*Problems of Control and Information Theory, Vol. 11, No. 6 (1982), pp. 419–432*

# УНИВЕРСАЛЬНАЯ СТРАТЕГИЯ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ С ФИКСИРОВАННЫМ МОМЕНТОМ ОКОНЧАНИЯ

Н. Д. БОТКИН, В. С. ПАЦКО

(Свердловск)

(Поступила в редакцию 8 февраля 1982 г.)

В теории дифференциальных игр универсальной оптимальной стратегией принято называть стратегию, оптимальную для любой начальной позиции игры. Факт существования универсальной оптимальной стратегии зависит от того, как формализована дифференциальная игра. Известны примеры, показывающие, что в рамках формализации из [1] универсальная оптимальная стратегия не всегда существует. Для того, чтобы избежать этой ситуации, следует ввести более сложную формализацию дифференциальной игры. Такая формализация введена в работе [2]. Она обеспечивает существование универсальной оптимальной стратегии. В [2] приведены также способы построения этой стратегии.

В данной статье используется формализация дифференциальной игры, принятая в [1]. Рассматривается линейная дифференциальная игра с фиксированным моментом окончания и выпуклой функцией платы. Предполагается, что управляющий параметр первого игрока — скаляр. Показано, что в такой игре существует универсальная оптимальная стратегия первого игрока. Указан вид этой стратегии и дана оценка гарантии первого игрока при ее использовании с шагом $\Delta$. В конце статьи рассмотрен численный пример. Статья примыкает к работам [1–3].

**1.** Пусть динамика дифференциальной игры с фиксированным моментом окончания $\vartheta$ описывается уравнением

$$\dot{y}(t) = B^1(t)\,u(t) + C^1(t)\,v(t),$$
$$|u(t)| \leq \mu,\ v(t) \in Q^1. \tag{1.1}$$

Здесь $y(t) \in R^n$, $u(t)$ — управляющее воздействие первого игрока, $v(t)$ — второго, матричные функции $B^1$, $C^1$ кусочно-непрерывны. Управляющее воздействие первого игрока предполагается скалярным, т. е. $B^1(t)$ при любом $t$ есть матрица — столбец. Управляющее воздействие второго игрока может иметь произвольную размерность, множество $Q^1$ есть компакт в соответствующем конечномерном пространстве. Пусть $\gamma^1$: $R^n \to R$, — непрерывная функция платы. Первый игрок минимизирует значения $\gamma^1(y(\vartheta))$, интересы второго противоположны. Фазовая переменная не входит в правую часть системы (1.1). В случае линейной дифференциальной игры с фиксированным моментом окончания этого всегда можно добиться известным преобразованием [1]. Будем считать, что начальные моменты $t_0$ для игры (1.1) принадлежат некоторому промежутку $T = [\vartheta_1, \vartheta]$ где $\vartheta_1 < \vartheta$.

Наряду с игрой (1.1) рассмотрим еще одну дифференциальную игру

$$\dot{y}(t) = B^2(t)\, u(t) + C^2(t)\, v(t),$$
$$|u(t)| \leq \mu,\, v(t) \in Q^2, \tag{1.2}$$

с фиксированным моментом окончания $\vartheta$. Здесь $y(t) \in R^n$, функции $B^2$, $C^2$ кусочно-непрерывны. Управляющее воздействие $u(t)$ первого игрока является скалярным, множество $Q^2$ — компакт в конечномерном пространстве. Функцию платы $\gamma^2\colon R^n \to R$, будем считать выпуклой, удовлетворяющей условию Липшица с константой $\lambda$ и условию $\gamma^2(x) \to \infty$ при $|x| \to \infty$. Первый игрок минимизирует значения $\gamma^2(y(\vartheta))$, второй — максимизирует. Игру (1.2) можно интерпретировать содержательно как удобную для вычислений на ЭВМ аппроксимацию игры (1.1). Условимся, что игры (1.1), (1.2) формализованы согласно [1].

Пусть $B^3\colon T \to R^n$ — функция, удовлетворяющая условию Липшица с константой $\beta$.

Используя игру (1.2) и функцию $B^3$, разобьем в дальнейшем пространство $E = T \times R^n$ на три части $\Pi_-, \Pi_+, \Pi$ и введем многозначную функцию $\mathbf{U}^*$ равную $\{-\mu\}$ в $\Pi_-$, $\{\mu\}$ в $\Pi_+$ и $[-\mu, \mu]$ в $\Pi$. Пусть $U^*$ — произвольная однозначная выборка из $\mathbf{U}^*$. Доказываемая в статье теорема дает оценку гарантии первого игрока в игре (1.1) при использовании стратегии $U^*$ с шагом $\Delta$. В конце статьи рассмотрен численный модельный пример, на котором иллюстрируются возможные приложения теоремы.

**2.** Введем необходимые обозначения. Пусть $V^2(t, x)$ — значение функции цены в игре (1.2) для позиции $(t, x) \in E$. При любом $t \in T$ функция $V^2(t, \cdot)$ наследует свойства функции $\gamma^2$, т. е. $V^2(t, \cdot)$ выпукла, удовлетворяет условию Липшица с константой $\lambda$ и условию $V^2(t, x) \to \infty$ при $|x| \to \infty$ [1, 4]. Положим $A(t, x) = \{z \in R^n\colon z = x + \alpha B^3(t),\ \alpha \in R\}$, $(t, x) \in E$. Если $B^3(t) \neq 0$ при некотором $t$, то $A(t, x)$ — прямая, проходящая через точку $x$ параллельно вектору $B^3(t)$. Если $B^3(t) = 0$, то $A(t, x) = \{x\}$. Пусть далее

$$\mathcal{V}(t, x) = \min_{z \in A(t,x)} V^2(t, z), \quad (t, x) \in E,$$

$$\Pi(t) = \{x \in R^n\colon\ V^2(t,\ x) = \mathcal{V}(t,\ x)\},$$

$$\Pi_-(t) = \{x \in R^n\colon\ x + \alpha B^3(t) \bar{\in} \Pi(t),\ \forall \alpha \geq 0\},$$

$$\Pi_+(t) = \{x \in R^n\colon\ x + \alpha B^3(t) \bar{\in} \Pi(t),\ \forall \alpha \leq 0\},\ t \in T,$$

$$\Pi = \{(t,\ x) \in E\colon\ x \in \Pi(t)\},\ \Pi_- = \{(t,\ x) \in E\colon\ x \in \Pi_-(t)\},$$

