
акад. РАН А. В. Кряжимский,
акад. РАН А. Б. Куржанский, чл.-корр. РАН В. Д. Мазуров,
чл.-корр. РАН С. В. Матвеев, чл.-корр. РАН А. А. Махнев,
акад. РАН Ю. С. Осипов, чл.-корр. РАН Н. Н. Субботина,
чл.-корр. РАН Ю. Н. Субботин, чл.-корр. РАН В. Н. Ушаков,
чл.-корр. РАН А. Г. Ченцов, чл.-корр. НАН Украины А. А. Чикрий (Украина)

Отв. редакторы выпуска

д-р физ.-мат. наук М. И. Гусев, д-р физ.-мат. наук Т. Ф. Филишова

© Федеральное государственное
бюджетное учреждение науки
Институт математики и механики
им. Н. Н. Красовского
Уральского отделения Российской
академии наук, 2014

УДК 517.977

ПОСТРОЕНИЕ МАКСИМАЛЬНОГО СТАБИЛЬНОГО МОСТА В ИГРАХ С ПРОСТЫМИ ДВИЖЕНИЯМИ НА ПЛОСКОСТИ¹

Л. В. Камнева, В. С. Пацко

Для антагонистических дифференциальных игр с динамикой простых движений, фиксированным моментом окончания, геометрическими ограничениями на управления первого и второго игроков и выпуклым терминальным множеством известно, что множество разрешимости (максимальный стабильный мост) может быть построено при помощи оператора программного поглощения. При этом в попятной по времени процедуре конструирования t -сечений множества разрешимости не требуется введения дополнительных моментов разбиения. В статье подобное свойство устанавливается для игр с простыми движениями на плоскости при многоугольном терминальном множестве (не обязательно выпуклом) и многоугольными ограничениями на управления игроков. Используемый оператор в частном случае выпуклого терминального множества совпадает с оператором программного поглощения.

Ключевые слова: дифференциальные игры с простыми движениями на плоскости, множество разрешимости, попятная процедура

L. V. Kamneva, V. S. Patsko. Stable bridge construction in games with simple motions in the plane.

It is known that the solvability set (the maximal stable bridge) in a zero-sum differential game with simple motions, fixed terminal time, geometric constraints on the controls of the first and second players, and convex terminal set can be constructed by means of a program absorption operator. In this case, a backward procedure for the construction of t -sections of the solvability set does not need any additional partition times. We establish the same property for a game with simple motions, polygonal terminal set (which is generally nonconvex), and polygonal constraints on the players's controls in the plane. In the particular case of a convex terminal set, the operator used in the article coincides with the program absorption operator.

Keywords: differential games with simple motions in the plane, solvability set, backward procedure.

Введение

При численном решении антагонистических дифференциальных игр с фиксированным моментом окончания часто используется попятная по времени конструкция построения множеств уровня (множеств Лебега) функции цены. Как правило, на каждом шаге $[t_{j-1}, t_j]$, $t_{j-1} < t_j$, попятной процедуры динамика игры локально или глобально во всем фазовом пространстве подменяется динамикой вида $\dot{x} = u + v$, $u \in \mathcal{P}$, $v \in \mathcal{Q}$, где x — фазовый вектор; u и v — управляющие воздействия первого и второго игроков; \mathcal{P} , \mathcal{Q} — выпуклые компакты. Такая динамика называется динамикой простых движений [1]. Если размерность x равна 2 (т. е. исходная или эквивалентная ей игра происходит на плоскости), то при глобальной подмене множество уровня $W_c(t_j)$, соответствующее значению c функции цены в момент t_j , аппроксимируется многоугольником $W_c(t_j)$, компакты \mathcal{P} , \mathcal{Q} — выпуклыми многоугольниками P , Q . В результате действия попятной процедуры в момент t_{j-1} получаем многоугольник $W_c(t_{j-1})$, приближающий “истинное” множество $W_c(t_{j-1})$ уровня функции цены.

Переход от $W_c(t_j)$ к $W_c(t_{j-1})$ часто осуществляется при помощи оператора “программного поглощения” [3, с. 122]. Если множество $W_c(t_j)$ является выпуклым, то множество $W_c(t_{j-1})$, получаемое в этом случае, совпадает с точным решением дифференциальной игры перевода на множество $W_c(t_j)$ для динамики простых движений. Если выпуклым является дополнение $W'_c(t_j) = \mathbb{R}^2 \setminus W_c(t_j)$, то меняем роли игроков в записи оператора программного поглощения и

¹Работа выполнена в рамках программы Президиума РАН “Фундаментальные проблемы нелинейной динамики в математических и физических науках” при поддержке УРО РАН (проект 12-П-1-1012) и РФФИ (проект 12-01-00537).

применяем его к множеству $W'_c(t_j)$. Таким образом, в выпуклом случае существует оператор (а именно оператор программного поглощения), который позволяет получить точное решение аппроксимирующей задачи без введения дополнительных точек разбиения промежутка $[t_{j-1}, t_j]$.

Естественным является вопрос о существовании оператора с аналогичным свойством, который дает точное решение $W_c(t_{j-1})$ на основе $W_c(t_j)$ в случае, когда множество $W_c(t_j)$ или его дополнение не являются выпуклыми.

Этому вопросу посвящена статья. Показывается, что в случае динамики простых движений при произвольном многоугольном множестве $M \subset \mathbb{R}^2$, взятом в момент ϑ , произвольных выпуклых многоугольных ограничениях P, Q на управления первого и второго игроков существует момент времени $t_* < \vartheta$ такой, что построение множества $W_c(t)$ при любом $t \in [t_*, \vartheta]$ может быть осуществлено точно без дополнительного дробления промежутка $[t, \vartheta]$ на более мелкие части и использования их в качестве элементов понятной процедуры.

Предлагаемый в статье оператор не совпадает, вообще говоря, с оператором программного поглощения, но использует его в качестве “фрагмента” в более сложной конструкции.

1. Дифференциальная игра с простыми движениями

Рассмотрим на плоскости управляемую систему с простыми движениями [1]:

$$\dot{x} = u + v, \quad u \in P, \quad v \in Q, \quad t \in [0, \vartheta], \quad \vartheta > 0. \quad (1.1)$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^2$ — фазовый вектор, u и v — управляющие воздействия первого и второго игроков, каждое из множеств P и Q — выпуклый замкнутый многоугольник или отрезок. (Многоугольником будем называть ограниченное замкнутое множество, границей которого является ломаная без самопересечений и с конечным числом вершин.)

Пусть задано множество M , являющееся многоугольником. Дифференциальная игра образована задачей M -сближения для первого игрока и задачей M' -сближения для второго игрока, $M' = \overline{\mathbb{R}^2} \setminus M$.

Постановка задачи M -сближения для первого игрока изложена в [2, § 13.1, с. 150–152] и состоит в следующем. Из начальной позиции (t_0, x_0) первый игрок стремится гарантировать выполнение условия $x(\vartheta) \in M$. Предполагается, что игрок знает текущую позицию $(t, x(t))$ и формирует управление $u(t) \in P$ по принципу обратной связи. Для решения задачи M -сближения используется понятие u -стабильного моста.

Мнозначное отображение $[0, \vartheta] \ni t \mapsto W(t) \subset \mathbb{R}^2$ определяет u -стабильный мост (график отображения) $W = \{(t, x) : t \in [0, \vartheta], x \in W(t)\}$ в задаче M -сближения, если $W(\vartheta) \subset M$, множество W замкнуто в $[0, \vartheta] \times \mathbb{R}^2$ и при любом $v \in Q$ множество W слабо инвариантно относительно дифференциального включения

$$\dot{x} \in P + v. \quad (1.2)$$

Условие слабой инвариантности означает, что для любой точки $(t_0, x_0) \in W$ существует движение $x(\cdot) : [t_0, \vartheta] \rightarrow \mathbb{R}^2$, которое удовлетворяет дифференциальному включению (1.2), начальному условию $x(t_0) = x_0$ и условию выживаемости: $x(t) \in W(t)$ для всех $t \in [t_0, \vartheta]$. В теории дифференциальных игр это свойство (в эквивалентной формулировке) называется условием u -стабильности.

Аналогично формулируется задача M' -сближения для второго игрока и вводится понятие v -стабильного моста в задаче M' -сближения.

Первоначальные (эквивалентные) понятия стабильных мостов были введены в [3, с. 52–54; 4, с. 53, 58].

Символом W_0 обозначим максимальный (по включению) u -стабильный мост в задаче M -сближения.

Известно [3, § 16], что множество W является максимальным u -стабильным мостом в задаче M -сближения тогда и только тогда, когда W есть u -стабильный мост в задаче M -сближения и множество $W' = \{(t, x) : t \in [0, \vartheta], x \in \overline{\mathbb{R}^2 \setminus W(t)}\}$ есть v -стабильный мост в задаче M' -сближения. Стало быть, построив максимальный u -стабильный мост W_0 , получаем как решение задачи M -сближения, так и решение задачи M' -сближения.

Справедливо следующее свойство. Предположим, что для любого $t \in [t_1, t_2]$ сечение $W_0(t)$ максимального стабильного моста W_0 является многоугольником. Тогда многозначное отображение $[t_1, t_2] \ni t \rightarrow W_0(t)$ непрерывно в метрике Хаусдорфа.

