УДК 519.283

ПОГРЕШНОСТЬ АППРОКСИМАЦИИ В ЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ

БОТКИН Н. Д.

(Свердловск)

Рассматривается линейная позиционная дифференциальная игра двух лиц, в которой цель одного из игроков – приведение системы в заданный момент на заданное целевое множество. Интересы другого игрока противоположны. Под решением игры понимается множество всех начальных позиций, откуда возможно приведение. Наряду с исходной вводится аппроксимирующая дифференциальная игра. Получена оценка близости решений исходной и аппроксимирующей игр в случае, когда целевое множество не обязательно выпукло. При дополнительном предположении о выпуклости дается более точная оценка.

1. Введение

В теории позиционных антагонистических дифференциальных игр двух лиц важное место занимает задача о приведении движения управляемой системы в заданный момент на заданное целевое множество [1]. Игрока, заинтересованного в приведении системы на целевое множество, обычно называют первым, игрока, препятствующего этому,— вторым. Совокупность всех начальных позиций, для каждой из которых первый игрок может решить стоящую перед ним задачу, используя позиционный способ управления, называется множеством позиционного поглощения. Это множество важно не только само по себе, но может быть использовано как вспомогательное средство при решении других типов дифференциальных игр, например дифференциальных игр с фиксированным моментом окончания и заданной функцией платы.

Решение некоторых важных практических задач управления в условиях неопределенной помехи сводится к нахождению множества позиционного поглощения. Отыскание множества позиционного поглощения является сложной задачей, которую редко удается решить аналитически. В связи с этим разрабатываются численные методы его построения [2—4]. Поскольку при численном построении исходная дифференциальная игра неизбежно подменяется некоторой аппроксимирующей игрой, возникает вопрос о близости множеств позиционного поглощения этих игр.

В настоящей работе получена оценка хаусдорфова расстояния между сечениями множеств позиционного поглощения исходной и аппроксимирующей дифференциальных игр. Особенностью оценки является то, что она наряду с исходными данными задачи существенно использует информацию о численно построенных сечениях множества позиционного поглощения аппроксимирующей игры. Различные вопросы, связанные с численным решением дифференциальных игр, рассматривались в работах [1—9].

2. Постановка задачи

Рассмотрим линейную дифференциальную антагонистическую игру двух лиц

$$\dot{x}=B^1(t)u+C^1(t)v,\ u\in P^1,\ v\in Q^1,\ x(\vartheta)\in M^1 \tag{1}$$

с фиксированным моментом окончания ϑ. Здесь $x\in R^n$, u — управляющий параметр первого игрока, v — второго. Множества P^1, Q^1 — компакты из R^p и R^q. Матрицы $B^1(t)$, $C^1(t)$ кусочно-непрерывны по t. Цель первого игрока — привести фазовый вектор x в момент ϑ на компактное целевое множество $M^1 \subset R^n$. Интересы второго игрока противоположны. Фазовая переменная x не входит в правую часть (1). Этого всегда можно добиться известным приемом [1, 5].

Наряду с дифференциальной игрой (1) рассмотрим аппроксимирующую игру

$$(2) \qquad \dot{x}=B^2(t)u+C^2(t)v,\ u\in P^2,\ v\in Q^2,\ x(\vartheta)\in M^2,$$

где свойства множеств P^2, Q^2, M^2 и матриц $B^2(t)$, $C^2(t)$ аналогичны свойствам соответствующих множеств и матриц в игре (1).

Пусть $W^1 \subset (-\infty, \vartheta] \times R^n$ — множество позиционного поглощения для игры (1), $W^2 \subset (-\infty, \vartheta] \times R^n$ — множество позиционного поглощения для игры (2). При любом $t \leqslant \vartheta$ положим

$$W^i(t)=\{x\in R^n: (t, x)\in W^i\},\ i=1, 2.$$

Зафиксируем момент $t_* < \vartheta$. Допустим, что при помощи ЭВМ можно построить множество $W^2(t_*)$. Требуется оценить хаусдорфово расстояние $h(W^1(t_*), W^2(t_*))$ [10] между множествами $W^1(t_*)$, $W^2(t_*)$.

В [9] аналогичная задача рассматривалась для случая, когда множества M^1 и M^2 выпуклы. В настоящей работе выпуклость указанных множеств, вообще говоря, не предполагается. Однако если множество M^2 выпукло, то справедлива приведенная ниже теорема 2, которая дает более точную оценку, чем оценка из [9].

