

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Челябинский государственный университет»

Дифференциальные игры, теория управления и оптимизация (DGCTO-2025)

Материалы Всероссийской конференции,
посвященной памяти профессора В.И. Ухоботова

Челябинск, Россия, 19–21 мая 2025 г.

Челябинск
Издательство Челябинского государственного университета
2025

УДК 517.9, 519.8
ББК 22.161.6, 22.161.8, 22.185
Д50

Издание подготовлено за счёт средств Фонда поддержки научных мероприятий Челябинского государственного университета

Дифференциальные игры, теория управления и оптимизация Д50 (DGCTO-2025) : материалы Всероссийской конференции, посвященной памяти профессора В. И. Ухоботова (Челябинск, 19–21 мая 2025 г.) [сетевое научное издание] / отв. ред. И. В. Измestьев. Челябинск : Изд-во Челяб. гос. ун-та, 2025. 296 с. URL: https://math.csu.ru/new_files/vestnik/DGCTO-2025.pdf

ISBN 978-5-7271-2092-7

Сборник включает материалы докладов участников Всероссийской конференции «Дифференциальные игры, теория управления и оптимизация» (DGCTO-2025), посвященной памяти профессора В. И. Ухоботова. Представлены следующие научные направления: методы оптимизации и исследование операций, теория управления, теория игр и дифференциальные игры, дифференциальные уравнения.

УДК 517.9, 519.8
ББК 22.161.6, 22.161.8, 22.185

ISBN 978-5-7271-2092-7

© Челябинский государственный университет, 2025

© Авторы статей, 2025

Неодносвязность двумерного множества достижимости машины Дубинса при двойном ограничении на управление

Г. И. Трубников

Екатеринбург, Уральский федеральный университет им. Б.Н. Ельцина,
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского
e-mail: jora_it@mail.ru

Аннотация: Рассматривается построение двумерного множества достижимости машины Дубинса при одновременном действии геометрического ограничения на мгновенные значения управления и интегрального квадратичного ограничения на управление в целом. Управления, ведущие на границу множества, удовлетворяют принципу максимума Понтрягина. Однако такое свойство экстремальности является весьма общим. Опираясь на принцип максимума и специфику кинематики машины Дубинса, получены некоторые грубые необходимые условия попадания на границу. Они позволяют эффективно построить однопараметрическую кривую, содержащую все точки границы. В некоторых случаях такая кривая и составляет границу множества достижимости. В других случаях на ней есть точки, принадлежащие внутренности множества достижимости. Такие точки исключаются при помощи дополнительных необходимых условий, которые в совокупности с предыдущими уже являются достаточными. Кривая грубых необходимых условий дает объяснение появлению неодносвязности двумерного множества достижимости. Приводится пример, когда множество достижимости отдельно при геометрическом и отдельно при интегральном ограничении является односвязным, однако при их совместном действии свойство односвязности теряется.

Ключевые слова: машина Дубинса, геометрическое и интегральное ограничения на управление, двумерное множество достижимости, принцип максимума Понтрягина, необходимые условия перевода на границу, эластики Эйлера, численное моделирование, потеря односвязности множества достижимости.

1. Статья примыкает к работе [1] в этом сборнике. Рассматривается множество достижимости $\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu)$ машины Дубинса в фиксированный момент времени t_f на плоскости x, y геометрических координат. В целом фазовый вектор трехмерный, его изменение подчиняется соотношениям

$$\dot{x} = \cos\varphi, \quad \dot{y} = \sin\varphi, \quad \dot{\varphi} = u. \quad (1)$$

Скалярное управление $u(t)$ задает мгновенную угловую скорость и стеснено двойным ограничением

$$|u(t)| \leq \nu, \quad t \in [0, t_f]; \quad \int_0^{t_f} u^2(t) dt \leq \mu. \quad (2)$$

Случай, когда имеет место только ограничение на мгновенные значения $u(t)$ (геометрическое ограничение), рассмотрен в [2] и широко используется в модельных прикладных задачах. Квадратичное интегральное ограничение характеризует запас “энергетического” ресурса. Построение двумерного множества достижимости при наличии только интегрального ограничения описано в [2]. Для множеств достижимости с одиночными ограничениями введем обозначения $\mathcal{G}(t_f, \nu)$ и $\mathcal{G}(t_f, \mu)$. Начальный момент t_0 и начальное фазовое состояние $(x(t_0), y(t_0), \varphi(t_0))^T$ полагаем равными нулю. Из вида системы (1) и ограничений (2) следует, что каждое множество достижимости симметрично относительно оси x .

