Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Челябинский государственный университет»

Дифференциальные игры, теория управления и оптимизация (DGCTO-2025)

Материалы Всероссийской конференции,
посвященной памяти профессора В.И. Ухоботова

Челябинск, Россия, 19–21 мая 2025 г.

Челябинск
Издательство Челябинского государственного университета
2025

УДК 517.9, 519.8
ББК 22.161.6, 22.161.8, 22.185
Д50

Издание подготовлено за счёт средств Фонда поддержки научных мероприятий Челябинского государственного университета

Д50 **Дифференциальные игры, теория управления и оптимизация (DGCTO-2025)** : материалы Всероссийской конференции, посвященной памяти профессора В. И. Ухоботова (Челябинск, 19–21 мая 2025 г.) [сетевое научное издание] / отв. ред. И. В. Изместьев. Челябинск : Изд-во Челяб. гос. ун-та, 2025. 296 с. URL: https://math.csu.ru/new_files/vestnik/DGCTO-2025.pdf

ISBN 978-5-7271-2092-7

Сборник включает материалы докладов участников Всероссийской конференции «Дифференциальные игры, теория управления и оптимизация» (DGCTO-2025), посвященной памяти профессора В. И. Ухоботова. Представлены следующие научные направления: методы оптимизации и исследование операций, теория управления, теория игр и дифференциальные игры, дифференциальные уравнения.

УДК 517.9, 519.8
ББК 22.161.6, 22.161.8, 22.185

ISBN 978-5-7271-2092-7

Машина Дубинса: двумерное множество достижимости при комбинированном ограничении на управление

В. С. Пацко, **Г. И. Трубников**, **А. А. Федотов**

Екатеринбург, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского

e-mail: patsko@imm.uran.ru

Аннотация: Кинематика машины Дубинса часто используется при решении различных прикладных задач. Обычно предполагается, что управление (угловая скорость поворота) стеснено геометрическим ограничением. В данной работе считаем, что на управление, помимо геометрического, наложено интегральное квадратичное ограничение. Рассматривается построение двумерного множества достижимости (в плоскости движения) при таком комбинированном ограничении. Исследование опирается на принцип максимума Понтрягина, которому удовлетворяют движения, ведущие на границу множества достижимости. Параметрическое описание границы при геометрическом ограничении хорошо известно. Оно осуществляется при помощи обычных тригонометрических функций. При интегральном квадратичном ограничении движения, ведущие на границу множества достижимости, являются эластиками Эйлера и поэтому для параметрического описания границы требуется привлечение эллиптических функций Якоби. В комбинированном случае всегда некоторая часть границы является одновременно участком границы множества достижимости только при геометрическом ограничении. Сложность состоит в описании остальных участков границы. Этому и посвящена работа.

Ключевые слова: машина Дубинса, геометрическое и интегральное ограничения на управление, принцип максимума Понтрягина, двумерное множество достижимости, эластики Эйлера, структура экстремальных траекторий, численное моделирование.

1. Машиной Дубинса называем точечный объект, кинематика которого задается соотношениями

$$\dot{x} = \cos\varphi, \quad \dot{y} = \sin\varphi, \quad \dot{\varphi} = u. \tag{1}$$

Здесь u – скалярное управление, стесненное тем или иным способом. Начальный момент t_0 и начальное фазовое состояние $\big(x(t_0), y(t_0), \varphi(t_0)\big)^{\mathsf T}$ считаем нулевыми. Двумерное множество достижимости в момент $t_f > 0$ есть совокупность $\bigcup_{u(\cdot)} \big(x(t_f), y(t_f)\big)^{\mathsf T}$ всех состояний на плоскости x, y, каждое из которых реализуется в момент t_f при помощи некоторого допустимого управления $u(\cdot)$. Под допустимым программным управлением $u(\cdot)$ понимаем функцию $t \to u(t)$, удовлетворяющую наложенным по постановке задачи ограничениям. Пусть $a^0(t_f)$ – точка на границе множества достижимости, порождаемая управлением $u(t)\equiv 0$.