3. Теорема об оценке

Введем понятия, необходимые для формулировки основной теоремы.

Пусть множества M^1 и M^2 таковы, что существует функция $\gamma^2: R^n \to R$, удовлетворяющая условиям:

1°. функция γ^2 липшицева,

2°. $M^2=\{x\in R^n: \gamma^2(x)\leqslant 1\}$,

3°. $\gamma^2(x)\to\infty$ при $|x|\to\infty$,

4°. $\gamma^2(x)\leqslant \max\limits_{y\in\partial M^1}\gamma^2(y), \quad x\in M^1$,

5°. $\gamma^2(x)\geqslant \min\limits_{y\in\partial M^1}\gamma^2(y), \quad x\notin M^1$.

Здесь ∂M^1 — граница множества M^1. Обозначим через k константу Липшица функции γ^2. Положим $M_\alpha^2=\{x\in R^n: \gamma^2(x)\leqslant\alpha\}$, $\alpha\in R$. Пусть W_α^2 — множество позиционного поглощения для игры (2), в которой целевое множество M^2 заменено на M_α^2 (если $M_\alpha^2=\varnothing$, то будем считать, что $W_\alpha^2=\varnothing$). Примем $W_\alpha^2(t_*)=\{x\in R^n: (t_*, x)\in W_\alpha^2\}$, $c_*^2=\min\{\alpha\in R: W_\alpha^2(t_*)\neq\varnothing\}$.

Обозначим

$$H^i(t,l)=\min_{u\in P^i} l'B^i(t)u+\max_{v\in Q^i} l'C^i(t)v, \qquad i=1,2;$$

$$\beta(t)=\max_{|l|=1}|H^1(t,l)-H^2(t,l)|;$$

$$\varepsilon=k\int_{t_*}^{\vartheta}\beta(t)\,dt+\max_{y\in\partial M^1}|\gamma^2(y)-1|.$$

Отметим, что из липшицевости функции γ^2 и свойства 2°, в случае выпуклых M^1, M^2 или в случае $M^2\subset M^1$, следует неравенство

$$(3) \qquad \max_{y\in\partial M^1}|\gamma^2(y)-1|\leqslant k\cdot h(M^1, M^2).$$

Теорема 1. Пусть γ^2 — функция, удовлетворяющая условиям 1°—5°. Пусть далее $c_*^2+\varepsilon<1$. Тогда $W^1(t_*)\neq\varnothing$ и

$$h(W^1(t_*), W^2(t_*))\leqslant \lim_{\omega\to+0} h(W^2_{1-\varepsilon-\omega}(t_*), W^2_{1+\varepsilon}(t_*)).$$

Доказательство теоремы 1 дано в приложении.

Замечание. Можно показать, что если $\operatorname{int}(M^1 \cap M^2) = \phi$, то не существует функции γ^2, удовлетворяющей условиям 1°—5° и такой, что $c_*^2 + \varepsilon < 1$. Таким образом, фактически представляют интерес лишь случаи, когда внутренность $M^1 \cap M^2$ непуста.

Укажем один частный случай, когда функция γ^2, удовлетворяющая условиям 1°—5°, существует и может быть выбрана в удобном для вычислений на ЭВМ виде. Пусть M^2 — звездное тело с центром в некоторой точке m [11] и пусть $m \in \operatorname{int}(M^1 \cap M^2)$. Предположим, что существует такой набор замкнутых выпуклых множеств $\{Z_j\}$, $j \in J$, для которого

$$M^2 = \bigcup_{j \in J} Z_j, \qquad m \in \bigcap_{j \in J} Z_j.$$

Тогда функция

$$\gamma^2(x) = \min\{c \geqslant 0 : x - m \in c \cdot (M^2 - m)\} \tag{4}$$

удовлетворяет условиям 1°—5°, причем ее константа Липшица оценивается сверху числом $1/r$, где r — радиус максимального шара с центром в точке m, вписанного в $\bigcap_{j \in J} Z_j$.

Отметим, что если M^2 выпукло, то оно будет звездным телом относительно любой точки $m \in \operatorname{int} M^2$.

Более широкие достаточные условия существования функции γ^2, удовлетворяющей условиям 1°—5°, дает следующая лемма.