Цель работы — исследование возможности построения максимального стабильного моста на некотором промежутке $[t_*, \vartheta]$ при помощи оператора однократного действия, сопоставляющего множеству $M = W_0(\vartheta)$ и моменту $t \in [t_*, \vartheta)$ множество $W_0(t)$ и не требующего разбиения промежутка $[t, \vartheta]$ на дополнительные более мелкие части.

2. Спирали на плоскости, полупроницаемые трубки и поверхности

2.1. Спиральные ломаные на плоскости

Ломаной линией (или просто *ломаной*) $\gamma = a_0 a_1 \dots a_{n_\gamma}$ на плоскости называется объединение конечного числа отрезков $[a_i, a_{i+1}]$, $i = \overline{0, n_\gamma - 1}$, $a_i \neq a_{i+1}$, в котором конец каждого отрезка (кроме, быть может, последнего) является началом следующего отрезка, причем отрезки, имеющие общий конец, не лежат на одной прямой. Один отрезок также считаем ломаной. Точки $a_0, a_1, \dots, a_{n_\gamma}$ называются *вершинами* ломаной; отрезки $[a_i, a_{i+1}]$, $i = \overline{0, n_\gamma - 1}$, — *звенья* ломаной; отрезки, имеющие общую вершину, — *смежные звенья* ломаной. Ломаная γ называется *замкнутой*, если конец последнего звена ломаной совпадает с началом первого звена, т. е. $a_{n_\gamma} = a_0$.

Обычно ломаную γ называют *выпуклой*, если она лежит в одной полуплоскости относительно любой прямой, содержащей звено (в этом случае замкнутая выпуклая ломаная ограничивает выпуклый многоугольник). Границу невыпуклого многоугольника будем представлять как объединение незамкнутых ломаных нескольких типов. Для этого обобщим понятие незамкнутой выпуклой ломаной.

О п р е д е л е н и е 1. *Углом ломаной γ в вершине a_i , $i = \overline{1, n_\gamma - 1}$, называется ориентированный (с учетом знака) угол меньший π , образованный лучами с направляющими векторами $\overrightarrow{a_i a_{i+1}}$, $\overrightarrow{a_i a_{i-1}}$ и вершиной в точке a_i . *Смежным углом ломаной γ в вершине a_i , $i = \overline{1, n_\gamma - 1}$, называется ориентированный угол, образованный лучами с направляющими векторами $\overrightarrow{a_{i-1} a_i}$, $\overrightarrow{a_i a_{i+1}}$ и вершиной в точке a_i . [Угол называется положительным (отрицательным), если переход от первого направляющего вектора ко второму осуществляется против часовой стрелки (по часовой стрелке). Угол ломаной в вершине a_i , $i = \overline{1, n_\gamma - 1}$, и соответствующий смежный угол в сумме образуют угол величиной $\pm\pi$.]**

О п р е д е л е н и е 2. Незамкнутая ломаная без самопересечений называется *выпуклой*, если все смежные углы в вершинах этой ломаной имеют один и тот же знак.

О п р е д е л е н и е 3. *Одинарной левой (правой) спиралью* называется такая незамкнутая выпуклая ломаная без самопересечений, что все смежные углы в вершинах этой ломаной положительны (отрицательны) и ее первое звено $[a_0, a_1]$ принадлежит границе выпуклой оболочки ломаной.

Каждому звену $[a_i, a_{i+1}]$, $i = \overline{0, n_\gamma - 1}$, одинарной спирали γ припишем вектор единичной нормали, направление которого получается поворотом вектора $\overrightarrow{a_i a_{i+1}}$ на угол $-\pi/2$ ($+\pi/2$) для левой (правой) спирали. Заметим, что нормали к звеньям, лежащим на границе выпуклой оболочки ломаной, направлены вовне выпуклой оболочки (рис. 1, (а), (б)). “Внешнюю” крайнюю вершину одинарной спирали γ обозначим через a_γ , “внутреннюю” — через b_γ .

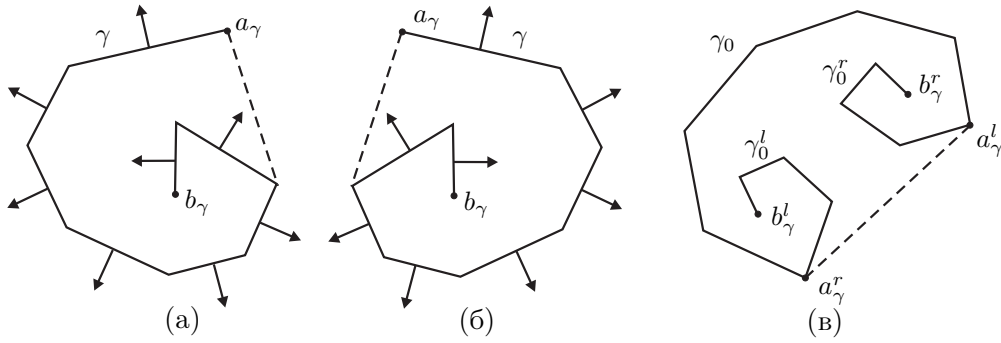


Рис. 1. Одинарные левая (а) и правая (б) спирали; двойная спираль (в).

О п р е д е л е н и е 4. Ломаная γ называется *двойной спиралью*, если справедливо ее представление в виде объединения $\gamma = \gamma_0^l \cup \gamma_0 \cup \gamma_0^r$, где $\gamma_0^l, \gamma_0, \gamma_0^r$ — незамкнутые ломаные, $\gamma_0 = \gamma \cap \partial(\text{co } \gamma)$, $\gamma_0^l \cap \gamma_0^r = \emptyset$, $\gamma_0 \cup \gamma_0^l = \gamma^l$ — левая спираль, $\gamma_0 \cup \gamma_0^r = \gamma^r$ — правая спираль. Крайние вершины спирали γ^l обозначим через a_γ^l, b_γ^l ; крайние вершины спирали γ^r — через a_γ^r, b_γ^r (рис. 1, (в)).

Изменяя нумерацию вершин, любую незамкнутую выпуклую ломаную можно рассматривать либо как одинарную (правую или левую) спираль, либо как двойную спираль.

2.2. Полупроницаемая трубка

Пусть $O(z, \varepsilon)$ — открытый круг в \mathbb{R}^2 радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в точке z .

При $\varepsilon > 0$ определим такое значение $\Delta(\varepsilon) > 0$, что для любого $z \in \mathbb{R}^2$ любая траектория системы (1.1) с начальной точкой в множестве $O(z, \varepsilon/2)$ не покидает множества $O(z, \varepsilon)$ на отрезке времени $[0, \Delta(\varepsilon)]$.

Пусть $0 \leq t_1 < t_2 \leq \vartheta$ и задано непрерывное по Хаусдорфу многозначное отображение $[t_1, t_2] \ni t \mapsto W(t) \subset \mathbb{R}^2$, такое что $W(t)$ — многоугольник для всех $t \in [t_1, t_2]$. Отображение $W(\cdot)$ определяет множество (график) $W = \{(t, x) : t \in [t_1, t_2], x \in W(t)\}$. На множестве W выделим боковую границу

$$\Gamma = \{(t, x) : t \in [t_1, t_2], x \in \partial W(t)\}.$$

Множество Γ будем называть *трубкой* на отрезке $[t_1, t_2]$. Пусть $\Gamma(t) = \partial W(t)$ — сечение трубки Γ в момент t . Определим ε -окрестность трубки Γ :

$$O_\varepsilon(\Gamma) = \{(t, x) : t \in [t_1, t_2], x \in O(z, \varepsilon), z \in \Gamma(t)\}.$$

О п р е д е л е н и е 5. Трубка Γ называется *полупроницаемой* на отрезке $[t_1, t_2]$, если найдутся такое $\varepsilon > 0$ и такие открытые множества $O_\varepsilon^+(\Gamma)$ и $O_\varepsilon^-(\Gamma)$, что

$$O_\varepsilon(\Gamma) = O_\varepsilon^+(\Gamma) \cup \Gamma \cup O_\varepsilon^-(\Gamma), \quad O_\varepsilon^+(\Gamma) \cap O_\varepsilon^-(\Gamma) = \emptyset$$

и справедливы следующие свойства:

1) для любой точки $(t_0, x_0) \in O_{\varepsilon/2}(\Gamma) \cap (O_\varepsilon^+(\Gamma) \cup \Gamma)$ и любого $v \in Q$ существует такое измеримое программное управление $u(t) \in P$, что для решения $x(t)$ уравнения $\dot{x}(t) = u(t) + v$ с начальным условием $x(t_0) = x_0$ верно включение $(t, x(t)) \in O_\varepsilon^+(\Gamma) \cup \Gamma$ при всех $t \in [t_0, t_0 + \Delta(\varepsilon)] \cap [t_1, t_2]$;

2) для любой точки $(t_0, x_0) \in O_{\varepsilon/2}(\Gamma) \cap (O_\varepsilon^-(\Gamma) \cup \Gamma)$ и любого $u \in P$ существует такое измеримое программное управление $v(t) \in Q$, что для решения $x(t)$ уравнения $\dot{x}(t) = u + v(t)$ с начальным условием $x(t_0) = x_0$ верно включение $(t, x(t)) \in O_\varepsilon^-(\Gamma) \cup \Gamma$ при всех $t \in [t_0, t_0 + \Delta(\varepsilon)] \cap [t_1, t_2]$.

