ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2008, том 418, № 6, с. 741–744

МАТЕМАТИКА

УДК 62-50

РАЗРЫВНАЯ ФУНКЦИЯ ЦЕНЫ В ИГРОВЫХ ЗАДАЧАХ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ

© 2008 г. Л. В. Камнева

Представлено академиком Н.Н. Красовским 05.07.2007 г.

Поступило 14.09.2007 г.

В теории дифференциальных игр изучаются задачи управления по принципу обратной связи в условиях неопределенности и помех. Исследования дифференциальных игр начались в 1950–1960-е годы с рассмотрения математических моделей конфликтных ситуаций в динамических системах. В таких моделях движение управляемой системы описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями, в правую часть которых входят управляющие воздействия. Полезное управление рассматривается как действие первого игрока, минимизирующего некоторый функционал на множестве траекторий системы, а помеха считается результатом управления второго игрока, цель которого состоит в максимизации того же функционала. Управления игроков стеснены геометрическими ограничениями.

В статье рассматриваются игры, в которых функционалом платы является время до попадания фазовой точки на заданное замкнутое терминальное множество $M \subset \mathbf{R}^n$. Такие игры называются дифференциальными играми быстродействия. К ним относятся, например, задачи преследования–уклонения, а также задачи оптимального быстродействия в теории управления, которые можно рассматривать как игровые задачи при нулевом ограничении на управление второго игрока.

Будем придерживаться позиционной формализации дифференциальной игры, изложенной в книгах Н.Н. Красовского и А.И. Субботина [1, 2]. В рамках позиционной формализации важным для исследования дифференциальной игры является поиск функции цены, которая каждой точке пространства состояний системы ставит в соответствие оптимальный гарантированный результат в игре, начинающейся из этой точки. На базе функции цены можно построить стратегии оптимального управления по принципу обратной связи.

Институт математики и механики
Уральского отделения Российской Академии наук, Екатеринбург

В общем случае функция цены дифференциальной игры быстродействия может быть негладкой, разрывной, и, кроме того, допускает несобственное значение ∞.

Предположим, что построена некоторая тестируемая функция и требуется установить, что именно она является функцией цены игры. Постановка этой задачи полностью совпадает с рассмотренной ранее [3]. Однако приводимый в статье результат не зависит от сформулированного в [3].

Данная задача тесно связана с характеризацией функции цены.

Дифференцируемая функция цены является [4] единственным классическим решением краевой задачи для уравнения в частных производных первого порядка (уравнения Айзекса–Беллмана).

Если функция цены негладкая, но непрерывная, то основными при ее характеризации становятся понятия непрерывных u- и v-стабильных функций [2, с. 145], введенные в теории позиционных дифференциальных игр. В этом случае u-стабильные (v-стабильные) функции при соответствующем краевом условии мажорируют (минорируют) функцию цены дифференциальной игры, которая единственная обладает свойствами u- и v-стабильности.

Характеризация разрывной функции цены значительно усложняется [5, 6] и совпадает с описанием разрывного минимаксного решения [5, с. 243] краевой задачи для уравнения Айзекса–Беллмана. А именно, в задачах быстродействия функция цены является единственной полунепрерывной снизу u-стабильной функцией, удовлетворяющей нулевому краевому условию на границе терминального множества, к которой поточечно сходится последовательность полунепрерывных сверху v-стабильных функций, удовлетворяющих тому же краевому условию и непрерывных на границе множества M. Проверка существования такой последовательности и тем более ее построение затруднительны даже при решении задач на плоскости.