Лемма 1. Пусть $\operatorname{int}(M^1 \cap M^2) \neq \phi$ и выполнено хотя бы одно из соотношений:

a) $M^1 \subset M^2$,

в) $M^2 \subset M^1$, $\partial M^1 \cap (R^n \setminus M^2) \neq \phi$,

c) $\partial M^1 \cap M^2 \neq \phi$, $\partial M^1 \cap (R^n \setminus M^2) \neq \phi$.

Тогда существует функция γ^2, удовлетворяющая условиям 1°—5°, при этом ее можно построить так, что она не будет тождественно равна 1 на множестве M^2.

Доказательство леммы опускается в силу его громоздкости. Отметим, что для конкретно заданных множеств M^1, M^2 построение функции γ^2 обычно не представляет существенной трудности.

4. Случай выпуклого множества M^2

Пусть множество M^2 выпукло. Тогда можно подобрать выпуклую функцию γ^2, удовлетворяющую условиям 1°—5°. В частности, взяв некоторую точку $m \in \operatorname{int}(M^1 \cap M^2)$, можно определить γ^2 формулой (4). Константа Липшица этой функции будет равна $1/r$, где r — радиус максимального шара с центром в точке m, вписанного в M^2.

Теорема 2. Пусть γ^2 — выпуклая функция, удовлетворяющая условиям 1°—5°. Пусть $c_*^2 + \varepsilon < 1$. Тогда $W^1(t_*) \neq \phi$ и для каждого $s \in [c_*^2, 1-\varepsilon]$ справедливо неравенство

$$h(W^1(t_*), W^2(t_*)) \leqslant \frac{h(W_s^2(t_*), W^2(t_*))}{1-s}\varepsilon, \tag{5}$$

причем отношение $h(W_s^2(t_*), W^2(t_*))/(1-s)$ не возрастает с ростом s.

Доказательство теоремы 2 дано в приложении.

Оценка (5) по форме совпадает с оценкой (2.21) из [9]. Однако, взяв в качестве γ^2 функцию, определенную формулой (4) (как это сделано в [9]), получим с учетом неравенства (3), что число ε в оценке (5) меньше числа ε в оценке (2.21) из [9].

5. Примеры

Рассмотрим два примера. В первом из них множество M^2 не является выпуклым. Этот пример иллюстрирует применение теоремы 1. Во втором — множество M^2 выпукло. Пример иллюстрирует применение теоремы 2.

Пример 1. Рассмотрим дифференциальную игру второго порядка

$$\dot{z}_1=z_2+v,\ \dot{z}_2=u,\ |u|\leqslant 1,\ |v|\leqslant 1,\ z(\vartheta)\in M^1. \tag{6}$$

Здесь z_1, z_2 — координаты двумерного фазового вектора z; u, v — скалярные управления первого и второго игроков, ϑ — момент окончания игры. Цель первого игрока — привести фазовый вектор z в момент ϑ на множество $M^1\subset R^2$. Множество M^1 показано на рис. 1. Его граница состоит из отрезков AB, BC, DE, EF и гладких дуг GA, CH, HD, FG. Дуги GA и CH заданы формулой

$$z_2=1/(z_1/2-c_1)+c_2, \tag{7}$$

а дуги HD и FG — формулой

$$z_2=1/(z_1/2+c_1)-c_2. \tag{8}$$

Здесь $c_1=4,16$, $c_2=3,12$.

Дифференциальная игра (6) с помощью замены $x(t)=X(\vartheta,t)z(t)$, где $X(\vartheta,t)$ — фундаментальная матрица Коши системы

$$\dot{z}_1=z_2,\ \dot{z}_2=0,$$

сводится к игре

$$\dot{x}=B^1(t)u+C^1(t)v,\qquad |u|\leqslant 1,\ |v|\leqslant 1,\ x(\vartheta)\in M^1, \tag{9}$$

где

$$B^1(t)=\begin{bmatrix}\vartheta-t\\ 1\end{bmatrix},\quad C_1(t)=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}.$$

Положим $\vartheta=0$. Введем аппроксимацию дифференциальной игры (9). Разобьем полуось $t\leqslant\vartheta$ точками τ_j с шагом $\Delta=0,01$ так, что $\tau_0=\vartheta$, $\tau_{j+1}=\tau_j-\Delta$. Примем

$$B^2(t)=B^1(\tau_j),\ t\in(\tau_{j+1},\tau_j],\ j=0,1,\ldots;\ C^2(t)=C^1(t),\ t\leqslant\vartheta.$$

Множество M^1 заменим вписанным в него многоугольником M^2, вершины которого получены по формулам (7), (8) посредством разбиения оси z_1 с некоторым шагом. Для участков GA и HD шаг разбиения оси z_1 равен $0,1$, для участков CH и FG он равен $0,01$. При таком разбиении множество M^2 будет 222-угольником. Отметим, что M^2 является звездным телом с центром в начале координат и может быть представлено в виде объединения трех замкнутых выпуклых множеств Z_1, Z_2, Z_3. Множества Z_1, Z_2, Z_3 образуются при помощи отрезков прямых, показанных пунктиром на рис. 1.