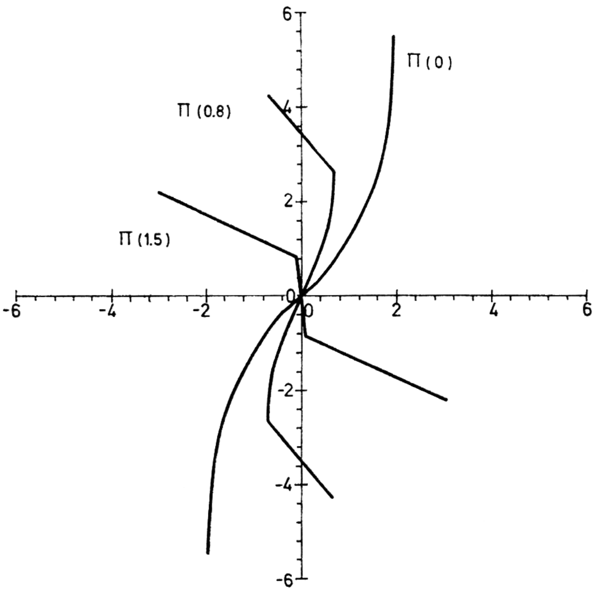
$$\Pi_+ = \{(t,\ x) \in E\colon\ x \in \Pi_+(t)\}.$$

Непосредственно из определения следует, что множество П замкнуто в $E$, а множества $\Pi_+$, $\Pi_-$ — открыты. Если $B^3(t)=0$, то $\Pi(t)=R^n$. Укажем эквивалентное определение множества $\Pi(t)$. Положим

$$c_k(t) = \min_{x\in R^n} V^2(t, x), \quad t\in T,$$

$$W_c(t) = \{x\in R^n\colon\ V^2(t, x)\leq c\},\ t\in T,\ c\geq c_k(t).$$

Символом $N_c(t, x)$ обозначим совокупность всех единичных внешних нормалей к множеству $W_c(t)$, $t\in T$, $c\geq c_k(t)$, в точке $x\in\partial W_c(t)$. Пусть $\Pi_c(t)$ — множество всех $x\in\partial W_c(t)$, для каждого из которых существует хотя бы один вектор $n\in N_c(t, x)$ такой, что $n'B^3(t)=0$ (штрих означает транспонирование).




*Фиг. 1*

Тогда

$$\Pi(t) = (\bigcup_{c>c_k(t)} \Pi_c(t)) \cup W_{c_k(t)}(t), \quad t\in T. \tag{2.1}$$

Формулу (2.1) можно использовать при вычислении $\Pi(t)$ на ЭВМ.

Пусть $\mathscr{K}$ (соответственно $\mathscr{E}^1$, $\mathscr{E}^2$) — совокупность всех измеримых функций $u(\cdot)$ (соответственно $v(\cdot)$) на $T$, удовлетворяющих при любом $t$ ограничению $|u(t)|\leq\mu$ (соответственно $v(t)\in Q^1$, $v(t)\in Q^2$). Для любой стратегии $U$ любых $(t_0, x_0)\in E$, $\Delta>0$, $v(\cdot)\in\mathscr{E}^1$ символом $y^1(\cdot, t_0, x_0, U, \Delta, v(\cdot))$ обозначим движение (ломаную Эйлера [1]) системы (1.1), выходящее в момент $t_0$ из $x_0$ и порождаемое выбранными $U$, $\Delta$, $v(\cdot)$ Пусть

$$\Gamma(t_0, x_0, U, \Delta) = \sup_{v(\cdot)\in\mathcal{E}^1} \gamma^1(y^1(\vartheta, t_0, x_0, U, \Delta, v(\cdot)),$$

$$\Gamma(t_0, x_0, U) = \overline{\lim_{\Delta\to 0}}\, \Gamma(t_0, x_0, U, \Delta).$$

Для любых $t_*$, $t^*$ из $T$, где $t_* \leq t^*$, положим

$$\varepsilon(t_*, t^*) = \int_{t_*}^{t^*} [\mu(|B^1(t) - B^3(t)| + |B^2(t) - B^3(t)|) + \\ + \max_{l\in R^n, |l|\leq 1} (\max_{q\in Q^1} l'C^1(t)q - \max_{q\in Q^2} l'C^2(t)q)]\, dt. \qquad (2.2)$$

Пусть

$$\mathcal{B} = \min\{\sup_{t\in T} |B^i(t)| : i = 1, 2, 3\},$$

$$||\gamma^2 - \gamma^1|| = \sup_{x\in R^n} |\gamma^2(x) - \gamma^1(x)|.$$

Введем многозначную функцию

$$\mathbf{U}^*(t, x) = \begin{cases} \{\mu\}, & (t, x)\in \Pi_+, \\ \{-\mu\}, & (t, x)\in\Pi_-, \\ [-\mu, \mu], & (t, x)\in\Pi, \end{cases} \quad (t, x)\in E.$$

*Теорема*. Пусть стратегия $U^*$ в игре (1.1) такова, что $U^*(t, x)\in\mathbf{U}^*(t, x)$ при всех $(t, x)\in E$. Тогда для любых $(t_0, x_0)\in E$, $\Delta > 0$ справедлива оценка

$$\Gamma(t_0, x_0, U^*, \Delta) \leq V^2(t_0, x_0) + 2(\vartheta - t_0)\lambda\mu\sqrt{\Delta\beta\mathcal{B}} + \lambda\varepsilon(t_0, \vartheta) + 2\lambda\mu\Delta\mathcal{B} + ||\gamma^2 - \gamma^1||. \qquad (2.3)$$

