

УДК 517.977

**АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ
ДЛЯ МАШИНЫ ДУБИНСА****В. С. Пацко, А. А. Федотов**

Рассматривается трехмерное множество достижимости “в момент” для управляемого объекта “машина Дубинса” (другое название – unicycle). Изучается случай, когда повороты возможны в обе стороны. Для такого случая в предыдущих статьях авторов на основе принципа максимума Понтрягина выделены шесть типов кусочно-постоянных программных управлений, которыми можно ограничиться при изучении границы множества достижимости $G(t_f)$ в заданный момент времени t_f . Такие управления были использованы для численного построения множества достижимости и его визуализации. Однако аналитического описания границы множества $G(t_f)$ не было получено. Данная работа посвящена выводу формул для двумерных сечений множества $G(t_f)$ по угловой координате, которые, вообще говоря, не являются выпуклыми. Проанализирована структура указанных сечений. При записи динамики в нормированных координатах аналитическое описание получено в предположении $t_f \leq 2\pi$. Для этого случая сформулирована теорема о необходимых и достаточных условиях перевода движения на границу множества $G(t_f)$. Случай $t_f > 2\pi$ пока не охвачен аналитическим описанием из-за усложнения структуры сечений, в частности за счет потери односвязности множества $G(t_f)$ для некоторых значений t_f .

Ключевые слова: машина Дубинса, двусторонние повороты, трехмерное множество достижимости, принцип максимума Понтрягина, экстремальные кусочно-постоянные управления, сечения множества достижимости по угловой координате, аналитическое описание сечений.

V. S. Patsko, A. A. Fedotov. Analytic description of a reachable set for the Dubins car.

A three-dimensional reachable set at an instant is considered for the controlled object “Dubins car” (also known as unicycle). We study the case when turns to both sides are possible. For this case, the authors earlier specified, based on the Pontryagin maximum principle, six types of piecewise constant open-loop controls; one can restrict oneself to these controls when studying the boundary of the reachable set $G(t_f)$ at a given time t_f . These controls were used for the numerical construction of the reachable set and for its visualization. However, no analytic description of the boundary of the set $G(t_f)$ was obtained. In the present paper, we derive formulas for the generally nonconvex two-dimensional sections of the set $G(t_f)$ with respect to the angular coordinate. The structure of the sections is analyzed. For the dynamics in the normalized coordinates, an analytic description is obtained under the assumption that $t_f \leq 2\pi$. For this case, a theorem is formulated on necessary and sufficient conditions for transferring a motion to the boundary of $G(t_f)$. The case $t_f > 2\pi$ is not covered by the analytic description because of the more complex structure of the sections, in particular, due to the loss of connectivity of $G(t_f)$ for some values of t_f .

Keywords: Dubins car, two-sided turns, three-dimensional reachable set, Pontryagin maximum principle, extremal piecewise constant control, sections of the reachable set along the angle coordinate, analytic description of the sections.

MSC: 93C15, 93B03, 49J15

DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-1-182-197

Введение

Математическая “машина Дубинса” — это модель управляемого движения, в которой две фазовые переменные x, y являются координатами точечного геометрического положения на плоскости, третья переменная φ есть угол, составляемый вектором скорости с положительным направлением оси x . Величина линейной скорости считается постоянной и равной 1. Скалярное управление имеет смысл угловой скорости поворота и стеснено ограничением $u \in [u_1, u_2]$. Величина $1/|u|$ представляет собой мгновенный радиус поворота. Данная модель, ее часто называют также “unicycle”, широко используется при рассмотрении движений самолета в горизонтальной плоскости и при упрощенном описании движения наземных управляемых колесных “тележек” (см., например, [1]).

При исследовании различных задач управления, связанных с машиной Дубинса, полезным является эффективное описание границы трехмерных множеств достижимости “в момент” и “к моменту”. Множество достижимости в момент t_f (к моменту t_f) есть совокупность всех фазовых состояний, в каждое из которых можно перевести систему при помощи некоторого допустимого программного управления точно в момент t_f (соответственно, в некоторый момент из промежутка $[t_0, t_f]$).

Статья посвящена аналитическому описанию множества достижимости $G(t_f)$ в момент t_f в предположении

$$-1 \leq u_1 < 0 < u_2 = 1, \quad t_f \leq 2\pi. \quad (0.1)$$

Соотношения $u_2 = 1, u_1 \geq -1$ не являются существенными: геометрические переменные и время всегда можно пронормировать так, чтобы величина линейной скорости была равна 1 и выполнялись либо условия $u_2 = 1, u_1 \geq -1$, либо условия $u_1 = -1, u_2 \leq 1$. В статье выбран первый вариант. Неравенства $u_1 < 0 < u_2$ означают, что управляемый объект может поворачивать в обе стороны. В случае $u_1 = -1, u_2 = 1$ есть симметрия “правого” и “левого” поворотов. Если $-1 < u_1 < 0 < u_2 = 1$, то поворот возможен в обе стороны, но симметрия нарушена. Ограничение $t_f \leq 2\pi$ связано с тем, что при $t_f > 2\pi$ описание множества достижимости существенно усложняется. В частности, существует промежуток времени, на котором оно не является односвязным [2]. Поэтому случай $t_f > 2\pi$ (в предположении $u_2 = 1$) целесообразно исследовать отдельно.

Аналитическое описание множества достижимости $G(t_f)$ при $t_f \leq 2\pi$ дается в виде формул для кривых, образующих границу его двумерных (вообще говоря, невыпуклых) сечений по угловой координате φ . Их вид зависит от момента t_f и значения φ .

В случае одностороннего поворота, когда $u_1 = 0$ и $u_2 = 1$, или строго одностороннего поворота, когда $0 < u_1 < u_2 = 1$, аналитическое описание φ -сечений получено в статьях авторов “Множество достижимости в момент для машины Дубинса в случае одностороннего поворота” (Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 24, № 1. С. 143–155) и “Структура множества достижимости для машины Дубинса со строго односторонним поворотом” (Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25, № 3. С. 171–187). При исследовании этих случаев есть свои сложности, но φ -сечения являются выпуклыми.

Представленные в данной статье результаты базируются на утверждениях из статей [2; 3], в которых на основе принципа максимума Понтрягина [4; 5] доказаны утверждения о шести типах кусочно-постоянного программного управления, вполне достаточных для изучения границы множества $G(t_f)$ в случае $-1 \leq u_1 < 0 < u_2 = 1$. Следует отметить, что выделенные типы совпадают с вариантами, полученными Л. Дубинсом в работе [6] для задачи, которая при формулировке в терминах математической теории управления эквивалентна задаче быстрогодействия при заданных трехмерных начальном и конечном состояниях.

Статья организована следующим образом.

В разд. 1 дается постановка задачи и приводятся сведения из работ [2; 3], используемые при дальнейшем изложении.

В разд. 2 анализируются некоторые экстремальные движения, которые приходят в момент t_f на заданное φ -сечение при $\varphi > 0$; выводятся формулы параметрического представления соответствующих кривых в φ -сечении.

В разд. 3 показывается, что граница φ -сечения составляется именно из таких кривых.

В разд. 4 уже без подробных выкладок описывается отличие границы φ -сечений при $\varphi < 0$ в сравнении со случаем $\varphi > 0$.

Короткий разд. 5 посвящен φ -сечению при $\varphi = 0$.

В конце статьи сформулирована теорема о необходимых и достаточных условиях перевода движения на границу множества достижимости $G(t_f)$ при $t_f \leq 2\pi$.

1. Постановка задачи. Типы экстремальных движений

Рассмотрим управляемую систему размерности 3 по фазовой переменной:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \cos \varphi, & \dot{y} &= \sin \varphi, & \dot{\varphi} &= u, \\ u &\in [u_1, u_2], & -1 &\leq u_1 < 0 < u_2 = 1. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь x, y — координаты геометрического положения на плоскости, u — скалярное управление. Ограничение u_1 на управление u является параметром задачи. Ограничение u_2 считаем зафиксированным и равным 1. Но, чтобы избежать путаницы в понимании формул, будем наряду с u_1 писать и u_2 . Условимся для определенности, что положительное (отрицательное) значение угла φ отсчитывается от положительного направления оси x против часовой стрелки (по часовой стрелке). В качестве начального состояния в момент $t_0 = 0$ принимаем $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $\varphi(0) = 0$. Величину угла φ в момент t подсчитываем в виде интеграла

$$\int_0^t u(\tau) d\tau$$

от реализовавшегося на промежутке $[0, t]$ программного управления. В качестве допустимых программных управлений принимаем измеримые функции времени, удовлетворяющие ограничению на управление u .