Таким образом, приходим к аппроксимирующей дифференциальной игре

$$\dot{x}=B^2(t)u+C^2(t)v,\ |u|\leqslant 1,\ |v|\leqslant 1,\ x(\vartheta)\in M^2.$$

Оценим хаусдорфово расстояние $h(W^1(t_*),W^2(t_*))$ для моментов $t_*=-1,-2,-3$. В качестве вспомогательной функции γ^2 возьмем функцию Минковского множества M^2, т. е.

$$\gamma^2(x)=\min\{c\geqslant 0: x\in c\cdot M^2\}.$$

Радиус r максимального круга с центром в точке $m=0$, вписанного в пересечение $Z_1\cap Z_2\cap Z_3$, оценивается неравенством $r>2$. Стало быть, константа Липшица k функции γ^2 удовлетворяет неравенству $k<1/2$. Для хаусдорфова расстояния $h(M^1,M^2)$ между множествами M^1, M^2 справедлива оценка

$$h(M^1,M^2)\leqslant\delta=0,012.$$

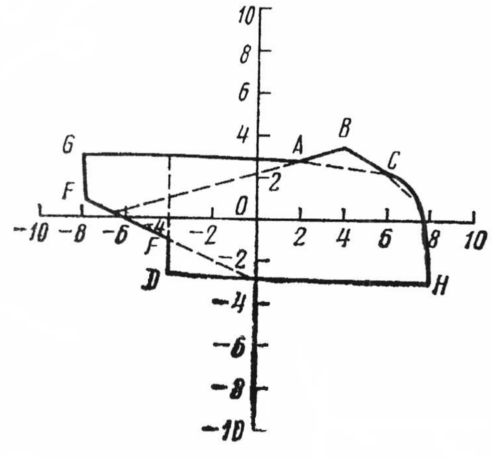

Рис. 1

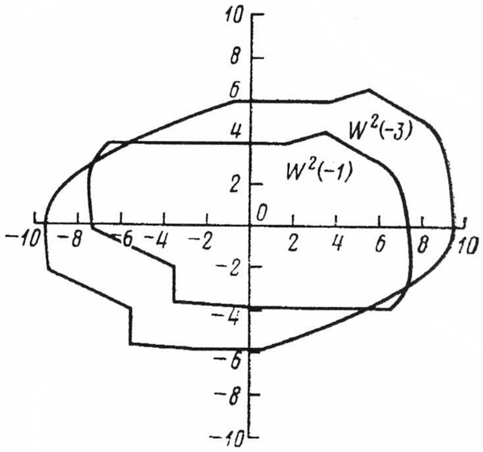

Рис. 2.

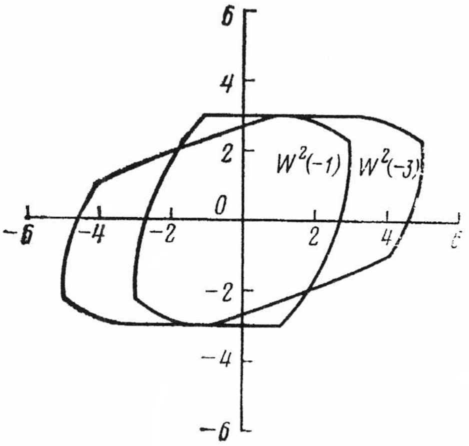

Рис. 3

Интеграл $\int\limits_{t_*}^{\vartheta}\beta(t)\,dt$, вычисляемый в этом примере аналитически, равен $\Delta(\vartheta-t)/2$. Таким образом, число ε, фигурирующее в теореме 1, удовлетворяет неравенству

$$\varepsilon\leqslant\frac{k\Delta(\vartheta-t_*)}{2}+k\delta<e=\frac{\Delta(\vartheta-t_*)}{4}+\frac{1}{2}\delta.$$