Учитывая определение, будем говорить о стороне (+) и стороне (−) полупроницаемой трубки. Выделим два типа полупроницаемых трубок: если сторона (+) внутренняя, а сторона (−) внешняя, то полупроницаемая трубка имеет тип \pm ; если наоборот, то тип \mp .

Получаем, что если боковая поверхность $\Gamma_0 = \{(t, x) : t \in [0, \vartheta], x \in \partial W_0(t)\}$ максимального u -стабильного моста W_0 является трубкой, то Γ_0 — полупроницаемая трубка типа \pm . Справедливо и обратное утверждение:

Лемма 1. *Предположим, что Γ — полупроницаемая трубка типа \pm на некотором отрезке $[t_1, \vartheta]$, $t_1 \in [0, \vartheta]$, и $\Gamma(\vartheta) = \partial M$. Тогда Γ — боковая поверхность максимального u -стабильного моста W_0 на отрезке $[t_1, \vartheta]$ в задаче M -сближения.*

2.3. Полупроницаемые поверхности

Пусть $0 \leq t_1 < t_2 \leq \vartheta$ и задано непрерывное (по Хаусдорфу) многозначное отображение $[t_1, t_2] \ni t \mapsto \sigma(t) \subset \mathbb{R}^2$, такое что для всех $t \in [t_1, t_2]$ множество $\sigma(t)$ — незамкнутая ломаная без самопересечений. Дополнительно предположим, что крайние вершины ломаных $\sigma(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, дают две непересекающиеся непрерывные траектории. Отображение $\sigma(\cdot)$ определяет множество (график) $\sigma = \{(t, x) : t \in [t_1, t_2], x \in \sigma(t)\}$, которое будем называть *поверхностью*. Обозначив крайние траектории через $\hat{\xi}(\cdot)$ и $\check{\xi}(\cdot)$, говорим о поверхности σ с краями $\hat{\xi}(\cdot)$ и $\check{\xi}(\cdot)$.

Если $\sigma(t)$ — спираль для всех $t \in [t_1, t_2]$, то поверхность σ будем называть *спиральной*.

Для $\varepsilon > 0$ определим ε -окрестность поверхности σ : $O_\varepsilon(\sigma) = \{(t, x) : t \in [t_1, t_2], x \in O(z, \varepsilon), z \in \sigma(t)\}$.

О п р е д е л е н и е 6. Поверхность σ называется *полупроницаемой* на отрезке $[t_1, t_2]$, если найдутся такое $\varepsilon > 0$ и такие открытые множества $O_\varepsilon^+(\sigma)$, $O_\varepsilon^-(\sigma)$ и поверхность $[\sigma]_\varepsilon$, что

$$O_\varepsilon(\sigma) = O_\varepsilon^+(\sigma) \cup [\sigma]_\varepsilon \cup O_\varepsilon^-(\sigma), \quad O_\varepsilon^+(\sigma) \cap O_\varepsilon^-(\sigma) = \emptyset, \quad \sigma \subset [\sigma]_\varepsilon, \quad (2.1)$$

и справедливы следующие свойства:

1) для любой точки $(t_0, x_0) \in O_{\varepsilon/2}(\sigma) \cap (O_\varepsilon^+(\sigma) \cup [\sigma]_\varepsilon)$ и любого $v \in Q$ существует такое измеримое программное управление $u(t) \in P$, что для решения $x(t)$ уравнения $\dot{x}(t) = u(t) + v$ с начальным условием $x(t_0) = x_0$ верно включение $(t, x(t)) \in O_\varepsilon^+ \cup [\sigma]_\varepsilon$ при всех $t \in [t_0, t_0 + \Delta(\varepsilon)] \cap [t_1, t_2]$;

2) для любой точки $(t_0, x_0) \in O_{\varepsilon/2}(\sigma) \cap (O_\varepsilon^-(\sigma) \cup [\sigma]_\varepsilon)$ и любого $u \in P$ существует такое измеримое программное управление $v(t) \in Q$, что для решения $x(t)$ уравнения $\dot{x}(t) = u + v(t)$ с начальным условием $x(t_0) = x_0$ верно включение $(t, x(t)) \in O_\varepsilon^- \cup [\sigma]_\varepsilon$ при всех $t \in [t_0, t_0 + \Delta(\varepsilon)] \cap [t_1, t_2]$.

Учитывая определение, будем говорить о стороне (+) и стороне (−) полупроницаемой поверхности.

Выделим *два типа спиральных поверхностей*: если нормали спирали направлены от стороны (+) в сторону (−), то спиральную поверхность называем поверхностью типа \pm ; если от стороны (−) в сторону (+), то — поверхностью типа \mp .

Определим $S^+(\cdot) = S^+(\cdot; \Gamma, [t_1, t_2], \hat{\xi}(\cdot), \check{\xi}(\cdot))$ — многозначное отображение, ставящее в соответствие значению $t \in [t_1, t_2]$ ломаную $S^+(t)$, которая есть часть сечения $\Gamma(t)$ трубки Γ , получаемая при обходе $\Gamma(t)$ от точки $\hat{\xi}(t)$ до точки $\check{\xi}(t)$ в направлении *против часовой стрелки*. Аналогично определяем многозначное отображение $S^-(\cdot) = S^-(\cdot; \Gamma, [t_1, t_2], \hat{\xi}(\cdot), \check{\xi}(\cdot))$, но берем направление обхода от точки $\hat{\xi}(t)$ до точки $\check{\xi}(t)$ в направлении *по часовой стрелке*.

Непосредственно из определений полупроницаемой трубки и полупроницаемой поверхности получаем следующую лемму.

Лемма 2. *Пусть Γ — полупроницаемая трубка на отрезке $[t_1, t_2]$. Тогда для любых непрерывных непересекающихся траекторий $\hat{\xi}(t)$, $\check{\xi}(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, идущих по трубке Γ , отображение $\sigma(\cdot) = S^+(\cdot) = S^+(\cdot; \Gamma, [t_1, t_2], \hat{\xi}(\cdot), \check{\xi}(\cdot))$ задает полупроницаемую поверхность σ с краями $\hat{\xi}(\cdot)$, $\check{\xi}(\cdot)$. Аналогичное свойство справедливо для отображения $S^-(\cdot)$.*

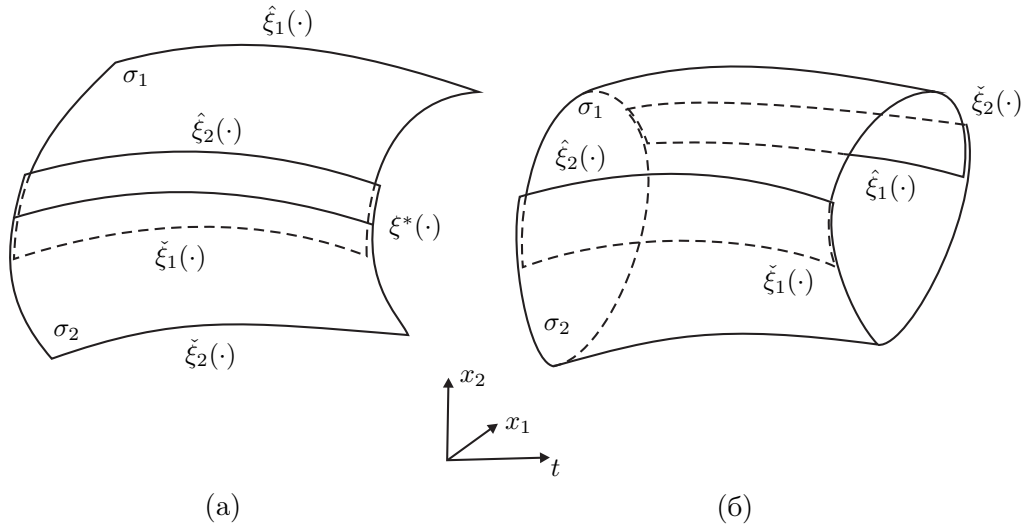


Рис. 2. Склейка полупроницаемых поверхностей в полупроницаемую поверхность (а); в полупроницаемую трубку (б).

Сформулируем и докажем лемму о склейке полупроницаемых поверхностей.

Лемма 3. Пусть

- а) σ_i — полупроницаемая поверхность с краями $\hat{\xi}_i(\cdot)$, $\check{\xi}_i(\cdot)$ на отрезке $[t_1, t_2]$, $i = 1, 2$;
 - б) $\sigma_1 \cap \sigma_2$ — поверхность с краями $\hat{\xi}_2(\cdot)$, $\check{\xi}_1(\cdot)$ на отрезке $[t_1, t_2]$;
 - в) $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$ — поверхность с краями $\hat{\xi}_1(\cdot)$, $\check{\xi}_2(\cdot)$;
 - г) сторона (+) (сторона (-)) поверхности σ_1 переходит в сторону (+) (сторону (-)) поверхности σ_2 через пересечение $\sigma_1 \cap \sigma_2$, образуя сторону (+) (сторону (-)) поверхности σ .
- Тогда σ — полупроницаемая поверхность с соответствующими сторонами (+) и (-).

Доказательство. Для $t \in [t_1, t_2]$ определим $\xi^*(t)$ как точку, делящую ломаную $\sigma_1(t) \cap \sigma_2(t)$ на две ломаные равной длины. “Средняя” траектория $\xi^*(\cdot)$ является непрерывной линией и разделяет поверхность σ на две части σ_1^* и σ_2^* с краями $\hat{\xi}_1(\cdot)$, $\xi^*(\cdot)$ и $\xi^*(\cdot)$, $\check{\xi}_2(\cdot)$ соответственно; условное изображение показано на рис. 2, (а).