Расчет или оценка на ЭВМ всех слагаемых в правой части (2.3), за исключением первого, не представляет существенной трудности. Если при помощи ЭВМ можно также сосчитать или оценить сверху и $V^2(t_0, x_0)$, то тем самым получим оценку гарантии первого игрока в игре (1.1) для начальной позиции $(t_0, x_0)$, когда он использует универсальную стратегию $U^*$ с шагом $\Delta$. Если функция $B^1$ липшицева, функция $\gamma^1$ — выпуклая, липшицева и удовлетворяет условию $\gamma^1(x)\to\infty$ при $|x|\to\infty$, то, полагая $B^2 = B^3 = B^1$, $C^2 = C^1$, $Q^2 = Q^1$, $\gamma^2 = \gamma^1$, получим

$$\Gamma(t_0, x_0, U^*, \Delta) \leq V^1(t_0, x_0) + 2(\vartheta - t_0)\lambda\mu\sqrt{\Delta\beta\mathcal{B}} + 2\lambda\mu\Delta\mathcal{B},$$

где $V^1$ — цена игры (1.1). Следовательно, в этом случае

$$\Gamma^1(t_0, x_0, U^*) = V^1(t_0, x_0),$$

и значит стратегия $U^*$ является оптимальной универсальной стратегией в игре (1.1).

Перейдем к доказательству теоремы. Для любых $(t_*, x_*) \in E$, $u(\cdot) \in \mathscr{K}$, $v(\cdot) \in \mathscr{E}^i$, $i = 1, 2$, символом $y^i(\cdot, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot))$ обозначим решение уравнения (1, $i$) в силу выбранных $u(\cdot)$, $v(\cdot)$, выходящее в момент $t_*$ из $x_*$. Когда это не приведет к недоразумению, будем писать сокращенно $y^i(\cdot)$. Пусть $\varrho_c(\cdot, t)$ — опорная функция множества $W_c(t)$, $t \in T$, $c \geq c_k(t)$.

*Лемма 2.1.* Пусть $(t_*, x_*) \in E$, $\delta > 0$, $u(\cdot) \in \mathscr{K}$, $v(\cdot) \in \mathscr{E}^1$ таковы, что $y^1(t_* + \delta, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot)) \in \Pi(t_* + \delta)$.

Тогда

$$V^2(t_* + \delta, y^1(t_* + \delta, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot)) \leq V^2(t_*, x_*) + 2\lambda\beta\mu\delta^2 + \lambda\varepsilon(t_*, t_* + \delta).$$

*Доказательство.* Положим

$$L(t) = \{l \in R^n \colon |l| \leq 1, \ \ l'B^3(t) = 0\}, \quad t \in T, \quad \varphi_c(t, x) = \max_{l \in L(t)} \{l'x - \varrho_c(l, t)\},$$

$$(t, x) \in E, \ c \geq c_k(t), \ c_* = V^2(t_*, x_*).$$

Пусть $l_0 \in L(t_* + \delta)$ таково, что $\varphi_{c_*}(t_* + \delta, y^1(t_* + \delta)) = l_0' y^1(t_* + \delta) - \varrho_{c_*}(l_0, t_* + \delta)$.

Выберем $\bar{v}(\cdot) \in \mathscr{E}^2$ так, чтобы удовлетворялось условие

$$l_0'C^2(t)\bar{v}(t) = \max_{q \in Q^2} l_0'C^2(t)q, \ t \in [t_*, t_* + \delta].$$

В силу свойства стабильности [1] множества $W_c = \{(t, x) \in E \colon x \in W_c(t)\}$ получаем существование такого $\bar{u}(\cdot) \in \mathscr{K}$, что $y^2(t_* + \delta, t_*, x_*, \bar{u}(\cdot), \bar{v}(\cdot)) \in W_{c_*}(t_* + \delta)$. Имеем

$$\varphi_{c_*}(t_* + \delta, \ y^1(t_* + \delta)) = \varphi_{c_*}(t_* + \delta, \ y^1(t_* + \delta)) - \varphi_{c_*}(t_* + \delta, \ y^2(t_* + \delta)) \leq$$

$$\leq l_0' \int_{t_*}^{t_*+\delta} B^1(t)u(t)dt - l_0' \int_{t_*}^{t_*+\delta} B^2(t)\bar{u}(t)dt + l_0' \int_{t_*}^{t_*+\delta} C^1(t)v(t)dt - l_0' \int_{t_*}^{t_*+\delta} C^2(t)\bar{v}(t)dt.$$

Поскольку $l_0'B^3(t_* + \delta) = 0$, то

$$l_0' \int_{t_*}^{t_*+\delta} B^1(t)u(t)dt - l_0' \int_{t_*}^{t_*+\delta} B^2(t)\bar{u}(t)dt = l_0' \int_{t_*}^{t_*+\delta} (B^3(t) - B^3(t_* + \delta))u(t)dt -$$

$$- l_0' \int_{t_*}^{t_*+\delta} (B^3(t) - B^3(t_* + \delta))\bar{u}(t)dt + l_0' \int_{t_*}^{t_*+\delta} (B^1(t) - B^3(t))u(t)dt -$$

$$- l_0' \int_{t_*}^{t_*+\delta} (B^2(t) - B^3(t))\bar{u}(t)dt \leq 2\beta\mu\delta^2 + \mu \int_{t_*}^{t_*+\delta} (|B^1(t) - B^3(t)| + |B^2(t) - B^3(t)|)dt.$$

Учитывая определение $\bar{v}(\cdot)$, имеем

$$l_0' \int_{t_*}^{t_*+\delta} C^1(t)v(t)dt - l_0' \int_{t_*}^{t_*+\delta} C^2(t)\bar{v}(t)dt \leq \int_{t_*}^{t_*+\delta} \max_{q \in Q^1} l_0' C^1(t)qdt -$$

$$- \int_{t_*}^{t_*+\delta} \max_{q \in Q^2} l_0' C^2(t)qdt \leq \int_{t_*}^{t_*+\delta} \max_{\substack{l \in R^n, \\ |l| \leq 1}} [\max_{q \in Q^1} l' C^1(t)q - \max_{q \in Q^2} l' C^2(t)q]dt.$$