Для $t_*=-1,\ -2,\ -3$ получаем соответственно $e=0{,}0183;\ 0{,}0308;\ 0{,}0375$. Вычисляя на ЭВМ множества $W^2_{1-e}(t_*)$ при $t_*=-1,\ -2,\ -3$, убеждаемся в непустоте каждого из них. Следовательно, $c_*^2+\varepsilon<1$ для любого из рассматриваемых моментов. Вычислим далее на ЭВМ множества $W^2_{1+e}(t_*)$ и оценим сверху хаусдорфовы расстояния $h(W^2_{1-e}(t_*), W^2_{1+e}(t_*))$, $t_*=-1$, -2, -3. Получим соответственно оценки 0,14; 0,18; 0,23. Из теоремы 1 следует, что эти числа оценивают сверху расстояния $h(W^1(t_*),\ W^2(t_*))$. На рис. 2 показаны построенные на ЭВМ множества $W^2(t_*)$, $t_*=-1,\ -3$.

Пример 2. Рассмотрим дифференциальную игру второго порядка

(10) $$\dot z_1=z_2+u_1+v_1,\ \dot z_2=u_2+v_2,\ u\in P^1,\ v\in Q^1,\ x(\vartheta)\in M^1.$$

Здесь $z=(z_1,\ z_2)$ — двумерный фазовый вектор, $u=(u_1,\ u_2)$ — управление первого игрока, $v=(v_1,\ v_2)$ — управление второго игрока. Множество P^1 — прямоугольник с вершинами в точках $(-1,2)$, $(1,2)$, $(1,-2)$, $(-1,-2)$. Множество Q^1 — квадрат с вершинами $(0,2)$, $(2,0)$, $(0,-2)$, $(-2,0)$. Целевое множество M^1 — круг радиуса 3 с центром в начале координат.

С помощью замены $x(t)=X(\vartheta,\ t)z(t)$, где матрица $X(\vartheta,\ t)$ та же, что и в примере 1, дифференциальная игра (10) сводится к игре вида (1), при этом $B^1(t)=C^1(t)=X(\vartheta, t)$, $t\leqslant\vartheta$. Положим $\vartheta=0$. Введем аппроксимирующую дифференциальную игру. Для этого так же, как и в примере 1, разобьем полуось $t\leqslant\vartheta$ точками τ_j с шагом $\Delta=0,01$. Примем

$$B^2(t)=B^1(\tau_j),\ t\in(\tau_{j+1}, \tau_j],\ j=0, 1, \dots;\ C^2(t)=B^2(t),\ t\leqslant\vartheta.$$

В качестве множества M^2 возьмем правильный 100-угольник, вписанный в M^1. Положим $P^2=P^1$, $Q^2=Q^1$.

Оценим расстояние $h(W^1(t_*), W^2(t_*))$ при $t_*=-1, -2, -3$. Вспомогательную функцию γ^2 выберем как функцию Минковского множества M^2. Имеем

$$h(M^1, M^2)=6\sin^2\frac{\pi}{200}<\delta=0{,}0012, \qquad k\leqslant 1/(3-\delta).$$

Таким образом, число ε, необходимое для применения теоремы 2, удовлетворяет неравенству

$$\varepsilon<e=\frac{1}{3-\delta}\int_{t_*}^{\vartheta}\beta(t)\,dt+\frac{\delta}{3-\delta}.$$

Вычисляя интеграл от функции β с большой точностью на ЭВМ, получим $e=0{,}0014$; $0{,}0073$; $0{,}0094$ при $t_*=-1, -2, -3$. Просчитывая на ЭВМ множества $W^2_{1-e}(t_*)$, $W^2(t_*)$ и хаусдорфовы расстояния между ними, находим, на основании теоремы 2, оценки для $h(W^1(t_*), W^2(t_*))$. Они равны соответственно 0,0138; 0,0249; 0,0319. На рис. 3 показаны множества $W^2(t_*)$, $t_*=-1, -3$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Сформулируем вспомогательную лемму, которая понадобится при доказательстве теорем 1, 2.

Пусть Γ^1 – совокупность всех непрерывных функций γ^1: $R^n\to R$, таких, что $M^1=\{x\in R^n : \gamma^1(x)\leqslant 1\}$.