Пусть h_0 — минимальное на отрезке $[t_1, t_2]$ расстояние между точками $\hat{\xi}_2(t)$, $\check{\xi}_1(t)$ (крайними вершинами ломаной $\sigma_1(t) \cap \sigma_2(t)$), ε_i — число, определяемое в формуле (2.1) свойством полупроницаемости поверхности σ_i , $i = 1, 2$. Выберем $\varepsilon \in (0, \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, h_0/2\})$. Имеем

$$O(\xi^*(t), \varepsilon) \cap \sigma_i(t) = O(\xi^*(t), \varepsilon) \cap \sigma(t), \quad i = 1, 2, \quad t \in [t_1, t_2].$$

Следовательно, $O_\varepsilon(\sigma) = O_\varepsilon(\sigma_1^*) \cup O_\varepsilon(\sigma_2^*)$.

Поскольку $O_\varepsilon(\sigma_i^*) \subset O_{\varepsilon_i}(\sigma_i)$, $\sigma_i^* \subset \sigma_i$, то

$$O_\varepsilon(\sigma_i^*) = O_\varepsilon^+(\sigma_i^*) \cup [\sigma_i^*]_\varepsilon \cup O_\varepsilon^-(\sigma_i^*),$$

где

$$O_\varepsilon^\pm(\sigma_i^*) := O_{\varepsilon_i}^\pm(\sigma_i) \cap O_\varepsilon(\sigma_i^*), \quad [\sigma_i^*]_\varepsilon := [\sigma_i]_{\varepsilon_i} \cap O_\varepsilon(\sigma_i^*), \quad i = 1, 2. \quad (2.2)$$

Положим

$$O_\varepsilon^\pm(\sigma) := O_\varepsilon^\pm(\sigma_1^*) \cup O_\varepsilon^\pm(\sigma_2^*), \quad [\sigma]_\varepsilon := [\sigma_1^*]_\varepsilon \cup [\sigma_2^*]_\varepsilon.$$

Множества $O_\varepsilon^\pm(\sigma)$ открытые, $O_\varepsilon^+(\sigma) \cap O_\varepsilon^-(\sigma) = \emptyset$, $\sigma \subset [\sigma]_\varepsilon$.

Таким образом, получаем представление

$$O_\varepsilon(\sigma) = O_\varepsilon^+(\sigma) \cup [\sigma]_\varepsilon \cup O_\varepsilon^-(\sigma).$$

Свойства 1), 2) из определения полупроницаемой поверхности выполнены в силу определений (2.2).

Аналогично доказывается следующая лемма, см. рис. 2, (б).

Лемма 4. Пусть

- а) σ_i — полупроницаемая поверхность с краями $\hat{\xi}_i(\cdot)$, $\check{\xi}_i(\cdot)$ на отрезке $[t_1, t_2]$, $i = 1, 2$;
 - б) пересечение $\sigma_1 \cap \sigma_2$ состоит из двух непересекающихся поверхностей с краями $\hat{\xi}_2(\cdot)$, $\check{\xi}_1(\cdot)$ и $\hat{\xi}_1(\cdot)$, $\check{\xi}_2(\cdot)$ соответственно;
 - в) $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$ — трубка;
 - г) сторона (+) (сторона (-)) поверхности σ_1 переходит в сторону (+) (сторону (-)) поверхности σ_2 через пересечение $\sigma_1 \cap \sigma_2$, образуя сторону (+) (сторону (-)) трубки σ .
- Тогда σ — полупроницаемая трубка с соответствующими сторонами (+) и (-).

3. Оператор программного поглощения и его действие на выпуклые многоугольники

Будем набирать полупроницаемые поверхности, склеивая их из кусков, лежащих на границе максимальных стабильных мостов, построенных от выпуклых многоугольников. В связи с этим сформулируем несколько утверждений, используемых при анализе t -сечений таких мостов. Некоторые утверждения являются известными фактами выпуклого анализа.

Пусть $\Pi(\alpha, \nu) := \{x \in \mathbb{R}^2: \langle x, \nu \rangle \leq \alpha\}$ — полуплоскость, задаваемая числом $\alpha \in \mathbb{R}$ и единичным вектором $\nu \in \mathbb{R}^2$ — внешней нормалью к границе; $\mathcal{N}(A)$ — множество единичных внешних нормалей к сторонам выпуклого многоугольника A ; $\rho(\eta; A) = \sup\{\langle a, \eta \rangle: a \in A\}$ — значение опорной функции множества A на векторе η . Тогда $\Pi(\rho(\eta; A), \eta)$ — полуплоскость с внешней нормалью η , опорная к множеству A .

Для $\tau \in [0, \vartheta]$ определим оператор $A \rightarrow T_\tau(A)$ программного поглощения для множества $A \subset \mathbb{R}^2$:

$$T_\tau(A) := (A - \tau P) * \tau Q = \bigcap_{q \in Q} (A - \tau(P + q)).$$

Отметим следующие свойства оператора T_τ [5; 6]:

- 1) если $A \subset B$, то $T_\tau(A) \subset T_\tau(B)$ для всех $\tau > 0$;
- 2) имеет место вложение

$$T_\tau(A \cap B) \subset T_\tau(A) \cap T_\tau(B); \quad (3.1)$$

- 3) для полуплоскости $\Pi(\alpha, \nu)$ и $r \in \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$T_\tau(\Pi(\alpha, \nu) + r\nu) = T_\tau(\Pi(\alpha, \nu)) + r\nu;$$

- 4) если множество A выпукло, $\tau_1, \tau_2 > 0$, то $T_{\tau_1}(T_{\tau_2}(A)) = T_{\tau_1 + \tau_2}(A)$.

Лемма 5. Для $\tau \geq 0$ уравнение прямой $\partial T_\tau(\Pi(\alpha, \nu))$ на плоскости $x \in \mathbb{R}^2$ имеет вид

$$\langle x, \nu \rangle + \tau \langle p_* + q_*, \nu \rangle = \alpha,$$

где

$$p_* \in \text{Arg} \min_{p \in P} \langle p, \nu \rangle, \quad q_* \in \text{Arg} \max_{q \in Q} \langle q, \nu \rangle.$$

Кроме того,

$$T_\tau(\Pi(\alpha, \nu)) = \Pi(\alpha, \nu) - \tau(p_* + q_*).$$

Из леммы 5 следует, что множество $\{(\tau, x): \tau > 0, x \in \partial T_\tau(\Pi(\alpha, \nu))\}$ является полуплоскостью в пространстве $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ переменных (τ, x) .

Лемма 6. Пусть A — выпуклый многоугольник, P — либо выпуклый многоугольник, либо невырожденный отрезок, $y \in \mathbb{R}^2$, $\tau > 0$ и $(y + \tau P) \cap A = \emptyset$. Тогда существует такое $\eta_* \in \mathcal{N}(A) \cup \mathcal{N}(-P)$, что

$$\Pi(\rho(\eta_*, A), \eta_*) \cap (y + \tau P) = \emptyset.$$

Лемма 7. Пусть A — выпуклый многоугольник, каждое из множеств P и Q — либо выпуклый многоугольник, либо отрезок, $\tau > 0$. Тогда

$$T_\tau(A) = \bigcap \{T_\tau(\Pi(\rho(\eta, A), \eta)) : \eta \in \mathcal{N}(A) \cup \mathcal{N}(-P)\}.$$

Доказательство. Поскольку A — выпуклый многоугольник, то справедливо представление

$$A = \bigcap \{\Pi(\rho(\eta, A), \eta) : \eta \in \mathcal{N}(A)\}. \quad (3.2)$$

Добавим в пересечение (3.2) полуплоскости с внешними нормальными из множества $\mathcal{N}(-P)$, опорные к A :

$$A = \bigcap \{\Pi(\rho(\eta, A), \eta) : \eta \in \mathcal{N}(A) \cup \mathcal{N}(-P)\}.$$

Следовательно, по свойству (3.1)

$$T_\tau(A) \subset \bigcap \{T_\tau(\Pi(\rho(\eta, A), \eta)) : \eta \in \mathcal{N}(A) \cup \mathcal{N}(-P)\} =: Y.$$

Докажем противоположное включение от противного. Предположим, что существует $y \in Y \setminus T_\tau(A)$. Поскольку $y \notin T_\tau(A)$, то найдется такое $\tilde{q} \in Q$, что $(y + \tau(P + \tilde{q})) \cap A = \emptyset$, т. е. для $z = y + \tau\tilde{q}$ имеем $(z + \tau P) \cap A = \emptyset$.

По лемме 6 найдется такое $\eta_* \in \mathcal{N}(A) \cup \mathcal{N}(-P)$, что

$$\Pi(\rho(\eta_*, A), \eta_*) \cap (z + \tau P) = \emptyset. \quad (3.3)$$

В силу леммы 5 устанавливаем соотношение

$$y \in T_\tau(\Pi(\rho(\eta_*, A), \eta_*)) = \Pi(\rho(\eta_*, A), \eta_*) - \tau(p_* + q_*),$$

где

$$p_* \in \text{Arg} \min_{p \in P} \langle p, \eta_* \rangle, \quad q_* \in \text{Arg} \max_{q \in Q} \langle q, \eta_* \rangle.$$

Таким образом, $y + \tau(p_* + q_*) \in \Pi(\rho(\eta_*, A), \eta_*)$, т. е. $\langle y + \tau(p_* + q_*), \eta_* \rangle \leq \rho(\eta_*, A)$.