В сообщении сформулирована теорема о достаточных условиях совпадения тестируемой функции с функцией цены исследуемой дифференциальной игры быстродействия, охватывающая случай разрывной функции цены. Условия теоремы требуют проверки свойств, аналогичных свойствам разрывного минимаксного решения, но в сколь угодно малых окрестностях подмножеств, на которые разбиваются границы множеств уровня тестируемой функции. Рассмотрение нескольких окрестностей во многих случаях делает полученные условия более удобными для практической проверки, чем непосредственное использование определения разрывного минимаксного решения. Применение теоремы проиллюстрировано на примере игровой задачи быстродействия на плоскости.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается управляемая система, движение которой описывается уравнением

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), v(t)), \quad t \geq 0.$$

Здесь $x(t) \in \mathbf{R}^n$ – фазовое состояние в момент времени t; $u(t) \in P$ и $v(t) \in Q$ – управления первого и второго игроков; P и Q – компактные множества. Предполагается [1, 2], что функция f непрерывна по совокупности переменных, для нее выполнены условие подлинейного роста и локальное условие Липшица по x. Пусть

$$\min_{u \in P} \max_{v \in Q} \langle p, f(x, u, v)\rangle = \max_{v \in Q} \min_{u \in P} \langle p, f(x, u, v)\rangle,$$
$$x, p \in \mathbf{R}^n.$$

Здесь угловыми скобками обозначено скалярное произведение векторов.

Позиционными стратегиями [1, 2] первого и второго игроков являются произвольные функции U: $[0, \infty) \times \mathbf{R}^n \to P$ и V: $[0, \infty) \times \mathbf{R}^n \to Q$. Стратегии U; V порождают пучки $X_1(x_0, U)$, $X_2(x_0, V)$ конструктивных движений, выходящих из начальной позиции x_0 при $t = 0$.

Конструктивным движением $x(\cdot) \in X_1(x_0, U)$ называется [1, с. 33] функция $x(\cdot)$: $[0, \infty) \to \mathbf{R}^n$, для которой на любом отрезке $[0, \vartheta]$, $\vartheta > 0$, найдется последовательность ломаных Эйлера $x^{(k)}(\cdot)$: $[0, \infty) \to \mathbf{R}^n$, определяемых условиями

$$\dot{x}^{(k)}(t) = f(x^{(k)}(t), U(\tau_i^{(k)}, x^{(k)}(\tau_i^{(k)})), v^{(k)}(t)),$$
$$t \in [\tau_i^{(k)}, \tau_{i+1}^{(k)}), \quad x^{(k)}(0) = x_0, \quad \tau_0^{(k)} = 0,$$
$$i = 1, 2, \ldots,$$

равномерно сходящаяся к $x(\cdot)$ на $[0, \vartheta]$ и такая, что $\sup_i(\tau_{i+1}^{(k)} - \tau_i^{(k)}) \to 0$ при $k \to \infty$. Здесь интервалы $[\tau_i^{(k)}, \tau_{i+1}^{(k)})$, $i = 1, 2, \ldots$, разбивают полуось $t \geq 0$; $v^{(k)}(\cdot)$ – измеримая функция со значениями в множестве Q. Аналогично определяются элементы множества $X_2(x_0, V)$.

Цель первого игрока – быстрейшее сближение точки $x(t)$ с заданным замкнутым множеством $M \subset \mathbf{R}^n$. Второй игрок стремится либо исключить встречу с M, либо максимизировать время до встречи. Таким образом, функционал платы для игровой задачи быстродействия имеет вид

$$J(x(\cdot); M) =$$
$$= \begin{cases} \infty, & \text{если } \; x(t) \notin M \; \text{ для любого } \; t \geq 0; \\ \min\{t \geq 0 \colon x(t) \in M\} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если в точке x_0 выполнено равенство

$$\inf_U \sup_{x(\cdot) \in X_1(x_0, U)} J(x(\cdot); M) =$$
$$= \sup_V \min_{x(\cdot) \in X_2(x_0, V)} J(x(\cdot); M) =: T(x_0; M),$$

то значение $T(x_0; M) \in [0, \infty]$ называется ценой игры в точке x_0.

При указанных условиях на функцию f для любого $x_0 \in \mathbf{R}^n$ существует [1, 2] цена игры. Функция $T(\cdot; M)$: $\mathbf{R}^n \to [0, \infty]$ называется функцией цены игры.

Пусть на замкнутом множестве $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ определена некоторая функция $\varphi(\cdot)$: $\Omega \to [0, \infty]$. Задача состоит в нахождении таких условий на функцию $\varphi(\cdot)$, при которых выполнено равенство $\varphi(x) = T(x; M)$, $x \in \Omega$.