Обозначение $\mathcal{G}(t_f,\nu)$ будет применяться для множества достижимости в случае "геометрического" ограничения $|u(t)| \le \nu$, $t\in[0,t_f]$. При интегральном квадратичном ограничении $\int_0^{t_f} u^2(t)dt \le \mu$ используем обозначение $\mathcal{G}(t_f,\mu)$. Символ $\mathcal{G}(t_f,\mu,\nu)$ будет обозначать множество достижимости при наличии двойного (комбинированного) ограничения: геометрическое + интегральное квадратичное.

Широко известным является описание [2] множества $\mathcal{G}(t_f,\nu)$. Параметрическое задание границы множества $\mathcal{G}(t_f,\mu)$ рассматривалось в статье [4]. Цель данной работы — исследование границы множества достижимости $\mathcal{G}(t_f,\mu,\nu)$. Опираемся на результаты статьи [3], связанные с экстремальными движениями, ведущими на границу множества достижимости нелинейной управляемой системы при двойном ограничении на управление.

2. Необходимые условия перевода на границу множества достижимости записываются при помощи принципа максимума Понтрягина. Пусть $u^*(\cdot)$ — допустимое управление, ведущее в некоторую точку на границе множества достижимости $\mathcal{G}(t_f,\mu,\nu)$. Соответствующее движение обозначим $\big(x^*(t),y^*(t),\varphi^*(t)\big)^{\mathsf{T}}$, $t\in[0,t_f]$. Сопряженная к (1) система записывается [3] при помощи соотношений

$$\dot\psi_1=0,\qquad \dot\psi_2=0,\qquad \dot\psi_3=\psi_1\sin\varphi^*(t)-\psi_2\cos\varphi^*(t). \tag{2}$$

Условие трансверсальности для исследуемой задачи имеет вид $\psi_3(t_f)=0$.

а) Если рассматриваемая нами точка $\big(x^*(t),y^*(t)\big)^{\mathsf{T}}$ принадлежит одновременно границе множества $\mathcal{G}(t_f,\nu)$, то существует ненулевое решение $\big(\psi_1^*(t),\psi_2^*(t),\psi_3^*(t)\big)^{\mathsf{T}}$ системы (2) такое, что выполнено следующее условие максимума:

$$\max_{|v|\,\le\,\nu}\{\psi_3^*(t)v\}=\psi_3^*(t)u^*(t),\quad t\in[0,t_1].$$

Из работы [2] следует, что экстремальное управление, ведущее на границу множества $\mathcal{G}(t_f,\nu)$, является кусочно-постоянным и имеет на $(0,t_f)$ не более одного момента переключения. Возможны лишь варианты переключения с $u=\nu$ на $u=0$ (симметрично с $u=-\nu$ на $u=0$) и с $u=\nu$ на $u=-\nu$ (симметрично с $u=-\nu$ на $u=\nu$).

б) Предположим, что точка $\big(x^*(t),y^*(t)\big)^{\mathsf{T}}$ принадлежит одновременно границе $\partial\mathcal{G}(t_f,\mu)$ множества $\mathcal{G}(t_f,\mu)$ и не совпадает с точкой $a^0(t_f)$. Тогда условие максимума принимает вид

$$\max_{v}\left\{\psi_3^*(t)v-v^2\right\}=\psi_3^*(t)u^*(t)-\left(u^*(t)\right)^2.$$

Поэтому $u^*(t) = \psi_3^*(t)/2$, и функция $t \to u^*(t)$ является непрерывной.

Нетрудно показать, что невозможен случай, когда

$$\big(x^*(t_f), y^*(t_f)\big)^{\mathsf{T}} \in \partial\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu),$$

$$\big(x^*(t_f), y^*(t_f)\big)^{\mathsf{T}} \in \big(\partial\mathcal{G}(t_f, \nu) \bigcap \partial\mathcal{G}(t_f, \mu)\big) \backslash \{a^0(t_f)\}.$$

в) Пусть теперь $\big(x^*(t_f), y^*(t_f)\big)^{\mathsf{T}} \in \partial\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu) \backslash \big(\partial\mathcal{G}(t_f, \nu) \bigcup \partial\mathcal{G}(t_f, \mu)\big)$. Тогда условие максимума записывается соотношением

$$\max_{|v| \le \nu} \left\{\psi_3^*(t) v - v^2\right\} = \psi_3^*(t) u^*(t) - \left(u^*(t)\right)^2.$$