Таким образом,

$$\varphi_{c_*}(t_* + \delta, y^1(t_* + \delta)) \leq d = 2\beta\mu\delta^2 + \varepsilon(t_*, t_* + \delta). \tag{2.4}$$

Поскольку

$$\min \{|z - \bar{z}| : z \in W_{c_*}(t_* + \delta), \quad \bar{z} \in A(t_* + \delta, y^1(t_* + \delta))\} = \varphi_{c_*}(t_* + \delta, y^1(t_* + \delta)),$$

то из (2.4) вытекает существование такого $\tilde{x} \in A(t_* + \delta, y^1(t_* + \delta))$, что

$$V^2(t_* + \delta, \tilde{x}) \leq c_* + \lambda d = V^2(t_*, x_*) + \lambda d. \tag{2.5}$$

Так как $y^1(t_* + \delta) \in \Pi(t_* + \delta)$, то

$$V^2(t_* + \delta, y^1(t_* + \delta)) \leq V^2(t_* + \delta, \tilde{x}). \tag{2.6}$$

Утверждение леммы следует из (2.4)–(2.6).

Для любых $t \in T$, $c \geq c_k(t)$ и $x \in R^n$ пусть $w(t, x, c)$ — ближайшая к $x$ точка из $W_c(t)$, а $s(t, x, c) = x - w(t, x, c)$.

*Лемма 2.2.* Пусть $(t_*, x_*) \in E$, $0 < \delta \leq \vartheta - t_*$, $u(t) = -\mu$, $v(\cdot) \in \mathscr{E}^1$. Пусть, кроме того, $s'(t_* + \delta, z, c_*)\, B^3(t_* + \delta) \geq 0$, где

$$z = y^1(t_* + \delta, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot)),\ c_* = V^2(t_*, x_*).$$

Тогда

$$V^2(t_* + \delta, z) \leq V^2(t_*, x_*) + 2\lambda\beta\mu\delta^2 + \lambda\varepsilon(t_*, t_* + \delta). \tag{2.7}$$

Аналогичное утверждение справедливо, если $u(t) \equiv \mu$ и $s'(t_* + \delta, z, c_*)$ $B^3(t_* + \delta) \leq 0$.

*Доказательство.* Положим

$$\Phi_c(t, x) = \max_{l \in R^n |l| \leq 1} \{l'x - \varrho_c(l, t)\},\ (t, x) \in E,\ c \geq c_k(t)\}$$

Пусть $l_0$ таково, что $\Phi_{c_*}$, $(t_* + \delta, z) = l_0' z - \varrho_{c_*}(l_0, t_* + \delta)$. Если $s(t_* + \delta, z, c_*) \neq 0$, то $l_0 = s(t_* + \delta, z, c_*)/|s(t_* + \delta, z, c_*)|$. Если $s(t_* + \delta, z, c_*) =$

$= 0$, то $l_0 = 0$. Стало быть

$$l_0' B^3(t_* + \delta) \geq 0 \tag{2.8}$$

Выберем $\bar{v}(\cdot) \in \mathscr{E}^2$ так, чтобы удовлетворялось условие

$$l_0' C^2(t)\bar{v}(t) = \max_{q \in Q^2} l_0' C^2(t) q,\ t \in [t_*, t_* + \delta].$$

Из свойства стабильности множества $W_{c_*}$ следует существование такого $\bar{u}(\cdot) \in \mathscr{K}$, что $y^2(t_* + \delta, t_*, x_*, \bar{u}(\cdot), \bar{v}(\cdot)) \in W_{c_*}(t_* + \delta)$. Имеем

$$\Phi_{c_*}(t_* + \delta, z) = \Phi_{c_*}(t_* + \delta, y^1(t_* + \delta)) - \Phi_{c_*}(t_* + \delta, y^2(t_* + \delta)) \leq$$

$$\leq -l_0' \int_{t_*}^{t_*+\delta} B^1(t)\mu dt - l_0' \int_{t_*}^{t_*+\delta} B^2(t)\bar{u}(t) dt + l_0' \int_{t_*}^{t_*+\delta} C^1(t) v(t) dt - l_0' \int_{t_*}^{t_*+\delta} C^2(t)\bar{v}(t) dt.$$

В силу (2.8)

$$- l_0' \int_{t_*}^{t_*+\delta} B^1(t)\mu dt - l_0' \int_{t_*}^{t_*+\delta} B^2(t)\bar{u}(t) dt < - l_0' \int_{t_*}^{t_*+\delta} (B^3(t) - B^3(t_* + \delta))\mu dt -$$

$$- l_0' \int_{t_*}^{t_*+\delta} (B^3(t) - B^3(t_* + \delta))\bar{u}(t) dt - l_0' \int_{t_*}^{t_*+\delta} (B^1(t) - B^3(t))\mu dt -$$

$$- l_0' \int_{t_*}^{t_*+\delta} (B^2(t) - B^3(t))\bar{u}(t) dt \leq 2\beta\mu\delta^2 + \mu \int_{t_*}^{t_*+\delta} (|B^1(t) - B^3(t)| + |B^2(t) - B^3(t)|) dt.$$

Учитывая определение $\bar{v}(\cdot)$, окончательно имеем

$$\Phi_{c_*}(t_* + \delta, z) \leq 2\beta\mu\delta^2 + \varepsilon(t_*, t_* + \delta). \tag{2.9}$$

Поскольку $\Phi_{c_*}(t_* + \delta, z)$ есть расстояние от точки $z$ до множества $W_{c_*}(t_* + \delta)$ и $c_* = V^2(t_*, x_*)$, то из (2.9) следует (2.7).

*Лемма 2.3*. Пусть $(t_*, x_*) \in \Pi_-$, $c_* = V^2(t_*, x_*)$. Тогда существует такая окрестность $O(t_*, x_*) \subset \Pi_-$ позиции $(t_*, x_*)$, что

$$s'(t, x, c_*) B^3(t) \geq 0,\ (t, x) \in O(t_*, x_*). \tag{2.10}$$

Аналогичное утверждение справедливо, если заменить $\Pi_-$ на $\Pi_+$ и знак $\geq$ в (2.10) на $\leq$.

