

# Множество достижимости для машины Дубинса и его применение в задаче наблюдения с неполной информацией

В.С. Пацко<sup>1</sup>, А.А. Федотов<sup>2</sup>

Аннотация — Исследуется трёхмерное множество достижимости в момент для управляемого объекта “машина Дубинса”. Управлением является угловая скорость поворота вектора линейной скорости. Наряду со случаем, когда по постановке задачи поворот возможен в обе стороны, рассматриваются случаи одностороннего поворота. Приведены трёхмерные изображения множеств достижимости. Проанализирована достаточность условий принципа максимума Понтрягина для управлений, ведущих на границу множества достижимости. Рассматривается возможность использования множеств достижимости в проблеме наблюдения за движением в условиях неточных измерений геометрического положения.

## 1. ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Множество достижимости — одно из центральных понятий современной математической теории управления [1], [2]. Под множеством достижимости  $G(t_f)$  “в момент” времени  $t_f$  понимаем совокупность всех фазовых состояний, в каждое из которых возможен перевод системы в момент  $t_f$  из заданного в момент  $t_0$  начального фазового состояния при помощи некоторого допустимого управления. Во избежание недоразумений подчеркнём отличие рассматриваемого в статье множества достижимости в момент от множества достижимости “к моменту”. Последнее представляет собой объединение множеств достижимости в момент на интервале  $[t_0, t_f]$ .

Замечательно, что любое допустимое программное управление, ведущее на границу множества достижимости, удовлетворяет принципу максимума Понтрягина [2]. Такое свойство “экстремальности” используется в работе при нахождении множества достижимости. Эффективное описание множеств достижимости, в свою очередь, можно применять в самых разных задачах оптимального управления, в задачах наблюдения за движением, в задачах конфликтного управления.

Среди моделей управляемого движения, наиболее часто используемых в робототехнике и прикладных авиационных задачах, очень популярной является “машина Дубинса” [3] — [12].

В этой модели, описывающей движение точечного объекта на плоскости, величина линейной скорости является постоянной, а величина мгновенной угловой

скорости ограничена снизу и сверху. Последнее равносильно ограничению на мгновенный радиус поворота.

Динамика машины Дубинса описывается системой дифференциальных уравнений третьего порядка:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \cos \varphi, \\ \dot{y} &= \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} &= u, \quad u \in [u_1, u_2]. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $x, y$  — координаты геометрического положения объекта,  $\varphi$  — угол направления вектора скорости, отсчитываемый против часовой стрелки от оси  $x$  (Fig. 1),  $u$  — скалярное управление. Величина линейной скорости равна 1. Величина  $u_1$  является параметром задачи и удовлетворяет неравенству

$$-u_2 \leq u_1 < u_2. \quad (2)$$

Мы предполагаем, что  $u_2 = 1$ .

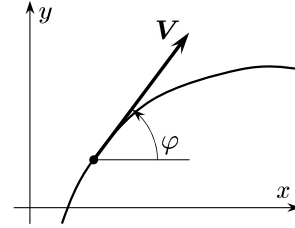


Рис. 1. Система координат,  $V = (\dot{x}, \dot{y})^T$

К представлению (1), (2) с  $u_2 = 1$  может быть приведена произвольная управляемая система третьего порядка, описывающая движение с постоянной по величине линейной скоростью и заданным диапазоном угловой скорости поворота. Для этого требуется перемасштабирование по геометрическим координатам и по времени.

В качестве допустимых управлений  $u(\cdot)$  рассматриваем измеримые функции времени со значениями  $u(t) \in [u_1, u_2]$ . Предполагается, что угловая координата  $\varphi$  принимает свои значения в интервале  $(-\infty, \infty)$ .

При изучении множества достижимости  $G(t_f)$  в момент  $t_f$  для одноточечного начального фазового состояния, не теряя общности, считаем его нулевым в начальный момент времени  $t_0 = 0$ :  $x_0 = 0, y_0 = 0, \varphi_0 = 0$ .

Будем различать следующие случаи:

- a)  $u_1 = -1, u_2 = 1$ ;      b)  $-1 < u_1 < 0, u_2 = 1$ ;
- c)  $u_1 = 0, u_2 = 1$ ;      d)  $0 < u_1 < u_2 = 1$ .