Множество достижимости $G(t_f)$ определим как совокупность всех фазовых состояний системы (1.1), которые можно получить в момент t_f при переборе всех допустимых измеримых программных управлений на промежутке $[0, t_f]$.

Выбор измеримых управлений в качестве допустимых обусловлен желанием применить теорему о замкнутости множества достижимости $G(t_f)$ в рамках постановки задачи. Выписывая далее принцип максимума Понтрягина (ПМП) для программных управлений, ведущих на границу множества достижимости, устанавливаем, что в любую точку на его границе ведет некоторое *кусочно-постоянное* управление. Соответствующие выкладки приведены в [2; 3].

Более того, в [2; 3] доказаны утверждения, из которых следует, что при оговоренных ограничениях на u в любую точку на границе множества $G(t_f)$ можно попасть при помощи управления, принимающего значения в трехэлементном множестве $\{u_1, 0, u_2\}$ и имеющего не более двух моментов переключения. Были выделены шесть типов управлений, которыми можно ограничиться при исследовании границы. В случае $t_f \leq 2\pi$ ими исчерпываются управления, ведущие на границу.

Перечислим эти шесть типов. Управление типа $U1$ принимает значение $u = u_2$ на некотором первом интервале $[0, t_1]$ времени, значение $u = 0$ на некотором втором интервале $[t_1, t_2]$ и значение $u = u_2$ на третьем промежутке $[t_2, t_f]$. Если один или два из указанных промежутков отсутствуют, то полученное управление также относим к типу $U1$.

Типы $U2$ – $U6$ определяются аналогично. Опишем их более кратко, указывая лишь значения управления на каждом из трех промежутков:

$$U2 : u_1, 0, u_2; \quad U3 : u_2, 0, u_1; \quad U4 : u_1, 0, u_1; \quad U5 : u_2, u_1, u_2; \quad U6 : u_1, u_2, u_1.$$

Для управлений $U5$ и $U6$ в [2; 3] сформулировано дополнительное требование: диапазон изменения угла φ на среднем участке не должен быть меньше суммы диапазонов изменения угла φ на первом и третьем участках:

$$|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| \geq |\varphi(t_1) - \varphi(t_0) + \varphi(t_f) - \varphi(t_2)|. \quad (1.2)$$

В (1.2) учтено, что на первом и третьем участках знаки управлений как в $U5$, так и в $U6$ совпадают. В симметричном случае, когда $u_1 = -1$ и $u_2 = 1$, неравенство (1.2) эквивалентно неравенству

$$t_2 - t_1 \geq (t_1 - t_0) + (t_f - t_2).$$

В работах [2; 3] показано, что при нарушении неравенства (1.2) программное управление типа $U5$ или $U6$ ведет в точку, лежащую строго внутри множества достижимости $G(t_f)$.

Поскольку управления $U1$ – $U6$ удовлетворяют ПМП, мы называем их и соответствующие движения экстремальными. Для управлений $U5$ и $U6$ будем предполагать выполненным неравенство (1.2).

Символом $G_\varphi(t_f)$ обозначим φ -сечение множества $G(t_f)$:

$$G_\varphi(t_f) = \{(x, y) : (x, y, \varphi) \in G(t_f)\}.$$

Цель работы — получить аналитическое описание φ -сечений.

Совокупность возможных значений φ системы (1.1) в момент t_f определяется ограничением $[u_1, u_2]$ на управление u и представляет собой отрезок $[t_f \cdot u_1, t_f \cdot u_2]$. Для крайних значений φ имеем одноточечные φ -сечения, которые реализуются на управлениях $u(t) \equiv u_1$ и $u(t) \equiv u_2 = 1$.

В дальнейшем считаем, что $\varphi \in (t_f \cdot u_1, t_f \cdot u_2)$. Движения, приходящие на границу такого φ -сечения, удовлетворяют ПМП и должны иметь не менее одного переключения. Используем это для классификации управлений и соответствующих точек на границе φ -сечения.

В следующих разделах будут последовательно рассмотрены три варианта значений φ :

$$1) 0 < \varphi < t_f \cdot u_2, \quad 2) t_f \cdot u_1 < \varphi < 0, \quad 3) \varphi = 0.$$

Подробное аналитическое описание множеств $G(t_f)$ будет представлено лишь для первого случая. Второй и третий случаи разбираются аналогично. Для них приводятся только окончательные формулы.

2. Экстремальные движения в случае $0 < \varphi < t_f \cdot u_2$

Для построения границы множества достижимости используем управления $U1$ – $U6$. Управления типа $U4$ не могут участвовать в построении границы φ -сечений в случае $\varphi > 0$, поскольку при действии таких управлений получаем $\varphi(t_f) \leq 0$. Отсечем также вариант с управлениями типа $U5$, поскольку при условии $\varphi(t_f) > 0$ они ведут строго внутрь множества достижимости из-за нарушения неравенства (1.2).

Таким образом, при описании границы φ -сечений в разбираемом случае ограничимся четырьмя типами управлений $U1, U2, U3, U6$.

Считаем заданным момент $t_f > 0$. Зафиксируем некоторое значение φ между 0 и $t_f \cdot u_2$. Пусть t_1, t_2 — моменты окончания первого и второго участков управления (моменты переключения). Имеем

$$0 < \varphi < t_f \cdot u_2 = \text{const}, \quad 0 = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_f = \text{const} \leq 2\pi. \quad (2.1)$$

Введем укороченные обозначения $\varphi_1 = \varphi(t_1)$, $\varphi_2 = \varphi(t_2)$.

Выпишем значения величин φ_1, φ_2 для рассматриваемых четырех типов управлений. Получаем:

$$\begin{aligned} U1: & \quad \varphi_1 = t_1 \cdot u_2, \quad \varphi_2 = \varphi_1; \\ U2: & \quad \varphi_1 = t_1 \cdot u_1, \quad \varphi_2 = \varphi_1; \\ U3: & \quad \varphi_1 = t_1 \cdot u_2, \quad \varphi_2 = \varphi_1; \\ U6: & \quad \varphi_1 = t_1 \cdot u_1, \quad \varphi_2 = \varphi_1 + (t_2 - t_1) \cdot u_2. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Далее для каждого из указанных четырех типов выведем аналитические соотношения, определяющие фазовые состояния $(x(t_f), y(t_f), \varphi(t_f))^T$ системы (1.1) в момент t_f . Обозначим их через $(x_{U_i}, y_{U_i}, \varphi_{U_i})^T$, $i = 1, 2, 3, 6$.

2.1. Движения в силу управлений U_1

Рассматриваем последовательность управлений $u_2, 0, u_2$. Имеем

$$\varphi_{U_1} = (t_1 + t_f - t_2) u_2. \quad (2.3)$$

Интегрируем первые два уравнения системы (1.1) на промежутке $[0, t_f]$. Получаем выражение для координат геометрического положения в момент t_f :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_{U_1} \\ y_{U_1} \end{pmatrix} &= \frac{1}{u_2} \begin{pmatrix} \sin \varphi_1 \\ 1 - \cos \varphi_1 \end{pmatrix} + (t_2 - t_1) \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 \\ \sin \varphi_1 \end{pmatrix} + \frac{1}{u_2} \begin{pmatrix} \sin \varphi_{U_1} - \sin \varphi_1 \\ \cos \varphi_1 - \cos \varphi_{U_1} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{u_2} \begin{pmatrix} \sin \varphi_{U_1} \\ 1 - \cos \varphi_{U_1} \end{pmatrix} + (t_2 - t_1) \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 \\ \sin \varphi_1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Положим $\varphi_{U_1} = \varphi$ и выразим разность $t_2 - t_1$ из (2.3):

$$t_2 - t_1 = t_f - \frac{\varphi}{u_2} = \text{const}. \quad (2.5)$$

Из (2.1), (2.5) находим диапазон возможных значений t_1 . Треугольник на рис. 1, выделенный точечной заливкой, соответствует соотношениям (2.1), а прямая $t_1 = t_2 - \left(t_f - \frac{\varphi}{u_2}\right)$ — условию (2.5). Видно, что допустимые значения t_1 изменяются от 0 до $\frac{\varphi}{u_2}$.