Лемма. Пусть непрерывная функция γ^2: $R^n\to R$ удовлетворяет условиям 4°, 5° раздела 3. Тогда

$$\inf_{\gamma^1\in\Gamma^1}\sup_{x\in R^n}|\gamma^1(x)-\gamma^2(x)|=\max_{y\in\partial M^1}|\gamma^2(y)-1|.$$

Доказательство. Очевидно, что для каждой функции $\gamma^1\in\Gamma^1$ имеет место неравенство

$$\sup\{|\gamma^1(x)-\gamma^2(x)| : x\in R^n\}\geqslant\max\{|\gamma^2(y)-1| : y\in\partial M^1\}.$$

Отсюда

$$\inf_{\gamma^1\in\Gamma^1}\sup_{x\in R^n}|\gamma^1(x)-\gamma^2(x)|\geqslant\max_{y\in\partial M^1}|\gamma^2(y)-1|.$$

Установим противоположное неравенство. Для любого $\delta>0$ примем

$$A_\delta=\{x\in R^n : \mathrm{dist}\,(x, M^1)\geqslant\delta\},$$

$$B_\delta=\{x\in R^n : \mathrm{dist}\,(x, \overline{R^n\setminus M^1})\geqslant\delta\},$$

где dist (x, X) означает расстояние от точки x до множества X, черта сверху – символ замыкания.

Будем считать вначале, что $\mathrm{int}\,M^1\neq\phi$. Тогда $B_\delta\neq\phi$ для достаточно малых положительных δ. Договоримся рассматривать только такие числа δ. Можно показать, что существуют непрерывные функции I_δ, Φ_δ, отображающие R^n в $[0, 1]$ и обладающие следующими свойствами: $I_\delta(x)=0$ при $x\in B_\delta$, $I_\delta(x)=1$ при $x\in\overline{R^n\setminus M^1}$; $\Phi_\delta(x)=0$ при $x\in A_\delta$, $\Phi_\delta(x)=1$ при $x\in M^1$ и $\Phi_\delta(x)<1$ при $x\notin M^1$. Пусть $h=\min\limits_{y\in\partial M^1}\gamma^2(y)$, $H=\max\limits_{y\in\partial M^1}\gamma^2(y)$. Положим

$$\gamma_\delta^1(x)=\begin{cases}1+(\gamma^2(x)-H)(1-I_\delta(x)), & x\in M^1,\\ 1+(\gamma^2(x)-h+\delta)(1-\Phi_\delta(x)), & x\notin M^1.\end{cases}$$

Используя свойства 4°, 5° функции γ^2 и оговоренные свойства функций I_δ, Φ_δ, нетрудно проверить, что $\gamma_\delta^1\in\Gamma^1$. Оценим величину $\sup\{|\gamma_\delta^1(x)-\gamma^2(x)| : x\in R^n\}$.

Имеем

$$(\text{П.1})\qquad |\gamma_\delta^1(x)-\gamma^2(x)|=\begin{cases}|1-H+I_\delta(x)(H-\gamma^2(x))|, & x\in M^1,\\ |1-h+\Phi_\delta(x)(h-\gamma^2(x))+(1-\Phi_\delta(x))\delta|, & x\notin M^1.\end{cases}$$

Обозначив $f_\delta(x)=I_\delta(x)(H-\gamma^2(x))$, $\varphi_\delta(x)=\Phi_\delta(x)(\gamma^2(x)-h)$, $\sigma(x)=(1-\Phi_\delta(x))\delta$, перепишем равенство (П.1) в виде

$$(\text{П.2})\qquad |\gamma_\delta^1(x)-\gamma^2(x)|=\begin{cases}\max\{1-H+f_\delta(x);\ -1+H-f_\delta(x)\}, & x\in M^1,\\ \max\{1-h-\varphi_\delta(x)+\sigma(x);\ -1+h+\varphi_\delta(x)-\sigma(x)\}, & x\notin M^1.\end{cases}$$

Учитывая свойство 4° функции γ^2 и свойства функции I_δ, получим

$$(\text{П.3})\qquad \max_{x\in M^1} f_\delta(x)=\max_{x\in M^1\setminus B_\delta} f_\delta(x)\leqslant\max_{y\in\partial M^1}(H-\gamma^2(y))+\omega^*(\delta),$$

где $\omega^*(\delta)\to0$ при $\delta\to0$. Принимая во внимание свойство 5° функции γ^2 и свойство функции I_δ, имеем

$$(\text{П.4})\qquad \max_{x\in R^n\setminus M^1}\varphi_\delta(x)=\max_{x\in(R^n\setminus M^1)\setminus A_\delta}\varphi_\delta(x)\leqslant\max_{y\in\partial M^1}(\gamma^2(y)-h)+\omega_*(\delta),$$

