

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
УРАЛЬСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР

ИССЛЕДОВАНИЯ
ЗАДАЧ
МИНИМАКСНОГО
УПРАВЛЕНИЯ

СВЕРДЛОВСК · 1985

УДК 517.94

Исследования задач минимаксного управления: [Сб. статей].
Свердловск: УНЦ АН СССР, 1985.

В сборник включены работы, в которых исследуются задачи управления для систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями. В основном рассматриваются задачи оптимизации гарантированного результата для систем, подверженных воздействию неопределенной помехи. Эти задачи исследуются в рамках теории дифференциальных игр. Приводятся также новые результаты, относящиеся к теории оптимального управления с нескалярным критерием качества. Наряду с изучением чисто теоретических вопросов, рассматриваются некоторые вычислительные аспекты теории дифференциальных игр.

Статьи представляют интерес для специалистов по теории управления и ее приложениям.

Ответственные редакторы:
докт. физ.-мат. наук **А. И. Субботин**,
канд. физ.-мат. наук **В. С. Пацко**.

И 20204—1298—199(82) 3—1985 © УНЦ АН СССР, 1985
055(02)7

**ИССЛЕДОВАНИЯ ЗАДАЧ
МИНИМАКСНОГО УПРАВЛЕНИЯ**

*Рекомендовано к изданию
Ученым советом
Института математики и механики
и РИСО УНЦ АН СССР*

Редактор **Л. Н. Петленко**
Обложка художника **М. Н. Гарипова**
Техн. редактор **Н. Р. Рабинович**
Корректоры **В. С. Кубина, Г. Н. Старкова**

Сдано в набор 7.06.84. Подписано в печать 26.04.85.
НС 11190. Формат 60×90^{1/16}. Бумага типографская № 2.
Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 8.
Уч.-изд. л. 9. Тираж 1000. Цена 1 р. 40 к. Заказ 381.

РИСО УНЦ АН СССР. Свердловск, ГСП-169, ул. Пер-
вомайская, 91.
Типография изд-ва «Уральский рабочий». 620151, Сверд-
ловск, пр. Ленина, 49.

В. Л. ТУРОВА

**НЕЛИНЕЙНАЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ИГРА
КАЧЕСТВА НА ПЛОСКОСТИ**

Рассматривается нелинейная позиционная дифференциальная игра качества [1, 6] второго порядка. Результаты ее решения можно использовать при исследовании задачи о переводе плоского математического маятника в заданное состояние в условиях неопределенной помехи.

§ 1. Постановка задачи

Пусть движение нелинейной конфликтно-управляемой системы на плоскости описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{y}_1(t) &= y_2(t) + v(t), \\ \dot{y}_2(t) &= -k \sin(y_1(t) + a) + u(t) + c. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь $y(t)$ — фазовый вектор; $u(t)$ — управляющий параметр первого игрока, $v(t)$ — второго; $k > 0$, a, c — постоянные числа. Предположим, что в каждый момент t параметр $u(t)$ удовлетворяет ограничению $|u(t)| \leq \mu$, $\mu > 0$, параметр $v(t)$ — ограничению $v_1 \leq v(t) \leq v_2$, $v_1 < v_2$. Первый игрок стремится завести систему (1.1) в заданную точку m на плоскости, второй препятствует этому. Требуется найти множество A всех начальных точек на плоскости, из которых первый игрок, используя управление обратной связи, может привести за конечное время систему (1.1) в точку m при любом действии второго игрока. Следуя [1], назовем определенную задачу дифференциальной игрой качества.

Дифференциальные игры качества при наличии двух управляющих параметров, полезного и мешающего, можно рассматривать как естественное развитие задач управления, где требуется найти максимальное множество начальных состояний, откуда принципиально разрешима задача о переводе управляемой системы в заданное конечное состояние при заданных ограничениях на управляющий параметр. Такие задачи исследовались, например, в работах [5, 11].

Для линейных систем на плоскости

$$\dot{y} = Dy + u + v, \quad u \in P, \quad v \in Q,$$

где D — постоянная матрица; P, Q — выпуклые замкнутые многоугольники; дифференциальные игры качества рассматривались в статьях [2—4, 7—10]. В случае, когда матрица D имеет комплексные собственные значения, алгоритм построения множества A реализован в виде стандартной программы на языке ФОРТРАН-БЭСМ [12].

Будем считать, что постоянные c, k, μ для системы (1.1) связаны соотношением $c < \mu - k$. Введение такого условия уменьшает число возможных конфигураций искомого множества A и упрощает алгоритм его построения.

Дадим строгое определение множества A . Обозначим символом P отрезок $[-\mu, \mu]$, символом Q — отрезок $[v_1, v_2]$. Пусть U — множество всех стратегий [6] первого игрока, а именно множество всех функций, заданных на $R_+ \times R^2$ со значениями в P , где R_+ — множество неотрицательных чисел. Пусть Δ — произвольное разбиение полуоси R_+ точками $0 = t_1 < t_2 < \dots$ ($t_i \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$), $d(\Delta)$ — диаметр разбиения, $v(\cdot)$ — измеримая функция времени со значениями в Q . При фиксированных $\Delta, x, U, v(\cdot)$ через $y(\cdot, \Delta, x, U, v(\cdot))$ обозначим ломаную Эйлера [6] для системы (1.1). Определим A как совокупность всех $x \in R^2$, для каждого из которых существует стратегия $U \in U$, момент $\vartheta > 0$ и отображение $\varepsilon \rightarrow \delta(\varepsilon)$ из R_+ в R_+ такие, что каковы бы ни были $\varepsilon > 0$, разбиение Δ с диаметром $d(\Delta) \leq \delta(\varepsilon)$ и функция $v(\cdot)$ со значениями в Q , найдется момент $t \in [0, \vartheta]$, при котором $y(t, \Delta, x, U, v(\cdot))$ будет принадлежать ε -окрестности точки x .

§ 2. Терминология, обозначения. Полупроницаемые кривые

Положим $B = (0, 1)', C = (1, 0)'$. Введем функции

$$\varphi(l) = \max_{p \in P} \min_{q \in Q} l'(Bp + Cq),$$

$$H^n(l, z) = (-1)^n (-l'z + \varphi(l)), \quad n = 1, 2, \quad l \in R^2, \quad z \in R^2.$$

В силу того что множества $B \cdot P, C \cdot Q$ есть отрезки, параллельные осям координат, вся плоскость разбивается осью абсцисс на две полуплоскости $\{l: l_2 \geq 0\}, \{l: l_2 < 0\}$, в каждой из которых функция φ вогнута. В полуплоскости $\{l: l_2 \geq 0\}$ рассмотрим прямую $K_2: l_2 = a > 0$, а в полуплоскости $\{l: l_2 < 0\}$ — прямую $K_1: l_2 = -a$. Функция $H^1(\cdot, z)$ ($H^2(\cdot, z)$) выпукла (вогнута) на каждой из прямых K_1, K_2 . Для всех l_*, l^* из $K_i, i = 1, 2$, не равных между собой, запись $l_* < l^*$ будет означать, что вектор $l_*/|l_*|$ поворотом против часовой стрелки на угол $<\pi$ совмещается с вектором $l^*/|l^*|$. Для любых ненулевых $l_*, l^* \in R^2$, символом $h(l_*, l^*)$ обозначим угол между векторами l_*, l^* , отсчитываемый в направлении против часовой стрелки.

Пусть $n = 1, 2, z \in R^2$. Скажем, что функция $H^n(\cdot, z)$ имеет при $l_* \in K_i, i = 1, 2$, нуль минус на плюс, если $H^n(l_*, z) = 0$, и для

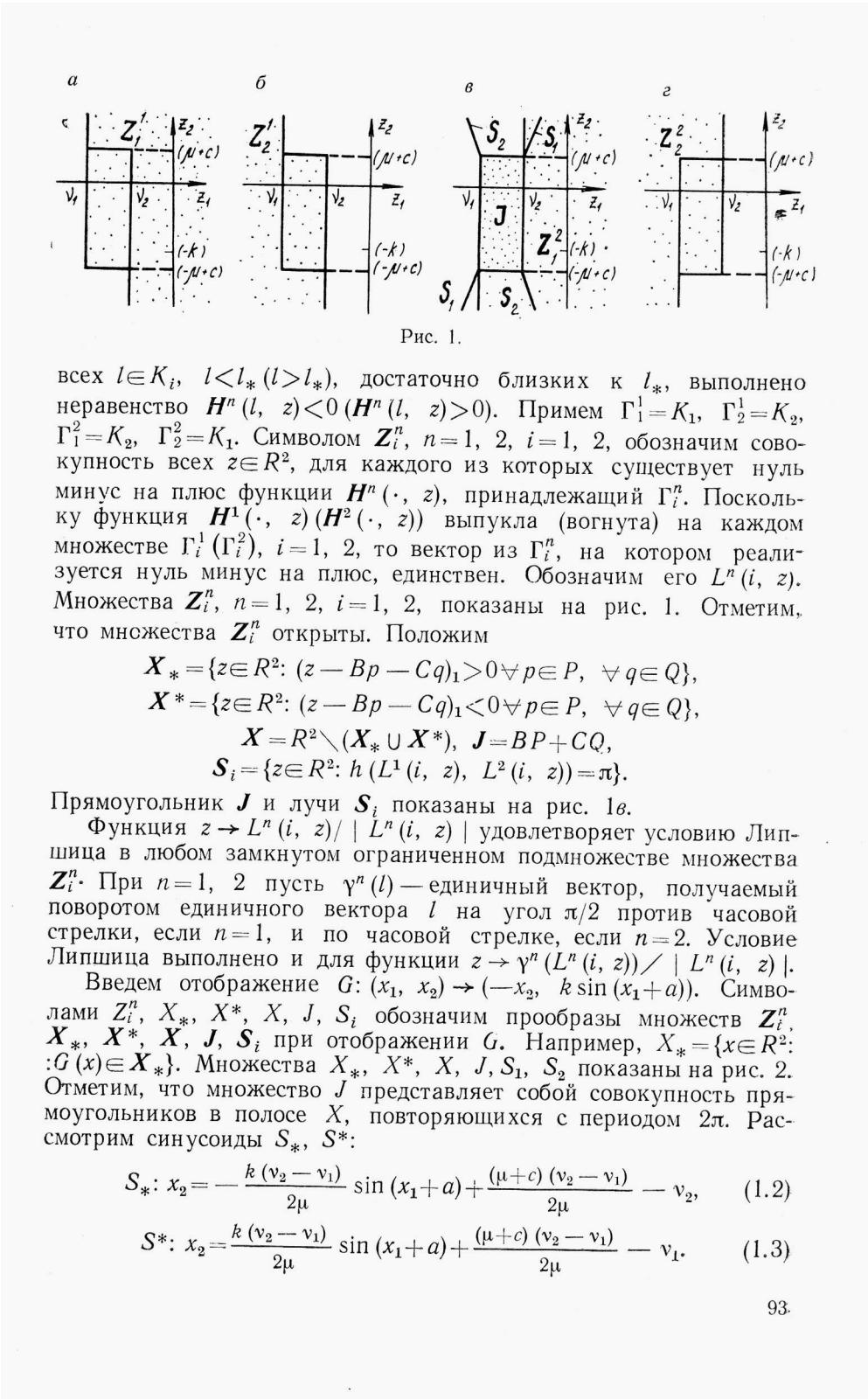


Рис. 1.