Семейство точек (2.4) рассматриваем как однопараметрическую кривую на плоскости x, y с параметром $s_1 = \varphi_1 = t_1 \cdot u_2$:

$$\begin{pmatrix} x_{U_1}(s_1) \\ y_{U_1}(s_1) \end{pmatrix} = \frac{1}{u_2} \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ 1 - \cos \varphi \end{pmatrix} + \left(t_f - \frac{\varphi}{u_2}\right) \begin{pmatrix} \cos s_1 \\ \sin s_1 \end{pmatrix}, \quad s_1 \in [s_1^b, s_1^e] = [0, \varphi]. \quad (2.6)$$

Кривая (2.6) представляет собой дугу окружности радиуса $t_f - \frac{\varphi}{u_2}$ с центром в точке

$$\frac{1}{u_2} \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ 1 - \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

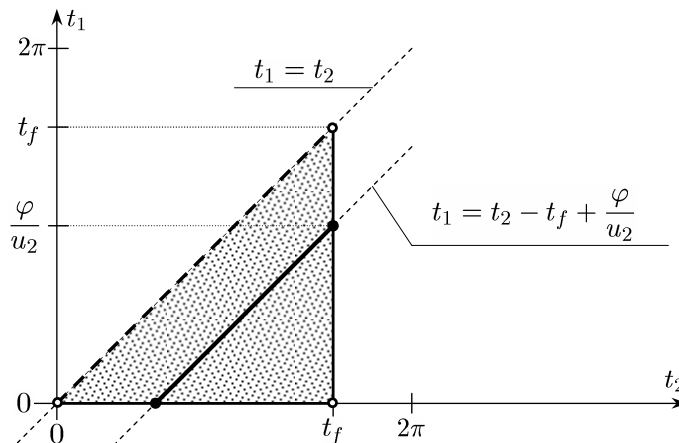


Рис. 1. Пояснение к определению диапазона значений t_1 для управлений U_1

2.2. Движения в силу управлений U_2

По аналогии с управлениями типа U_1 интегрируем систему (1.1) для последовательности управлений $u_1, 0, u_2$. Соотношения, описывающие фазовое состояние в момент t_f , имеют вид

$$\varphi_{U_2} = t_1 \cdot u_1 + (t_f - t_2)u_2, \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_{U_2} \\ y_{U_2} \end{pmatrix} &= \frac{1}{u_1} \begin{pmatrix} \sin \varphi_1 \\ 1 - \cos \varphi_1 \end{pmatrix} + (t_2 - t_1) \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 \\ \sin \varphi_1 \end{pmatrix} + \frac{1}{u_2} \begin{pmatrix} \sin \varphi_{U_2} - \sin \varphi_1 \\ \cos \varphi_1 - \cos \varphi_{U_2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sin \varphi_{U_2} \\ 1 - \cos \varphi_{U_2} \end{pmatrix} + (t_2 - t_1) \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 \\ \sin \varphi_1 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2} \right) \begin{pmatrix} \sin \varphi_1 \\ 1 - \cos \varphi_1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Положим $\varphi_{U_2} = \varphi$. Выразим t_2 из (2.7):

$$t_2 = t_f - \frac{\varphi - t_1 \cdot u_1}{u_2}. \quad (2.9)$$

Возможные значения t_1 и t_2 , удовлетворяющие соотношениям (2.1) и (2.7), показаны на рис. 2 в виде зачерненного треугольника. Пересечение прямой (2.9) с данным треугольником позволяет найти диапазон изменения t_1 при помощи неравенств

$$0 \leq t_1 \leq \frac{t_f \cdot u_2 - \varphi}{u_2 - u_1}.$$

Таким образом, семейство точек (2.8) представляет собой однопараметрическую кривую на плоскости x, y , которую с использованием (2.8) и (2.9) можно записать, взяв в качестве параметра величину $s_2 = \varphi_1 = t_1 \cdot u_1$:

$$\begin{pmatrix} x_{U_2}(s_2) \\ y_{U_2}(s_2) \end{pmatrix} = \frac{1}{u_2} \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ 1 - \cos \varphi \end{pmatrix} + \left(t_f - \frac{\varphi - s_2}{u_2} - \frac{s_2}{u_1} \right) \begin{pmatrix} \cos s_2 \\ \sin s_2 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2} \right) \begin{pmatrix} \sin s_2 \\ 1 - \cos s_2 \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

$$s_2 \in [s_2^b, s_2^e] = \left[\frac{u_1(t_f \cdot u_2 - \varphi)}{u_2 - u_1}, 0 \right].$$

Отметим, что кривая (2.8) уже не является дугой окружности.

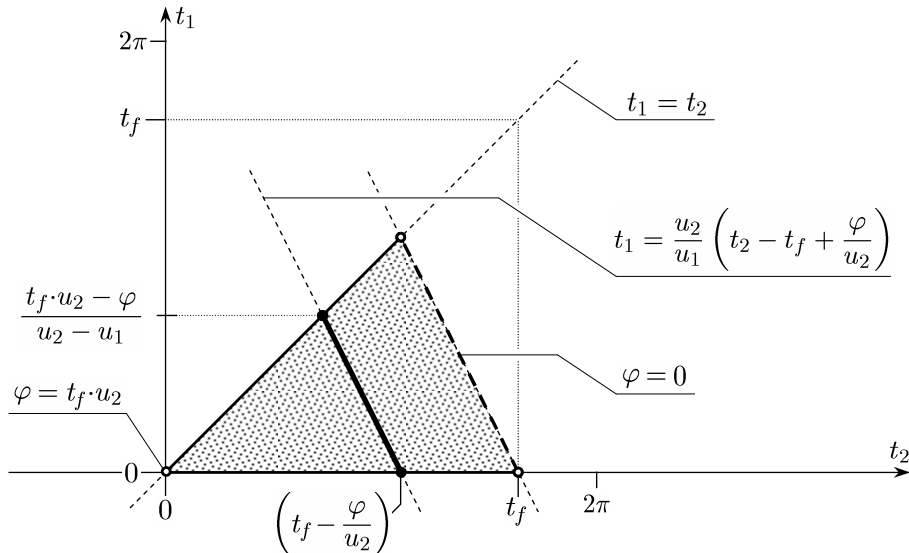


Рис. 2. Определение диапазона значений t_1 для управлений U_2

2.3. Движения в силу управлений U_3

Рассмотрим последовательность управлений $u_2, 0, u_1$ на промежутке $[0, t_f]$. Фазовое состояние системы (1.1) в момент t_f записывается как

$$\varphi_{U_3} = t_1 \cdot u_2 + (t_f - t_2)u_1, \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_{U_3} \\ y_{U_3} \end{pmatrix} &= \frac{1}{u_2} \begin{pmatrix} \sin \varphi_1 \\ 1 - \cos \varphi_1 \end{pmatrix} + (t_2 - t_1) \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 \\ \sin \varphi_1 \end{pmatrix} + \frac{1}{u_1} \begin{pmatrix} \sin \varphi_{U_3} - \sin \varphi_1 \\ \cos \varphi_1 - \cos \varphi_{U_3} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{u_1} \begin{pmatrix} \sin \varphi_{U_3} \\ 1 - \cos \varphi_{U_3} \end{pmatrix} + (t_2 - t_1) \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 \\ \sin \varphi_1 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1} \right) \begin{pmatrix} \sin \varphi_1 \\ 1 - \cos \varphi_1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Положим $\varphi_{U_3} = \varphi$ и выразим t_2 из (2.11):

$$t_2 = t_f - \frac{\varphi - t_1 \cdot u_2}{u_1}. \quad (2.13)$$

Возможные значения t_1 и t_2 , удовлетворяющие соотношениям (2.1) и (2.11), показаны на рис. 3 в виде зачерненного треугольника. Пересечение прямой (2.13) с данным треугольником дает неравенства

$$\frac{\varphi}{u_2} \leq t_1 \leq \frac{\varphi - t_f \cdot u_1}{u_2 - u_1}.$$

Исходя из (2.8), (2.9), запишем семейство точек (2.12) в виде однопараметрической кривой на плоскости x, y по параметру $s_3 = \varphi_1 = t_1 \cdot u_2$:

$$\begin{pmatrix} x_{U_3}(s_3) \\ y_{U_3}(s_3) \end{pmatrix} = \frac{1}{u_1} \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ 1 - \cos \varphi \end{pmatrix} + \left(t_f - \frac{\varphi - s_3}{u_1} - \frac{s_3}{u_2} \right) \begin{pmatrix} \cos s_3 \\ \sin s_3 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1} \right) \begin{pmatrix} \sin s_3 \\ 1 - \cos s_3 \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

$$s_3 \in [s_3^b, s_3^e] = \left[\varphi, \frac{u_2(\varphi - t_f \cdot u_1)}{u_2 - u_1} \right].$$