По определению q_* для любого $q \in Q$ выполнено неравенство $\langle q, \eta_* \rangle \leq \langle q_*, \eta_* \rangle$. Следовательно, $\langle y + \tau(p_* + \tilde{q}), \eta_* \rangle \leq \rho(\eta_*, A)$, откуда получаем $y + \tau\tilde{q} + \tau p_* \in \Pi(\rho(\eta_*, A), \eta_*)$. Поскольку $p_* \in P$, то

$$\Pi(\rho(\eta_*, A), \eta_*) \cap (y + \tau\tilde{q} + \tau P) \neq \emptyset.$$

Учитывая определение точки z , приходим к противоречию с (3.3).

Введем обозначение

$$\mathcal{R}_P(A) := \{\Pi(\rho(\eta, A), \eta) : \eta \in \mathcal{N}(A) \cup \mathcal{N}(-P)\} \quad (3.4)$$

для расширенного набора полуплоскостей, опорных к множеству A .

Лемма 8. Пусть A, B — выпуклые многоугольники, $B \subset A$. Тогда

$$T_\tau(B) = T_\tau(A) \bigcap \left(\bigcap \{T_\tau(\Pi) : \Pi \in \mathcal{R}_P(B) \setminus \mathcal{R}_P(A)\} \right). \quad (3.5)$$

Доказательство. В силу леммы 7 верны формулы

$$T_\tau(A) = \bigcap \{T_\tau(\Pi) : \Pi \in \mathcal{R}_P(A)\}, \quad T_\tau(B) = \bigcap \{T_\tau(\Pi) : \Pi \in \mathcal{R}_P(B)\},$$

где наборы полуплоскостей $\mathcal{R}_P(A)$, $\mathcal{R}_P(B)$ определяются формулой (3.4). Отсюда с учетом включения $B \subset A$ получаем представление (3.5).

4. Построение полупроницаемых спиральных поверхностей

4.1. Спиральная система $\mathcal{A}^l(\gamma, P)$ выпуклых множеств для одинарной левой спирали

Пусть $\gamma = a_0 a_1 \dots a_{n_\gamma}$ — одинарная левая спираль. Обозначим через ν_i единичную нормаль к звену $[a_{i-1} a_i]$ спирали γ , $\mathcal{N}_\gamma = \{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{n_\gamma}\}$. Напомним, что для левой спирали вектор нормали к звену $[a_{i-1} a_i]$ получается поворотом вектора $\overrightarrow{a_{i-1} a_i}$ на угол $(-\pi/2)$. Вектор ν_i при возрастании индекса вращается *против часовой стрелки* (для левой спирали).

Образуем новый набор нормалей \mathcal{N}_γ^P , дополнив набор \mathcal{N}_γ нормальями из множества $\mathcal{N}(-P)$ следующим образом. Перебирая все пары соседних нормалей ν_i и ν_{i+1} , $i = \overline{1, n_\gamma - 1}$, находим все векторы из набора $\mathcal{N}(-P)$, которые попадают в открытый конус, образованный векторами ν_i и ν_{i+1} , и упорядочиваем их *против часовой стрелки* (для левой спирали): $\eta_i^1, \eta_i^2, \dots, \eta_i^{\beta_i}$. Такое множество может быть пустым. Вставим полученные наборы векторов между соответствующими парами нормалей ν_i и ν_{i+1} и обозначим полученное множество через \mathcal{N}_γ^P :

$$\mathcal{N}_\gamma^P = \{\nu_1, \eta_1^1, \dots, \eta_1^{\beta_1}, \nu_2, \eta_2^1, \dots, \eta_2^{\beta_2}, \nu_3, \dots, \nu_{n_\gamma-1}, \eta_{n_\gamma-1}^1, \dots, \eta_{n_\gamma-1}^{\beta_{n_\gamma-1}}, \nu_{n_\gamma}\}.$$

Для каждого вектора $h \in \mathcal{N}_\gamma^P$ зададим полуплоскость $\Pi^\gamma(h)$:

$$\Pi^\gamma(h) = \{z \in \mathbb{R}^2: \langle z - a_i, h \rangle \leq 0\} \quad \text{при } h = \nu_i \text{ или } h = \eta_i^j, \quad j = \overline{1, \beta_i}.$$

Здесь подразумевается, что индекс i определяется по вектору h .

Введем единую нумерацию для обозначения элементов набора \mathcal{N}_γ^P : $\mathcal{N}_\gamma^P = \{h_1, \dots, h_m\}$. Поставим в соответствие спирали γ *спиральную систему*

$$\mathcal{A}^l(\gamma, P) = \{A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots \supset A_n\}$$

вложенных выпуклых множеств A_i , $i = \overline{1, n}$, следующим образом. Пусть $A_1 := \text{co } \gamma$. Если $\gamma \subset \partial A_1$, то полагаем $n = 1$ и $\mathcal{A}^l(\gamma, P) = \{A_1\}$. В случае $\gamma \not\subset \partial A_1$ для величины $n_1 = \max\{i \in \overline{1, m}: A_1 \subset \Pi^\gamma(h_i)\}$ справедливо неравенство $n_1 < m$ (рис. 3). Рассмотрим вспомогательные множества

$$A_{n_1}^* = A_1, \quad A_j^* = A_{j-1}^* \cap \Pi^\gamma(h_j), \quad j = \overline{n_1 + 1, m}.$$

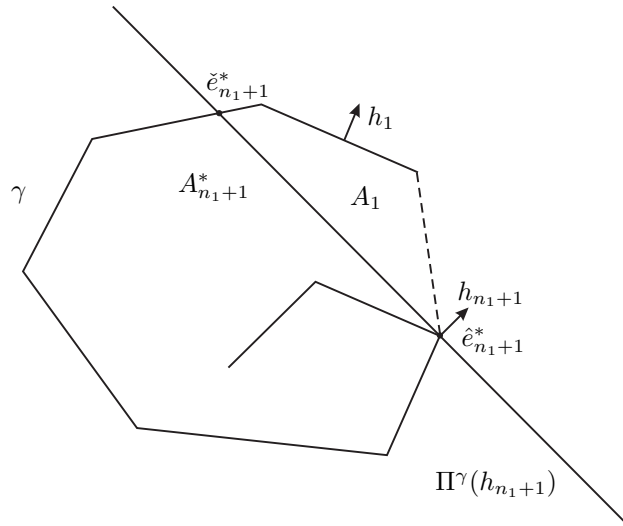


Рис. 3. Определение множества $A_{n_1+1}^*$ в случае $\gamma \not\subset \partial A_1$.

Для всех $j = \overline{n_1 + 1, m}$ граница $\partial\Pi^\gamma(h_j)$ полуплоскости $\Pi^\gamma(h_j)$ разбивает множество A_{j-1}^* на два непустых подмножества по отрезку $[\hat{e}_j^*, \check{e}_j^*] = \partial\Pi^\gamma(h_j) \cap A_{j-1}^*$. Обозначения для вершин отрезка выбраны так, что при движении от \hat{e}_j^* к \check{e}_j^* полуплоскость $\Pi^\gamma(h_j)$ остается *слева* (для левой спирали). Заметим, что

$$A_j^* = A_1 \cap \left(\bigcap_{i=n_1+1}^j \Pi^\gamma(h_i) \right), \quad j = \overline{n_1 + 1, m}.$$

Определим множество A_2 на основе множества A_1 . Введем обозначение

$$\Phi_2^j := \bigcap_{i=n_1+1}^j \Pi^\gamma(h_i) = \bigcap \{ \Pi : \Pi \in \mathcal{R}_P(A_j^*) \setminus \mathcal{R}_P(A_1) \}, \quad j = \overline{n_1 + 1, m}.$$

Заметим, что множество $\Phi_2^{n_1+1}$ является полуплоскостью и, следовательно, не ограничено. Определим такой наибольший номер $n_2 \in \overline{n_1 + 1, m}$, что для всех $j = \overline{n_1 + 1, n_2}$ множество Φ_2^j не ограничено.

Положим

$$A_2 := A_{n_2}^* = A_1 \cap \left(\bigcap_{i=n_1+1}^{n_2} \Pi^\gamma(h_i) \right) = A_1 \cap \Phi_2^{n_2}, \quad \hat{e}_2(\vartheta) := \hat{e}_{n_1+1}^*, \quad \check{e}_2(\vartheta) := \check{e}_{n_2}^*.$$

Если $n_2 = m$, то $n = 2$ и $\mathcal{A}^l(\gamma, P) = \{A_1 \supset A_2\}$.

В случае $n_2 < m$ определяем множество A_3 на основе множества A_2 . Опишем общий случай задания множества A_k на основе множества A_{k-1} , если $n_{k-1} < m$.

Пусть

$$\Phi_k^j := \bigcap_{i=n_{k-1}+1}^j \Pi^\gamma(h_i) = \bigcap \{ \Pi : \Pi \in \mathcal{R}_P(A_j^*) \setminus \mathcal{R}_P(A_{k-1}) \}, \quad j = \overline{n_{k-1} + 1, m}. \quad (4.1)$$

Множество $\Phi_k^{n_{k-1}+1}$ – полуплоскость. Определим такой наибольший номер $n_k \in \overline{n_{k-1} + 1, m}$, что для всех $j = \overline{n_{k-1} + 1, n_k}$ множество Φ_k^j не ограничено.