<sup>1</sup>Институт естественных наук и математики Уральского федерального университета, Екатеринбург, Россия patsko@imm.uran.ru

<sup>2</sup>Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского, Екатеринбург, Россия andreyfedotov@mail.ru

В работе [13] для случая а) описано множество достижимости в проекции на плоскость  $x, y$ . Некоторые вопросы, связанные с изучением и построением трёхмерных множеств достижимости в момент для случаев а)–д), рассматривались в предыдущих статьях [14]–[18].

Исследование множеств достижимости к моменту связано с задачами быстродействия. Для случаев а) и б) построение таких множеств изучалось в работах [4], [19]. Имеются статьи (см., например, [20]), в которых при помощи численных методов, разрабатываемых для уравнений типа Гамильтона–Якоби, получены изображения трёхмерных множеств достижимости к моменту.

Новым результатом данной работы является анализ свойства выпуклости сечений по угловой координате ( $\varphi$ -сечений) трёхмерного множества достижимости  $G(t_f)$ . Такое свойство является специфическим для случаев с) и д) и отсутствует для случаев а) и б). Свойство выпуклости  $\varphi$ -сечений связано с достаточностью условий принципа максимума Понтрягина для управлений, ведущих на границу множества достижимости  $G(t_f)$ . Соответствующие факты также сформулированы в данной работе.

В качестве естественного применения множеств достижимости в работе рассматривается построение информационных множеств [21] в задаче наблюдения за движением.

Пусть с некоторым шагом по времени поступают измерения текущего положения наблюдаемого объекта на плоскости  $x, y$ . Известно ограничение на уровень ошибок измерений. Третья координата — угол текущего направления движения является ненаблюдаемой.

Под информационным множеством  $I(t)$  для момента  $t$  понимаем совокупность всех трёхмерных фазовых состояний системы (1), совместных с замерах, полученными к моменту  $t$ . Точное построение информационных множеств вряд ли возможно. Но, разумно применяя процедуру овыпукления, можно построить удовлетворительную оценку сверху в виде множеств  $\mathbf{I}(t_i) \supset I(t_i)$  с выпуклыми сечениями по угловой координате  $\varphi$ .

Рекуррентная процедура построения множеств  $\mathbf{I}(t_{i+1})$  при дискретных измерениях состоит в следующем. Пусть для момента  $t_i$  известно множество  $\mathbf{I}(t_i)$ . Строим на момент  $t_{i+1}$  трёхмерное множество прогноза  $\mathbf{G}(t_{i+1}, \mathbf{I}(t_i))$  фазовых состояний системы (1) при заданном множестве  $\mathbf{I}(t_i)$  в момент  $t_i$ . На основе пришедшего в момент  $t_{i+1}$  замера находим множество неопределённости  $H(t_{i+1})$  фазовых состояний, совместных с этим замером. Множество  $\mathbf{I}(t_{i+1})$  определяется как пересечение  $\mathbf{G}(t_{i+1}, \mathbf{I}(t_i)) \cap H(t_{i+1})$ .

Описанная процедура построения информационных множеств реализует классическую схему “предсказания – коррекции” в теории наблюдения при дискретном поступлении замеров.

Практическое построение оценочных информационных множеств для системы (1) опирается на их численное представление в виде наборов сечений по угловой координате. Для реализации пересчёта таких множеств на текущий момент измерения требуется чёткое представление о структуре соответствующих трёхмерных множеств достижимости для точечного начального положения.

Статья организована следующим образом. Во втором разделе описываются типы движений, ведущих на границу множества достижимости. Третий раздел посвящён описанию границы множеств достижимости, включая описание сечений по угловой координате. В четвёртом разделе предложен способ построения аппроксимации сверху информационных множеств, опирающийся на простые операции с выпуклыми множествами на плоскости. Приведён пример численного построения множества прогноза.

## II. УПРАВЛЕНИЯ, ВЕДУЩИЕ НА ГРАНИЦУ МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ

Воспользуемся тем, что управления, которые приводят систему на границу множества достижимости  $G(t_f)$  в момент  $t_f$ , удовлетворяют принципу максимума Понтрягина (ПМП).