всех $l \in K_i$, $l < l_*$ ($l > l_*$), достаточно близких к l_* , выполнено неравенство $H^n(l, z) < 0$ ($H^n(l, z) > 0$). Примем $\Gamma_1^1 = K_1$, $\Gamma_2^1 = K_2$, $\Gamma_1^2 = K_2$, $\Gamma_2^2 = K_1$. Символом Z_i^n , $n=1, 2$, $i=1, 2$, обозначим совокупность всех $z \in R^2$, для каждого из которых существует нуль минус на плюс функции $H^n(\cdot, z)$, принадлежащий Γ_i^n . Поскольку функция $H^1(\cdot, z)$ ($H^2(\cdot, z)$) выпукла (вогнута) на каждом множестве Γ_i^1 (Γ_i^2), $i=1, 2$, то вектор из Γ_i^n , на котором реализуется нуль минус на плюс, единствен. Обозначим его $L^n(i, z)$. Множества Z_i^n , $n=1, 2$, $i=1, 2$, показаны на рис. 1. Отметим, что множества Z_i^n открыты. Положим

$$X_* = \{z \in R^2: (z - Bp - Cq)_1 > 0 \forall p \in P, \forall q \in Q\},$$

$$X^* = \{z \in R^2: (z - Bp - Cq)_1 < 0 \forall p \in P, \forall q \in Q\},$$

$$X = R^2 \setminus (X_* \cup X^*), \quad J = BP + CQ,$$

$$S_i = \{z \in R^2: h(L^1(i, z), L^2(i, z)) = \pi\}.$$

Прямоугольник J и лучи S_i показаны на рис. 1в.

Функция $z \rightarrow L^n(i, z) / |L^n(i, z)|$ удовлетворяет условию Липшица в любом замкнутом ограниченном подмножестве множества Z_i^n . При $n=1, 2$ пусть $\gamma^n(l)$ — единичный вектор, получаемый поворотом единичного вектора l на угол $\pi/2$ против часовой стрелки, если $n=1$, и по часовой стрелке, если $n=2$. Условие Липшица выполнено и для функции $z \rightarrow \gamma^n(L^n(i, z)) / |L^n(i, z)|$.

Введем отображение $G: (x_1, x_2) \rightarrow (-x_2, k \sin(x_1 + a))$. Символами Z_i^n , X_* , X^* , X , J , S_i обозначим прообразы множеств Z_i^n , X_* , X^* , X , J , S_i при отображении G . Например, $X_* = \{x \in R^2: G(x) \in X_*\}$. Множества X_* , X^* , X , J , S_1 , S_2 показаны на рис. 2. Отметим, что множество J представляет собой совокупность прямоугольников в полосе X , повторяющихся с периодом 2π . Рассмотрим синусоиды S_* , S^* :

$$S_*: x_2 = -\frac{k(v_2 - v_1)}{2\mu} \sin(x_1 + a) + \frac{(\mu + c)(v_2 - v_1)}{2\mu} - v_2, \quad (1.2)$$

$$S^*: x_2 = \frac{k(v_2 - v_1)}{2\mu} \sin(x_1 + a) + \frac{(\mu + c)(v_2 - v_1)}{2\mu} - v_1. \quad (1.3)$$

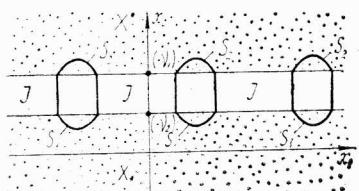


Рис. 2.

прямой $E_2: x_2 = -v_2$. Если $|\mu + c|/k > 1$, то полуплоскостями являются и множества Z_1^2, Z_2^1 . Именно, когда $(\mu + c)/k > 1$, то $Z_1^2 = \{x \in R^2: x_2 < -v_1\}, Z_2^1 = \{x \in R^2: x_2 > -v_2\}$. В случае $(\mu + c)/k < -1$ имеем $Z_1^2 = \{x \in R^2: x_2 < -v_2\}, Z_2^1 = \{x \in R^2: x_2 > -v_1\}$. Буквами b, e, d на рис. 3 обозначены точки оси абсцисс с координатами $-a - \arcsin((\mu + c)/k) + \pi, -a + \arcsin((\mu + c)/k), -a - \arcsin((\mu + c)/k) + 3\pi$ соответственно.

Функция $F^n(i, \cdot): x \rightarrow \gamma^n(L^n(i, G(x)) / |L^n(i, G(x))|)$ удовлетворяет условию Липшица в любом замкнутом ограниченном подмножестве множества Z_i^n . Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dw}{d\tau} = F^n(i, w), \quad n=1, 2, \quad i=1, 2. \quad (2.1)$$

Для любого $x \in Z_i^n$ существует единственное решение уравнения (2.1), продолжаемое до выхода на границу множества Z_i^n . Таким образом, в множестве Z_i^n определено семейство Φ_i^n гладких кривых, являющихся фазовыми траекториями уравнения (2.1).

Положим

$$K = \{z \in R^2: z_2 < \mu + c\}, \quad T = \{z \in R^2: z_2 > \mu + c\},$$

$$K = \{x \in R^2: G(x) \in K\}, \quad T = \{x \in R^2: G(x) \in T\}.$$

Множество $K(T)$ является совокупностью вертикальных полос, повторяющихся с периодом 2π (рис. 4) и ограниченных вертикальными прямыми из наборов

$$M_1 = \{x \in R^2: x_1 = -a + \arcsin((\mu + c)/k) + 2\pi r, \quad r=0, \pm 1, \dots\},$$

$M_2 = \{x \in R^2: x_1 = -a - \arcsin((\mu + c)/k) + \pi(2r+1), \quad r=0, \pm 1, \dots\}$. Если $(\mu + c)/k < -1$, то $K = \emptyset, T = R^2$. Если $(\mu + c)/k > 1$, то $T = \emptyset, K = R^2$. Обозначим $F_1 = X \cap M_1, F_2 = X \cap M_2$ и разобъем границу полосы X на части (рис. 4) $D_1^n = \text{cl}(E_n \cap T), D_2^n = \text{cl}(E_{\bar{n}} \cap K), n = 1, 2$. Здесь $\bar{n} = 1$, если $n = 2$ и $\bar{n} = 2$, если $n = 1$.

Пусть $w^n(\cdot, i, x), n=1, 2, i=1, 2$ — решение уравнения (2.1) при $\tau \geq 0$, выпущенное из точки $x \in Z_i^n$ в момент $\tau=0$ и доведенное до выхода на границу множества Z_i^n , если это возможно.

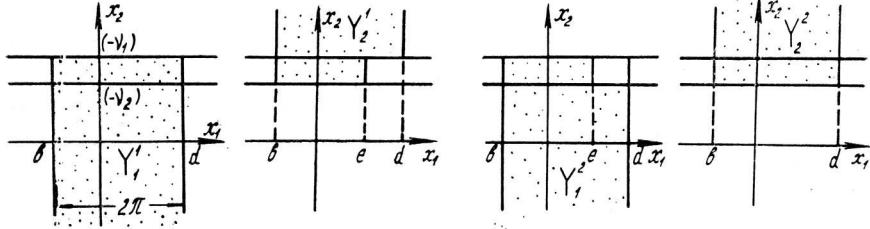


Рис. 3.

Фазовую траекторию этого решения обозначим $p^n(i, x)$. Кривые $p^n(i, x)$ можно интерпретировать как фазовые траектории системы

$$\begin{aligned}\dot{y}_1(\tau) &= -y_2(\tau) - v(\tau), \\ \dot{y}_2(\tau) &= k \sin(y_1(\tau) + a) - u(\tau) - c\end{aligned}\quad (2.2)$$

для $\tau \geq 0$. При этом $u(\tau) = u_*$, где u_* равно либо $+\mu$, либо $-\mu$, а управление $v(\cdot)$ кусочно-постоянно и принимает значения v_1 , v_2 . Заметим, что система (2.2) отличается от системы (1.1) лишь знаком правой части. Кривые $p^n(n, x)$, $n=1, 2$, являются фазовыми траекториями системы (2.2) при $u(\tau) \equiv -\mu$, $v(\tau) \equiv v_n$. Кривые $p^n(n, x)$ есть фазовые траектории при $u(\tau) \equiv +\mu$; управление $v(\tau) \equiv v_n$ в множестве T и $v(\tau) \equiv v_{n-}$ в множестве K . Опираясь на это, нетрудно проверить следующие геометрические свойства кривых из семейств Φ_i^n . Сформулируем свойства в терминах движений $w^n(\cdot, i, x)$. Условимся, что $w^n(\tau, i, x)$ означает производную по τ в момент τ .

1. Если $w^n(\tau_*, 1, x) \in X_*$, то $w_1^n(\tau_*, 1, x) > 0$. Это означает, что кривые $p^n(1, x)$ в полуплоскости X_* с ростом τ идут вправо.
2. Если $w^n(\tau_*, 2, x) \in X^*$, то $w_1^n(\tau_*, 2, x) < 0$. То есть кривые $p^n(2, x)$ в полуплоскости X^* с ростом τ идут влево.
3. При любом τ из области определения движения $w^n(\cdot, n, x)$ справедливо неравенство $w_2^n(\tau, n, x) > 0$.
4. Если $w^n(\tau_*, \bar{n}, x) \in K(T)$, то $w_2^n(\tau_*, \bar{n}, x) < 0$ (> 0).
5. Если $w^n(\tau_*, \bar{n}, x) \in M_i$, $i=1, 2$, то $w_2^n(\tau_*, \bar{n}, x) = 0$.

Из свойства 3 вытекает, что кривые $p^2(2, x)$ с ростом τ не могут подходить к границе множества Z_2^2 ни при каком $x \in Z_2^2$, а кривые $p^1(1, x)$ при всех $x \in Z_1^1$ подходят к границе Z_1^1 . Для любых $n=1, 2$, $i=1, 2$ символом $d^n(i, x)$ обозначим точку на границе множества Z_i^n , к которой с ростом τ подходит кривая $p^n(i, x)$ (если такая точка существует). Условимся в дальнейшем включать точку $d^n(i, x)$ в кривую $p^n(i, x)$. Отметим, что если $d^n(i, x_*) = d^n(i, x^*)$ при некоторых x_* , x^* из Z_i^n , то либо $x_* \in p^n(i, x^*)$,

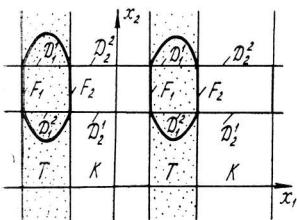


Рис. 4.

либо $x^* \in p^n(i, x_*)$. Приведем несколько свойств, характеризующих подход кривых $p^n(i, x)$ к границе множества Z_i^n .

6. Для точек $d^n(\bar{n}, x)$ справедливо одно из двух включений $d^n(\bar{n}, x) \in D_n^n$, $d^n(\bar{n}, x) \in F_{\bar{n}}$.

7. Если $x \in Z_1^n$, то кривая $p^1(1, x)$ подходит к точке $d^1(1, x)$ с вертикальной касательной.

8. Если $x \in Z_{\bar{n}}^n$, а $d^n(\bar{n}, x) \in D_n^n(F_{\bar{n}})$, то кривая $p^n(\bar{n}, x)$ подходит к точке $d^n(\bar{n}, x)$ с вертикальной (горизонтальной) касательной. На рис. 5 показано поведение кривых семейств Φ_i^n ; кружками отмечены точки, к которым подход кривых невозможен.