2. ТЕОРЕМА О ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ

С функцией цены тесно связаны понятия u- и v-стабильных функций [2, 5].

Определение 1. Функция $\omega(\cdot)$: $G \to [0, \infty]$ u-стабильна на открытом множестве $G \subseteq \mathbf{R}^n$, если она полунепрерывна снизу и для любых $y_0 \in G$ и $v_* \in Q$ существуют $\tau > 0$ и такое решение $y(\cdot)$: $[0, \tau] \to G$ дифференциального включения

$$\dot{y}(t) \in \operatorname{co}\{f(y(t), u, v_*) \colon u \in P\}, \quad y(0) = y_0,$$

для которых имеет место неравенство

$$\omega(y(t)) \leq \omega(y_0) - t, \quad t \in [0, \tau]. \tag{1}$$

В случае, когда функция $\omega(\cdot)$ конечна, неравенство (1) означает выполнение включения

$$(\omega(y_0) - t, y(t)) \in \operatorname{epi}\omega, \quad t \in [0, \tau],$$

где $\operatorname{epi}\omega = \{(z, x) \colon z \geq \omega(x), x \in G\}$ – надграфик функции $\omega(\cdot)$.

Определение 2. Функция $\tilde{\omega}(\cdot)$: $G \to [0, \infty]$ v-стабильна на открытом множестве $G \subseteq \mathbf{R}^n$, если она полунепрерывна сверху и для любых $y_0 \in G$ и $u_* \in P$ существуют $\tau > 0$ и такое решение $y(\cdot)$: $[0, \tau] \to G$ дифференциального включения

$$\dot{y}(t) \in \operatorname{co}\{f(y(t), u_*, v) \colon v \in Q\}, \quad y(0) = y_0,$$

для которых имеет место неравенство

$$\tilde{\omega}(y(t)) \geq \tilde{\omega}(y_0) - t, \quad t \in [0, \tau]. \tag{2}$$

В случае, когда функция $\tilde{\omega}(\cdot)$ конечна, неравенство (2) означает выполнение включения

$$(\tilde{\omega}(y_0) - t, y(t)) \in \operatorname{hypo}\tilde{\omega}, \quad t \in [0, \tau],$$

где $\operatorname{hypo}\tilde{\omega} = \{(z, x): z \leq \tilde{\omega}(x), x \in G\}$ – подграфик функции $\tilde{\omega}(\cdot)$.

Заметим, что в работах [2, 5] определения u- и v-стабильных функций даны для конечных функций.

Далее будем использовать обозначения: $\bar{A}$ – замыкание множества $A \subset \mathbf{R}^n$, O_r – открытый шар в $\mathbf{R}^n$ радиуса $r > 0$ с центром в начале координат.

Сформулируем теорему о достаточных условиях.

Теорема. *Пусть $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$, $M \subseteq \Omega$ – замкнутые множества и задана функция*

$$\varphi(\cdot): \Omega \to [0, \infty].$$

Введем обозначения:

$$\Theta = \sup_{z \in \Omega} \varphi(z), \quad D(t) = \{x \in \Omega: \varphi(x) \leq t\},$$

$$t \in [0, \Theta),$$

$$F(t) = \{x \in \partial D(t): \varphi(x) = t\},$$

$$B(t) = \{x \in \partial D(t): \varphi(x) < t\},$$

$$S(t) = \overline{F(t)} \cap \overline{B(t)},$$

$$G(t, \varepsilon) = \begin{cases} \varnothing, & S(t) = \varnothing; \\ S(t) + O_\varepsilon, & S(t) \neq \varnothing, \end{cases} \quad \varepsilon > 0.$$

Предположим, что функция $\varphi(\cdot)$ полунепрерывна снизу, $D(0) = M$, $\mathcal{T} \subset (0, \Theta)$ – некоторое конечное (возможно, пустое) множество и выполнены следующие условия.