Очевидно, что $\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu) \subset \mathcal{G}(t_f, \mu) \cap \mathcal{G}(t_f, \nu)$.

Известно, что каждое из множеств $\mathcal{G}(t_f, \nu)$ и $\mathcal{G}(t_f, \mu)$ теряет односвязность в малом диапазоне параметров t_f, ν и, соответственно, t_f, μ . Цель работы — показать, что множество достижимости при двойном ограничении также может быть неодносвязным.

2. Введем понятие непрерывной кривой грубых необходимых условий, точкам которой принадлежит верхняя (при $y \geq 0$) половина границы множества достижимости $\mathcal{G}(t_f, \nu)$. Опираемся на известные факты [2] о структурных свойствах границы множества $\mathcal{G}(t_f, \nu)$. Для нахождения верхней части $\partial\mathcal{G}(t_f, \nu)$ вначале из точки $a^0(t_f) = (t_f, 0)^T$ строим кривую $F^{(+)}$. Она задается параметром $t_\diamond \in [0, t_f]$. Каждому значению t_\diamond соответствует движение системы (1) при $u(t) = \nu$ на $[0, t_\diamond]$ и $u(t) = 0$ на $(t_\diamond, t_f]$. Кончики движений составляют кривую $F^{(+)}$ на плоскости x, y . Последнюю точку, соответствующую значению $t_\diamond = t_f$, обозначим символом b . Кривую $F^{(+)}$ продолжаем кривой $F^{(-,+)}$. Вновь используем параметр t_\diamond : на $[0, t_\diamond]$ действует управление $u(t) = -\nu$ и на $(t_\diamond, t_f]$ — управление $u(t) = \nu$. Таким образом, в каждую точку склеенной кривой $\mathcal{B}^* = F^{(+)} \cup F^{(-,+)}$ ведет кусочно-постоянное управление с не более чем одним моментом переключения на $(0, t_f)$.

Построение кривой \mathcal{B}^* обрываем в первой (по ходу набора) точке, для которой на движении, ведущем в нее, возникает самопересечение (в данном случае циклическое движение по окружности). Второй критерий остановки: построение доведено до кривой $F^{(-,+)}$, но при вычислении ее очередной точки возникает ситуация, когда угол φ , получаемый на первом участке постоянства управления, становится равным по модулю половине угла, накапливаемого на втором участке. В указанных случаях соответствующий кончик движения в момент t_f лежит в $\text{int}\mathcal{G}(t_f, \nu)$. Таким же свойством, если продолжить построение, будут обладать дальнейшие точки. Продолжение становится бесполезным.

Подведем итог. Для любой точки на $\partial\mathcal{G}(t_f, \nu)$ управление, ведущее в нее, удовлетворяет принципу максимума Понтрягина (ПМП) из книги [4] и условию трансверсальности. Специфика кинематики машины Дубинса позволяет сузить совокупность экстремальных управлений, которые могут вести на границу. Необходимые условия, заложенные в определение кривой \mathcal{B}^* , называем грубыми, ибо могут быть точки на этой кривой, которые принадлежат $\text{int}\mathcal{G}(t_f, \nu)$ и которые надо откинуть. Это точки расположены ниже оси x . Соответствующий факт доказан в [2]. Оставшееся подмножество точек кривой \mathcal{B}^* (с учетом симметричных относительно оси x точек) полностью описывает границу множества $\mathcal{G}(t_f, \nu)$.

На рис. 1 показаны два множества $\mathcal{G}(t_f, \nu)$ для $t_f = 1$ и $\nu = 4.5, 6.0$. Пунктиром обозначены точки на кривой \mathcal{B}^* и на симметричной относительно оси x кривой \mathcal{B}_* , которые лежат в $\text{int}\mathcal{G}(t_f, \nu)$. При $\nu = 6.0$ множество $\mathcal{G}(t_f, \nu)$ не является односвязным.