Отсюда

$$u^*(t) = \begin{cases} \psi_3^*(t)/2, & |\psi_3^*(t)/2| \le \nu\,, \\ \nu \operatorname{sign} \psi_3^*(t), & |\psi_3^*(t)/2| > \nu\,. \end{cases} \tag{3}$$

Случай в) поясняется на рис. 1. Здесь изображено движение, удовлетворяющее условию (3). Управление $u^*(\cdot)$ изменяет знак на некоторой прямой переключения (ПП). На этой прямой $\psi_3^* = 0$. По одну сторону от ПП имеем $\psi_3^* < 0$ (соответственно, реализуется экстремальное управление $u^* < 0$), по другую сторону получаем $\psi_3^* > 0$ (значение $u^* > 0$). В силу условия трансверсальности движение в момент t_f находится на ПП. На некоторой прямой $S^{(-)}$, параллельной ПП, имеем $u^* = -\nu$ и на симметричной прямой $S^{(+)}$ получаем $u^* = \nu$. Таким образом, в полосе S между прямыми $S^{(-)}$ и $S^{(+)}$ экстремальное значение $u^* \in [-\nu, \nu]$. Участки экстремального движения в S являются частями некоторых эластик Эйлера [1, 5]. Вне полосы S экстремальное управление $|u^*| = \nu$.

Траектория экстремального движения на рис. 1 пересекает ПП несколько раз. Соответственно, экстремальное управление изменяет знак несколько раз. В работе доказано, что если экстремальное управление ведет на границу множества $\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu)$, то число моментов смены знака управления на интервале $(0, t_f)$ *не более одного*. Такой же факт установлен для экстремальных управлений, ведущих на границу множества $\mathcal{G}(t_f, \mu)$.

3. Используя приведенные выше необходимые условия для экстремальных движений, ведущих на границу множества достижимости, мы указываем способ параметрического описания границы каждого из множеств $\mathcal{G}(t_f, \nu)$, $\mathcal{G}(t_f, \mu)$ и $\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu)$. Нахождение границы начинается с точки $a^0(t_f) = (t_f, 0)^{\mathsf{T}}$. При построении границы множества $\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu)$ всегда некоторый начальный участок берется с границы множества $\mathcal{G}(t_f, \nu)$

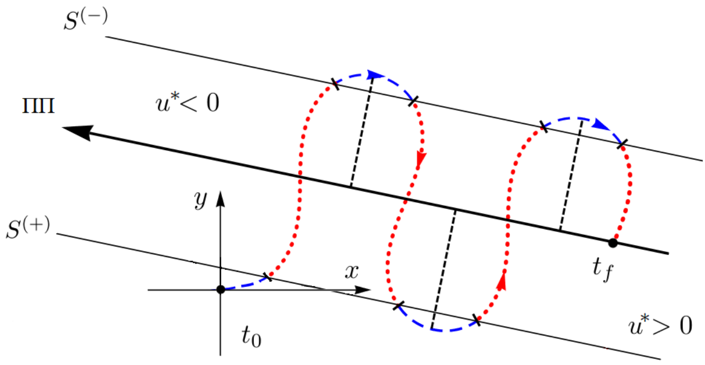

Рис. 1. Экстремальное движение при комбинированном управлении

до тех пор, пока интегральный расход управления для движения в соответствующую точку границы множества $\mathcal{G}(t_f, \nu)$ не превысит числа μ. Такую точку обозначаем через $a^{(1)}$.

На рис. 2 для $t_f = 1$, $\mu = 18$, $\nu = 5$ заливкой изображено множество $\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu)$. Показаны также границы множеств $\mathcal{G}(t_f, \mu)$ и $\mathcal{G}(t_f, \nu)$. Видно, что отличие множества $\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu)$ от пересечения $\mathcal{G}(t_f, \mu) \bigcap \mathcal{G}(t_f, \nu)$ небольшое, но оно есть.