Отметим еще одно важное свойство кривых $p^n(i, x)$, которое, согласно терминологии Айзекса [1], назовем свойством полупроницаемости. Рассмотрим произвольную точку $x_* \in p^n(i, x)$. Пусть u_*, v_* — управление первого и второго игроков, при которых вектор скорости $f(x_*, u_*, v_*)$ системы (1.1) является касательным к кривой $p^n(i, x)$ в точке x_* (от x_* зависит лишь v_* , управление u_* — одно и то же для всей кривой $p^n(i, x)$). Тогда касательная к кривой $p^n(i, x)$ в точке x_* разделяет вектограммы $I_1(x_*, v_*) = \{f(x_*, u, v_*) | u \in P\}$, $I_2(x_*, u_*) = \{f(x_*, u_*, v) | v \in Q\}$, т. е. вектограмма $I_1(x_*, v_*)$ первого игрока направлена по одну сторону от касательной, а вектограмма $I_2(x_*, u_*)$ второго игрока — по другую (рис. 6). При изменении точки x_* вектограммы меняются, однако характер их расположения относительно касательной остается неизменным. Припишем той стороне кривой, куда направлена вектограмма первого игрока, знак — (минус), а противоположной стороне — знак + (плюс). Таким образом, Φ_i^n есть семейство гладких полупроницаемых кривых. Придерживаясь постоянного управления u_* , соответствующего семейству Φ_i^n , первый игрок не допускает перехода движений системы (1.1) с положительной стороны кривых $p^n(i, x)$ на отрицательную. С другой стороны, второй игрок может так выбирать свое управление

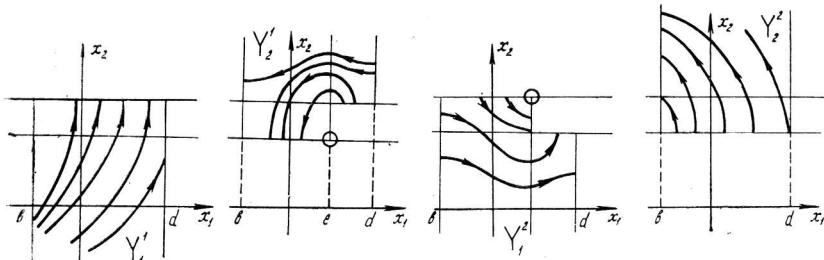


Рис. 5.

(но уже в зависимости от текущего состояния), чтобы запретить переход в противоположном направлении.

Кроме полупроницаемых кривых, которые мы ввели для Z_i^n (напомним, что множество Z_i^n открыто), нам потребуются полупроницаемые кривые, выпущенные из некоторых граничных точек множества Z_i^n . Введем такие кривые для точек множества $D_1^n \subset \partial Z_2^n$. Пусть $x_* \in D_1^n$ и $\{x^k\}$ — произвольная последовательность точек из Z_2^n , сходящаяся к x_* . Из каждой точки x^k выпустим кривую $p^n(2, x^k)$ и рассмотрим $\lim p^n(2, x^k)$, $k \rightarrow \infty$. Предел существует и единствен для всех $x_* \in D_1^n$. Его и возьмем в качестве кривой $p^n(2, x_*)$, сопоставляемой точке x_* . Рассмотрим точки $m_r(h_r)$, $r=0, \pm 1, \dots$, с координатами $-a - \arcsin((\mu+c)/k) + (2r+1)\cdot\pi$ по оси x_1 и $-v_1$ ($-v_2$) по оси x_2 , лежащие на пересечении прямой $E_1(E_2)$ с вертикальными прямыми из набора M_2 . Для точек m_r , помимо введенных выше кривых $p^1(2, m_r)$, определим полупроницаемые кривые $p^2(1, m_r)$ как пределы кривых $p^2(1, x^k)$, $x^k \rightarrow m_r$, $x^k \in Z_1^2$.

Пусть x_* — точка, для которой определена кривая $p^n(i, x_*)$. Пусть далее x^* — точка, отличающаяся от x_* лишь сдвигом вдоль оси x_1 на величину λ , кратную 2π . Тогда имеет смысл кривая $p^n(i, x^*)$, и она отличается от $p^n(i, x_*)$ лишь сдвигом вдоль оси x_1 на величину λ . Отсюда, а также из свойства единственности решений системы (2.2) вытекает, в частности, неравенство $|d_1^n(\bar{n}, x) - x_1| \leq 2\pi$ для $x \in D_1^n \setminus M_1$, при которых точка $d^n(\bar{n}, x)$ существует.

§ 3. Алгоритм построения множества \bar{A}

В этом параграфе будет описан алгоритм построения множества \bar{A} , совпадающего с замыканием множества A .

Если точка m принадлежит полосе X , то векторы $I_1(m, v_1)$, $I_1(m, v_2)$ не пересекаются. Используя это, можно показать (точно так же, как это было сделано для линейной системы в работе [9]), что $A \setminus \{m\} = \emptyset$. Если точка m не принадлежит полосе X , то возможны два случая: $A \setminus \{m\} = \emptyset$, $A \setminus \{m\} \neq \emptyset$. Предположим, что точка m лежит ниже (выше) полосы X . Тогда, если существует окрестность $O(m)$ точки m , в которой кривая $p^1(1, m)$ идет выше (ниже) кривой $p^2(1, m)$ (рис. 7a), то $A \setminus \{m\} \neq \emptyset$. В противном $A \setminus \{m\} = \emptyset$. Эти утверждения вытекают из результатов работы [9]. Символом $\Omega_*(\Omega^*)$ обозначим совокупность всех точек x , лежащих ниже (выше) полосы X , для каждой из кото-

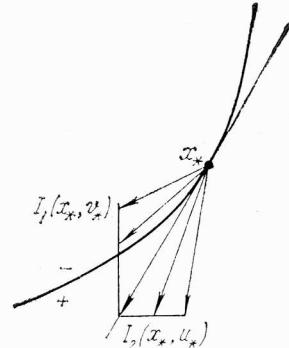


Рис. 6.

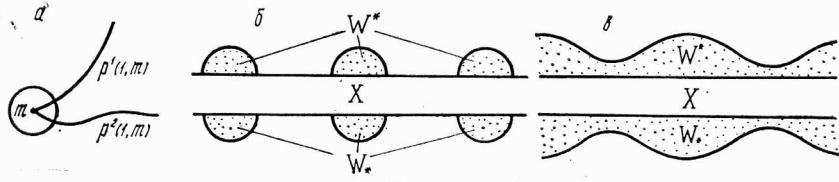


Рис. 7.

рых существует окрестность $O(x)$, где кривая $p^1(1, x)$ идет выше (ниже) кривой $p^2(1, x)$. Примем $W_* = X_* \setminus \Omega_*$, $W^* = X^* \setminus \Omega^*$. Геометрически W_* (W^*) представляет собой множество всех точек на плоскости, лежащих ниже прямой E_2 (выше прямой E_1) и выше синусоиды S_* (ниже синусоиды S^*), определяемой формулой (1.2) ((1.3)). Множества W_* , W^* показаны на рис. 7б, 7в для случаев $|\mu + c|/k < 1$, $(\mu + c)/k < -1$ соответственно. Если $(\mu + c)/k > 1$, то $W_* = \emptyset$, $W^* = \emptyset$. В дальнейшем при описании алгоритма будем предполагать, что $m \in \Omega_*$. В конце параграфа укажем, как модифицировать алгоритм, если $m \in \Omega^*$.

Пусть в плоскости задана кривая abc , состоящая из двух гладких кусков ab и bc (b — точка склейки), и пусть для каждого куска введены положительная и отрицательная стороны (рис. 8). Точку склейки b назовем правильной, если существует такое число $\delta^* > 0$, что при любом $\delta \in (0, \delta^*)$ выполнены условия: 1) окружность $O_\delta(b)$ радиуса δ с центром в точке b пересекает каждую из кривых ab , bc один раз; 2) окружность $O_\delta(b)$ делится точками пересечения с кривыми ab и bc на две дуги, одна из которых соединяет положительные стороны кривых ab , bc , а другая — отрицательные. На рис. 8а точка склейки правильной, на рис. 8б — не является правильной.

Пусть теперь C — непрерывная кривая на плоскости, составленная из гладких кусков, для каждого из которых определены положительная и отрицательная стороны. Предположим, что любая точка склейки соседних гладких кусков является правильной. Тогда в понятном смысле можно говорить о положительной и отрицательной сторонах кривой C . Если кривая C конечна, то будем считать ее замкнутой; если бесконечна, потребуем, чтобы каждый из двух ее концов уходил в бесконечность. Множество $D(C)$ определим как максимальное множество точек на плоскости, каждую из которых можно соединить непрерывной линией

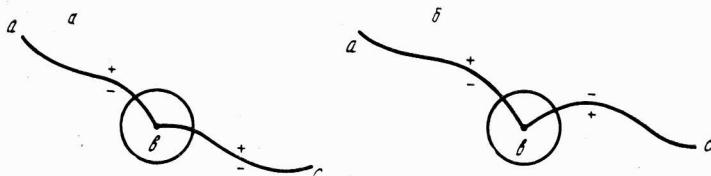


Рис. 8.

с кривой \mathbf{C} , не переходя при этом с положительной стороны кривой на ее отрицательную сторону. Отметим, что $\mathbf{C} \subset \bar{\mathbf{D}}(\mathbf{C})$.

Будем считать при описании алгоритма, что $(\mu+c)/k \leq 1$, так как в противном можно доказать, что множество $\bar{\mathbf{A}}$ — вся плоскость. Введем удобную для нас нумерацию точек из набора m_r , $r=0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Именно, передвигаясь влево по прямой E_1 от точки $d^1(1, m)$, занумеруем по порядку точки набора m_r , лежащие слева от $d^1(1, m)$: m^1, m^2, m^3 и т. д. Если $d^1(1, m)$ совпадает с одной из точек набора m_r , то в качестве m^1 берем точку $d^1(1, m)$. Используя кривые $p^n(i, x)$, определим кривые g_i^n . В некоторых случаях эти кривые фиктивны. Тогда будем писать $g_i^n = \emptyset$. Положим $g_1^1 = p^1(1, m)$,

$$g_2^1 = \begin{cases} p^1(2, d^1(1, m)), & d^1(1, m) \in D_1^1 \setminus (M_1 \cup M_2), \\ \emptyset, & d^1(1, m) \in \overline{D_1^1 \setminus (M_1 \cup M_2)}; \end{cases}$$

$$g_{i(i \geq 3)}^1 = \begin{cases} p^1(2, m^{(i-2)/2}), & i \text{ — четно}, \\ \emptyset, & i \text{ — нечетно}. \end{cases}$$

Пусть далее

$$g_1^2 = \begin{cases} p^2(1, m) \cup p^2(2, d^2(1, m)), & d^2(1, m) \neq \infty, \\ p^2(1, m), & d^2(1, m) = \infty; \end{cases}$$

$$g_{i(i \geq 2)}^2 = \begin{cases} p^2(1, m^{i/2}), & i \text{ — четно}; \\ p^2(1, d^2(1, m^{(i-1)/2})), & i \text{ — нечетно}, \\ d^2(1, m^{(i-1)/2}) \in D_1^2 \setminus M_1 \text{ и } d^2(1, m^{(i-1)/2}) \neq \infty; \\ \emptyset, & i \text{ — нечетно, } d^2(1, m^{(i-1)/2}) \in \overline{D_1^2 \setminus M_1} \text{ или} \\ & d^2(1, m^{(i-1)/2}) = \infty. \end{cases}$$

Здесь равенство $d^2(1, m^j) = \infty$ означает, что точка $d^2(1, m^j)$ лежит в бесконечности, т. е. ее не существует.