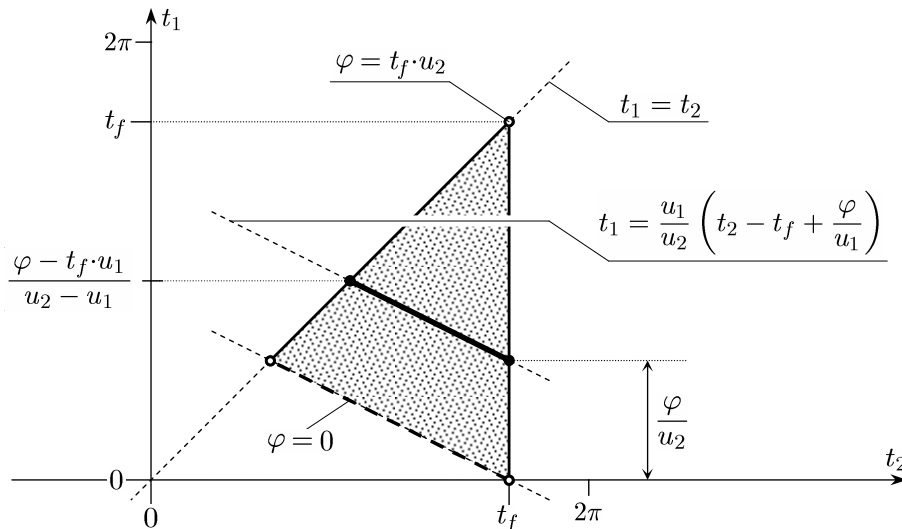


Рис. 3. Определение диапазона значений t_1 для управлений U_3

2.4. Движения в силу управлений U_6

Интегрируем систему (1.1) для последовательности управлений u_1, u_2, u_1 на промежутке $[0, t_f]$:

$$\varphi_{U_6} = t_1 \cdot u_1 + (t_2 - t_1) u_2 + (t_f - t_2) u_1, \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_{U_6} \\ y_{U_6} \end{pmatrix} &= \frac{1}{u_1} \begin{pmatrix} \sin \varphi_1 \\ 1 - \cos \varphi_1 \end{pmatrix} + \frac{1}{u_2} \begin{pmatrix} \sin \varphi_2 - \sin \varphi_1 \\ \cos \varphi_1 - \cos \varphi_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{u_1} \begin{pmatrix} \sin \varphi_{U_6} - \sin \varphi_2 \\ \cos \varphi_2 - \cos \varphi_{U_6} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{u_1} \begin{pmatrix} \sin \varphi_{U_6} \\ 1 - \cos \varphi_{U_6} \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2} \right) \begin{pmatrix} \sin \varphi_1 - \sin (\varphi_1 + (t_2 - t_1) u_2) \\ \cos (\varphi_1 + (t_2 - t_1) u_2) - \cos \varphi_1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{u_1} \begin{pmatrix} \sin \varphi_{U_6} \\ 1 - \cos \varphi_{U_6} \end{pmatrix} + 2 \sin \left(\frac{(t_2 - t_1) u_2}{2} \right) \left(\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1} \right) \begin{pmatrix} \cos \left(\varphi_1 + \frac{(t_2 - t_1) u_2}{2} \right) \\ \sin \left(\varphi_1 + \frac{(t_2 - t_1) u_2}{2} \right) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Положим $\varphi_{U_6} = \varphi > 0$ и выразим разность $t_2 - t_1$ из (2.15):

$$t_2 - t_1 = \frac{\varphi - t_f \cdot u_1}{u_2 - u_1} = \text{const}. \quad (2.17)$$

Возможные значения t_1 и t_2 показаны на рис. 4 в виде пересечения зачерненного треугольника, соответствующего неравенствам (2.1), с прямой (2.17). Получаемый диапазон значений t_1 записывается при помощи неравенств

$$0 \leq t_1 \leq \frac{t_f \cdot u_2 - \varphi}{u_2 - u_1}.$$

Семейство точек (2.16) будем рассматривать как однопараметрическую кривую на плоскости x, y по параметру $s_6 = -\varphi_1 = -t_1 \cdot u_1$:

$$\begin{pmatrix} x_{U_6}(s_6) \\ y_{U_6}(s_6) \end{pmatrix} = \frac{1}{u_1} \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ 1 - \cos \varphi \end{pmatrix} + 2 \sin \left(\frac{u_2(\varphi - t_f \cdot u_1)}{2(u_2 - u_1)} \right) \left(\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1} \right) \begin{pmatrix} \cos \left(\frac{u_2(\varphi - t_f \cdot u_1)}{2(u_2 - u_1)} - s_6 \right) \\ \sin \left(\frac{u_2(\varphi - t_f \cdot u_1)}{2(u_2 - u_1)} - s_6 \right) \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

$$s_6 \in [s_6^b, s_6^e] = \left[0, \frac{u_1(\varphi - t_f \cdot u_1)}{u_2 - u_1} \right].$$

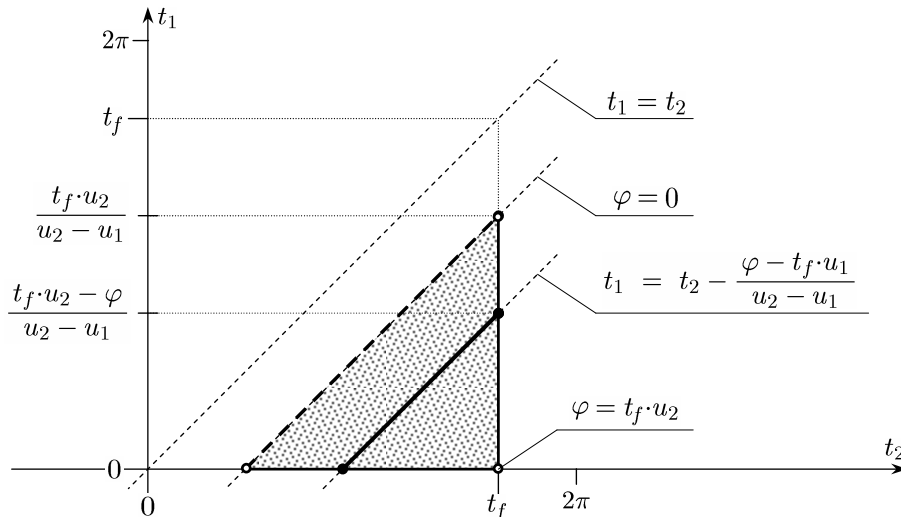


Рис. 4. Определение диапазона значений t_1 для управлений U_6

Полученная кривая $(x_{U_6}(s_6), y_{U_6}(s_6))^T$ представляет собой дугу окружности радиуса

$$2 \sin \left(\frac{u_2(\varphi - t_f \cdot u_1)}{2(u_2 - u_1)} \right) \left(\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1} \right)$$

с центром в точке $\frac{1}{u_1} \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ 1 - \cos \varphi \end{pmatrix}$. Поскольку $u_2 = 1$, $u_1 \in [-1, 0)$ и $t_f \leq 2\pi$, то угловой развор дуги не превышает π .

3. Описание границы φ -сечений в случае $0 < \varphi < t_f \cdot u_2$

3.1. Вспомогательная система координат XOY

Для зафиксированных значений t_f и φ введем вспомогательную систему координат XOY (см. рис. 5). Начало отсчета XOY поместим в точку $O = \frac{1}{u_2} \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ 1 - \cos \varphi \end{pmatrix}$, являющуюся центром окружности, часть которой образует дугу (2.6). Ось X проведем так, чтобы она делила дугу (2.6) пополам. Для этого ось X повернем относительно оси x на угол $\varphi/2$ против часовой стрелки. Ось Y развернем на 90° против часовой стрелки относительно оси X . Пересчет из исходной системы координат xoy в новую систему координат XOY осуществляется по формуле

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi/2) & \sin(\varphi/2) \\ -\sin(\varphi/2) & \cos(\varphi/2) \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \frac{1}{u_2} \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ 1 - \cos \varphi \end{pmatrix} \right). \quad (3.1)$$

Видим, что начало координат исходной системы переходит в точку на оси X новой системы с отрицательной координатой по этой оси. Таким образом, ось X проходит через начало отсчета исходной системы координат, как показано на рис. 5.