*Доказательство*. Поскольку $(t_*, x_*) \in \Pi_-$, то $\mathscr{V}(t_*, x_*) < V^2(t_*, x_*) = c_*$. Легко видеть, что функция $\mathscr{V}$ непрерывна на множестве $\{t \in T : B^3(t) \neq 0\} \times R^n$, которое содержит $\Pi_-$. Поэтому существует такая окрестность $\bar{O}(t_*, x_*) \subset \Pi_-$, что $\mathscr{V}(t, x) \leq c_*$ для любой позиции $(t, x) \in \bar{O}(t_*, x_*)$.

Покажем, что можно взять $O(t_*, x_*) = \bar{O}(t_*, x_*)$. Предположим от противного существование такой позиции $(\bar{t}, \bar{x}) \in \bar{O}(t_*, x_*)$, что $s'(\bar{t}, \bar{x}, c_*)B^3(\bar{t}) < 0$. Пусть

$$\bar{w} = w(\bar{t}, \bar{x}, c_*), \bar{s} = s(\bar{t}, \bar{x}, c_*), d = |\bar{s}|,$$

$$O_d(\bar{x}) = \{z \in R^n : |z - \bar{x}| \leq d\}.$$

Для любой точки $m(\alpha) = \bar{w} + \alpha B^3(\bar{t})$, $\alpha \in R$, на прямой $A(\bar{t}, \bar{w})$ имеем

$$|\bar{x} - m(\alpha)|^2 = |\bar{x} - \bar{w} - \alpha B^3(\bar{t})|^2 = |\bar{x} - \bar{w}|^2 + $$
$$+ \alpha^2 |B^3(\bar{t})|^2 - 2\alpha \bar{s}' B^3(\bar{t}) = d^2 + g\alpha^2 - 2h\alpha,$$

где $g = |B^3(\bar{t})|^2$, $h = \bar{s}'B^3(\bar{t})$. Следовательно, на прямой $A(\bar{t}, \bar{w})$ помимо точки $\bar{w} = m(0)$ есть еще одна точка $m\left(\frac{2h}{g}\right)$, расстояние от которой до $\bar{x}$ равно $d$. При этом $\alpha_0 = \frac{2h}{g} < 0$.

Рассмотрим вначале случай, когда $m(\alpha_0) \in \Pi_+(\bar{t})$. Так как $\bar{x} \in \Pi_-(\bar{t})$, то найдется такое число $\psi$, что $0 < \psi < 1$ и $\xi = m(\alpha_0) + \psi(\bar{x} - m(\alpha_0)) \in \Pi(\bar{t})$. Поскольку множество

$$F_{c_*}(\bar{t}) = \{x \in R^n : \mathcal{V}(\bar{t}, x) \leq c_*\} = \{x \in R^n : x \in A(\bar{t}, z), z \in W_{c_*}(\bar{t})\}$$

выпукло и точки $\bar{x}$, $m(\alpha_0)$ принадлежат $F_{c_*}(\bar{t})$, то $\xi \in F_{c_*}(\bar{t})$. Учитывая включение $\xi \in \Pi(\bar{t})$, имеем $V^2(\bar{t}, \xi) = \mathcal{V}(\bar{t}, \xi) \leq c_*$. Стало быть $\xi \in W_{c_*}(\bar{t})$. Так как $|\xi - \bar{x}| < d$, получаем противоречие с тем, что $\bar{w}$ — ближайшая к $\bar{x}$ точка множества $W_{c_*}(\bar{t})$.

Пусть $m(\alpha_0) \in \Pi(\bar{t}) \cup \Pi_-(\bar{t})$. Так как $\alpha_0 < 0$, то функция $V^2(\bar{t}, \cdot)$ не убывает при смещении по прямой $A(\bar{t}, \bar{w})$ от $m(\alpha_0)$ к $\bar{w}$. Следовательно, $V^2(\bar{t}, m(\alpha_0)) \leq c_*$, и значит отрезок $[m(\alpha_0), \bar{w}]$ прямой $A(\bar{t}, \bar{w})$ принадлежит $W_{c_*}(\bar{t})$. Поскольку расстояние от точки $\frac{1}{2}m(\alpha_0) + \frac{1}{2}\bar{w}$ до точки $\bar{x}$ меньше $d$, вновь приходим к противоречию. Доказательство закончено.

*Лемма 2.4.* Пусть $(t_*, x_*) \in \Pi_-$, $\delta_* > 0$, $u(t) \equiv -\mu$, $v(\cdot) \in \mathcal{E}^1$. Пусть, кроме того, $y^1(t, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot)) \in \Pi_-(t)$, $t \in [t_*, t_* + \delta_*)$. Тогда

$$V^2(t_* + \delta_*, y^1(t_* + \delta_*, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot)) \leq V^2(t_*, x_*) + \lambda\varepsilon(t_*, t_* + \delta_*). \tag{2.11}$$

Аналогичное утверждение справедливо, если заменить $\Pi_-$ на $\Pi_+$, $\Pi_-(t)$ на $\Pi_+(t)$, $u(t) \equiv -\mu$ на $u(t) \equiv \mu$.

*Доказательство*. Пусть $\bar{t}$ — произвольный момент из $(t_*, t_* + \delta_*)$, для которого существует производная $\frac{d}{dt} V^2(\bar{t}, y^1(\bar{t}))$ функции $t \to V^2(t, y^1(t))$. Из лемм 2.2, 2.3 вытекает оценка

$$\frac{d}{dt} V^2(\bar{t}, y^1(\bar{t})) \leq \lambda\eta(\bar{t}), \tag{2.12}$$

где $\eta(t)$ — значение подынтегрального выражения в (2.2). Оценка (2.12) влечет за собой (2.11).