Нахождение множества $\bar{\mathbf{A}}$ основано на поочередном построении кривых $g_1^2, g_1^1, g_2^2, g_2^1, \dots$ и анализе их взаимного расположения. Подчеркнем, что в этой последовательности кривые g_{2k+1}^1 , $k=1, 2, \dots$, являются фиктивными. При построении каждой очередной кривой g_i^1 с верхним индексом 1 (кривой первого типа) проверяется пересечение ее с одной или двумя построенными ранее кривыми с верхним индексом 2 (второго типа). Если пересечение есть, то построение линии g_i^1 после точки пересечения прекращается. При построении каждой очередной кривой g_i^2 проверяется пересечение ее с одной из ранее построенных кривых первого типа. Если пересечение есть, то построение линии g_i^2 прекращается.

В табл. 1 указано, с какими кривыми проверяется пересечение при построении каждой очередной кривой первого и второго

Таблица 1. Правило пересечения кривых в ходе их построения

Кривая	Кривая, пересечение с которой проверяется	Условие, при котором проверка отменяется	Обозначение точки пересечения
g_1^2	—	—	—
g_{2k}^2	g_1^1	$d^1(1, m^{k-1}) = \infty$	ξ^{2k}
g_{2k+1}^2	g_{2k}^1	—	ξ^{2k+1}
g_1^1	g_1^2	—	a^{*1}
	g_1^2	(i) не выполнено	a^{*2k}
g_{2k}^1	g_3^2	(i) выполнено	a^{*2k}
	g_{2k}^2	—	a_*^{2k}
g_{2k+1}^1	—	—	—

типа. В третьей графе дано обозначение для точки пересечения. Как следует из таблицы, когда мы строим кривые первого типа, то говорим об a^* - и a_* -пересечениях с кривыми второго типа. При построении кривых второго типа мы говорим о ξ -пересечении с кривыми первого типа. Условимся не включать в понятие a^* -пересечения случай, когда пересечение кривой первого типа с кривой второго типа, указанной в таблице, происходит по касательной, и при этом на кривой второго типа нет точек из набора h_r , $r=0, \pm 1, \dots$, а на кривой первого типа нет точек из набора m_r , $r=0, \pm 1, \dots$. Если при построении кривой g_{2k}^1 (g_{2k}^2) зафиксирована точка a_* (ξ)-пересечения, то не будем строить кривую g_{2k+1}^2 , т. е. считаем $g_{2k+1}^2 = \emptyset$. Условие (i) в табл. 1 означает, что к моменту построения кривой g_{2k}^1 была зафиксирована хотя бы одна из точек a^2 , ξ^2 , ξ^3 . В дальнейшем под бесконечными кривыми первого или второго типа будем понимать кривые, которые не ограничены и не имеют точек пересечения, оговоренных в табл. 1.

Укажем признаки окончания процесса поочередного построения кривых первого и второго типов. А именно, будем считать,

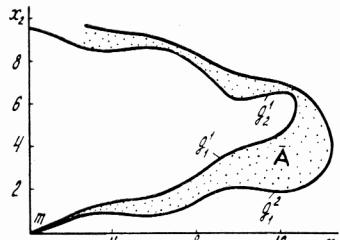


Рис. 9.

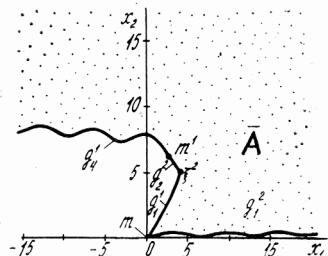


Рис. 10.

что процесс заканчивается, если выполнено одно из следующих условий.

- I. Для некоторого $i=2, 4$ кривая g_i^1 бесконечна.
- II. При построении кривой g_i^1 , $i=2, 4$, зафиксировано α^* -пересечение.
- III. При построении кривой g_4^1 произошло α_* -пересечение.
- IV. Построение доведено до кривой g_4^1 включительно, и ни одно из условий I—III не было выполнено.

Опишем множество \bar{A} для каждого из указанных условий окончания. Выписываемые ниже кривые C_k соответствуют всем возможным вариантам взаимного расположения линий g_i^1, g_i^2 первого и второго типов при последовательном их построении. Фиксируя в процессе построения точки α_* , α^* и ξ -пересечения и проверяя, является ли бесконечной очередная линия первого или второго типа, можно в каждом конкретном случае выделить лишь одну кривую C_k , составляющие которой не противоречат набранной информации. После выделения кривой C_k множество \bar{A} задается по правилу D , т. е. $\bar{A}=D(C_k)$.

I. Если выполнено первое условие окончания, то бесконечна либо кривая g_2^1 , либо g_4^1 . В первом из этих случаев множество \bar{A} определяется линией C_1 , составленной из кривых g_1^2, g_1^1, g_2^1 , т. е. $\bar{A}=D(C_1)$ (рис. 9). Во втором случае в зависимости от характера взаимного расположения линий $g_1^2, g_1^1, g_2^2, g_2^1, g_3^1, g_4^1$ множество \bar{A} определяется (по правилу D) одной из кривых:

$$\begin{aligned} C_2: & g_1^2, g_1^1(m, \xi^2), g_2^2(m^1, \xi^2), g_4^1; \\ C_3: & g_1^2, g_1^1, g_2^2(m, \alpha_*^2), g_2^1(d^1(1, m), \alpha_*^2), g_4^1; \\ C_4: & g_1^2, g_1^1, g_2^1(d^1(1, m), \xi^3), g_3^2(d^2(1, m^1), \xi^3), g_2^2, g_4^1; \\ C_5: & g_2^2, g_3^2, g_4^1; \quad C_6: g_2^2, g_4^1. \end{aligned}$$

Здесь для каждой кривой C_k после двоеточия указаны линии, из которых она набирается. Запись $g_i^n(a, b)$ означает участок кривой

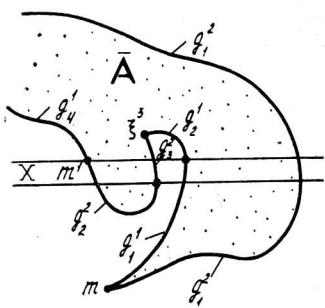


Рис. 11.

g_i^n от точки a до точки b . Если m^1 совпадает с $d^1(1, m)$, то считаем, что кривая $g_2^2(m^1, \xi^2)$ состоит из одной точки m^1 и точка ξ^2 совпадает с m^1 . На рис. 9—11 показаны кривые C_1, C_2, C_4 и отвечающие им множества \bar{A} .

II. Перечислим кривые, определяющие множество \bar{A} при реализации второго условия окончания:

$$C_7: g_1^2(m, \alpha^{*1}), g_1^1(m, \alpha^{*1});$$

$$C_8: g_1^2(m, \alpha^{*2}), g_1^1, g_2^1(d^1(1, m), \alpha^{*2});$$

$$C_9: g_1^2(m, \alpha^{*4}), g_1^1(m, \xi^2), g_2^2(m^1, \xi^2), g_4^1(m^1, \alpha^{*4});$$

$$C_{10}: g_1^2(m, \alpha^{*4}), g_1^1, g_2^1(d^1(1, m), \alpha_*^2), g_2^2(m, \alpha_*^2), g_4^1(m^1, \alpha^{*4});$$

$$C_{11}: g_1^2(m, \alpha^{*4}), g_1^1, g_2^1(d^1(1, m), \xi^3), g_3^2(d^2(1, m^1), \xi^3),$$

$$g_2^2, g_4^1(m^1, \alpha^{*4});$$

$$C_{12}: g_2^2, g_3^2(d^2(1, m^1), \alpha^{*4}), g_4^1(m^1, \alpha^{*4}).$$

Кривые C_7, C_{10}, C_{12} и отвечающие им множества \bar{A} показаны на рис. 12—14.

III. Кривые C_k для третьего варианта окончания:

$$C_{13}: g_1^2, g_1^1, g_2^1(d^1(1, m), \alpha_*^2), g_2^2(m^1, \alpha_*^2), g_4^1(m^1, \alpha_*^4),$$

$$g_4^2(m^2, \alpha_*^4), \dots, g_{2i}^1(m^{i-1}, \alpha_*^{2i}), g_{2i}^2(m^i, \alpha_*^{2i}), \dots;$$

$$C_{14}: g_1^2, g_1^1, g_2^1(d^1(1, m), \xi^3), g_3^2(d^2(1, m^1), \xi^3), g_2^2, g_4^1(m^1, \alpha_*^4),$$

$$g_4^2(m^2, \alpha_*^4), \dots, g_{2i}^1(m^{i-1}, \alpha_*^{2i}), g_{2i}^2(m^i, \alpha_*^{2i}), \dots;$$

$$C_{15}: g_1^2, g_1^1(m, \xi^2), g_2^2(m^1, \xi^2), g_4^1(m^1, \alpha_*^4),$$

$$g_4^2(m^2, \alpha_*^4), \dots, g_{2i}^1(m^{i-1}, \alpha_*^{2i}), g_{2i}^2(m^i, \alpha_*^{2i}), \dots;$$

$$C_{16}: g_2^2, g_3^2, g_4^1(m^1, \alpha_*^4), g_4^2(m^2, \alpha_*^4), \dots, g_{2i}^1(m^{i-1}, \alpha_*^{2i}),$$

$$g_{2i}^2(m^i, \alpha_*^{2i}), \dots$$

На рис. 15—17 показаны кривые C_{13}, C_{15}, C_{16} и множество \bar{A} .

IV. В четвертом варианте окончания просчитываем наибольший номер i_* , при котором кривая $g_{i_*}^2$ имеет ξ -пересечение с g_1^1 . Если $i_* = 0$ (пересечения нет), то множество \bar{A} определяется одной из кривых

$$C_{17}: g_1^2, g_1^1, g_2^1(d^1(1, m), \xi^3), g_3^2(d^2(1, m^1), \xi^3),$$

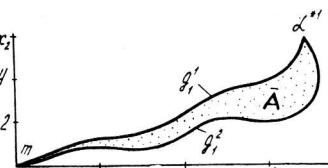


Рис. 12.

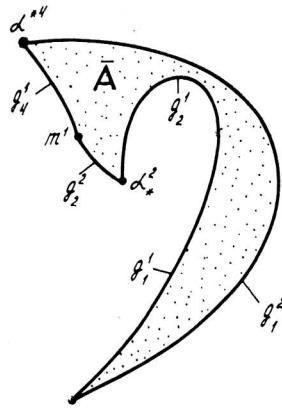


Рис. 13.