Далее дуги (2.6), (2.10), (2.14), (2.18), образованные в силу управлений U_1, U_2, U_3, U_6 , будем рассматривать в системе координат XOY и обозначим их, соответственно, через **A1**, **A2**, **A3**, **A6**. Используя (3.1), запишем параметрическое представление указанных дуг в системе координат XOY :

$$\mathbf{A1}(s_1) = \begin{pmatrix} X_{U_1}(s_1) \\ Y_{U_1}(s_1) \end{pmatrix} = \left(t_f - \frac{\varphi}{u_2} \right) \begin{pmatrix} \cos \left(s_1 - \frac{\varphi}{2} \right) \\ \sin \left(s_1 - \frac{\varphi}{2} \right) \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

$$\mathbf{A2}(s_2) = \left(t_f - \frac{\varphi - s_2}{u_2} - \frac{s_2}{u_1} \right) \begin{pmatrix} \cos \left(s_2 - \frac{\varphi}{2} \right) \\ \sin \left(s_2 - \frac{\varphi}{2} \right) \end{pmatrix} + 2 \sin \left(\frac{s_2}{2} \right) \left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2} \right) \begin{pmatrix} \cos \left(\frac{s_2}{2} - \frac{\varphi}{2} \right) \\ \sin \left(\frac{s_2}{2} - \frac{\varphi}{2} \right) \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

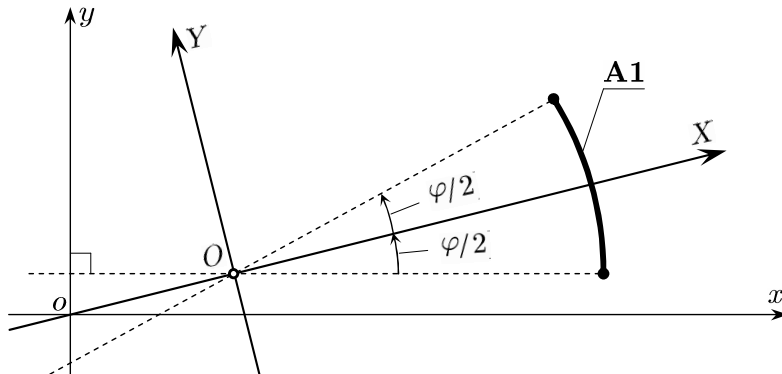


Рис. 5. Вспомогательная система координат XOY

$$\mathbf{A3}(s_3) = \left(t_f - \frac{\varphi - s_3}{u_1} - \frac{s_3}{u_2} \right) \begin{pmatrix} \cos \left(s_3 - \frac{\varphi}{2} \right) \\ \sin \left(s_3 - \frac{\varphi}{2} \right) \end{pmatrix} + 2 \sin \left(\frac{s_3}{2} - \frac{\varphi}{2} \right) \left(\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1} \right) \begin{pmatrix} \cos \left(\frac{s_3}{2} \right) \\ \sin \left(\frac{s_3}{2} \right) \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

$$\mathbf{A6}(s_6) = 2 \left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2} \right) \begin{pmatrix} \left(\sin \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right) - \sin \left(\frac{u_2(\varphi - t_f \cdot u_1)}{2(u_2 - u_1)} \right) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \left(\frac{u_1(\varphi - t_f \cdot u_2)}{2(u_2 - u_1)} - s_6 \right) \\ \sin \left(\frac{u_1(\varphi - t_f \cdot u_2)}{2(u_2 - u_1)} - s_6 \right) \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Каждая из четырех дуг **A1**, **A2**, **A3**, **A6** задается посредством соответствующих параметров $s_1 \in [s_1^b, s_1^e]$, $s_2 \in [s_2^b, s_2^e]$, $s_3 \in [s_3^b, s_3^e]$, $s_6 \in [s_6^b, s_6^e]$.

3.2. Замкнутая кривая $\mathbf{A}_\varphi(t_f)$

Границу φ -сечения множества достижимости $G(t_f)$ обозначим через $\partial G_\varphi(t_f)$.

Пусть $\mathbf{A}_\varphi(t_f)$ — объединение дуг **A1**, **A2**, **A3**, **A6**. Формально имеем $\partial G_\varphi(t_f) \subset \mathbf{A}_\varphi(t_f)$. Наша цель — установить, что $\partial G_\varphi(t_f) = \mathbf{A}_\varphi(t_f)$ при условии $t_f \leq 2\pi$.

Совокупность $\mathbf{A}_\varphi(t_f)$ рассмотрим в последовательности **A1**, **A3**, **A6**, **A2**. Данные дуги попарно состыкованы в крайних точках. Это следует из формул (3.2)–(3.5) при подстановке в них крайних значений диапазонов параметров s_1 , s_3 , s_6 , s_2 , указанных в разд. 2. А именно при помощи тригонометрических преобразований проверяем соотношения

$$\mathbf{A1}(s_1^e) = \mathbf{A3}(s_3^b), \quad \mathbf{A3}(s_3^e) = \mathbf{A6}(s_6^b), \quad \mathbf{A6}(s_6^e) = \mathbf{A2}(s_2^b), \quad \mathbf{A2}(s_2^e) = \mathbf{A1}(s_1^b). \quad (3.6)$$

В целом получаем, что кривая $\mathbf{A}_\varphi(t_f)$ является замкнутой кусочно-гладкой кривой на плоскости X, Y . При этом количество изломов не превышает четырех (по числу точек стыковки дуг). Далее установим ряд свойств данной кривой, из которых следует отсутствие самопересечений. Последнее и будет означать совпадение кривой $\mathbf{A}_\varphi(t_f)$ с границей φ -сечения.

3.3. Свойства дуг **A1**, **A6**

Кривые **A1** и **A6** представляют собой дуги окружностей, которые в системе координат XOY описываются формулами (3.2), (3.5).

Дуга **A1** симметрична относительно оси X по построению. Для дуги **A6** рассмотрим крайние точки. Нетрудно заметить, что выполнены соотношения $X_{\mathbf{A6}}(s_6^b) = X_{\mathbf{A6}}(s_6^e)$ и $Y_{\mathbf{A6}}(s_6^b) = -Y_{\mathbf{A6}}(s_6^e)$. Центр образующей дугу **A6** окружности находится на оси X . Расстояние дуги не превышает π , как было отмечено в подразд. 2.4. Следовательно, дуга **A6** также симметрична относительно оси X .

Обозначим $R_{\mathbf{A1}}(s_1) = \sqrt{(X_{\mathbf{A1}}(s_1))^2 + (Y_{\mathbf{A1}}(s_1))^2}$, $R_{\mathbf{A6}}(s_6) = \sqrt{(X_{\mathbf{A6}}(s_6))^2 + (Y_{\mathbf{A6}}(s_6))^2}$. Установим, что дуги **A1** и **A6** не имеют общих точек. Дуга **A1** является частью окружности радиуса $R_{\mathbf{A1}}(s_1) = \left(t_f - \frac{\varphi}{u_2} \right) = \text{const}$. Оценим $R_{\mathbf{A6}}(s_6)$. Для этого потребуются неравенства

$$0 < \frac{u_1(\varphi - t_f \cdot u_2)}{2(u_2 - u_1)} = \left(1 - \frac{u_2}{(u_2 - u_1)} \right) \left(\frac{t_f \cdot u_2 - \varphi}{2} \right) < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \frac{u_2(\varphi - t_f \cdot u_1)}{2(u_2 - u_1)} < \pi. \quad (3.7)$$

Их справедливость следует из предположений (0.1) и (2.1).