Пусть  $u^*(\cdot)$  — некоторое допустимое управление и  $(x^*(\cdot), y^*(\cdot), \varphi^*(\cdot))$  — вызываемое им движение системы (1) на промежутке  $[t_0, t_f]$ . Дифференциальные уравнения для сопряженной системы имеют [4], [14], [19] вид

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_1 &= 0, \\ \dot{\psi}_2 &= 0, \\ \dot{\psi}_3 &= \psi_1 \sin \varphi^*(t) - \psi_2 \cos \varphi^*(t).\end{aligned}\tag{3}$$

ПМП означает, что существует ненулевое решение  $(\psi_1^*(\cdot), \psi_2^*(\cdot), \psi_3^*(\cdot))$  системы (3), для которого почти всюду (п.в.) на промежутке  $[t_0, t_f]$  выполнено условие

$$\begin{aligned}&\psi_1^*(t) \cos \varphi^*(t) + \psi_2^*(t) \sin \varphi^*(t) + \psi_3^*(t) u^*(t) = \\ &= \max_{u \in [u_1, u_2]} [\psi_1^*(t) \cos \varphi^*(t) + \psi_2^*(t) \sin \varphi^*(t) + \psi_3^*(t) u]\end{aligned}$$

или, что то же самое,

$$\psi_3^*(t) u^*(t) = \max_{u \in [u_1, u_2]} \psi_3^*(t) u \quad \text{п.в. } t \in [t_0, t_f].\tag{4}$$

Функции  $\psi_1^*(\cdot)$  и  $\psi_2^*(\cdot)$  являются постоянными величинами. Обозначим их через  $\psi_1^*$  и  $\psi_2^*$ .

Если  $\psi_1^* = 0$  и  $\psi_2^* = 0$ , то  $\psi_3^*(t) = \text{const} \neq 0$  на всем промежутке  $[t_0, t_f]$ . В этом случае имеем п.в.  $u^*(t) = u_1$  или п.в.  $u^*(t) = u_2$ .

Пусть, по крайней мере, одно из чисел  $\psi_1^*$ ,  $\psi_2^*$  не равно нулю. Опираясь на уравнения динамики (1) и на уравнения сопряженной системы (3), можем записать выражение для  $\psi_3^*(t)$ :

$$\psi_3^*(t) = \psi_1^* y^*(t) - \psi_2^* x^*(t) + C.$$

Отсюда следует, что  $\psi_3^*(t) = 0$  тогда и только тогда, когда точка  $(x^*(t), y^*(t))^T$  геометрического положения в момент  $t$  удовлетворяет уравнению прямой

$$\psi_1^* y - \psi_2^* x + C = 0. \quad (5)$$

Имеем  $\psi_3^*(t) > 0$  в полуплоскости  $\psi_1^* y - \psi_2^* x + C > 0$  и  $\psi_3^*(t) < 0$  в полуплоскости  $\psi_1^* y - \psi_2^* x + C < 0$ .

Поскольку смена знака функции  $\psi_3^*(\cdot)$  влечет переключение управляющего воздействия с одного крайнего значения на другое, то прямую (5) часто называют прямой переключения.

В силу соотношения (4), если  $\psi_3^*(t) > 0$  на некотором промежутке, то  $u^*(t) = u_2$  п.в. на этом промежутке. Соответствующее движение в проекции на плоскость  $x, y$  идет по дуге окружности радиусом  $1/u_2$  против часовой стрелки. Если  $\psi_3^*(t) < 0$ , то  $u^*(t) = u_1$ . Движение идет по дуге окружности радиусом  $1/|u_1|$  по часовой стрелке при  $u_1 < 0$ , против часовой стрелки в случае  $u_1 > 0$  и представляет собой движение по прямой, если  $u_1 = 0$ .

Если  $\psi_3^*(t) = 0$  на некотором промежутке, то движение  $(x^*(\cdot), y^*(\cdot))$  на этом промежутке идет по прямой переключения (5). При этом п.в.  $u^*(t) = 0$ . Такой случай невозможен при  $u_1 > 0$ .

Типичные варианты движений на плоскости  $x, y$  с соответствующими прямыми переключения для  $u_1 \in (-1, 1)$  приведены в работе [17].

В целом, для системы (1) любое движение, удовлетворяющее ПМП, в проекции на плоскость  $x, y$  формируется из участков движения по дугам окружностей и прямолинейных участков. На каждом из них управление можно считать постоянным. Поэтому при анализе управлений, удовлетворяющих ПМП, можем ограничиться кусочно-постоянными управлениями (предполагаем непрерывность справа в точках разрыва). Имеет место конечность числа переключений на промежутке  $[t_0, t_f]$ .

Для случаев а), б) постановки задачи ранее было доказано следующее утверждение.