Положим

$$A_k := A_{n_k}^* = A_{k-1} \cap \left(\bigcap_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} \Pi^\gamma(h_i) \right) = A_{k-1} \cap \Phi_k^{n_k}, \quad \hat{e}_k(\vartheta) := \hat{e}_{n_{k-1}+1}^*, \quad \check{e}_k(\vartheta) := \check{e}_{n_k}^*.$$

В случае $n_k = m$ имеем $n = k$ и $\mathcal{A}^l(\gamma, P) = \{A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_k\}$.

4.2. Построение полупроницаемой спиральной поверхности типа \pm для одинарной левой спирали

Для одинарной левой спирали γ определим спиральную систему $\mathcal{A}^l(\gamma, P) = \{A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n\}$. Рассмотрим невырожденный случай $n \geq 2$. Обозначим через $a_\gamma(\vartheta)$ и $b_\gamma(\vartheta)$ начальную и конечную точки спирали (закручивание из начальной точки внутрь *против часовой стрелки* (для левой спирали)).

Известно [5], что для задачи A_i -сближения ($i = \overline{1, n}$) максимальный u -стабильный мост W_i определяется формулой

$$W_i := \{(t, x) : t \in [0, \vartheta], x \in T_{\vartheta-t}(A_i; P, Q)\},$$

где

$$T_\tau(A; P, Q) := T_\tau(A) = (A - \tau P) * \tau Q, \quad \tau = \vartheta - t.$$

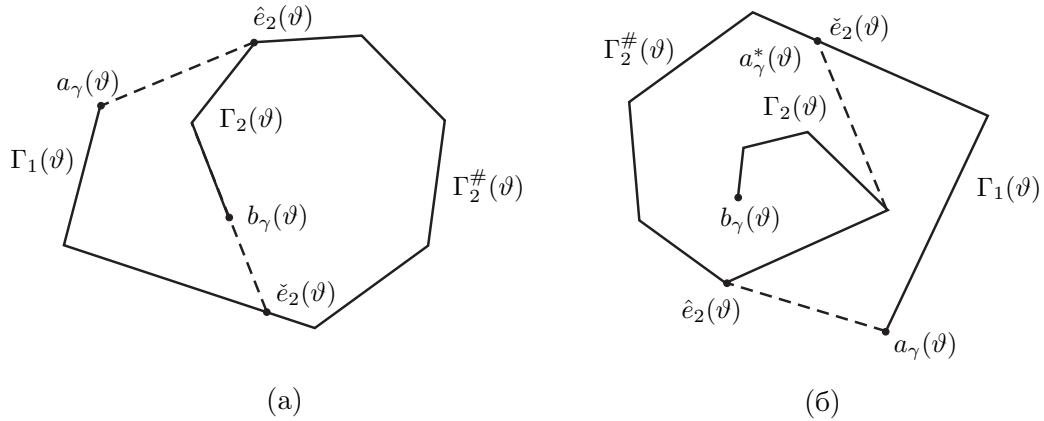


Рис. 4. Построение полупроницаемой спиральной поверхности: база (а) и шаг (б) индукции.

Боковые поверхности мостов W_i , $i = \overline{1, n}$, являются полупроницаемыми трубками. Используя их, опишем построение полупроницаемой спиральной поверхности σ типа \pm , для которой $\sigma(\vartheta) = \gamma$.

Зададим длину $\tau_* = \tau_*(\gamma)$ промежутка времени построения полупроницаемой поверхности σ условием $\text{int } T_\tau(A_n) \neq \emptyset$, $\tau \in (0, \tau_*]$. Поскольку A_n — невырожденный многоугольник (не точка и не отрезок), то такое $\tau_* > 0$ существует. Положим $t_* = t_*(\gamma) = \vartheta - \tau_*$.

Пусть Γ_i — боковая поверхность моста W_i на отрезке времени $[t_*, \vartheta]$, $\Gamma_i^\#(t) := \Gamma_i(t) \cap \Gamma_{i-1}(t)$, $i = \overline{2, n}$. Поверхности Γ_i , $i = \overline{1, n}$, являются полупроницаемыми трубками типа \pm .

В силу леммы 8 для $i = \overline{2, n}$, $t \in [t_*, \vartheta]$, $\tau = \vartheta - t$ справедливо представление

$$T_\tau(A_i) = T_\tau(A_{i-1}) \cap \left(\bigcap \{T_\tau(\Pi) : \Pi \in \mathcal{R}_P(A_i) \setminus \mathcal{R}_P(A_{i-1})\} \right).$$

Здесь набор полуплоскостей $\mathcal{R}_P(A_i)$ определяется формулой (3.4). Учитывая определение множества A_i на основе множества A_{i-1} и числа n_i , имеем

$$\Phi_i^{n_i} = \bigcap \{\Pi : \Pi \in \mathcal{R}_P(A_i) \setminus \mathcal{R}_P(A_{i-1})\}.$$

Множество $\Phi_i^{n_i}$ задается формулой (4.1) и является неограниченным. Согласно лемме 5 образ $T_\tau(\Pi)$ полуплоскости Π является ее сдвигом на вектор $-\tau(p_* + q_*)$. Следовательно, пересечение

$$\bigcap \{T_\tau(\Pi) : \Pi \in \mathcal{R}_P(A_i) \setminus \mathcal{R}_P(A_{i-1})\}$$

полуплоскостей также не ограничено и, учитывая невырожденность множества A_i , получаем, что множество $\Gamma_i^\#(t)$ является ломаной (незамкнутой или замкнутой) и многозначное отображение $t \rightarrow \Gamma_i^\#(t)$ непрерывно.

Используя символы $\hat{e}_i(t)$, $\check{e}_i(t)$, обозначим края ломаной $\Gamma_i^\#(t)$ (если она незамкнута) так, чтобы при движении по $\Gamma_i^\#(t)$ из $\check{e}_i(t)$ в $\hat{e}_i(t)$ множество $W_i(t)$ оставалось слева, $i = \overline{2, n}$. Функции $\hat{e}_i(\cdot)$ и $\check{e}_i(\cdot)$ непрерывны. Вводимые обозначения поясняются на рис. 4 при $t = \vartheta$.

Зафиксируем некоторые непересекающиеся непрерывные траектории $a_\gamma(t)$, $b_\gamma(t)$, $t \in [t_*, \vartheta]$, с конечными точками $a_\gamma(\vartheta)$, $b_\gamma(\vartheta)$, такие что траектория $a_\gamma(\cdot)$ идет по трубке Γ_1 , а траектория $b_\gamma(\cdot)$ — по трубке Γ_n . Мы не накладываем каких-либо условий геометрического характера, связанных с расположением кривых $a_\gamma(\cdot)$, $b_\gamma(\cdot)$ относительно поверхностей $\Gamma_i^\#$.

Переходим к построению (индукцией по n) полупроницаемой спиральной поверхности σ типа \pm (с краями $a_\gamma(\cdot)$, $b_\gamma(\cdot)$).

1) База индукции: рассмотрим случай $n = 2$ (рис. 4, (а)). Имеем две полупроницаемые трубки Γ_1 , Γ_2 .

1а) Предположим сначала, что $W_1(t) \neq W_2(t)$ для всех $t \in [t_*, \vartheta]$. В этом случае непересекающиеся траектории $\hat{e}_2(\cdot)$, $\check{e}_2(\cdot)$ (края поверхности $\Gamma_2^\#$) заданы на всем промежутке $[t_*, \vartheta]$.

Определим непересекающиеся траектории $\hat{\xi}_i(\cdot)$, $\check{\xi}_i(\cdot)$ на отрезке $[t_*, \vartheta]$, идущие по трубке Γ_i , $i = 1, 2$. Для $t \in [t_*, \vartheta]$ положим

$$\begin{aligned} \hat{\xi}_1(t) &= a_\gamma(t), & \check{\xi}_1(t) &= \begin{cases} \hat{e}_2(t), & \text{если } b_\gamma(t) \notin \Gamma_2^\#(t), \\ b_\gamma(t) & \text{иначе,} \end{cases} \\ \hat{\xi}_2(t) &= \begin{cases} \check{e}_2(t), & \text{если } a_\gamma(t) \notin \Gamma_2^\#(t), \\ a_\gamma(t) & \text{иначе,} \end{cases} & \check{\xi}_2(t) &= b_\gamma(t). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Поскольку траектории $a_\gamma(\cdot)$, $b_\gamma(\cdot)$, $\hat{e}_2(\cdot)$, $\check{e}_2(\cdot)$ непрерывны и $\hat{e}_2(\cdot)$, $\check{e}_2(\cdot)$ – края поверхности $\Gamma_2^\#$, то траектории $\hat{\xi}_i(\cdot)$, $\check{\xi}_i(\cdot)$ также будут непрерывны.

Пусть

$$\sigma_i(\cdot) = S^+(\cdot; \Gamma_i, [t_*, \vartheta], \hat{\xi}_i(\cdot), \check{\xi}_i(\cdot)), \quad i = 1, 2; \quad \sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2.$$

Поверхности $\sigma_1 \subset \Gamma_1$ и $\sigma_2 \subset \Gamma_2$ полупроницаемы в силу полупроницаемости трубок Γ_1 , Γ_2 и леммы 2. Заметим, что $\sigma_1 \cap \sigma_2$ – полупроницаемая поверхность с краями $\hat{\xi}_1(\cdot)$ и $\check{\xi}_1(\cdot)$, а множество $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$ – поверхность с краями $\hat{\xi}_1(\cdot)$, $\check{\xi}_2(\cdot)$.