*Лемма 2.5*. Пусть $(t_*, x_*) \in E$, $0 < \delta \leq \vartheta - t_*$, $u(\cdot) \in \mathscr{K}$, $v(\cdot) \in \mathscr{E}^1$. Тогда

$$V^2(t_* + \delta, y^1(t_* + \delta, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot)) \leq V^2(t_*, x_*) + \lambda\varepsilon(t_*, t_* + \delta) + 2\lambda\mu\delta\mathscr{B}.$$

Заметим, что в лемме 2.5 функции $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ и движение $y^1(\cdot, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot))$ не стеснены какими-либо особыми предположениями. Поэтому лемма 2.5 дает грубую оценку изменения функции $V^2$. Доказательство леммы в основном подобно доказательству леммы 2.2 и поэтому опускается.

Опираясь на леммы 2.1, 2.4, 2.5, докажем теорему. Зафиксируем стратегию $U^*$, начальную позицию $(t_0, x_0)$, шаг $\Delta$ и функцию $v(\cdot) \in \mathscr{E}^1$. Рассмотрим ломаную $y^1(\cdot, t_0, x_0, U^*, \Delta, v(\cdot))$ (сокращенно $y^1(\cdot)$ ). Символом $S$ обозначим совокупность всех $t \in [t_0, \vartheta]$, для которых $y^1(t) \in \Pi(t)$.

Пусть вначале $\beta > 0$, $\mathscr{B} > 0$. Положим $e = \sqrt{\frac{\Delta\mathscr{B}}{\beta}}$. Определим по индукции конечный набор моментов $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_N$. Предположим, что введен момент $t_i$, $i \geq 0$. Если $S \cap (t_i, \vartheta] = \emptyset$, положим $N = i$. Если $S \cap (t_i, \vartheta] \neq \emptyset$, определим момент $t_{i+1}$. Пусть $G_i = S \cap (t_i, t_i + e] \neq \emptyset$. Тогда $t_{i+1} = \max\{t\colon t \in G_i\}$. Пусть $G_i = \emptyset$. Тогда $t_{i+1} = \min\{t : t \in S \setminus [t_0, t_i + e]\}$.

Возьмем произвольное $0 \leq i < N$. Если $t_{i+1} - t_i \leq e$, то в силу леммы 2.1

$$\begin{aligned} V^2(t_{i+1}, y^1(t_{i+1})) - V^2(t_i, y^1(t_i)) &\leq 2\lambda\beta\mu(t_{i+1} - t_i)^2 + \\ + \lambda\varepsilon(t_i, t_{i+1}) &\leq 2(t_{i+1} - t_i)\lambda\beta\mu e + \lambda\varepsilon(t_i, t_{i+1}). \end{aligned} \tag{2.13}$$

Если $t_{i+1} - t_i > e$, то $y^1(t) \bar{\in} \Pi(t)$ при $t \in (t_i, t_{i+1})$. Стало быть, либо $y^1(t) \in \Pi_-(t)$ для всех $t \in (t_i, t_{i+1})$, либо $y^1(t) \in \Pi_+(t)$ для всех $t \in (t_i, t_{i+1})$. В силу лемм 2.4, 2.5

$$V^2(t_{i+1}, y^1(t_{i+1})) - V^2(t_i, y^1(t_i)) \leq \lambda\varepsilon(t_i, t_{i+1}) + 2\lambda\mu\Delta\mathscr{B}.$$

Так как $\Delta\mathscr{B} = e^2\beta$, то

$$V^2(t_{i+1}, y^1(t_{i+1})) - V^2(t_i, y^1(t_i)) \leq \lambda\varepsilon(t_i, t_{i+1}) + 2\lambda\mu e^2\beta \leq \lambda\varepsilon(t_i, t_{i+1}) + 2(t_{i+1} - t_i)\lambda\beta\mu e. \tag{2.14}$$

Используя (2.13), (2.14) для оценки величины $V^2(t_N, y^1(t_N))$, получим

$$V^2(t_N, y^1(t_N)) \leq V^2(t_0, x_0) + 2(t_N - t_0)\lambda\mu \sqrt{\Delta\beta\mathcal{B}} + \lambda\varepsilon(t_0, t_N). \tag{2.15}$$

Если $t_N \neq \vartheta$, то $y^1(t) \bar{\in} \Pi(t)$ при $t \in (t_N, \vartheta]$. В силу лемм 2.4, 2.5

$$V^2(\vartheta, y^1(\vartheta)) \leq V^2(t_N, y^1(t_N)) + \lambda\varepsilon(t_N, \vartheta) + 2\lambda\mu\Delta\mathcal{B}. \tag{2.16}$$

Из (2.15), (2.16) имеем

$$V^2(\vartheta, y^1(\vartheta)) \leq V^2(t_0, x_0) + 2(\vartheta - t_0)\lambda\mu \sqrt{\Delta\beta\mathcal{B}} + \lambda\varepsilon(t_0, \vartheta) + 2\lambda\mu\Delta\mathcal{B}. \tag{2.17}$$

Пусть $\beta = 0$, $\mathcal{B} > 0$. Положим $\bar{t} = \max\{t : t \in S\}$, если $S \neq \emptyset$ и $\bar{t} = t_0$, если $S = \emptyset$. Из леммы 2.1 вытекает, что

$$V^2(\bar{t}, y^1(\bar{t})) \leq V^2(t_0, x_0) + \lambda\varepsilon(t_0, \bar{t}).$$

В силу лемм 2.4, 2.5

$$V^2(\vartheta, y^1(\vartheta)) \leq V^2(\bar{t}, y^1(\bar{t})) + \lambda\varepsilon(\bar{t}, \vartheta) + 2\lambda\mu\Delta\mathcal{B}.$$

Стало быть

$$V^2(\vartheta, y^1(\vartheta)) \leq V^2(t_0, x_0) + \lambda\varepsilon(t_0, \vartheta) + 2\lambda\mu\Delta\mathcal{B}. \tag{2.18}$$

Пусть $\beta > 0$, $\mathcal{B} = 0$. Применяя лемму 2.5 имеем

$$V^2(\vartheta, y^1(\vartheta)) \leq V^2(t_0, x_0) + \lambda\varepsilon(t_0, \vartheta). \tag{2.19}$$

Из (2.17)–(2.19) получаем

$$\gamma^1(y^1(\vartheta)) \leq V^2(t_0, x_0) + 2(\vartheta - t_0)\lambda\mu \sqrt{\Delta\beta\mathcal{B}} + \lambda\varepsilon(t_0, \vartheta) + 2\lambda\mu\Delta\mathcal{B} + \|\gamma^2 - \gamma^1\|. \tag{2.20}$$

Поскольку правая часть (2.20) не зависит от $\vartheta(\cdot)$, то тем самым доказана оценка (2.3).