**Т е о р е м а 1** [14], [17]. В каждую точку границы множества достижимости системы (1) можно перейти при помощи кусочно-постоянного управления с не более чем двумя переключениями. При этом в случае двух переключений можно ограничиться шестью вариантами последовательности управлений:

$$\begin{aligned} 1) & u_2, 0, u_2; & 2) & u_1, u_2, u_1; & 3) & u_2, u_1, u_2; \\ 4) & u_1, 0, u_1; & 5) & u_1, 0, u_2; & 6) & u_2, 0, u_1. \end{aligned} \quad (6)$$

Отметим, что варианты (6) совпадают с теми вариантами оптимальных управлений, что указаны для задачи оптимального быстродействия в статье [3]. Каждый из промежутков, на котором действует постоянное управление, может вырождаться.

**Т е о р е м а 2** [16], [17]. Пусть  $u_1 = 0$ . Тогда в любую точку границы множества достижимости

системы (1) можно попасть при помощи кусочно-постоянного управления  $u^*(\cdot)$ , принимающего значения  $u_1 = 0$  и  $u_2 = 1$  с не более чем двумя переключениями. Здесь возможны два варианта последовательности управлений:

$$1) 1, 0, 1; \quad 2) 0, 1, 0.$$

Пусть  $u_1 > 0$ . Тогда с увеличением  $t_f$  растет также и возможное число переключений управления (однако их число при заданном  $t_f$  конечно) Исследование данного случая представлено в работе [18].

В итоге, для всех четырёх вариантов значений  $u_1$  имеются описания программных управлений  $u(\cdot)$ , ведущих на границу множества достижимости. Эти описания имеют конструктивный характер и позволяют сформировать границу множества достижимости в трёхмерном пространстве в виде конечного набора кусков гладких поверхностей. Соответствующие участки границы представляются в виде двухпараметрических семейств точек [14]. В целом граница трёхмерного множества достижимости гладкой не является. Однако отдельные её участки, образуемые однотипными управлениями, являются гладкими. В некоторых случаях (но не всегда) сопряжение таких участков также является гладким.

Изображения множеств достижимости на момент  $t_f = 3\pi$  для трёх значений  $u_1 = -0.25, 0.0, 0.25$  показаны на рис. 2. Нумерация цветов участков границы соответствует перечню управлений (6). Нижняя точка всех трёх множеств одна и та же и соответствует движению с постоянным управлением  $u(t) \equiv u_2 = 1$ .

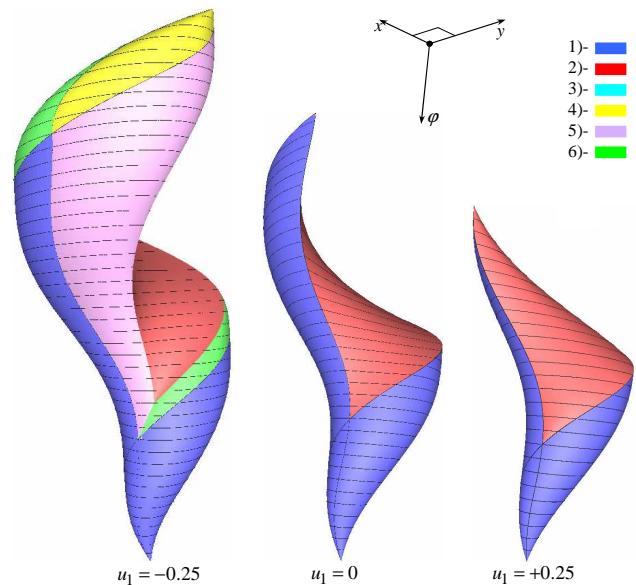


Рис. 2. Множества достижимости для  $t_f = 3\pi$  при разных значениях  $u_1$  и при одном и том же значении  $u_2 = 1$

### III. СЕЧЕНИЯ МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ ПО УГЛОВОЙ КООРДИНАТЕ

Опишем сечения по угловой координате ( $\varphi$ -сечения) множества достижимости  $G(t_f)$  для различных случаев.

\* Пусть  $0 < u_1 < u_2 = 1$  (случай d). В этом случае количество переключений управлений, ведущих на границу, растёт с увеличением момента  $t_f$ . Но при этом  $\varphi$ -сечения являются строго выпуклыми. Свойство выпуклости  $\varphi$ -сечений первоначально было замечено в процессе моделирования [17], а потом доказано теоретически [18]. Также было установлено, что граница любого  $\varphi$ -сечения составляется из четырёх типов дуг SB, BB, SS, BS, для каждой из которых имеется аналитическое описание. Возможные варианты их стыковки схематично показаны на рис. 3.