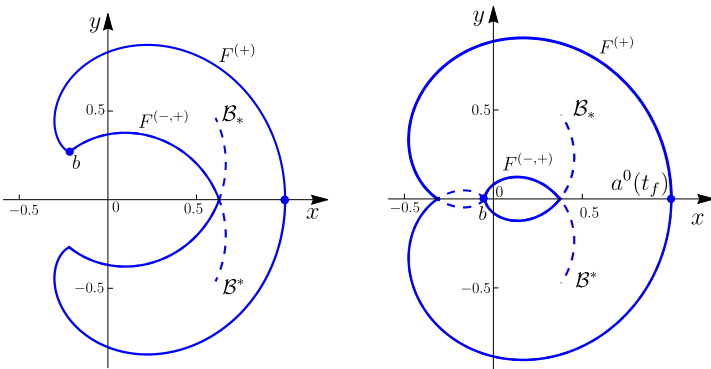


Рис. 1. Два множества достижимости при геометрическом ограничении

3. Для описания границы множества $\mathcal{G}(t_f, \mu)$ также имеет смысл рассматривать аналог кривой \mathcal{B}^* . Формулируя свойство экстремальности в виде ПМП, опираемся на работу [5]. Доказываем (сужая совокупность экстремальных управлений), что на $\partial\mathcal{G}(t_f, \mu)$ могут вести лишь непрерывные управления, удовлетворяющие ПМП, а также дополнительному условию, что на $(0, t_f)$ они имеют не более одного момента смены знака. Кривую $F^{(+)}$ определяем как совокупность точек, в каждую из которых ведет экстремальное управление $u(t) > 0$, $t \in [0, t_f]$, с краевым условием $u(t_f) = 0$. Последнее следует из условия трансверсальности. Кривая $F^{(-,+)}$ задается совокупностью концов движений, для каждого из которых на $(0, t_f)$ есть только один момент смены знака экстремального управления с $u(t) < 0$ на $u(t) > 0$. При этом $u(t_f) = 0$. Остальные

свойства движений, ведущих на $F^{(+)}$ и $F^{(-,+)}$, повторяют те, что были заложены в определении аналогичных кривых для множества $\mathcal{G}(t_f, \nu)$. Отличие состоит в том, что теперь кривые $F^{(+)}$ и $F^{(-,+)}$ соединяются гладко. Кривая $\mathcal{B}^* = F^{(+)} \cup F^{(-,+)}$ задается [3] при помощи параметра $k \leq 1$, называемого модулем в теории эллиптических интегралов. На рис. 2 представлены два множества $\mathcal{G}(t_f, \mu)$ для $t_f = 1$ и $\mu = 20, 25$. При $\mu = 25$ множество достижимости не является односвязным.

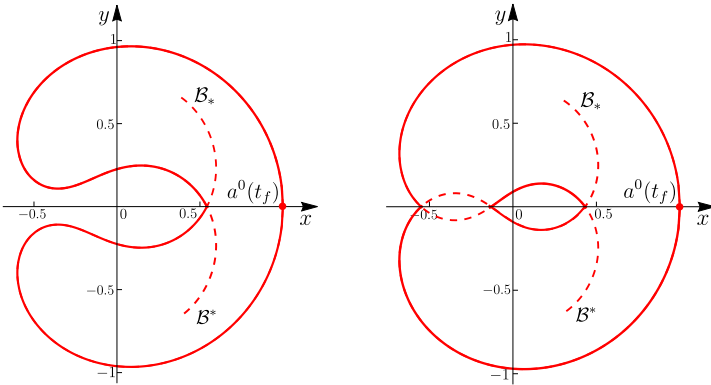


Рис. 2. Два множества достижимости при интегральном ограничении

4. Перейдем к описанию кривой грубых необходимых условий для множества $\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu)$. Двигаясь по кривой $F^{(+)}$, построенной для множества $\mathcal{G}(t_f, \nu)$, находим точку $a^{(1)}$, при переходе в которую расход интегрального ресурса квадрата управления равен μ . Такая точка на дуге $(a^0(t_f), b]$ либо существует (и единственна в силу монотонности роста расхода ресурса, если идти от $a^0(t_f)$ к b), либо ее нет. Последнее означает, что расход ресурса для точки b , равный $\nu^2 t_f$, не превышает μ . Тогда для точек дуги $F^{(-,+)}$ интегральный расход управления также не больше μ . Как следствие, $\partial \mathcal{G}(t_f, \mu, \nu) = \partial \mathcal{G}(t_f, \nu)$. Если $\nu^2 t_f > \mu$, то находим точку $a^{(1)}$. Дуга $[a^0(t_f), a^{(1)}]$ включается в кривую \mathcal{B}^* для множества $\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu)$.