Поскольку $W_2(t) \subset W_1(t)$ и Γ_1 , Γ_2 – полупроницаемые трубки типа \pm , то стороны (+) и (–) поверхностей σ_1 и σ_2 определяют стороны (+) и (–) поверхности σ . В силу леммы 3 поверхность σ является полупроницаемой поверхностью типа \pm с соответствующими сторонами (+) и (–).

1б) Рассмотрим оставшийся случай: найдется такое $\bar{t} \in [t_*, \vartheta)$, что $W_1(\bar{t}) = W_2(\bar{t})$. Заметим, что в этом случае $W_1(t) = W_2(t)$ при $t \in [t_*, \bar{t}]$.

Для $t \in (\bar{t}, \vartheta)$ заданы несовпадающие значения $\hat{e}_2(t)$, $\check{e}_2(t)$ – концы ломаной $\Gamma^\#(t)$. Поэтому значения $\hat{\xi}_i(t)$, $\check{\xi}_i(t)$, $i = 1, 2$, определяем по формулам (4.2).

При $t \in [t_*, \bar{t}]$ имеем $\Gamma_1(t) = \Gamma_2(t)$, поэтому полагаем $\hat{\xi}_1(t) = \hat{\xi}_2(t) = a_\gamma(t)$, $\check{\xi}_1(t) = \check{\xi}_2(t) = b_\gamma(t)$.

Докажем, что траектории $\hat{\xi}_i(\cdot)$, $\check{\xi}_i(\cdot)$, $i = 1, 2$, непрерывны на отрезке $[t_*, \vartheta]$. В силу определения функций $\hat{\xi}_i(\cdot)$, $\check{\xi}_i(\cdot)$ доказательство сводится к проверке непрерывности $\hat{\xi}_1(\cdot)$ и $\hat{\xi}_2(\cdot)$ в точке $t = \bar{t}$ справа.

Введем обозначение

$$a_* = \lim_{t \rightarrow \bar{t}+0} \hat{e}_2(t) = \lim_{t \rightarrow \bar{t}+0} \check{e}_2(t).$$

Второе равенство не является тривиальным. Его доказательство опускаем. Имеем $a_* \in \Gamma_2(\bar{t}) = \Gamma_1(\bar{t})$.

Начнем с функции $\check{\xi}_1(\cdot)$. Предположим, что найдется последовательность $\{t_k\}$, для которой $t_k \rightarrow \bar{t}+0$, $\check{\xi}_1(t_k) = \hat{e}_2(t_k) \not\rightarrow b_\gamma(\bar{t})$. Тогда $b_\gamma(t_k) \in \Gamma_2(t_k) \setminus \Gamma_2^\#(t_k)$. Но ломаная $\Gamma_2(t_k) \setminus \Gamma_2^\#(t_k)$ стягивается в точку a_* , т. е. $b_\gamma(t_k) \rightarrow a_*$. Следовательно, $b_\gamma(\bar{t}) \neq a_*$ и точка $b_\gamma(\bar{t})$ не принадлежит некоторой окрестности G_* точки a_* . В окрестность G_* при достаточно больших k обязательно попадут точки $\hat{e}_2(t_k)$ и $\check{e}_2(t_k)$. Таким образом, учитывая непрерывность траектории $b_\gamma(\cdot)$, получаем $b_\gamma(t_k) \in \Gamma_2^\#(t_k)$, т. е. $\hat{\xi}_1(t_k) = b_\gamma(t_k)$, что противоречит предположению. Непрерывность функции $\check{\xi}_1(\cdot)$ в точке $t = \bar{t}$ справа доказана.

Рассмотрим теперь функцию $\hat{\xi}_2(\cdot)$ и предположим, что найдется последовательность $\{t_k\}$, для которой $t_k \rightarrow \bar{t}+0$, $\hat{\xi}_2(t_k) = \check{e}_2(t_k) \not\rightarrow a_\gamma(\bar{t})$. Следовательно, $a_\gamma(t_k) \in \Gamma_1(t_k) \setminus \Gamma_2(t_k)$. Поскольку множество $\Gamma_1(t_k) \setminus \Gamma_2(t_k)$ стягивается в точку a_* , то $a_\gamma(t_k) \rightarrow a_*$. Вместе с тем, $a_\gamma(t_k) \rightarrow a_\gamma(\bar{t})$ и $\check{e}_2(t_k) \rightarrow a_*$. Таким образом, $a_\gamma(\bar{t}) = a_*$ и $\check{e}_2(t_k) \rightarrow a_\gamma(\bar{t})$, что противоречит предположению. Получаем, что и функция $\hat{\xi}_2(\cdot)$ непрерывна в точке $t = \bar{t}$ справа.

Дальнейшие рассуждения в случае 1б) аналогичны случаю 1а).

2) Шаг индукции: предположим, что найден алгоритм построения полупроницаемой поверхности для $n = k$, $k \geq 2$; построим ее для $n = k + 1$.

Имеем последовательность $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k, \Gamma_{k+1}$ полупроницаемых трубок на отрезке времени $[t_*, \vartheta]$. Рассмотрим два возможных случая аналогично доказательству базы индукции.

2а) Предположим сначала, что $W_1(t) \neq W_2(t)$ для всех $t \in [t_*, \vartheta]$. В этом случае непересекающиеся траектории $\hat{e}_2(\cdot)$, $\check{e}_2(\cdot)$ (края поверхности $\Gamma_2^\#$) заданы на всем промежутке $[t_*, \vartheta]$. Для $t \in [t_*, \vartheta]$ положим

$$a_\gamma^*(t) = \begin{cases} \check{e}_2(t), & \text{если } a_\gamma(t) \notin \Gamma_2^\#(t), \\ a_\gamma(t) & \text{иначе.} \end{cases} \quad (4.3)$$

Рисунок 4, (б) поясняет используемые обозначения при $t = \vartheta$. Заметим, что траектория $a_\gamma^*(\cdot)$ определена аналогично траектории $\hat{\xi}_2(\cdot)$ из п. 1б) и, следовательно, также является непрерывной.

Применяя предположение индукции для последовательности k трубок $\Gamma_2, \dots, \Gamma_k, \Gamma_{k+1}$, строим полупроницаемую поверхность σ_* с крайними траекториями $a_\gamma^*(\cdot)$ и $b_\gamma(\cdot)$.

Траектории $a_\gamma(\cdot)$ и $a_\gamma^*(\cdot)$ лежат на трубке Γ_1 и непрерывны. Пусть

$$\sigma_1(\cdot) = S^+(\cdot; \Gamma_1, [t_*, \vartheta], a_\gamma(\cdot), \hat{e}_2(\cdot)), \quad \sigma = \sigma_1 \cup \sigma_*.$$

В силу леммы 3, применяемой к поверхностям σ_1 и σ_* , поверхность σ является полупроницаемой поверхностью.

2б) Пусть найдется такое $\bar{t} \in [t_*, \vartheta]$, что $W_1(\bar{t}) = W_2(\bar{t})$. Тогда для $t \in (\bar{t}, \vartheta]$ значение $a_\gamma^*(t)$ определим по формуле (4.3), для $t \in [t_*, \bar{t}]$ положим $a_\gamma^*(t) = a_\gamma(t)$.

Аналогично случаю 2а) строим полупроницаемую поверхность на промежутке $(\bar{t}, \vartheta]$. На отрезке $[t_*, \bar{t}]$ полупроницаемая поверхность построена по предположению индукции на основе трубок $\Gamma_2, \dots, \Gamma_{k+1}$, поскольку $\Gamma_1(t) = \Gamma_2(t)$, $t \in [t_*, \bar{t}]$. В целом на отрезке $[t_*, \vartheta]$ получаем полупроницаемую поверхность.

4.3. Построение полупроницаемых спиральных поверхностей типов \pm и \mp для других исходных спиралей

а) При построении полупроницаемой спиральной поверхности типа \pm для одинарной правой спирали определяем правую спиральную систему $\mathcal{A}^r(\gamma, P)$, упорядочивая все нормали *по часовой стрелке* и обходя границы множеств в отрицательном направлении (множество справа). Построение спиральной поверхности проводим так же, как и для одинарной левой спирали, заменив оператор $S^+(\cdot)$ на оператор $S^-(\cdot)$.

б) При построении полупроницаемой спиральной поверхности типа \mp для одинарной левой (правой) спирали определяем спиральную систему $\mathcal{A}^l(\gamma, Q)$ (соответственно $\mathcal{A}^r(\gamma, Q)$). Построение спиральной поверхности типа \mp проводим аналогично построению поверхности типа \pm , заменив оператор $T_\tau(\cdot; P, Q)$ на оператор $T_\tau(\cdot; Q, P)$, а наборы полуплоскостей $\mathcal{R}_P(A)$ на наборы $\mathcal{R}_Q(A)$.