где $\omega_*(\delta)\to0$ при $\delta\to0$. Из равенства (П.2), с учетом неравенств (П.3), (П.4) и неравенства $\sigma(x)\leqslant\delta$, $x\in R^n$, получим

$$(\text{П.5})\qquad |\gamma_\delta^1(x)-\gamma^2(x)|\leqslant\max\{1-h;\ H-1\}+\omega(\delta),\ x\in R^n.$$

Здесь $\omega(\delta)=\max\{\omega^*(\delta),\ \omega_*(\delta)+\delta\}$. Поскольку $\max\{1-h;\ H-1\}=\max\{|\gamma^2(y)-1|:y\in\partial M^1\}$, то из (П.5) имеем

$$\inf_{\gamma^1\in\Gamma^1}\sup_{x\in R^n}|\gamma^1(x)-\gamma^2(x)|\leqslant\max_{y\in\partial M^1}|\gamma^2(y)-1|+\omega(\delta).$$

Устремив δ к нулю, приходим к утверждению леммы. В случае, когда $\operatorname{int}M^1=\phi$, следует положить

$$\gamma_\delta^1(x)=\begin{cases}1, & x\in M^1,\\ 1+(\gamma^2(x)-h+\delta)(1-\Phi_\delta(x)), & x\notin M^1\end{cases}$$

и повторить предыдущие рассуждения с небольшими изменениями.

Доказательство теоремы 1. Учитывая результат доказанной выше леммы, поставим в соответствие каждому числу $\omega>0$ функцию $\gamma_\omega^1\in\Gamma^1$, такую, что

$$\sup_{x\in R^n}|\gamma_\omega^1(x)-\gamma^2(x)|\leqslant\max_{y\in\partial M^1}|\gamma^2(y)-1|+\omega.$$

Рассмотрим две вспомогательные дифференциальные игры с функциями платы γ_ω^1 и γ^2:

$$(\text{П.6})\qquad \dot{x}=B^1(t)u+C^1(t)v,\quad u\in P^1,\quad v\in Q^1,\quad \gamma_\omega^1(x(\vartheta)),$$

$$(\text{П.7})\qquad \dot{x}=B^2(t)u+C^2(t)v,\quad u\in P^2,\quad v\in Q^2,\quad \gamma^2(x(\vartheta)).$$

Пусть V_ω^1, V^2 – цены игр (П.6) и (П.7) соответственно.

Из [8] следует

$$|V_\omega^1(t_*,x)-V^2(t_*,x)|\leqslant k\int_{t_*}^{\vartheta}\beta(t)\,dt+\sup_{x\in R^n}|\gamma_\omega^1(x)-\gamma^2(x)|$$

при всех $x\in R^n$. Учитывая выбор функции γ_ω^1 и определение числа ε (см. раздел 2), имеем

$$(\text{П.8})\qquad |V_\omega^1(t_*,x)-V^2(t_*,x)|\leqslant\varepsilon+\omega,\quad x\in R^n.$$

Так как $\gamma_\omega^1\in\Gamma^1$, то при каждом $\omega>0$ справедливо равенство $M^1=\{x\in R^n:\gamma_\omega^1(x)\leqslant\leqslant1\}$. Следовательно, вне зависимости от выбора ω имеем

$$W^1(t_*)=\{x\in R^n:V_\omega^1(t_*,x)\leqslant1\}.$$

Отсюда и из (П.8) вытекают вложения

$$(\text{П.9})\qquad W^2_{1-\varepsilon-\omega}(t_*)\subset W^1(t_*)\subset W^2_{1+\varepsilon+\omega}(t_*).$$

Учитывая очевидные вложения

$$(\text{П.10})\qquad W^2_{1-\varepsilon-\omega}(t_*)\subset W^2(t_*)\subset W^2_{1+\varepsilon+\omega}(t_*),$$

получим неравенство

$$(\text{П.11})\qquad h(W^1(t_*),W^2(t_*))\leqslant h(W^2_{1-\varepsilon-\omega}(t_*),W^2_{1+\varepsilon+\omega}(t_*)).$$

Отметим, что соотношения (П.9)–(П.11) следует рассматривать при таких достаточно малых числах ω, что $c_*^2+\varepsilon+\omega<1$. Тогда $W^2_{1-\varepsilon-\omega}(t_*)\neq\phi$ и указанные соотношения имеют смысл.