1) *Для любого $t \in (0, \Theta)\backslash\mathcal{T}$, такого, что $S(t) \neq \varnothing$, существуют число $\varepsilon_0 > 0$ и множество $G_\infty \subset G(t, \varepsilon_0)\backslash D(t)$, такие, что:*

а) *выполнены соотношения*

$$G(t, \varepsilon_0) \subset G_\infty \cup \Omega,$$

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \sup\{\varphi(x): x \in G(t, \varepsilon)\backslash G_\infty\} = t$$

и функция

$$\omega(x) = \begin{cases} \varphi(x) - t, & x \in G(t, \varepsilon_0)\backslash(G_\infty \cup D(t)); \\ 0, & x \in D(t) \cap G(t, \varepsilon_0); \\ \infty, & x \in G_\infty, \end{cases}$$

u-стабильна на множестве $G(t, \varepsilon_0)\backslash D(t)$;

б) *существует последовательность функций*

$$\omega_k(\cdot): G(t, \varepsilon_0) \to [0, \infty], \quad k \in \mathbf{N},$$

которые v-стабильны на множестве $G(t, \varepsilon_0)\backslash D(t)$, равны нулю и непрерывны в точках множества $D(t) \cap G(t, \varepsilon_0)$, и

$$\lim_{k \to \infty} \omega_k(x) = \omega(x), \quad x \in G(t, \varepsilon_0).$$

2) *Для любого $t \in (0, \Theta)\backslash\mathcal{T}$, такого, что $F(t)\backslash S(t) \neq \varnothing$, и всякого достаточно малого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для множества*

$$G^F(t, \varepsilon, \delta) = F(t)\backslash G(t, \varepsilon) + O_\delta$$

выполнено вложение $G^F(t, \varepsilon, \delta) \subset \Omega$, а функция $\varphi(\cdot)$ конечна и обладает свойствами u- и v-стабильности на множестве $G^F(t, \varepsilon, \delta)$.

3) *Для любого $t \in (0, \Theta)\backslash\mathcal{T}$, такого, что $B(t)\backslash S(t) \neq \varnothing$, и всякого достаточно малого $\varepsilon > 0$ найдутся число $\delta > 0$ и последовательность функций*

$$\omega_k^\infty(\cdot): G^B(t, \varepsilon, \delta) \to [0, \infty], \quad k \in \mathbf{N},$$

где

$$G^B(t, \varepsilon, \delta) = B(t)\backslash G(t, \varepsilon) + O_\delta,$$

такие, что функции $\omega_k^\infty(\cdot)$, $k \in \mathbf{N}$, v-стабильны на множестве $G^B(t, \varepsilon, \delta)\backslash D(t)$, равны нулю и непрерывны в точках множества $D(t) \cap G^B(t, \varepsilon, \delta)$ и выполнено предельное соотношение

$$\lim_{k \to \infty} \omega_k^\infty(x) = \infty, \quad x \in G^B(t, \varepsilon, \delta)\backslash D(t).$$

4) *Для любого $x_0 \in \Omega\backslash M$, такого, что $\varphi(x_0) = \Theta < < \infty$, найдется последовательность $\{x_k\}_1^\infty \subset \Omega$, для которой $\varphi(x_k) < \varphi(x_0)$ и $x_k \to x_0$ при $k \to \infty$.*

Тогда

$$\varphi(x) = T(x; M), \quad x \in \Omega.$$

3. ПРИМЕР

Пусть в игре быстродействия уравнения движения и ограничения на управления игроков имеют вид

$$\dot{x}_1 = x_2 - v, \quad \dot{x}_2 = u, \quad |u| \leq \mu, \\ 0 \leq v \leq \nu, \quad \mu > 0. \tag{3}$$

Задано терминальное множество $M = (0, a)^\top$, $a > \nu$. Здесь $\top$ – символ транспонирования.

Построим синтез управления (рис. 1), при помощи которого зададим функцию $\varphi(\cdot)$. Такой синтез исследован ранее в [7].