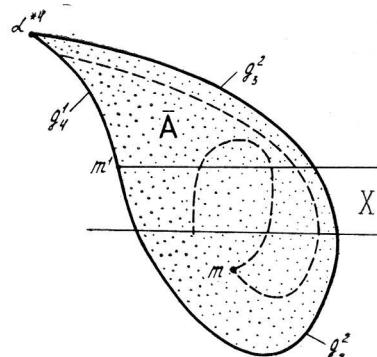


Рис. 14.

$$\begin{aligned} &g_2^2, \dots, g_1^1(m^{i-1}, \xi^{2i+1}), g_{2i+1}^2(d^2(1, m^i), \xi^{2i+1}), g_{2i}^2, \dots; \\ &\mathbf{C}_{18}: g_2^2, g_3^2, g_4^1(m^1, \xi^5), g_5^2(d^2(1, m^2), \xi^5), g_4^2, \dots, g_{2i}^1(m^{i-1}, \xi^{2i+1}), \\ &\quad g_{2i+1}^2(d^2(1, m^i), \xi^{2i+1}), g_{2i}^2, \dots \end{aligned}$$

Если $i_* \neq 0$ и кривая $g_{i_*+2}^2$ бесконечна, то множество \bar{A} — вся плоскость. В том случае, когда $i_* \neq 0$ и кривая $g_{i_*+2}^2$ конечна, множество \bar{A} определяется кривой C_{19} :

$$\begin{aligned} &\mathbf{C}_{19}: g_2^2, g_1^1(m, \xi^{i_*}), g_{i_*}^2(m^{i_*/2}, \xi^{i_*}), g_{i_*+2}^1(m^{i_*/2}, \xi^{i_*+3}), \\ &\quad g_{i_*+3}^2(d^2(1, m^{(i_*+2)/2}, \xi^{i_*+3}), g_{i_*+2}^2, \dots, g_{2i}^1(m^{i-1}, \xi^{2i+1}), \\ &\quad g_{2i+1}^2(d^2(1, m^i), \xi^{2i+1}), g_{2i}^2, \dots \end{aligned}$$

Кривые C_{17} , C_{18} , C_{19} и множества \bar{A} показаны на рис. 18—20.

Отметим, что для кривых C_k , в записи которых встречается многоточие, группа кривых, записанная между многоточиями, сдвигается влево вдоль оси x_1 начиная с некоторого номера на величину 2π бесконечное число раз. Таким образом, несмотря на то, что кривая C_k набирается из бесконечного числа гладких дуг, число разнотипных дуг конечно.

На основе описанного алгоритма была составлена программа построения множества \bar{A} на ЭВМ. Рис. 9, 10, 12, 15 выполнены на ЭВМ. Для них $m=0$, $k=1$, $a=0$. Данные о параметрах μ , v_1 , v_2 , c приведены в табл. 2.

Если точка m находится выше полосы X , то алгоритм построения множества \bar{A} прежний, за исключе-

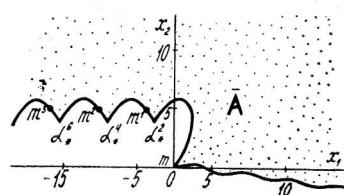


Рис. 15.

Таблица 2. Параметры счета

Рисунок	μ	v_1	v_2	c
9	0,5	-6	-4	-0,91
10	2	-6	-4	-1,91
12	0,5	-6,3	-4	-0,91
15	2	-4,5	-3	-1,51

к некоторому моменту ϑ (зависящему от x_0). Построение пучка с нужными свойствами опирается на разбиение множества \bar{A} на «ячейки». А именно, при помощи некоторого алгоритма (описание его опускается), имеющего много общего с алгоритмом построения множества \bar{A} , строится последовательность множеств $A'_1 \subset A'_2 \subset \dots \subset A'_k$, каждое из которых принадлежит множеству \bar{A} . При этом если \bar{A} не содержит в себе точек из набора m^i , $i = 2, 3, \dots$, то $A'_{k_*} = \bar{A}$ при некотором $k_* \leq 4$. В противном, $A'_k \neq \bar{A}$ при любом $k \geq 1$, последовательность A'_1, A'_2, \dots является бесконечной, возрастающей и стремится к \bar{A} , когда $k \rightarrow \infty$. На рис. 23 показаны множества A'_1, A'_2, A'_3 , отвечающие тем же параметрам задачи, что и \bar{A} на рис. 11.

Для \bar{A} , изображенного на рис. 15, последовательность A'_1, A'_2, \dots является бесконечной, начальные множества этой последовательности $A'_1, A'_2 = A'_3, A'_4 = A'_5$ показаны на рис. 24.

Ячейки Λ_k , $k=1, 2, \dots$, определяются через множества A'_k по правилу: $\Lambda_1 = A'_1$, $\Lambda_k = \text{cl}(A'_k \setminus A'_{k-1})$, $k \geq 2$. Если $A'_k = A'_{k-1}$, то $\Lambda_k = \emptyset$. Разбиение множества \bar{A} на ячейки поясняется на рис. 25.

n  *m* 

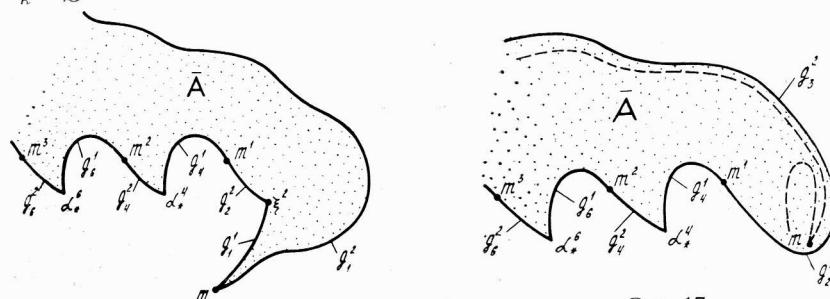


Рис. 16.

Рис. 17.

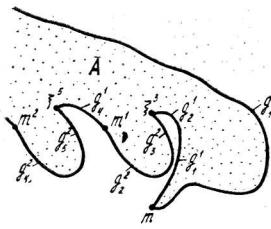


Рис. 18.

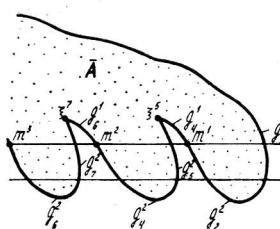


Рис. 19.

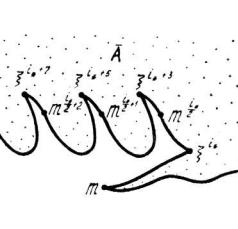


Рис. 20.

Идея построения пучка с нужными свойствами состоит в следующем. Определяется наименьшее k , при котором $x_0 \in \Lambda_k$. Во всех ячейках Λ_i с четными (нечетными) номерами $i \leq k$ первый игрок применяет постоянное управление $u(t) = \mu$ ($u(t) = -\mu$) с некоторыми особенностями выбора управления вблизи границы ячейки. А именно, если движение системы (1.1), в силу $u(t) = \mu$ ($u(t) = -\mu$) и произвольной функции $v(\cdot)$, выходит на ту часть границы ячейки, которая не принадлежит одновременно ячейке с меньшим номером, то управление $u(t)$ переключается на противоположное по знаку и держится постоянным до выхода на некоторую вспомогательную линию отслеживания, построенную вблизи указанной части границы ячейки. Затем опять происходит переключение на $u(t) = \mu$ ($u(t) = -\mu$) и т. д., т. е. может возникать скольжение вблизи границы ячейки. Такое правило выбора обеспечивает переход из ячейки Λ_k в ячейку Λ_i с номером $i \leq k$. Для каждого конкретного движения, начинающегося из одной и той же точки x_0 , последовательность проходимых ячеек может быть своей, однако номера ячеек вдоль движения обязательно убывают.

Поясним способ построения пучка $Y(x_0)$ на примере множества \bar{A} , показанного на рис. 26 и состоящего из четырех ячеек $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_4$. Введем вспомогательные линии. На границе множества \bar{A} есть одна особая точка m^1 . Кривые $g_4^1, g_2^1 \cup g_3^1$, выходящие из точки m^1 , назовем особыми. В дальнейшем будет показано, что время перевода в точку m из начальных точек на

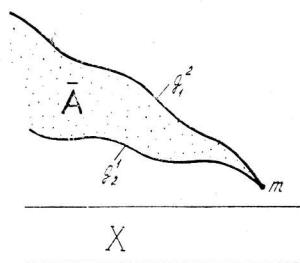


Рис. 21.

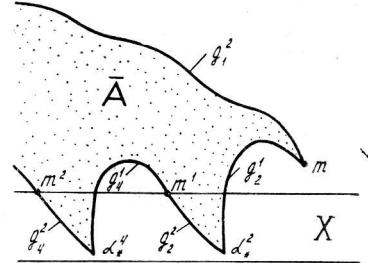


Рис. 22.

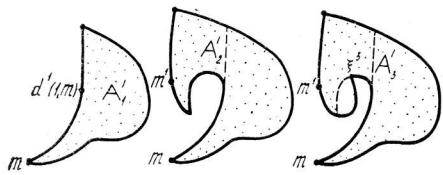


Рис. 23.

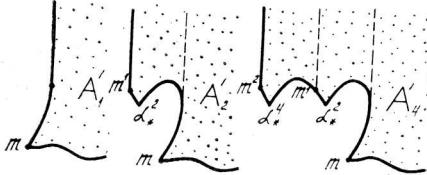


Рис. 24.

особых кривых не является конечным. Мы введем вблизи особых кривых защитные линии, которые будут предотвращать попадание движений на особые кривые. Для этого из точки $z^1(4)$, лежащей на вертикальной прямой $M_2^{(2)}$ выше линии E_1 и близкой к точке m^1 , но не совпадающей с ней, выпустим кривую $p^1(2, z^1(4))$ и доведем ее до пересечения с кривой g_1^2 . Полученную защитную линию обозначим $\lambda_4^1(m^1)$. Верхний индекс указывает на тип кривой, вблизи которой введена защитная линия, а нижний соответствует номеру ячейки, которой защитная линия принадлежит. Рассмотрим кривую $p^2(1, z^2(2))$, выходящую из точки $z^2(2) \in E_1 \cap \Lambda_2$, близкой к m^1 и не совпадающей с ней. Продолжим кривую $p^2(1, z^2(2))$ линией $p^2(2, d^2(1, z^2(2)))$ до пересечения с кривой g_2^1 . Часть полученной составной линии, принадлежащую ячейке Λ_2 , обозначим $\lambda_2^2(m^1)$, а часть ее принадлежащую ячейке Λ_3 , обозначим $\lambda_3^2(m^1)$. Защитные линии $\lambda_4^1(m^1)$, $\lambda_2^2(m^1)$, $\lambda_3^2(m^1)$ будем считать построенными таким образом, что начальная точка x_0 не попадает ни в один из заштрихованных слоев (рис. 26) вблизи границы множества \bar{A} .

Введем далее линии отслеживания. Выпустим из точки $r^1 \in E_2 \cap \Lambda_1$ ($r^1 \in E_2 \cap \Lambda_3$), близкой к точке $d^2(1, m)$ ($d^2(1, z^2(2))$) и лежащей слева от нее, траекторию системы (1.1) при $t \geq 0$, $u(t) = \mu$, $v(t) = v_1$ и доведем ее до пересечения с вертикальной прямой $M_1^{(1)}$. Из точки пересечения проведем произвольную непрерывную линию без самопересечений, идущую влево от $M_1^{(1)}$ ниже прямой E_2 и выше кривой $p^2(1, m)$ ($p^2(1, z^2(2))$) до точки m (до точки w^1 пересечения кривых $p^1(2, d^1(1, m))$, $p^2(1, z^2(2))$). Полученную составную линию обозначим $\beta_1(\beta_3)$. Введем линию отслеживания $\beta_2(\beta_4)$. Из точки $r^2 \in \Lambda_1 \cap \Lambda_2$ ($r^2 \in \Lambda_2 \cap \Lambda_4$), близкой к кривой g_1^2 , проведем произвольную непрерывную без самопере-

сечений линию, идущую влево от вертикальной прямой $x_1 = r_1^2$ ($x_1 = r_1^4$) ниже кривой g_1^2 , выше прямой N_1 : $x_2 = z_2^1(4)$, и доведем ее до пересечения с линией $M_2^{(2)}$ (g_4^1).