Поскольку число ω можно взять сколь угодно малым, то

$$h(W^1(t_*), W^2(t_*))\leqslant \lim_{\omega\to+0} h(W^2_{1-\varepsilon-\omega}(t_*), W^2_{1+\varepsilon+\omega}(t_*)). \tag{П.12}$$

Так как $W^2_{1+\varepsilon+\omega}(t_*)=\{x\in R^n : V^2(t_*, x)\leqslant 1\}$ и функция $V^2(t_*, \cdot)$ непрерывна, то

$$\lim_{\omega\to+0} W^2_{1+\varepsilon+\omega}(t_*)=W^2_{1+\varepsilon}(t_*).$$

Из (П.12) с учетом последнего замечания и неравенства

$$h(W^2_{1-\varepsilon-\omega}(t_*), W^2_{1+\varepsilon+\omega}(t_*))\leqslant h(W^2_{1-\varepsilon-\omega}(t_*), W^2_{1+\varepsilon}(t_*))+h(W^2_{1+\varepsilon}(t_*), W^2_{1+\varepsilon+\omega}(t_*))$$

получаем утверждение теоремы.

Доказательство теоремы 2. Так как функция γ^2 выпукла, то цена V^2 игры (П.7) выпукла по x при каждом фиксированном t. Используя вложения (П.9), (П.10) и рассуждая, как при доказательстве леммы 2.2 в [9], получим, что при всех $\omega>0$, удовлетворяющих условию $c_*^2+\varepsilon+\omega<1$, справедлива оценка

$$h(W^1(t_*), W^2(t_*))\leqslant h(W^2_{1-\varepsilon-\omega}(t_*), W^2(t_*)).$$

Поскольку функция $V^2(t_*, \cdot)$ выпукла и $W^2_{1-\varepsilon-\omega}(t_*)=\{x\in R^n : V^2(t_*, x)\leqslant 1-\varepsilon-\omega\}$, то отображение $\omega\to W^2_{1-\varepsilon-\omega}(t_*)$ непрерывно в точке $\omega=0$. Следовательно,

$$h(W^1(t_*), W^2(t_*))\leqslant h(W^2_{1-\varepsilon}(t_*), W^2(t_*)). \tag{П.13}$$

Используя (П.13) и методику доказательства леммы 2.3 в [9], получим утверждение теоремы 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
2. *Пономарев А. П.* Оценка погрешности численного метода построения альтернированного интеграла Понтрягина.– Вестн. МГУ. Сер. 15. Вычисл. математика и кибернетика, 1978, № 4, с. 37–43.
3. *Остапенко В. В.* Приближение основных операторов в дифференциальных играх сближения-уклонения.– Докл. АН УССР. Сер. А, 1981, № 2, с. 81–84.
4. *Ушаков В. Н.* К задаче построения стабильных мостов в дифференциальной игре сближения-уклонения.– Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1980, № 4, с. 29–36.
5. *Субботин А. И., Ченцов А. Г.* Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981.
6. *Никольский М. С.* Приближенное вычисление наименьшей гарантированной оценки в линейных дифференциальных играх с фиксированной продолжительностью.– Прикл. математика и механика, 1982, т. 46, вып. 4, с. 691–693.
7. *Понтрягин Л. С.* Линейные дифференциальные игры преследования.– Мат. сб., 1980, с. 112, вып. 3, с. 307–330.
8. *Полищук Е. Г.* Оценка отклонения цены линейной дифференциальной игры от последовательного программного максимина.– Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1980, № 1, с. 195–198.
9. *Botkin N. D.* Evaluation of numerical construction error in differential game with fixed terminal time.– Probl. Control and Inform. Theory, 1982, v. 11, № 4, p. 283–295.
10. *Куратовский К.* Топология. Т. 2. М.: Мир, 1969.
11. *Касселс Дж. В. С.* Введение в геометрию чисел. М.: Мир, 1969.

Поступила в редакцию
29.IV.1983

THE APPROXIMATION ERROR IN A DIFFERENTIAL GAME

BOTKIN N. D.

The paper is concerned with a positional differential game of two players, one of whom strives to move the game to a desired objective set at a specified time. The goal of the other player is the opposite. The solution is a set of all initial positions wherefrom the movement is possible. An approximating differential game is introduced in addition to the initial game. An estimate is obtained of proximity of solutions of the initial and approximating games in the case where the objective set is not necessarily convex. If it is, a more accurate estimate is obtained.