Обозначим $\theta = \frac{u_1(\varphi - t_f \cdot u_2)}{(u_2 - u_1)}$. Имеем $\theta + \varphi = \frac{u_2(\varphi - t_f \cdot u_1)}{(u_2 - u_1)}$. Это позволяет записать условия (3.7) более компактно:

$$0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \frac{\theta + \varphi}{2} < \pi. \quad (3.8)$$

Повторно применяя соотношения $0 < \varphi < t_f \cdot u_2 = \text{const} \leq 2\pi$, записанные в (2.1), получаем неравенства

$$0 < \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right), \quad 0 < \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad 0 < \sin\left(\frac{\theta + \varphi}{2}\right). \quad (3.9)$$

Используя (3.5), имеем

$$R_{\mathbf{A6}}(s_6) = 2\left(\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1}\right) \sqrt{\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) - 2\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta + \varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2} - s_6\right) + \sin^2\left(\frac{\theta + \varphi}{2}\right)}.$$

Учитывая диапазон $0 \leq s_6 \leq \theta$ изменения параметра s_6 и первое неравенство в (3.8), получаем

$$-\frac{\pi}{2} < -\frac{\theta}{2} \leq \frac{\theta}{2} - s_6 \leq \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}.$$

Поэтому

$$\cos\left(\frac{\theta}{2} - s_6\right) \geq \cos\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Далее с использованием соотношений (3.9) приходим к оценке сверху для $R_{\mathbf{A6}}(s_6)$, не зависящей от значений параметра s_6 :

$$R_{\mathbf{A6}}(s_6) \leq 2\left(\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1}\right) \sqrt{\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) - 2\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta + \varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\theta + \varphi}{2}\right)}.$$

Раскрывая $\sin\left(\frac{\theta + \varphi}{2}\right)$, после тригонометрических преобразований получим

$$\begin{aligned} R_{\mathbf{A6}}(s_6) &\leq 2\left(\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1}\right) \sqrt{\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\ &= 2\left(\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1}\right) \sqrt{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = 2\left(\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right). \end{aligned}$$

Последнее равенство справедливо в силу (3.8). С учетом ограничений (0.1) имеем

$$2\left(\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) < 2\left(\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1}\right) \left(\frac{\theta}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1}\right) \frac{u_1(\varphi - t_f \cdot u_2)}{2(u_2 - u_1)} = t_f - \frac{\varphi}{u_2} = R_{\mathbf{A1}}(s_1).$$

Таким образом, $R_{\mathbf{A6}}(s_6) < R_{\mathbf{A1}}(s_1)$ при любых допустимых значениях параметров s_6 и s_1 . Стало быть, у дуг **A1** и **A6** нет общих точек.

3.4. Свойства дуг **A2**, **A3**

С учетом обозначений подразд. 3.3 диапазоны изменения параметров s_2 и s_3 для дуг **A2**, **A3** могут быть записаны в виде

$$s_2 \in [-\theta, 0], \quad s_3 \in [\varphi, \varphi + \theta]. \quad (3.10)$$

Введем взаимно-однозначное соответствие между точками дуг **A2** и **A3**, полагая $s_3(s_2) = \varphi - s_2$. Покажем, что точки **A2**(s_2) и **A3**($s_3(s_2)$) взаимно симметричны относительно оси X . Действительно, подставляя в (3.4) указанную связь между s_3 и s_2 , после сравнения с (3.3) получаем $X_{\mathbf{A2}}(s_2) = X_{\mathbf{A3}}(s_3(s_2))$, $Y_{\mathbf{A2}}(s_2) = -Y_{\mathbf{A3}}(s_3(s_2))$.

Таким образом, установлено свойство взаимной симметрии дуг **A2** и **A3** относительно оси X . Отсюда согласно свойствам кривых **A1**, **A6** следует общее свойство симметрии всей кривой $\mathbf{A}_\varphi(t_f)$ относительно этой оси.

Рассмотрим характер изменения величины $R_{\mathbf{A2}}(s_2) = \sqrt{(X_{\mathbf{A2}}(s_2))^2 + (Y_{\mathbf{A2}}(s_2))^2}$ вдоль дуги **A2**. Используя (3.3) и определение величины θ , найдем производную по s_2 от $(R_{\mathbf{A2}}(s_2))^2$:

$$\begin{aligned} \left((R_{\mathbf{A2}}(s_2))^2 \right)'_{s_2} &= \left(\left(t_f - \frac{\varphi - s_2}{u_2} - \frac{s_2}{u_1} \right)^2 + 2 \left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2} \right)^2 (1 - \cos s_2) \right. \\ &\quad \left. + 2 \left(t_f - \frac{\varphi - s_2}{u_2} - \frac{s_2}{u_1} \right) \left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2} \right) \sin s_2 \right)'_{s_2} \\ &= 2 \left(t_f - \frac{\varphi - s_2}{u_2} - \frac{s_2}{u_1} \right) \left(\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1} \right) (1 - \cos s_2) = 2 \left(t_f - \frac{\varphi}{u_2} \right) \left(1 + \frac{s_2}{\theta} \right) \left(\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1} \right) (1 - \cos s_2). \end{aligned}$$

Параметр s_2 в соответствии с (3.10) изменяется в диапазоне $[-\theta, 0]$. Для всех значений $s_2 \in (-\theta, 0)$ в силу (2.1) и (3.8) справедливо неравенство

$$\left((R_{\mathbf{A2}}(s_2))^2 \right)'_{s_2} > 0.$$

Данное неравенство обуславливает монотонность $R_{\mathbf{A2}}(s_2)$ вдоль всей дуги **A2**. Отсюда можно сделать следующие выводы: дуга **A2** является гладкой и не имеет самопересечений; в соответствии с (3.6) дуга **A2** пересекает дуги **A1**, **A6** только в крайних точках при крайних значениях s_2 .

Дуга **A3** обладает такими же свойствами в силу симметрии.

С учетом взаимной симметрии дуг **A2** и **A3** относительно оси X отсутствие пересечения дуг **A2** и **A3** эквивалентно постоянству знака координаты Y на одной из них. Покажем, что $Y_{\mathbf{A2}}(s_2) < 0$ для дуги **A2**. Воспользуемся (3.3):

$$Y_{\mathbf{A2}}(s_2) = \left(t_f - \frac{\varphi - s_2}{u_2} - \frac{s_2}{u_1} \right) \sin \left(s_2 - \frac{\varphi}{2} \right) + 2 \sin \left(\frac{s_2}{2} \right) \left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2} \right) \sin \left(\frac{s_2}{2} - \frac{\varphi}{2} \right). \quad (3.11)$$

Выведем вспомогательное неравенство

$$-\pi < s_2 - \frac{\varphi}{2} < 0. \quad (3.12)$$

Справедливость правой части неравенства следует из (0.1), (2.1) и (3.10). Для доказательства левого неравенства возьмем минимальное допустимое значение $s_2 = -\theta$. Имеем

$$\begin{aligned} \left(s_2 - \frac{\varphi}{2} \right) &\geq \left(-\theta - \frac{\varphi}{2} \right) = \frac{u_1(t_f u_2 - \varphi)}{u_2 - u_1} - \frac{\varphi}{2} = t_f \left(\frac{u_1 u_2}{u_2 - u_1} \right) - \varphi \left(\frac{u_2 + u_1}{2(u_2 - u_1)} \right) \\ &> 2\pi \left(\frac{u_1 u_2}{u_2 - u_1} - \frac{u_2 + u_1}{2(u_2 - u_1)} \right) = 2\pi \left(\frac{2u_1 u_2 - u_2 - u_1}{2(u_2 - u_1)} \right) = -\pi. \end{aligned}$$

Второе неравенство выполнено в силу (0.1) и (2.1). В последнем равенстве учтено, что $u_2 = 1$. Таким образом, $\sin \left(s_2 - \frac{\varphi}{2} \right) < 0$ и справедлива следующая оценка для первого слагаемого в (3.11):

$$\left(t_f - \frac{\varphi - s_2}{u_2} - \frac{s_2}{u_1} \right) \sin \left(s_2 - \frac{\varphi}{2} \right) = \left(t_f - \frac{\varphi}{u_2} \right) \left(1 + \frac{s_2}{\theta} \right) \sin \left(s_2 - \frac{\varphi}{2} \right) < 0.$$

Из (3.12) согласно (3.10) выводим, что $-\pi < \left(\frac{s_2}{2} - \frac{\varphi}{2} \right) < 0$. Поэтому $\sin \left(\frac{s_2}{2} - \frac{\varphi}{2} \right) < 0$. Используя (3.8) и (3.10), имеем $\sin \left(\frac{s_2}{2} \right) < 0$. Исходя из соотношения $\left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2} \right) < 0$ получаем оценку второго слагаемого в (3.11):

$$2 \sin \left(\frac{s_2}{2} \right) \left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2} \right) \sin \left(\frac{s_2}{2} - \frac{\varphi}{2} \right) < 0.$$

Таким образом, установлено, что $Y_{\mathbf{A2}}(s_2) < 0$. В силу симметрии $Y_{\mathbf{A3}}(s_3) > 0$. Стало быть, дуги **A2** и **A3** не пересекаются между собой.