Предположим, что $x_0 \in \Lambda_4 \cap \text{int } \bar{A}$. Правило действия первого игрока, при

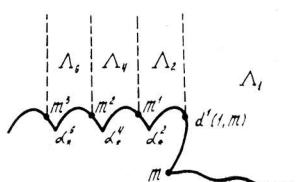


Рис. 25.

помощи которого формируется стабильный пучок $Y(x_0)$, состоит в следующем. Первый игрок держит $u(t) = \mu$ при $t > 0$ до попадания движения системы (1.1) на кривую g_1^2 . После выхода на g_1^2 следует переключение управления на $u(t) = -\mu$. Управление сохраняется постоянным до попадания движения на линию отслеживания β_4 . Затем опять $u(t) = +\mu$ до выхода на g_1^2 и т. д. до тех пор, пока не попадем в ячейку Λ_2 . Из ячейки Λ_4 в ячейку Λ_3 в рассматриваемом примере перейти невозможно. В ячейке Λ_2 первый игрок применяет $u(t) = \mu$ до выхода на g_1^2 , затем $u(t) = -\mu$ до попадания на β_2 , т. е. действует такое же правило, как в Λ_4 . После выхода на границу ячейки Λ_1 первый игрок применяет управление $u(t) = -\mu$ и держит его, пока движение не попадет на кривую g_1^2 , затем следует переключение на $u(t) = +\mu$ до выхода на β_1 и т. д. Такое правило управления первый игрок использует до попадания в точку m .

Если $x_0 \in \Lambda_3 \cap \text{int } \bar{A}$, то первый игрок применяет $u(t) = -\mu$ до выхода на линию $\lambda_3^2(m^1)$, затем переключается на $u(t) = +\mu$ до попадания на β_3 и т. д. до прихода в Λ_2 . Начиная с ячейки Λ_2 поведение первого игрока такое же, как раньше. Заметим, что вспомогательные линии в ячейках Λ_i , $i > k$ (k — наименьший номер, при котором $x_0 \in \Lambda_k$) не нужны, т. е. их можно не строить.

Пучок движений $Y(x_0)$ из точки $x_0 \in \Lambda_k \cap \text{int } \bar{A}$ ($k = 1, 4$) определяем как совокупность всех движений системы (1.1), получающихся при описанном правиле поведения первого игрока и переборе всех измеримых управлений $v(\cdot)$ второго. Стабильность пучка $Y(x_0)$ вытекает из следующего свойства. Пусть на полуинтервале $[0, +\infty)$ заданы измеримые функции $v_*(\cdot)$, $v^*(\cdot)$ и $v_*(t) = v^*(t)$ для всех t из некоторого промежутка $[0, t_*]$. Тогда на промежутке $[0, t_*]$ движение из пучка $Y(x_0)$, отвечающее функции $v_*(t)$, совпадает с движением, отвечающим функции $v^*(t)$.

Пусть $x_0 \in \text{int } \bar{A}$. На примере множества \bar{A} , представленного на рис. 26, покажем существование такого числа $\vartheta > 0$, что для любого движения из $Y(x_0)$ найдется момент $\bar{t} \in [0, \vartheta]$, в который движение попадает в точку m . При доказательстве будем пользоваться свойствами 1—5 из § 2, помня, что система (1.1) отличается от (2.2) лишь знаком правой части, а любое движение из пучка можно представить в виде объединения движений системы

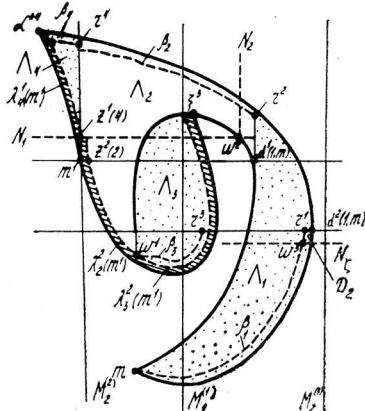


Рис. 26.

(1.1), каждое из которых идет либо при $u(t) = +\mu$, либо при $u(t) = -\mu$.

Приведем сначала вспомогательные утверждения, которые понадобятся при оценке вертикальной скорости движения. Пусть $M_1^{(1)}, M_2^{(1)}$ — вертикальные прямые $x_1 = x_{1*}$, $x_1 = x_1^*$ из семейств M_1, M_2 соответственно, отвечающие одному и тому же значению параметра $r = r_*$. Пусть далее E — произвольное множество, лежащее в вертикальной полосе, ограниченной прямыми $M_1^{(1)}, M_2^{(1)}$, причем расстояния $\rho_1 = \rho(M_1^{(1)}, E)$, $\rho_2 = \rho(M_2^{(1)}, E)$ от каждой прямой до множества E строго положительны. Положим $\kappa_1 = k \sin(x_{1*} + \rho_1 + a) - (\mu + c)$, $\kappa_2 = k \sin(x_1^* - \rho_2 + a) - (\mu + c)$.

Утверждение 1. Если движение из пучка $Y(x_0)$ идет в множестве E , то вертикальная составляющая скорости отрицательна и оценивается снизу по абсолютной величине числом $\kappa = \min\{\kappa_1, \kappa_2\}$, при этом $\kappa_1 > 0$, $\kappa_2 > 0$.

В самом деле, из определения прямых $M_1^{(1)}, M_2^{(1)}$ вытекает, что $k \sin(x_{1*} + a) = \mu + c$, $k \sin(x_1^* + a) = \mu + c$ и при любом $x_1 \in (x_{1*}, x_1^*)$ имеет место неравенство $k \sin(x_1 + a) > \mu + c$. Для всех движений $y(\cdot)$ из пучка $Y(x_0)$, идущих в множестве E , справедливо неравенство $x_{1*} + \rho_1 \leq y_1(t) \leq x_1^* - \rho_2$. Следовательно, $k \sin(y_1(t) + a) \geq \min\{k \sin(x_{1*} + \rho_1 + a), k \sin(x_1^* - \rho_2 + a)\}$. Из этого неравенства получаем требуемое утверждение.

Пусть теперь $M_1^{(1)}, M_2^{(2)}$ — вертикальные прямые из семейств M_1, M_2 соответственно, причем прямая $M_2^{(2)}$ отвечает на единицу меньшему значению параметра r , чем прямая $M_1^{(1)}$. Пусть некоторое множество E лежит в вертикальной полосе, ограниченной прямыми $M_1^{(1)}, M_2^{(2)}$ и $\rho_1 = \rho(M_1^{(1)}, E) > 0$, $\rho_2 = \rho(M_2^{(2)}, E) > 0$.

Утверждение 2. Если движение из пучка $Y(x_0)$ идет в множестве E , то вертикальная составляющая скорости положительна и оценивается снизу некоторым числом $\kappa > 0$.

Доказательство аналогично предыдущему.

Перейдем к доказательству существования числа $\vartheta > 0$, о котором сказано выше. Ограничимся случаем $x_0 \in \Lambda_4 \cap \text{int } \bar{A}$. Любое движение из пучка идет в ячейке Λ_4 выше горизонтальной прямой N_1 : $x_2 = z_2^1(4)$. Величина $(z_2^1(4) + v_1) > 0$ оценивает снизу горизонтальную составляющую скорости движения, поэтому движение попадает в ячейку Λ_2 за время, не большее, чем $T_4 = d'_4 / (z_2^1(4) + v_1)$, где $d'_4 = \max_{z_*, z^* \in \Lambda_4} |z_1^* - z_{*1}|$.

Все движения в ячейке Λ_2 разобьем на две части: до попадания на вертикальную прямую N_2 и после попадания на N_2 . Прямая N_2 проведена через точку w^2 — ближайшую к $d^1(1, m)$ точку пересечения прямой N_1 с кривой g_2^1 . При этом считаем, что прямая N_1 имеет с кривой g_2^1 две точки пересечения. Этого всегда

можно добиться выбором точки $z^1(4)$. До выхода на N_2 движение в ячейке Λ_2 идет выше прямой N_1 , поэтому величина горизонтальной составляющей скорости не меньше, чем $z_2^1(4) + v_1$. Таким образом, за время, не превосходящее $T_2' = d_2' / (z_2^1(4) + v_1)$, движение выходит на прямую N_2 . Здесь $d_2' = \max_{z_*, z^* \in \Lambda_2} |z_1^* - z_{1*}|$. После попадания на прямую N_2 движение идет справа от нее, а именно в множестве $D_1 = \{z \in \Lambda_2 : z_2 > -v_1, z_1 > w_1^2\}$. Имеем $\rho(D_1, M_1^{(1)}) = \rho(w^2, M_1^{(1)}) > 0$, $\rho(D_1, M_2^{(1)}) = \rho(d^1(1, m), M_2^{(1)}) > 0$ (см. рис. 26). Следовательно, согласно утверждению 1, вертикальная составляющая скорости движения отрицательна и по абсолютной величине не превосходит некоторого положительного числа χ . Время движения в ячейке Λ_2 после выхода на N_2 до попадания в ячейку Λ_1 оценивается сверху числом $T_2'' = (\alpha_2^{*4} + v_1)/\chi$. Таким образом, общее время движения в ячейке Λ_2 оценивается суммой $T_2' + T_2''$.

В ячейке Λ_1 разобьем каждое движение на две части: до первого попадания на кривую g_1^2 и после первого попадания на g_1^2 . До выхода на g_1^2 движение идет при $u(t) = -\mu$, поэтому вертикальная составляющая скорости отрицательна и по абсолютной величине не меньше, чем $\mu - c - k$. Время перевода на линию g_1^2 конечно и оценивается сверху числом $d_1''/(\mu - c - k)$ где $d_1'' = \max_{z_*, z^* \in \Lambda_1} |z_2^* - z_{2*}|$. Для оценки времени движения после выхода на кривую g_1^2 введем вспомогательную горизонтальную прямую $N_\zeta : x_2 = -v_2 - \zeta$, $\zeta > 0$. Число ζ выберем так, чтобы линия β_1 имела с прямой N_ζ лишь одну точку пересечения w^3 , близкую к r^1 . Это всегда можно сделать, так как кривая β_1 имеет с прямой E_2 только одну общую точку r^1 , лежит ниже E_2 и монотонна на участке, примыкающем к E_2 . Если движение впервые попало на кривую g_1^2 ниже прямой N_ζ , то время движения после выхода на g_1^2 до попадания в точку m оценивается сверху величиной d_1'/ζ , где $d_1' = \max_{z_*, z^* \in \Lambda_1} |z_1^* - z_{1*}|$. В том случае, когда первое попадание на g_1^2 происходит выше прямой N_ζ , необходимо оценить время перевода на N_ζ . После выхода на кривую g_1^2 движение идет в силу $u(t) = +\mu$ до первого попадания на линию β_1 . Поскольку кривая β_1 на участке от точки r^1 до точки w^3 является траекторией системы (1.1) при $v(t) = v_1$, $u(t) = \mu$, движение не может пересечь линию β_1 на этом участке, а значит, идет между кривыми β_1 и g_1^2 , т. е. в множестве D_2 , отмеченном на рис. 26. При этом $\rho(D_2, M_1^{(1)}) = \rho(w^3, M_1^{(1)}) > 0$, $\rho(D_2, M_2^{(1)}) = \rho(d^2(1, m), M_2^{(1)}) > 0$. Движение попадает на прямую N_ζ за время, не превосходящее ζ/χ . Здесь положительное число χ оце-

нивает снизу абсолютную величину вертикальной составляющей скорости. После выхода на прямую N_ζ движение идет ниже N_ζ , поэтому горизонтальная составляющая скорости отрицательна и по абсолютной величине не меньше ζ . Таким образом, время перевода с прямой N_ζ в точку t не превосходит числа d'_1/ζ .