Далее анализируем точки на кривой \mathcal{B}^* , взятой для множества $\mathcal{G}(t_f, \mu)$. Двигаясь от $a^0(t_f)$ при помощи параметра k , находим участки, в каждую точку которых ведет экстремальное управление с $u(t) \leq \nu$, $t \in [0, t_f]$. Моделирование показывает, что таких участков и, соответственно, диапазонов по k либо совсем нет, либо их число не более двух.

Начиная с точки $a^{(1)}$ и уменьшая параметр $k \leq 1$, строим экстремальные движения при комбинированном управлении для значений k , не попадающих в диапазоны, о которых сказано выше. В результате наблю-

раем кривую \mathcal{B}^* . Выкидывая из нее точки с координатой $y < 0$, получаем верхнюю часть границы множества $\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu)$.

На рис. 3 показаны множества достижимости при двойном ограничении. Множество $\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu)$ слева односвязное; $t_f = 1, \mu = 22.8, \nu = 5.85$. При этом множества $\mathcal{G}(t_f, \nu)$ и $\mathcal{G}(t_f, \mu)$ односвязными не являются. Множество $\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu)$ справа не односвязное; $t_f = 1, \mu = 33, \nu = 7$. В этом случае множества $\mathcal{G}(t_f, \nu)$ и $\mathcal{G}(t_f, \mu)$ односвязные.

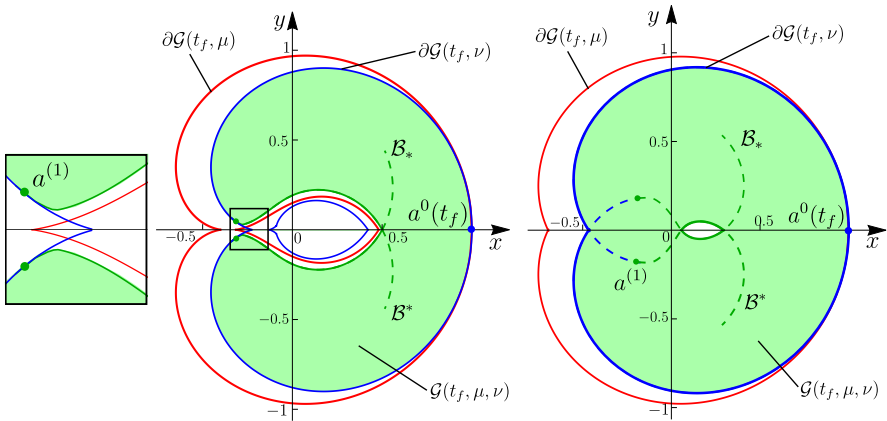


Рис. 3. Множество достижимости при двойном ограничении; слева односвязное, справа не односвязное

Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (номер соглашения 075-02-2025-1549).

Список литературы

1. Пацко В.С., Трубников Г.И., Федотов А.А. Машина Дубинса: двумерное множество достижимости при комбинированном ограничении на управление // Материалы Всероссийской конференции DGCTO-2025, посвященной памяти профессора В.И. Ухоботова. Челябинск: Челябинский государственный университет, 2025. С. 164–168.
2. Cocksayne E.J., Hall G.W.C. Plane Motion of a Particle Subject to Curvature Constraints // SIAM Journal on Control and Optimization. 1975. Vol. 13, no. 1. P. 197–220.

3. *Трубников Г.И.* Аналитическое описание двумерного множества достижимости машины Дубинса с интегральным ограничением на управление // ТиСУ. 2025. № 5. С. 96–116.
4. *Ли Э.Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972.
5. *Gusev M.I.* Computing the reachable set boundary for an abstract control system: revisited // Ural Math. J. 2023. Vol. 9, no. 2. P. 99–108.