ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Часть 2

Ижевск
2025

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет»

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Материалы Всероссийской конференции
с международным участием
«Теория управления и математическое моделирование»,
посвященной памяти
профессора Н.В. Азбелева и профессора Е.Л. Тонкова

Часть 2

Ижевск, Россия
16–20 июня 2025 г.

Ижевск
2025

УДК 517.9 (О63)
ББК 22.161.6я431, 22.161.8я431, 22.19я431, 22.181я431
Т338

Издание подготовлено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания, проект FEWS-2024-0009.

Т338 Теория управления и математическое моделирование : материалы Всерос. конф. с междунар. участием, посвященной памяти профессора Н.В. Азбелева и профессора Е.Л. Тонкова (Ижевск, Россия, 16–20 июня 2025 г.) : в 2 ч. Ч. 2. – Ижевск : Удмуртский университет, 2025. – 300 с.

ISBN 978–5–4312–1264-2
DOI: 10.35634/978–5–4312–1264-2-2-2025-1-300

В части 2 сборника анонсируются результаты исследований по математической теории управления, теории дифференциальных игр и математическому моделированию. Представлены следующие научные направления: теория управления, управление динамическими системами в условиях конфликта и неопределенности, задачи оценивания и идентификации в динамических системах, численные алгоритмы решения задач оптимального управления, математическое моделирование в механике сплошной среды, математическое моделирование в механике жидкости и газа, математическое моделирование в экономике, математическое моделирование в биологии.

УДК 517.9 (О63)
ББК 22.161.6я431, 22.161.8я431, 22.19я431, 22.181я431

ISBN 978–5–4312–1264-2
DOI: 10.35634/978–5–4312–1264-2-2025-1-300

7. *Yeung D.W.K., Petrosyan L.A.* Subgame consistent economic optimization: An advanced cooperative dynamic game analysis. Boston: Birkhauser, 2012.

Машина Дубинса с ограничением на управление в L_p при $p\in(1,2]$: построение двумерного множества достижимости

В. С. Пацко, **Г. И. Трубников**, **А. А. Федотов**

Екатеринбург, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского

e-mail: patsko@imm.uran.ru

В математической теории управления широко известной является нелинейная кинематическая модель Дубинса движения точечного объекта на плоскости. Две координаты задают положение объекта, третья координата определяет угол наклона вектора скорости. Величина скорости предполагается постоянной и полагается равной 1. Дифференциальные уравнения движения имеют вид

$$\dot{x} = \cos\varphi, \quad \dot{y} = \sin\varphi, \quad \dot{\varphi} = u. \tag{1}$$

Начальный момент t_0 и начальное фазовое состояние $\big(x(t_0), y(t_0), \varphi(t_0)\big)^{\mathsf{T}}$ считаем нулевыми. Если управление $u(t)$ на рассматриваемом промежутке $[0, t_f]$ стеснено условием $|u(t)| \leq \nu$, такое ограничение называется геометрическим. Для него известно [1] описание двумерного множества достижимости $\mathcal{G}$ на плоскости x, y в фиксированный момент окончания t_f. Представляет также интерес построение множества достижимости при интегральном ограничении

$$\int_0^{t_f} |u(t)|^p dt \leq \mu, \qquad p \in (1, \infty), \quad \mu > 0.$$

В случае $p=2$ аналитика построения описана в [2]. Используются принцип максимума Понтрягина (ПМП) из [3] с соответствующим условием трансверсальности, а также эллиптические функции Якоби. Движения, ведущие на границу множества $\mathcal{G}$, являются эластиками Эйлера (как и в задаче минимизации квадратичного интегрального функционала [4]).

Если $p \neq 2$, то опираемся на ПМП [3], однако пропадает возможность использования стандартных эллиптических функций Якоби. В последнее время разрабатывается теория p-эллиптических функций [5]. Возможно, что ее можно будет использовать для аналитического описания границы $\partial\mathcal{G}$ множества $\mathcal{G}$.

Цель работы — численное построение границы множества достижимости для случая $p \in (1,2]$. Такой случай отличается [1, 4] от случая $p \in (2,\infty)$. Его исследование позволит в дальнейшем перейти к пределу при $p \to 1$ и рассмотреть принципиально важный случай $p=1$.

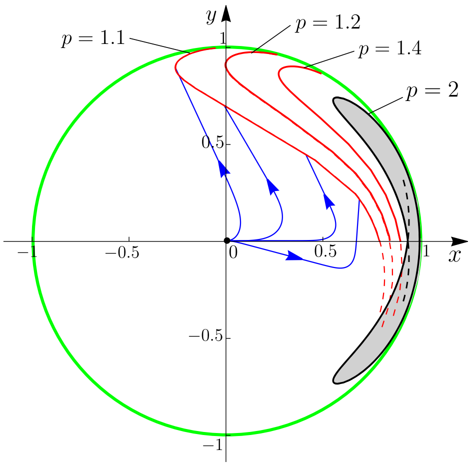

Рис. 1: Множества достижимости для $t_f=1$, $\mu=2.5$ и $p=2, 1.4, 1.2, 1.1$

Известно [3], что любое управление, ведущее на $\partial\mathcal{G}$, является непрерывным. С учетом специфики системы (1) показываем, что оно изменяет знак не более одного раза. Такое свойство (уточняющее ПМП) кладем в основу построения кривой грубых необходимых условий, из точек которой только и может набираться

$\partial\mathcal{G}$. В силу симметрии множества $\mathcal{G}$ относительно оси x имеем две кривые $\mathcal{B}^*$ и $\mathcal{B}_*$. Построив их, удаляем точки на $\mathcal{B}^*$ с отрицательной (соответственно, на $\mathcal{B}_*$ с положительной) координатой по оси y. Оставшиеся дуги составляют границу множества $\mathcal{G}$.