Следовательно, общая оценка времени движения после выхода на g_1^2 есть $\zeta/\chi + d'_1/\zeta$. Окончательно имеем $T_1 = d''_1/(\mu - c - k) + \zeta/\chi + d'_1/\zeta$. Число T_1 оценивает сверху время движения в Λ_1 .

В качестве искомого ϑ нужно взять сумму $T_1 + T_2 + T_4$.

Опишем способ действия первого игрока для граничных точек множества \bar{A} . Пусть $x_0 \in \partial\bar{A}$. Рассмотрим проходящие через точку x_0 и принадлежащие $\partial\bar{A}$ кривые первого и второго типов. Скажем, что точка x_0 удовлетворяет условию (H) , если выполняется одно из трех требований: а) точка x_0 не является точкой α^* - или α_* -пересечения граничных кривых, и при движении по граничным кривым из точки x_0 как по траекториям системы (2.1) при $\tau \leq 0$ нет попадания в особые точки; в) точка x_0 совпадает с точкой α^* -пересечения (α_* -пересечения) граничных кривых, и при движении по каждой из кривых как по траектории системы (2.1) при $\tau \leq 0$ нет попадания в особые точки; с) точка x_0 совпадает с точкой ξ -пересечения граничных кривых, и при движении по кривой первого типа как по траектории системы (2.1) нет попадания в особую точку.

На рис. 26 условие (H) выполнено для точек на граничных кривых g_1^2, g_1^1, g_2^1 , включая точку ζ^3 , и не выполнено для точек на кривых g_2^2, g_3^2, g_4^1 , включая точку α^{*4} . Для точек, удовлетворяющих условию (H) , можно доказать, что время перевода в точку t конечно. При этом в случае, когда проходящие через такую точку x_0 кривые первого и второго типов не имеют общей касательной в этой точке, правило построения пучка $Y(x_0)$ такое же, как для внутренних точек множества \bar{A} . В противном случае, т. е. когда граничные кривые первого и второго типов в точке x_0 имеют общую касательную, правило формирования пучка $Y(x_0)$ усложняется. Это связано с тем, что для такой точки x_0 , какое бы постоянное управление ни выбирал первый игрок, второй игрок может «бросить» движение в множество $R^2 \setminus \bar{A}$. Поэтому в правило формирования пучка $Y(x_0)$ на некотором промежутке времени $[0, t_*]$ закладывается выбор управления первого игрока в виде функции от управления второго игрока. А именно, пусть $v(\cdot)$ — произвольное измеримое управление второго игрока на $[0, t_*]$. Запишем его по формуле $v(t) = v_1(1 - \lambda(t)) + \lambda(t) \cdot v_2$, где функция $\lambda(\cdot)$ принимает значения на $[0, 1]$. Положим $u(t) = -\lambda(t)\mu + (1 - \lambda(t))(-\mu)$, $t \in [0, t_*]$. При таком выборе управления $u(t)$ движение на $[0, t_*]$ идет в множестве \bar{A} . По истечении промежутка времени $[0, t_*]$ правило выбора управления такое же,

как для внутренних точек множества \bar{A} . Перебирая всевозможные $v(\cdot)$, получаем пучок $Y(x_0)$, обладающий свойством стабильности.

§ 5. Управление второго игрока

В этом параграфе будет построена стратегия V второго игрока, при помощи которой организуется уклонение от точки m для начальных положений из множества $R^2 \setminus \bar{A}$ и тех точек на границе множества \bar{A} , для которых не выполнено условие (H) из § 4. Под уклонением от точки m из некоторого множества B будем понимать следующее:

$$\exists V \forall x_0 \in B \forall \vartheta > 0 \exists \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \Delta < \delta \forall u(\cdot) \forall t \in [0, \vartheta] y(t, \Delta, x_0, u(\cdot), V) \in O_\varepsilon(m).$$

Здесь $y(\cdot, \Delta, x_0, u(\cdot), V)$ — ломаная Эйлера [6], выходящая из точки x_0 в момент $t_0 = 0$. Нетрудно видеть, что любая точка x_0 , из которой второй игрок обеспечивает уклонение, не может принадлежать A . Таким образом, множество A состоит из точек множества $\text{int } \bar{A}$ и тех точек на границе \bar{A} , которые удовлетворяют условию (H).

В рассматриваемой задаче стратегия второго игрока, гарантирующая уклонение, является функцией лишь положения системы и не зависит от t . Для случаев, когда $A \setminus \{m\} = \emptyset$ (они указаны в § 3), уклоняющая стратегия V фактически построена в работах [7, 9]. Далее будем считать, что $A \setminus \{m\} \neq \emptyset$.

Определим стратегию V следующим образом. В $R^2 \setminus \bar{A}$ вблизи границы множества \bar{A} образуем слой ширины ω (ω — малое положительное число). Условимся не включать в слой кривые на границе множества \bar{A} . Выделим на границе \bar{A} участки, отвечающие $v(t) = v_1$ и $v(t) = v_2$. Разобьем ω -слой на полоски, примыкающие к граничным кривым, соответствующим $v(t) = v_1$ и $v(t) = v_2$. В том случае, когда сопряжение кривых, отвечающих разным управлению второго игрока, гладкое, разделение на полоски происходит по отрезку, перпендикулярному касательной к граничной кривой в точке сопряжения. В противном случае, т. е. когда сопряжение негладкое, сделаем разделение на полоски, даже если сопрягающиеся кривые отвечают одному и тому же управлению v . Способ разбиения на полоски зависит от того, какой из следующих трех вариантов реализуется: 1) точка сопряжения кривых совпадает с точкой m , 2) точка сопряжения совпадает с точкой α^* -пересечения (α^* -пересечения), 3) точка сопряжения совпадает с точкой ξ -пересечения. В случае 1) разделение слоя на полоски произведем при помощи проходящего через точку m отрезка вертикальной прямой, при этом

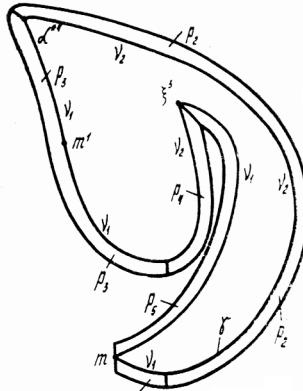


Рис. 27.

ω -слоя, которые примыкают к граничным кривым, отвечающим $v(t) = v_1$ ($v(t) = v_2$), примем $V(x) = v_1$ ($V(x) = v_2$). Для точек на границе множества \bar{A} , не удовлетворяющих условию (H) и принадлежащих граничной кривой, соответствующей $v(t) = v_1 \times (v(t) = v_2)$, положим $V(x) = v_1$ ($V(x) = v_2$). В остальных точках плоскости, т. е. в точках, не лежащих в ω -слое и на указанных граничных кривых множества \bar{A} , выберем $V(x)$ произвольно, лишь бы выполнялось включение $V(x) \in [v_1, v_2]$.

Покажем на примере множества \bar{A} , представленного на рис. 26, что, используя такую стратегию, второй игрок уклоняется движение от некоторой окрестности точки m , зависящей от x_0 и заданного момента ϑ . На рис. 27 вблизи границы \bar{A} построен слой ширины ω и показано разбиение его на полоски. В рассматриваемом примере всего пять полосок. Обозначим их p_i , $i = 1, \dots, 5$. В каждой полоске p_i введем вспомогательные функции $\eta_i: (0, \omega] \rightarrow (0, \omega]$. Сделаем это вначале для полосок p_1, p_2, p_4, p_5 , не содержащих на границе особую точку m^1 . Рассмотрим полоску p_1 . Особенность ее состоит в том, что кривая γ , принадлежащая одновременно и границе полоски p_1 , и границе множества \bar{A} , соответствует одному постоянному управлению первого игрока. В данном случае кривая γ отвечает $u(t) = \mu, v(t) = v_1$. Зафиксируем произвольное число $\kappa \in (0, \omega]$ и построим в полоске p_1 кривую C_κ , все точки которой находятся на расстоянии κ от линии γ . Через каждую точку z на кривой C_κ проведем траекторию системы (1.1) при $u(t) = \mu, v(t) = v_1$ и продолжим ее в обе стороны (т. е. при $t \geq 0$ и при $t \leq 0$) до выхода на границу полоски. Обозначим полученную линию $\psi_\kappa(z)$. Из того, что на кривой γ нет особых точек, следуют два факта: а) моменты выхода траекторий $\psi_\kappa(z)$ на границу полоски равномерно ограничены.

часть слоя слева от отрезка отбросим (т. е. включим в слой). В случае 2) разделение слоя на полоски устроим по биссектрисе угла, образованного касательными к кривым в точке a^* -пересечения (a^* -пересечения). В случае 3) разделение сделаем по кривой, выходящей из точки ξ -пересечения и равноудаленной от пересекающихся кривых. Точку ξ -пересечения не будем включать в разделяющую кривую.

Ширину слоя ω считаем настолько малой, что любые две полоски могут пересекаться только тогда, когда являются соседними, при этом пересечение происходит по разделяющей их кривой или отрезку. В тех полосках

чены по всем $z \in C_x$, б) выход траекторий $\psi_x(z)$ на линию γ невозможен. Символом $\eta_1(x, z)$ обозначим расстояние между фазовой траекторией $\psi_x(z)$ и кривой γ . Примем $\eta_1(x) = \inf \{\eta_1(x, z) : z \in C_x\}$. Нетрудно показать, используя свойства а) и б), что \inf достигается и $\eta_1(x) > 0$. Таким образом, каждому $x \in (0, \omega]$ поставлено в соответствие число $\eta_1(x) \in (0, \omega]$ и тем самым введена положительная функция $\eta_1 : (0, \omega] \rightarrow (0, \omega]$. Очевидно, что $\eta_1(x) \leq x$ при любом $x \in (0, \omega]$.

Для полосок p_2, p_4, p_5 граничная кривая γ состоит из двух участков, один из которых отвечает управлению $u(t) = \mu$, а другой — управлению $u(t) = -\mu$. В этом случае функция η_i вводится аналогично функции η_1 . Отличие заключается лишь в том, что под траекториями $\psi_x(z)$ будем понимать траектории системы (1.1), составленные, как и кривая γ , из двух участков, отвечающих разным управлениям первого игрока, причем переключение управления происходит либо на горизонтальной прямой E_1 , либо на прямой E_2 .