3.5. Совпадение кривой $\mathbf{A}_\varphi(t_f)$ с границей φ -сечения множества $G(t_f)$

В подразд. 3.3 было установлено, что дуги окружностей **A1** и **A6** не пересекаются друг с другом. В подразд. 3.4 показано, что дуги **A2** и **A3** симметричны друг другу относительно оси X , не имеют самопересечений и не пересекаются между собой. Каждая из них пересекается с дугами **A1** и **A6** только в крайних точках. Поэтому кривая $\mathbf{A}_\varphi(t_f)$ не имеет самопересечений. Более того, кривая $\mathbf{A}_\varphi(t_f)$ в целом симметрична относительно оси X . В исходных координатах это означает симметрию относительно прямой

$$\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)x - \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)y = 0. \tag{3.13}$$

Вычислим производные $(\mathbf{A1}(s_1))'_{s_1}$, $(\mathbf{A2}(s_2))'_{s_2}$ в смежной для дуг **A1**, **A2** точке $\mathbf{A1}(s_1^b) = \mathbf{A2}(s_2^e)$. Поскольку $s_2^e = s_1^b = 0$, получаем

$$(\mathbf{A1}(s_1^b + 0))'_{s_1} = \left(t_f - \frac{\varphi}{u_2}\right) \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \end{pmatrix} = (\mathbf{A2}(s_2^e - 0))'_{s_2}.$$

Совпадение касательных векторов означает гладкость стыковки дуг **A1** и **A2**. С учетом симметрии кривой $\mathbf{A}_\varphi(t_f)$ имеем также гладкость стыковки дуг **A1** и **A3**.

Таким образом, описаны геометрические свойства кривой $\mathbf{A}_\varphi(t_f)$. На рис. 6 показаны примеры кривой $\mathbf{A}_\varphi(t_f)$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Граница множества $G_\varphi(t_f)$ совпадает с кривой $\mathbf{A}_\varphi(t_f)$.*

Доказательство. По построению все точки φ -сечения $G_\varphi(t_f)$, получаемые в силу управлений, удовлетворяющих ПМП и условию (1.2), образуют кривую $\mathbf{A}_\varphi(t_f)$. Учитывая, что точки границы $G(t_f)$ также удовлетворяют ПМП и условию (1.2), имеем $\partial G_\varphi(t_f) \subset \mathbf{A}_\varphi(t_f)$. Кривая $\mathbf{A}_\varphi(t_f)$ не имеет самопересечений и является замкнутой.

По теореме Жордана кривая $\mathbf{A}_\varphi(t_f)$ делит плоскость на две связные части. Одна из них ограничена кривой $\mathbf{A}_\varphi(t_f)$ (пусть это будет множество C), вторая является неограниченной (пусть это будет множество D). Предположим, что на кривой $\mathbf{A}_\varphi(t_f)$ есть точка, которая лежит во внутренней замкнутого и ограниченного множества $G_\varphi(t_f)$. Рассмотрим в $G_\varphi(t_f)$ точку, наиболее удаленную от множества C . Эта точка принадлежит D и одновременно принадлежит $\partial G_\varphi(t_f)$, что невозможно.

Стало быть, $\partial G_\varphi(t_f) = \mathbf{A}_\varphi(t_f)$. □

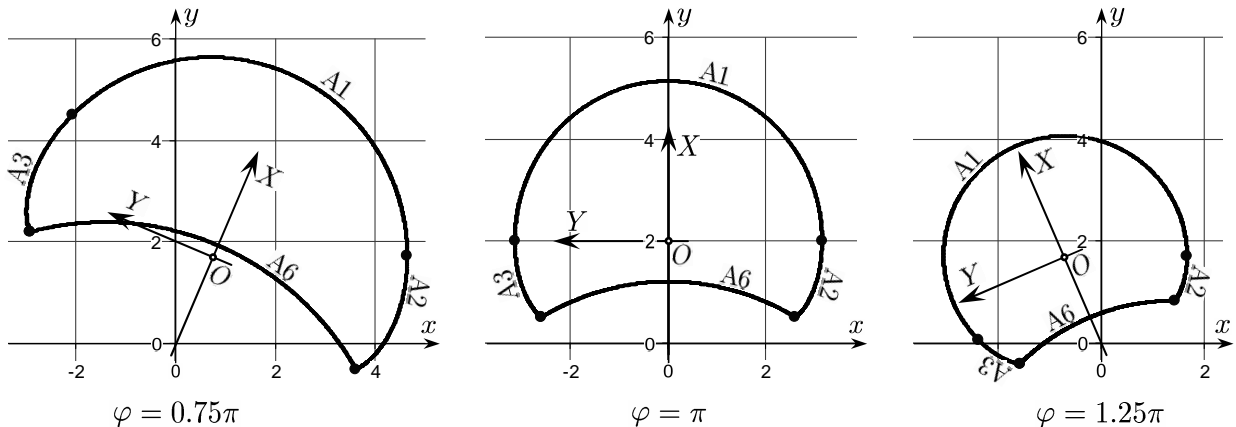


Рис. 6. Расчетные образцы трех φ -сечений множества достижимости для $u_1 = -0.5$, $u_2 = 1$, $t_f = 2\pi$

4. Экстремальные движения и описание φ -сечений при $t_f \cdot u_1 < \varphi < 0$

Описание границы φ -сечений при $t_f \cdot u_1 < \varphi < 0$ аналогично случаю, когда $0 < \varphi < t_f \cdot u_2$. Рассматриваем управления $U1-U6$. Управления типа $U1$ не могут участвовать в построении границы φ -сечения в связи с тем, что при действии таких управлений получаем $\varphi(t_f) \geq 0$. Отсечем также вариант с управлениями типа $U6$, поскольку такие управления при $\varphi(t_f) < 0$ ведут строго внутрь множества достижимости, ибо нарушается неравенство (1.2).

Таким образом, при описании границы φ -сечений в исследуемом случае ограничимся четырьмя типами управлений: $U2, U3, U4, U5$.

Задаем момент $t_f > 0$. Фиксируем некоторое значение φ из интервала $(t_f \cdot u_1, 0)$. Указанные управления порождают однопараметрические семейства решений по аналогии с разд. 2. Получаемые кривые (дуги) на плоскости x, y обозначим как $A2(s_2), A3(s_3), A4(s_4), A5(s_5)$.

Формулы интегрирования для управлений типа $U2$ и $U3$ остаются прежними и определяются соотношениями (2.10) и (2.14). Диапазоны изменения параметров s_2 и s_3 просчитываются заново для условия $\varphi < 0$ и принимают вид

$$s_2 \in \left[\frac{u_1(t_f \cdot u_2 - \varphi)}{u_2 - u_1}, \varphi \right], \quad s_3 \in \left[0, \frac{u_2(\varphi - t_f \cdot u_1)}{u_2 - u_1} \right]. \quad (4.1)$$

Для управлений типа $U4$ и $U5$ формулы интегрирования в координатах x, y и соответствующие диапазоны допустимых значений параметров s_4 и s_5 записываются в виде

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_{U4}(s_4) \\ y_{U4}(s_4) \end{pmatrix} &= \frac{1}{u_1} \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ 1 - \cos \varphi \end{pmatrix} + \left(t_f - \frac{\varphi}{u_1} \right) \begin{pmatrix} \cos s_4 \\ \sin s_4 \end{pmatrix}, \quad s_4 \in [\varphi, 0], \\ \begin{pmatrix} x_{U5}(s_5) \\ y_{U5}(s_5) \end{pmatrix} &= \frac{1}{u_2} \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ 1 - \cos \varphi \end{pmatrix} + 2 \sin \left(\frac{u_1(\varphi - t_f \cdot u_2)}{2(u_1 - u_2)} \right) \begin{pmatrix} \frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2} \\ \frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \left(\frac{u_1(\varphi - t_f \cdot u_2)}{2(u_1 - u_2)} - s_5 \right) \\ \sin \left(\frac{u_1(\varphi - t_f \cdot u_2)}{2(u_1 - u_2)} - s_5 \right) \end{pmatrix}, \\ s_5 &\in \left[\frac{u_2(t_f \cdot u_1 - \varphi)}{u_2 - u_1}, 0 \right]. \end{aligned}$$

Кривые $A4, A5$ являются дугами окружностей. Их центры лежат на прямой, проходящей через начало координат вдоль вектора $(\cos(\varphi/2), \sin(\varphi/2))^T$. Объединение дуг $A2, A3, A4, A5$, как и в разд. 3, обозначим через $\mathbf{A}_\varphi(t_f)$. Дуги, образующие кривую $\mathbf{A}_\varphi(t_f)$, циклически соединены в следующей последовательности: $A4, A3, A5, A2$. А именно $A4(s_4^e) = A3(s_3^b)$, $A3(s_3^e) = A5(s_5^b)$, $A5(s_5^e) = A2(s_2^b)$, $A2(s_2^e) = A4(s_4^b)$.