На множестве $x_1 \leq 0$, $x_2 \geq 0$ рассмотрим кривую $\mathcal{B}^\pm$, вдоль которой идет траектория системы (3)

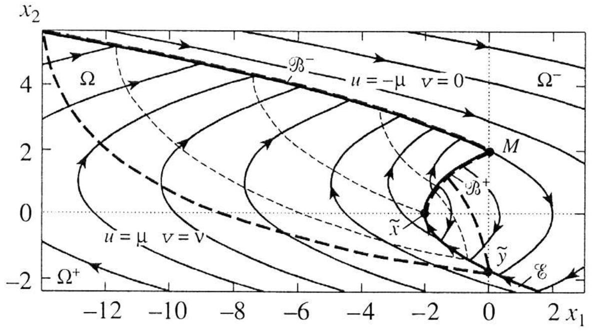

Рис. 1. Построение тестируемой фукнции $\varphi(\cdot)$ при $a = 2, \mu = \nu = 1$.

при $v(t) = 0$, $u(t) = \pm\mu$, приходящая в точку M. Парабола $\mathscr{B}^+$ пересекается с осью x_1 в точке $\tilde{x} = \left(-\frac{a^2}{2\mu}, 0\right)^\top$. В нижней полуплоскости построим кривую $\mathscr{E}$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{x_2}{\mu} + \frac{2\nu x_2}{\mu(\sqrt{\nu^2 - 4\nu x_2 - 4\mu x_1 + 2x_2^2 + 2a^2} - \nu - 2x_2)}$$

и проходящую через точку $\tilde{x}$. Символом Ω^+ (соответственно Ω^-) обозначим открытую часть плоскости, лежащую слева (справа) от составной кривой $\mathscr{B}^-\mathscr{B}^+\mathscr{E}$.

Пусть начальная точка находится на кривой $\mathscr{B}^-$ и игроки применяют управления $v = \nu$, $u^-(x) = \mu\left(1 - \frac{\nu}{x_2}\right)$. Тогда движение идет по $\mathscr{B}^-$ и на нем реализуется время самого "медленного" движения системы (3) вдоль этой кривой до точки M. Время такого движения из точки $x \in \mathscr{B}^-$ до точки M обозначим $\varphi(x)$.

Для точки $x \in \Omega^+ \cup \mathscr{B}^+\mathscr{E}$ ($x \in \Omega^-$) значение $\varphi(x)$ возьмем равным времени движения системы (3) из начальной точки x при $u = \mu$, $v = \nu$ ($u = -\mu$, $v = 0$) до пересечения с кривой $\mathscr{B}^-(\mathscr{E})$ плюс значение функции $\varphi(\cdot)$ в точке пересечения.

Пусть $\tilde{y}$ – точка пересечения кривой $\mathscr{E}$ с осью x_2. Положим

$$\Omega = \{x \in \mathbf{R}^2 : \varphi(x) \le \varphi(\tilde{y})\}.$$

На рис. 1 граница множества Ω показана полужирной штриховой линией. Изображены также линии уровня функции $\varphi(\cdot)$ на Ω. В множестве Ω функция $\varphi(\cdot)$ разрывна на дуге $(\overline{\mathscr{B}^+ \cap \operatorname{int}\Omega}) \setminus \{\tilde{x}\}$.

Можно проверить, что для функции $\varphi(\cdot)$: $\Omega \to [0, \varphi(\tilde{y})]$ выполнены условия сформулированной выше теоремы. Стало быть, функция $\varphi(\cdot)$ является функцией цены на множестве Ω.

Автор благодарит В.С. Пацко за руководство работой.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06–01–00414) и молодежного гранта УрО РАН 2007 г.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. *Krasovskii N.N., Subbotin A.I.* Game-Theoretical Control Problems. N.Y.: Springer, 1988. 518 p.
3. *Камнева Л.В.* // ДАН. 2006. Т. 408. № 3. С. 301–304.
4. *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 480 с.
5. *Субботин А.И.* Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка: перспективы динамической оптимизации. М.; Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2003. 336 с.
6. *Bardi M., Capuzzo-Dolcetta I.* Optimal Control and Viscosity Solutions of Hamilton–Jacobi–Bellman Equations. Boston: Birkhäuser, 1997. 570 p.
7. *Пацко В.С.* // Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7. № 3. С. 424–435; 1972. Т. 8. № 8. С. 1423–1434.