Множества $\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu)$, $\mathcal{G}(t_f, \mu)$ и $\mathcal{G}(t_f, \nu)$ симметричны относительно оси x. Верхний участок границы множества $\mathcal{G}(t_f, \nu)$ от точки $a^0(t_f)$ до точки $a^{(1)}$ является участком границы множества $\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu)$. После точки $a^{(1)}$ до точки $a^{(2)}$ на оси x линия границы множества $\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu)$ проходит во внутренности множеств $\mathcal{G}(t_f, \mu)$, $\mathcal{G}(t_f, \nu)$ и набирается из концов экстремальных движений, каждое из которых порождается непрерывным управлением и имеет не более одного момента смены знака управления с $u > 0$ (поворот против часовой стрелки) на $u < 0$ (поворот по часовой стрелке). Любое такое движение складывается из одного или двух промежутков, где $|u(t)| = \nu$ (движение вне полосы S) и одного или двух промежутков, на которых $|u(t)| < \nu$ (движение в полосе S). В первом случае движение происходит по дуге некоторой окружности радиусом $1/\nu$ или по двум таким дугам. Во втором случае реализуется дуга некоторой эластики Эйлера или две дуги некоторых двух эластик.

Три движения показаны на рис. 2 на нижнем фрагменте. Участки движений при $|u(t)| = \nu$ изображены пунктиром, участки при $|u(t)| < \nu$ — точечной линией.

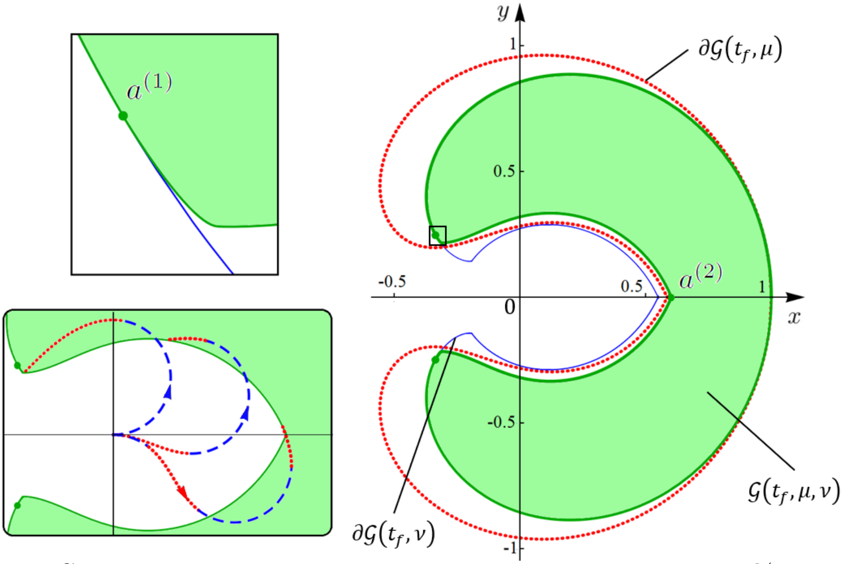

Рис. 2. Случай $t_f = 1$, $\mu = 18$, $\nu = 5$. Часть границы множества $\mathcal{G}(t_f,\mu,\nu)$ совпадает с участком границы множества $\mathcal{G}(t_f,\nu)$. Остальная часть границы формируется при помощи комбинированных управлений

Список литературы

1. *Эйлер Л.* Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума, либо минимума или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле. М., Ленинград: Гостехиздат. 1934.

2. *Cockayne E.J., Hall G.W.C.* Plane Motion of a Particle Subject to Curvature Constraints // SIAM J. Control Optim. 1975. Vol. 13, no. 1. P. 197–220.

3. *Gusev M.I.* Computing the reachable set boundary for an abstract control system: revisited // Ural Math. J. 2023. Vol. 9, no. 2. P. 99–108.

4. *Пацко В.С., Трубников Г.И., Федотов А.А.* Машина Дубинса с интегральным ограничением на управление: двумерное множество достижимости // Материалы международной конференции SCDG2024, посвященной 100-летию Н.Н. Красовского. 2024. С. 242–245.

5. *Ардентов А.А., Сачков Ю.Л.* Решение задачи Эйлера об эластиках // Автоматика и телемеханика. 2009. Вып. 4. С. 78–88.