В полоске p_3 , содержащей на границе точку m^1 , введем функцию η_3 следующим образом. Разобъем p_3 на три части: $p'_3, p''_3, p'''_3 := p_3 \setminus (p'_3 \cup p''_3)$. Хотя части p'_3, p''_3 содержат на границе точку m^1 , свойства а) и б) для них выполняются, поэтому можно ввести функции η'_3, η''_3 описанным выше способом. Примем $\eta_3(x) = \min \{\eta'_3(x), \eta''_3(x)\}$ для всех $x \in (0, \omega]$. Введем, наконец, функцию $\eta(x) = \min \{\eta_i(x), i = \overline{1, 5}\}$ из $(0, \omega]$ в $(0, \omega]$. Функция η положительная, неубывающая, и $\eta(x) \leq x$ при любом $x \in (0, \omega]$. Отметим еще одно свойство функции η , которое будем использовать в доказательствах. Зафиксируем $x \in (0, \omega]$ и такую точку $x_0 \in p_i$ ($i = \overline{1, 5}$), что $\rho(x_0, \bar{A}) = x$. Рассмотрим движение $y(\cdot) = y(\cdot, \Delta, x_0, u(\cdot), V)$ системы (1.1) при $t \geq 0$ в силу стратегии V и произвольной измеримой функции $u(\cdot)$ на промежутке времени $[0, t^*]$, где t^* — первый момент выхода движения из полоски p_i . При любом $t \in [0, t^*]$ имеем

$$\rho(y(t), \bar{A}) > \eta_i(x) > \eta(x). \quad (5.1)$$

Для полосок p_1, p_2, p_4, p_5 это свойство следует из полуунициаемости кривых $\psi_x(z)$, которые использовались при определении функций η_i . Справедливость (5.1) для p_3 вытекает из того, что векторограмма скоростей системы (1.1) при $v(t) = v_1, y(t) \in p''_3$ лежит в третьем квадранте, т. е. движения как бы отталкиваются от точки m^1 .

Пусть заданы точка $x_0 \in R^2 \setminus \bar{A}$ и число $\vartheta > 0$. Примем $x_1 = \frac{3}{4} \min \{\omega, \rho(x_0, \bar{A}), \rho(\zeta_*, \bar{A})\}, x_2 = \frac{2}{3} \eta(x_1)$. Обозначим $\lambda = \max \{|f(x, p, q)| : p \in P, q \in Q, x \in \Gamma(x_0, \vartheta)\}$. Здесь ζ_* — точка пересечения вертикальной прямой, проходящей через точку x_0

с линией ζ , разделяющей полоски p_4, p_5 . Если пересечения нет, то считаем $\rho(\zeta_*, \bar{A}) = \infty$. Символом $\bar{f}(x, p, q)$ обозначена правая часть системы (1.1), а $\Gamma(x_0, \vartheta)$ — замкнутое ограниченное множество тех точек, в которые возможно попадание системы (1.1) до момента ϑ из точки x_0 при любых допустимых реализациях управлений первого и второго игроков. Докажем, что введенная функция V обеспечивает уклонение от точки m с $e = \beta\eta(\kappa_2)$ и $\delta = -\eta(\kappa_1)/3\lambda$, где $\beta = \bar{\beta}/\sqrt{\bar{\beta}^2 + \lambda^2}$, $\bar{\beta} = -v_2 - (m_2 + \omega) > 0$.

Зафиксируем произвольный шаг $\Delta \ll \delta$, программное управление $u(\cdot)$ и рассмотрим движение $y(\cdot) = y(\cdot, \Delta, x_0, u(\cdot), V)$. Пусть $[t_*, t^*]$ — некоторый промежуток времени, на котором движение идет в слое, причем t_* — момент разбиения и либо $t_* = 0$, либо на промежутке $[t_* - \Delta, t_*]$ есть момент \bar{t} , в который $y(\bar{t})$ не принадлежит слою. Мы докажем, что $\rho(y(t), \bar{A}) \geq \eta(\kappa_2)$ при любом $t \in [t_*, t^*]$. Очевидно, что при выбранном шаге $\rho(y(t_*), \bar{A}) \geq \kappa_1$. Из свойств 1—5 § 2 и способа разделения ω -слоя на полоски следует, что возможны лишь следующие переходы из полоски в полоску: $p_2 \rightarrow p_1, p_5 \rightarrow p_4, p_4 \rightarrow p_5, p_4 \rightarrow p_3$.

1. Пусть $y(t_*) \in p_2$. Если $y(t) \in p_2$ при любом $t \in [t_*, t^*]$, то $\rho(y(t), \bar{A}) \geq \eta(\kappa_1)$. Из свойств функции η следует, что $\eta(\kappa_1) \geq \eta(\kappa_2)$, поэтому имеем $\rho(y(t), \bar{A}) \geq \eta(\kappa_2)$ для всех $t \in [t_*, t^*]$. Предположим теперь, что существует такой момент $\hat{t} \in (t_*, t^*]$, что $y(\hat{t}) \in p_1$. На промежутке $[\hat{t}, \hat{t} + \Delta]$ за счет ошибки в выборе управления $v(t)$ расстояние до границы множества \bar{A} может сократиться на величину, не большую, чем $\Delta\lambda$, и в результате $\rho(y(\hat{t} + \Delta), \bar{A}) \geq \eta(\kappa_1) - \Delta\lambda \geq \eta(\kappa_1) - 1/3\eta(\kappa_1) = 2/3\eta(\kappa_1) = \kappa_2$. При всех $t \in [\hat{t} + \Delta, t^*]$ движение $y(t) \in p_1$, поэтому $\rho(y(t), \bar{A}) \geq \eta(\kappa_2)$. Мы считаем, что, попав в p_1 , движение остается там до момента t^* , так как выход из p_1 означает выход из слоя, а это противоречит сделанному вначале предположению.

2. Пусть $y(t_*) \in p_5$. Если $y(t) \in p_5$ при любом $t \in [t_*, t^*]$, то $\rho(y(t), \bar{A}) \geq \eta(\kappa_1) \geq \eta(\kappa_2)$. Предположим, что существует такой момент \hat{t} , в который $y(\hat{t}) \in p_4$. Заметим, что $\rho(y(\hat{t}), \bar{A}) \geq \kappa_1$. Будем считать, что \hat{t} — момент последнего входа в p_4 , т. е. возможны два случая: а) $y(\hat{t}) \in p_5$ при $t \in [\hat{t}, t^*]$, б) существует такой момент $\tilde{t} \in (\hat{t}, t^*]$, что $y(\tilde{t}) \in p_5$. Случай а) можно разбить еще на два. А именно, либо $y(t) \in p_4$ для всех $t \in [\hat{t}, t^*]$, либо существует момент $\bar{t} \in (\hat{t}, t^*]$, в который $y(\bar{t}) \in p_3$. Если движение не переходит в полоску p_3 , то $\rho(y(t), \bar{A}) \geq \eta(\kappa_1)$, $t \in [\hat{t}, t^*]$. В про-

тивном, т. е. когда есть переход в p_3 , требуемое утверждение следует из цепочки понятных неравенств:

$$\rho(y(\bar{t}), \bar{A}) \geq \eta(x_1), \quad \rho(y(\bar{t} + \Delta), \bar{A}) \geq \eta(x_1) - \Delta\lambda \geq \eta(x_1) -$$

$$- \frac{1}{3}\eta(x_1) = \frac{2}{3}\eta(x_1) = x_2, \quad \rho(y(\bar{t}), \bar{A}) \geq \eta(x_2)$$

для всех $t \in [\bar{t} + \Delta, t^*]$. В случае б) $\rho(y(\bar{t}), \bar{A}) \geq x_1$ и при каждом $t \in [\bar{t}, t^*]$ имеем $y(t) \in p_5$, так как выход из p_5 означает выход из ω -слоя. Значит, $\rho(y(t), \bar{A}) \geq \eta(x_1)$, $t \in [\bar{t}, t^*]$.

В случаях $y(t_*) \in p_1$, $y(t_*) \in p_3$, $y(t_*) \in p_4$ доказательства аналогичны.

До сих пор мы предполагали, что на промежутке $[t_*, t^*]$ движение идет в ω -слое. Если отказаться от этого предположения, то уклонение от ε -окрестности множества \bar{A} на промежутке $[0, \vartheta]$ следует из того, что изменение расстояния до границы множества \bar{A} за время Δ оценивается величиной $\Delta\lambda \leq \frac{1}{3}\eta(x_1) \leq \frac{1}{3}x_1 \leq \frac{1}{4}\min\{\omega, \rho(x_0, \bar{A}), \rho(\zeta_*, \bar{A})\}$.

Рассмотрим те начальные точки на границе множества \bar{A} , для которых не выполнено условие (H) из § 4, а именно точки на кривых g_1^1, g_2^1, g_3^2 , исключая точку ξ^3 . Пусть $x_1 = \frac{3}{4}\min\{\omega, \rho(\zeta_*, \bar{A})\}$, $x_2 = \eta(x_1)$, $\delta = \frac{1}{3}\eta(x_1)$. Напомним, что символом ζ_* обозначена точка пересечения проходящей через начальную точку x_0 вертикальной прямой с кривой ζ , разделяющей полоски p_4, p_5 (т. е. ζ_* зависит от x_0). Зафиксируем произвольные $\Delta \leq \delta$, $u(\cdot)$ и рассмотрим движение $y(\cdot) = y(\cdot, \Delta, x_0, u(\cdot), V)$. Предположим, что $y(t) \in \text{cl}(p_4 \cup p_3)$ для всех $t \in [0, \vartheta]$. Тогда $\rho(y(t), m) \geq \varepsilon_*$, где $\varepsilon_* = \min\{\rho(p_3, m), \rho(p_4, m)\}$. Таким образом, получили уклонение от ε_* -окрестности точки m . В том случае, когда существует момент $\bar{t} \in [0, \vartheta]$, в который $y(\bar{t}) \in \text{cl}(p_4 \cup p_3)$ (т. е. имеем либо выход из слоя, либо переход в полоску p_5), можно воспользоваться рассуждениями, проведенными для точек множества $R^2 \setminus \bar{A}$, и получить, что второй игрок обеспечивает уклонение от окрестности точки m радиуса $\varepsilon^* = \beta\eta(x_2)$.

Сформулируем основной результат работы: множество A есть объединение множества $\text{int } \bar{A}$ и множества точек на границе \bar{A} , удовлетворяющих условию (H) из § 4.

ЛИТЕРАТУРА

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 479 с.
2. Богуславская Э. И. Линейные дифференциальные игры на плоскости. I.—Кибернетика, 1973, № 6, с. 94—104.
3. Богуславская Э. И. Линейные дифференциальные игры на плоскости. II.—Там же, 1974, № 1, с. 113—116.
4. Богуславская Э. И. Линейные дифференциальные игры на плоскости. Случай комплексных корней.—Там же, 1976, № 1, с. 64—70.
5. Болтянский В. Г. Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1969. 307 с.

6. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
7. Пацко В. С. Условия уклонения от точки в дифференциальной игре второго порядка.— Прикл. матем. и мех., 1972, т. 36, вып. 6, с. 1007—1014.
8. Пацко В. С. Задача качества в линейных дифференциальных играх второго порядка.— В сб.: Дифференциальные игры и задачи управления. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1975, с. 167—227.
9. Пацко В. С. Уклонение от точки в дифференциальной игре второго порядка.— В сб.: Дифференциальные системы управления. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1979, с. 57—79.
10. Пацко В. С. Дифференциальная игра качества второго порядка.— Прикл. матем. и мех., 1982, т. 46, вып. 4, с. 596—604.
11. Роксин Э., Спинадел В. Достижимые зоны для автономных систем дифференциальных уравнений.— Кибернетический сборник. М.: Мир, 1966, № 3, с. 149—191.
12. Турова В. Л. Линейная дифференциальная игра качества.— В сб.: Алгоритмы и программы решения линейных дифференциальных игр. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1984, с. 191—248.