в) Рассмотрим построение полупроницаемой спиральной поверхности типа \pm для двойной спирали γ . По определению имеем представление $\gamma = \gamma_0^l \cup \gamma_0 \cup \gamma_0^r$, где $\gamma_0^l, \gamma_0, \gamma_0^r$ — невырожденные ломаные,

$$\gamma_0 = \gamma \cap \partial A_0, \quad A_0 = \text{co } \gamma, \quad \gamma_0^l \cap \gamma_0^r = \emptyset,$$

$\gamma_0 \cup \gamma_0^l = \gamma^l$ — левая спираль, $\gamma_0 \cup \gamma_0^r = \gamma^r$ — правая спираль (см. рис. 1, (в)).

Пусть $a_\gamma^l(\vartheta) = \gamma_0 \cap \gamma_0^r$, $a_\gamma^r(\vartheta) = \gamma_0 \cap \gamma_0^l$ — начальные в порядке обхода вершины спиралей γ^l и γ^r , а $b_\gamma^l(\vartheta)$, $b_\gamma^r(\vartheta)$ — их последние вершины. Отметим, что $b_\gamma^l(\vartheta) \in \gamma_0^l$, $b_\gamma^r(\vartheta) \in \gamma_0^r$ — крайние вершины спирали γ (обе “внутренние”).

Введем траектории $a_\gamma^l(\cdot)$, $a_\gamma^r(\cdot)$. Для левой спирали γ^l и правой спирали γ^r определены левая и правая спиральные системы множеств:

$$\mathcal{A}^l(\gamma^l) = \{A_1^l \supset A_2^l \supset \dots \supset A_{n_l}^l\}, \quad \mathcal{A}^r(\gamma^r) = \{A_1^r \supset A_2^r \supset \dots \supset A_{n_r}^r\}.$$

Имеем $A_1^l = A_1^r = A_0$.

Выберем момент $t_*^{l,r} < \vartheta$ так, что $\text{int } T_\tau(A_{n_l}^l) \neq \emptyset$ и $\text{int } T_\tau(A_{n_r}^r) \neq \emptyset$ при $\tau \in (0, \vartheta - t_*^{l,r}]$.

Пусть W_0, W_2^l, W_2^r — максимальные u -стабильные мосты в задачах A_0 -, A_2^l -, A_2^r -сближения соответственно; $\Gamma_0, \Gamma_2^l, \Gamma_2^r$ — боковые поверхности мостов W_0, W_2^l, W_2^r .

Траекторию $a_\gamma^l(\cdot)$ (соответственно, $a_\gamma^r(\cdot)$) зададим как край (вдоль оси времени) множества $\overline{\Gamma_0 \setminus \Gamma_2^r}$ (соответственно $\overline{\Gamma_0 \setminus \Gamma_2^l}$), выходящий в обратном времени из точки $a_\gamma^l(\vartheta)$ (соответственно $a_\gamma^r(\vartheta)$).

Определим момент $\tilde{t} \in [t_*^{l,r}, \vartheta)$ из условия непересечения траекторий $a_\gamma^l(\cdot), a_\gamma^r(\cdot)$ на $[\tilde{t}, \vartheta]$. Положим

$$\sigma_0(\cdot) = S^+(\cdot; \Gamma_0, [\tilde{t}, \vartheta], a_\gamma^l(\cdot), a_\gamma^r(\cdot)).$$

На отрезке $[\tilde{t}, \vartheta]$ зададим траектории $b_\gamma^l(\cdot), b_\gamma^r(\cdot)$ — “внутренние” края конструируемой полупроницаемой поверхности — и определим полупроницаемые поверхности σ^l и σ^r типа \pm с краями $a_\gamma^l(\cdot), b_\gamma^l(\cdot)$ и $a_\gamma^r(\cdot), b_\gamma^r(\cdot)$ соответственно. Значение $t^* = t^*(\gamma) \in [\tilde{t}, \vartheta)$ находим из условия непересечения множеств $\sigma^l(t)$ и $\sigma^r(t)$ вне множества $\sigma_0(t)$ для $t \in [t^*, \vartheta]$.

Поверхность $\sigma = \sigma^l \cup \sigma^r$ — искомая полупроницаемая поверхность.

5. Склейка полупроницаемой трубки из полупроницаемых спиральных поверхностей

Рассмотрим многоугольную границу $\gamma = \partial M$ невыпуклого терминального множества. Закрытую ломаную γ представим в виде такого упорядоченного объединения четного числа спиралей $\gamma_i, i = \overline{1, 2k}$, что последнее звено одной спирали совпадает с первым звеном следующей спирали (звенья зацепления), при этом соответствующие нормали к этим звеньям противоположно направлены (рис. 5).

Для определенности будем считать, что нормали спирали γ_i при нечетном i направлены вовне множества M (дуга выпуклости на границе множества). В этом случае будем строить полупроницаемую спиральную поверхность типа \pm . При четном i считаем, что нормали направлены внутрь множества M (дуга вогнутости). Для такой спирали будем строить полупроницаемую спиральную поверхность типа \mp .

В соответствие каждой отдельной одинарной спирали γ_i поставим значение $t^b(\gamma_i) = t_*(\gamma_i)$, где $t_*(\gamma_i)$ введено в разд. 4.2. В случае отдельной двойной спирали положим $t^b(\gamma_i) = t^*(\gamma_i)$, где $t^*(\gamma_i)$ введено в конце разд. 4.3. На отрезке $[t^b(\gamma_i), \vartheta]$ построим полупроницаемую поверхность σ_i , исходящую в обратном времени из спиральной ломаной γ_i , т. е. $\sigma_i(\vartheta) = \gamma_i$.

Найдем такое значение

$$t_M \geq \max_{i \in \overline{1, 2k}} t^b(\gamma_i),$$

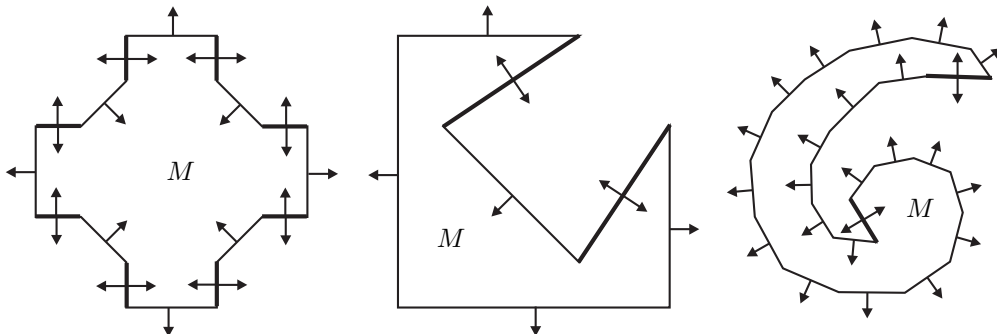


Рис. 5. Разбиение границы терминального множества M на дуги выпуклости и вогнутости, пересекающиеся по звеньям зацепления.

что на отрезке $[t_M, \vartheta]$ множество $\sigma = \sigma_1 \cup \dots \cup \sigma_{2k}$ является трубкой. Момент t_M задают следующие условия: 1) не вырождаются звенья зацепления; 2) сечения $\sigma_i(t)$, $t \in [t_M, \vartheta]$ пересекаются только с соседними поверхностями и только по звеньям зацепления. Условие 1) означает, что для любых двух соседних дуг выпуклости и вогнутости на исходной кривой γ общее для них звено зацепления в процессе развития в обратном времени соответствующих двух спиральных поверхностей может изменять свою длину в сечении при $t \in [t_M, \vartheta]$, но не стягивается в точку.

В силу лемм 3 и 4 получаем, что трубка σ является полупроницаемой на отрезке $[t_M, \vartheta]$ и $\sigma(\vartheta) = \gamma$. Следовательно, по лемме 1 трубка σ на отрезке $[t_M, \vartheta]$ представляет собой боковую поверхность максимального u -стабильного моста W_0 , т.е. определяет решение дифференциальной игры на указанном отрезке.

Заключение

В статье исследуется антагонистическая дифференциальная игра на плоскости с динамикой простых движений и фиксированным моментом окончания. Показано, что при многоугольном терминальном множестве и выпуклых многоугольных ограничениях на управления игроков существует промежуток времени, примыкающий к моменту окончания, такой что множество разрешимости (максимальный стабильный мост) на этом промежутке может быть построено при помощи программных конструкций без дополнительного дробления промежутка на более мелкие части и последующего предельного перехода. В работе нет оценки снизу длины указанного промежутка.

Авторы благодарят Д.А.Серкова за обсуждение работы и замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Айзекс Р.** Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 480 с.
2. **Субботин А.И.** Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка: перспективы динамической оптимизации. М., Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2003. 336 с.
3. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М., Наука, 1974. 456 с.
4. **Krasovskii N.N., Subbotin A.I.** Game-theoretical control problems. New York etc.: Springer, 1988. 517 p.
5. **Пшеничный Б.Н., Сагайдак М.И.** О дифференциальных играх с фиксированным временем // Кибернетика. 1970. № 2. С. 54–63.
6. **Камнева Л.В., Пацко В.С.** Полугрупповое свойство оператора программного поглощения в играх с простыми движениями на плоскости // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49, № 11. С. 1399–1409.

Камнева Людмила Валерьевна

канд. физ.-мат. наук

старший науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,

Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина

e-mail: kamneva@imm.uran.ru

Пацко Валерий Семенович

канд. физ.-мат. наук

зав. сектором

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,

Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина

e-mail: patsko@imm.uran.ru

Поступила 9.08.2014