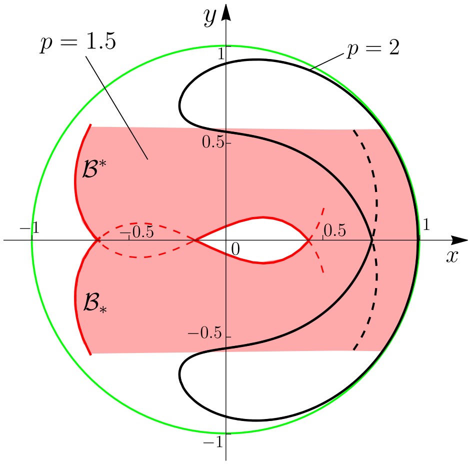

Рис. 2: Неодносвязное множество достижимости при t_f=1, μ=10, p=1.5

На рис. 1 показаны множества достижимости для $t_f = 1$, $\mu = 2.5$ и $p = 2, 1.4, 1.2, 1.1$. Очевидно, что каждое множество $\mathcal{G}$ лежит в круге радиусом $t_f = 1$. Граница $\partial\mathcal{G}$ при $p = 2$ изображена черной сплошной линией, а само множество $\mathcal{G}$ выделено заливкой. Пунктиром отмечены дуги кривых $\mathcal{B}^*$ и $\mathcal{B}_*$, лежащие во внутренности множества $\mathcal{G}$. При $p = 2$ построения делаются с использованием эллиптических функций Якоби. Они выполняются быстро и с хорошей точностью. Для $p < 2$ построения целиком численные и реализуются в пакете Wolfram. Показаны кривые $\mathcal{B}^*$. Их участки, асимптотически примыкающие к окружности радиусом 1, в силу требуемой “деликатности” счета, не просчитывались. Не показаны также в силу симметрии кривые $\mathcal{B}_*$. Для $p = 1.1$ отмечено несколько движений (p-эластик), ведущих на кривую $\mathcal{B}^*$ грубых необходимых условий.

Рис. 2 сделан для случая $t_f = 1$, $\mu = 10$. Изображено множество $\mathcal{G}$ при $p = 2$ и фрагмент множества $\mathcal{G}$ при $p = 1.5$. Дуги кривых $\mathcal{B}^*$ и $\mathcal{B}_*$, лежащие во внутренности соответствующих множеств $\mathcal{G}$, отмечены пунктиром. Множество $\mathcal{G}$ при $p = 1.5$ (фрагмент выделен заливкой) не является односвязным. Участки кривых $\mathcal{B}^*$ и $\mathcal{B}_*$ для этого множества, асимптотически примыкающие к окружности радиусом 1, не показаны.

1. *Cockayne E.J., Hall G.W.C.* Plane Motion of a Particle Subject to Curvature Constraints // SIAM J. Control Optim. 1975. Vol. 13, no. 1. P. 197–220.
2. *Трубников Г.И.* Аналитическое описание двумерного множества достижимости машины Дубинса с интегральным ограничением на управление // ТиСУ. 2025. № 4. (принята к печати)
3. *Гусев М.И.* О некоторых свойствах множеств достижимости нелинейных систем с ограничениями на управление в L_p // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2024. Т. 30, № 3. С. 99–112.
4. *Ардентов А.А., Сачков Ю.Л.* Решение задачи Эйлера об эластиках // АиТ. 2009. Вып. 4. С. 78–88.
5. *Miura T., Yoshizawa K.* Complete classification of planar p-elasticae // Annali di Matematica. 2024. Vol. 203. P. 2319–2356.

Нестационарная линейная задача группового преследования с простой матрицей и возможным нарушением в динамике

Н. Н. Петров, Е. С. Фомина

Ижевск, Удмуртский университет

e-mail: kma3@list.ru, katefo631@gmail.com

В пространстве $\mathbb{R}^k$ $(k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра $\Gamma(n+1)$ $n+1$ лиц: n преследователей $P_1, \ldots, P_n$ и убегающий E. Закон движения убегающего E имеет вид

$$\dot{y} = f(t)y + v, \quad y(t_0) = y^0, \quad v \in V. \tag{1}$$

Закон движения каждого из преследователей P_i имеет вид

$$\dot{x}_i = f(t)x_i + a_{\theta_i}u_i, \quad x_i(t_0) = x_i^0, \quad u_i \in U_i. \tag{2}$$