Замкнутая кривая $\mathbf{A}_\varphi(t_f)$ является кусочно-гладкой, не имеет самопересечений и симметрична относительно прямой (3.13). Справедливо утверждение, аналогичное теореме 1, т. е. $\partial G_\varphi(t_f) = \mathbf{A}_\varphi(t_f)$.

5. Случай φ -сечений при $\varphi = 0$

Данный случай является смежным для случаев, разобранных в разд. 3 и 4. Среди кусочно-постоянных управлений типа $U1, U4$ только управление $u(t) \equiv 0$ приводит в φ -сечение множества $G(t_f)$ при $\varphi = 0$. Но такое постоянное управление охватывается типами $U2$ и $U3$. Поэтому при описании границы достаточно использовать следующие четыре типа управлений: $U2, U3, U5, U6$.

Формулы интегрирования для управлений $U2$ и $U3$ определяются соотношениями (2.10) и (2.14). Диапазоны изменения параметров s_2 и s_3 принимают вид

$$s_2 \in \left[\frac{u_1 \cdot t_f \cdot u_2}{u_2 - u_1}, 0 \right], \quad s_3 \in \left[0, \frac{-u_2 \cdot t_f \cdot u_1}{u_2 - u_1} \right]$$

и могут быть получены как из соотношений (2.10), (2.14) при $\varphi \rightarrow +0$, так и из соотношений (4.1) при $\varphi \rightarrow -0$.

Дуги A_5 и A_6 , соответствующие при $\varphi = 0$ управлениям U_5 и U_6 , совпадают. Для формирования кривой $\mathbf{A}_\varphi(t_f)$ возьмем, например, дугу A_6 . Определим замкнутую кривую $\mathbf{A}_\varphi(t_f)$ как совокупность трех дуг с обходом в последовательности A_2, A_3, A_6 . Данная кривая представляет собой границу φ -сечения множества $G(t_f)$ при $\varphi = 0$, является кусочно-гладкой, не имеет самопересечений и симметрична относительно оси x . Доказательство указанных свойств аналогично изложенному в разд. 3.

6. Необходимые и достаточные условия перевода на границу

Главная цель данной работы — аналитическое описание φ -сечений множества достижимости $G(t_f)$ в случае $t_f \leq 2\pi$. При этом существенным образом использованы кусочно-постоянные управления из совокупности U_1 – U_6 с дополнительным условием (1.2) для управлений U_5, U_6 . Установлено, что если среди таких управлений есть управления, которые при заданном φ ведут движения в соответствующее φ -сечение, то они порождают в этом φ -сечении замкнутую кривую, совпадающую с границей сечения. То есть они ведут на границу множества достижимости. В доказательстве этого факта предположение $t_f \leq 2\pi$ является существенным. В то же время в работах [2; 3] доказано, что при любом t_f в любую точку на границе множества достижимости ведет кусочно-постоянное управление, принадлежащее совокупности U_1 – U_6 с дополнительным условием (1.2). Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть $t_f \leq 2\pi$. Для того чтобы кусочно-постоянное управление вело на границу множества достижимости $G(t_f)$ необходимо и достаточно, чтобы оно принадлежало совокупности управлений U_1 – U_6 с дополнительным условием (1.2).

Заключение

В рамках управляемой модели “машина Дубинса” рассмотрен случай, когда движение происходит на плоскости и поворот возможен в обе стороны, хотя наименьшие радиусы поворота могут быть различными. Получено аналитическое описание границы сечений по угловой координате φ трехмерного множества достижимости $G(t_f)$ в момент $t_f \leq 2\pi$. Для двух крайних (минимального и максимального) значений φ соответствующее сечение является точкой. Для других φ граница φ -сечения представляет собой замкнутую кусочно-гладкую кривую $\mathbf{A}_\varphi(t_f)$ без самопересечений (что означает односвязность самого φ -сечения). При $\varphi \neq 0$ кривая $\mathbf{A}_\varphi(t_f)$ состоит из четырех дуг, три из которых имеют гладкое сопряжение. При $\varphi = 0$ кривая $\mathbf{A}_\varphi(t_f)$ составляется из трех дуг, две из них имеют гладкое сопряжение. Кривая $\mathbf{A}_\varphi(t_f)$ симметрична относительно прямой (3.13).

Для случая $t_f > 2\pi$ описание φ -сечений существенно усложняется и пока не получено.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Laumond J.-P. (ed.)** Robot motion planning and control. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1998. 354 p. (Lecture Notes in Control and Information Sciences; vol. 229). doi: 10.1007/BFb0036069.
2. **Пацко В.С., Пятко С.Г., Федотов А.А.** Трехмерное множество достижимости нелинейной управляемой системы // Изв. РАН. ТиСУ. 2003. № 3. С. 8–16.
3. **Симоненко А.С., Федотов А.А.** Множество достижимости для автомобиля Дубинса при несимметричном ограничении на управление [e-resource] // CEUR-WS: Proc. of 48th Internat. Youth School-Conf. Yekaterinburg, 2017. Modern Problems in Mathematics and its Applications, vol. 1894. P. 79–87. URL: <http://ceur-ws.org/Vol-1894/opt6.pdf>.
4. **Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В. и др.** Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.

5. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 576 с.
6. Dubins L.E. On curves of minimal length with a constraint on average curvature and with prescribed initial and terminal positions and tangents // *American J. Math.* 1957. Vol. 79, no. 3. P. 497–516. doi: 10.2307/2372560.

Поступила 14.01.2020

После доработки 22.01.2020

Принята к публикации 27.01.2020

Пацко Валерий Семенович

канд. физ.-мат. наук, ведущий науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;

Уральский федеральный университет

г. Екатеринбург

e-mail: patsko@imm.uran.ru

Федотов Андрей Анатольевич

канд. физ.-мат. наук, старший науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

г. Екатеринбург

e-mail: andreyfedotov@mail.ru

REFERENCES

1. Laumond J.-P. (ed.) *Robot motion planning and control*. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1998, Lecture Notes in Control and Information Sciences; vol. 229, 354 p. doi: 10.1007/BFb0036069.
2. Patsko V.S., Pyatko S.G., Fedotov A.A. Three-dimensional reachability set for a nonlinear control system. *J. Computer and Systems Sciences Internat.*, 2003, vol. 42, no. 3, pp. 320–328.
3. Simonenko A.S., Fedotov A.A. Reachable set for the Dubins car under asymmetric constraint on control. *CEUR-WS, Proc. of 48th Internat. Youth School-Conf.*, Yekaterinburg, 2017, Modern Problems in Mathematics and its Applications; vol. 1894, pp. 79–87 (in Russian). Available at: <http://ceur-ws.org/Vol-1894/opt6.pdf>.
4. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *The mathematical theory of optimal processes*. N Y; London: Interscience Publishers John Wiley & Sons, 1962, 360 p. Original Russian text published in Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov*. Moscow: Nauka Publ., 1969, 384 p.
5. Lee E.B., Markus L. *Foundations of optimal control theory*. N Y; London; Sydney: John Wiley & Sons, Inc., 1967, 576 p. Translated to Russian under the title *Osnovy teorii optimal'nogo upravleniya*, Moscow: Nauka Publ., 1972, 576 p. ISBN: 0471522635.
6. Dubins L.E. On curves of minimal length with a constraint on average curvature and with prescribed initial and terminal positions and tangents. *American J. Math.*, 1957, vol. 79, no. 3, pp. 497–516. doi: 10.2307/2372560.

Received January 14, 2020

Revised January 22, 2020

Accepted January 27, 2020

Valerii Semenovich Patsko, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620000 Russia, e-mail: patsko@imm.uran.ru.

Andrei Anatol'evich Fedotov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: andreyfedotov@mail.ru.

Cite this article as: V. S. Patsko, A. A. Fedotov. Analytic description of a reachable set for the Dubins car, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 1, pp. 182–197.