*Замечание.* Нетрудно видеть, что в оценках (2.17), (2.18), (2.19) момент $\vartheta$ можно заменить на любой момент $t \in [t_0, \vartheta]$. Таким образом, для любых $(t_0, x_0) \in E$, $\Delta > 0$, $v(\cdot) \in \mathcal{E}^1$, $t \in [t_0, \vartheta]$

$$V^2(t, y^1(t, t_0, x_0, U^*, \Delta, v(\cdot)) \leq V^2(t_0, x_0) + 2(t - t_0)\lambda\mu \sqrt{\Delta\beta\mathcal{B}} + \lambda\varepsilon(t_0, t) + 2\lambda\mu\Delta\mathcal{B}. \tag{2.21}$$

**3.** *Пример.* Рассмотрим дифференциальную игру второго порядка

$$\dot{y}^1(t) = (\vartheta - t)u(t) + v(t), \tag{3.1}$$

$$\dot{y}_2(t) = u(t), \qquad |u(t)| \leq 1, \ |v(t)| \leq 1,$$

с моментом окончания $\vartheta = 2$. Первый игрок стремится привести фазовый вектор системы в момент $\vartheta$ на множество $M^1 = \{x \in R^2\colon |x| \leq 100\}$ и минимизирует при этом значения функции $\varphi(x) = |x|$, заданной на $M^1$. Интересы второго игрока противоположны. Считаем, что $t_0 \in T = [0, 2]$. Примем

$$B^1(t) = \begin{bmatrix} \vartheta - t \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C^1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Разобьем промежуток $T$ на 300 равных частей моментами $\tau_0 = 0$, $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n = \vartheta$, $n = 300$ и положим $B^2(t) = B^1(\tau_i)$ при $t \in (\tau_{i-1}, \tau_i]$, $i = \overline{1, n}$ Пусть $C^2 = C^1$, $Q^2 = Q^1 = \{q \in R\colon |q| \leq 1\}$. Символом $M^2$ обозначим правильный 100-угольник, вписанный в $M^1$. Положим $\gamma^2(x) = \min\{\alpha \geq 0\colon\ x \in \alpha M^2\}$, $x \in R^2$. В качестве $\gamma^1$ возьмем непрерывную функцию, совпадающую на $M^1$ с $\varphi$ и такую, что

$$||\gamma^2 - \gamma^1|| = \sup_{x \in R^2} |\gamma^2(x) - \gamma^1(x)| = \max_{x \in M^1} |\gamma^2(x) - \gamma^1(x)|.$$

Пусть $B^3 = B^1$. Используем оценку (2.3), считая $\Delta = \dfrac{2}{300}$. Имеем

$$\lambda = \left(1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{200}\right)\right)^{-1}, \beta = 1, \mu = 1, \mathcal{B} = \sqrt{5}$$

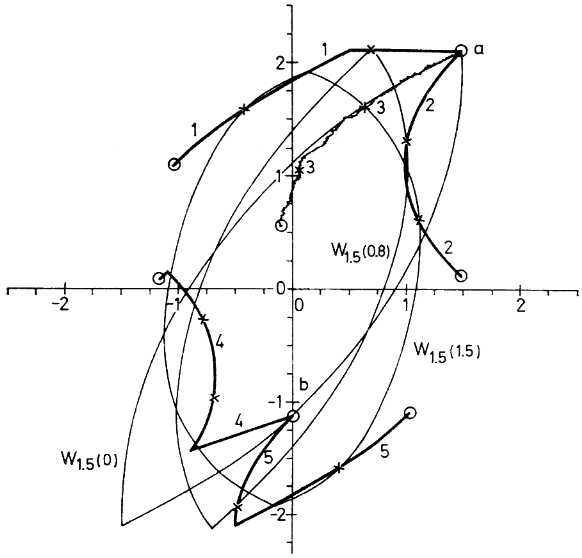
$$\varepsilon(t_0, \vartheta) \leq \int_0^2 |B^2(t) - B^1(t)|\, dt = \Delta = \frac{2}{300}, \ ||\gamma^2 - \gamma^1|| = \lambda\, 200 \sin^2\left(\frac{\pi}{200}\right).$$

Стало быть,

$$\Gamma(t_0, x_0, U^*, \Delta) \leq V^2(t_0, x_0) + 0{,}58.$$

Таким образом, стратегия $U^*$ при шаге $\Delta = \dfrac{2}{300}$ гарантирует приведение системы (3.1) на $M^1$ из таких начальных позиций $(t_0, x_0)$, что $V^2(t_0, x_0) \leq$ $\leq 100 - 0{,}58$. Если ограничиться только такими начальными позициями, то в силу (2.21) любое из возможных движений будет идти в $W_{100} = \{(t, x) \in E\colon$ $V^2(t, x) \leq 100\}$. Значит стратегию $U^*$ достаточно задать лишь в $W_{100}$. На рис. 1 представлены просчитанные на ЭВМ для моментов $t = 0$; 0,8; 1,5 линии $\Pi(t)$. Справа от линии $U^*(t, x) = -\mu$, слева $U^*(t, x) = \mu$. На рис. 2 показаны построенные на ЭВМ траектории в игре (3.1), когда первый игрок использует стратегию $U^*$ с шагом $\Delta = \dfrac{2}{300}$. Кривые 1, 4 соответствуют $v(t) \equiv -1$, кривые 2,5 $v(t) \equiv 1$. При построении кривой 3 использовался датчик случайных чисел. Соответствующая функция $v(\cdot)$ принимала значения $\pm 1$ с вероятностью

$\frac{1}{2}$. Для всех кривых $t_0 = 0$. Для кривых 1, 2, 3 начальная точка $x_0 = a = (1{,}489;\ 2{,}114)$ является угловой точкой границы множества $W_{1,5}$ (0) и принадлежит линии П(0). Для кривых 4,5 точка $x_0 = b = (0;\ -1{,}120)$ также




*Фиг. 2*

лежит на границе множества $W_{1,5}(0)$, но справа от линии П(0). На линиях 1–5, кроме начальной и конечной точек, отмечены точки, соответствующие моментам 0,8 и 1,5. Можно видеть, как они расположены относительно множеств $W_{1,5}(0{,}8)$, $W_{1,5}(1{,}5)$. Для последней точки на кривой I значение функции $\gamma^1$ равно 1,506, аналогичные значения функции $\gamma^1$ для кривых 2, 3, 4, 5 равны соответственно 1,486; 0,569; 1,167; 1,500.

Авторы благодарят Н. Н. Красовского и А. И. Субботина за обсуждение работы и ценные замечания.

## Литература

1. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М., Наука, 1974, 455 с.
2. *Красовский Н. Н.* Дифференциальные игры. Аппроксимационные и формальные модели. Матем. сб., т. **107** (149), № *4* (12), с. 541–571.
3. *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. М., Мир, 1967, 479 с.

4. *Полищук Е. Г.* Оценка отклонения цены линейной дифференциальной игры от последовательного программного максимина. Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, 1980, № *6*, с. 195–198.

## Universal strategy in a differential game with fixed terminal time

N. D. BOTKIN, V. S. PATSKO

(Sverdlovsk)

The problem of finding of the optimal universal strategy is discussed for linear differential games with fixed terminal time and scalar control parameter of the first player.

The linear differential game (1.1) with fixed terminal time $\vartheta$ is considered. The first player aspire to minimize the terminal payoff function, the aim of the second player is opposite. It is assumed that the control parameter of the first player is scalar. With the game (1.1) the game (1.2) with the same terminal time and scalar control parameter of the first player and convex payoff function is considered. The game (1.2) is interpreted as convenient for calculations aproximation of the game (1.1). The functions $B^1$, $C^1$, $B^2$, $C^2$ assumed to be piecewise continuous. One more function $B^3$ is introduced. It satisfies a Lipschitz condition and approximates $B^1$, $B^2$ in integral metric. Using the game (1.2) and the function $B^3$ the space of the game $E = [\vartheta_1, \vartheta] \times R^n$ is divided into three parts $\Pi_-$, $\Pi_+$, $\Pi$, where $\Pi_-$, $\Pi_+$ are open, $\Pi$ is closed. The multivalued function

$$\mathbf{U}^*(t, x) = \begin{cases} \{-\mu\}, & (t, x) \in \Pi_-, \\ \{\mu\}, & (t, x) \in \Pi_+, \\ [-\mu, \mu], & (t, x) \in \Pi, \end{cases} \qquad (t, x) \in E$$

is introduced.

Let $U^*$ be an arbitrary one-valued function such that

$$U^*(t, x) \in \mathbf{U}^*(t, x)$$

for all $(t, x) \in E$ and let the first player use this function as the strategy with a step $\Delta$ in the game (1.1). Denote the Eulerian spline [1] outcoming from $(t_0, x_0)$ and corresponding to the control $v(\cdot)$ of the second player by $y^1(., t_0, x_0, U^*, \Delta, v(\cdot))$.

*Theorem.* Let the strategy $U^*$ in the game (1.1) is such that $U^*(t, x) \in \mathbf{U}^*(t, x)$ for any $(t, x) \in E$. Then for any $(t_0, x_0) \in E$, $\Delta > 0$ the following inequality holds

$$\Gamma(t_0, x_0, U^*, \Delta) \leqslant V^2(t_0, x_0) + 2(\vartheta - t_0)\lambda\mu\sqrt{\Delta\beta\mathcal{B}} + \lambda\varepsilon(t_0, \vartheta) + 2\lambda\mu\Delta\mathcal{B} + \|\gamma^2 - \gamma^1\|.$$

Here

$$\Gamma(t_0, x_0, U^*, \Delta) = \sup_{v(\cdot) \in \mathcal{E}^1} \gamma^1(y^1(, t_0, x_0, U^*, \Delta, v(\cdot)),$$

$\gamma^1$ and $\gamma^2$ are the payoff functions in the games (1.1), (1.2) respectively, $\mathcal{E}^1$ is the set of all open-loop controls of the first player in the game (1.1), $\beta$, $\lambda$ are Lipschitz constants of $B^3$ and $\gamma^2$ respectively,

$$\mathcal{B} = \min \{\sup |B^i(t)| : i = 1, 2, 3\}, \ T = [\vartheta_1, \vartheta],$$

$$\varepsilon(t_0, \vartheta) = \int_{t_0}^{\vartheta} [\mu(|B^1(t) - B^3(t)| + |B^2(t) - B^3(t)|) + \max_{l \in R^n, |l| \leq 1} (\max_{q \in Q^1} l'C^1(t)q - \max_{q \in Q^2} l'C^2(t)q)]dt$$

$$\|\gamma^2 - \gamma^1\| = \sup_{x \in R^n} |\gamma^2(x) - \gamma^1(x)|.$$

If the games (1.1) and (1.2) coincide and function $B^1$ satisfies Lipschitz condition then letting $B^3 = B^2 = B^1$ we obtain from the Theorem that the strategy $U^*$ is optimal.

Taking into account that the initial position in assertion of theorem is arbitrary we obtain that the strategy $U^*$ is optimal universal strategy.

The applying of the above described control rule $U^*$ and Theorem are illustrated by example, where calculations were performed by means of computer.

Н. Д. Боткин, В. С. Пацко
Институт математики и механики УНЦ АН СССР
СССР, 620219 Свердловск ГСП-384
ул. С. Ковалевской, д. 16.