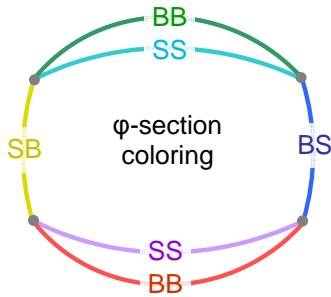


Рис. 3. Возможные варианты структуры сечений множества достижимости при  $u_1 \in (0, 1)$ ,  $u_2 = 1$

Дуга типа SB образуется при помощи кусочно-постоянных управлений со значением  $u_2$  на первом участке и со значением  $u_1$  на последнем. Для дуги типа BB управление на первом и последнем участках принимает значение  $u_1$ . Аналогично, меняя местами  $u_1$  и  $u_2$ , определяются дуги BS, SS.

Число переключений управлений, ведущих на одну и ту же дугу, зависит от момента  $t_f$  и выбранного  $\varphi$ . При зафиксированных  $t_f$  и  $\varphi$  количество переключений для дуг BS и SB одинаково. Для дуг BB и SS оно либо такое же, либо отличается на одно переключение.

При выбранном направлении обхода границы (по или против часовой стрелки) возможны 4 варианта следования дуг:

$$\begin{array}{ll} \text{SB, BB, BS, SS;} & \text{SB, BB, BS, BB;} \\ \text{SB, SS, BS, SS;} & \text{SB, SS, BS, BB.} \end{array}$$

В зависимости от  $t_f$  и  $\varphi$  некоторые дуги могут вырождаться. При этом дуги BS и SB вырождаются одновременно. В работе [18] установлено, что всего может быть 11 типов  $\varphi$ -сечений.

На рис. 4 показаны примеры множеств достижимости  $G(t_f)$  при  $u_1 = 0.5, u_2 = 1$  для трёх моментов

$t_f = 6\pi, 10\pi, 20\pi$ . Цвета участков границы соответствуют рис. 3. Один и тот же цвет может встречаться несколько раз, поскольку меняется количество переключений при изменении  $\varphi$ .

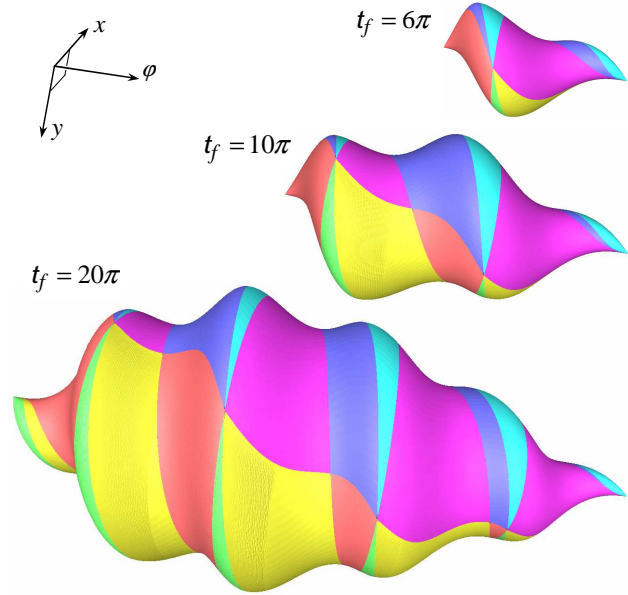


Рис. 4. Множества достижимости для одностороннего случая при  $u_1 = +0.5, u_2 = 1$

\*\* Пусть  $u_1 = 0, u_2 = 1$  (случай c). Этот случай является самым простым. Здесь любое  $\varphi$ -сечение представляет собой [16], [17] либо круг (когда  $\varphi \geq 2\pi$  независимо от  $t_f$ ), либо круговой сектор, если  $\varphi < 2\pi$ . Таким образом, в данном случае  $\varphi$ -сечения являются выпуклыми.

\*\*\* Пусть  $u_1 = -1$  или  $-1 < u_1 < 0; u_2 = 1$  (случаи а и б). Здесь граница  $\varphi$ -сечений образуется при помощи шести типов управлений, указанных во втором разделе. В рассматриваемых случаях  $\varphi$ -сечения могут быть невыпуклыми и даже неодносвязными. На рис. 5 показаны примеры сечений для  $u_1 = -1, t_f = 3.564$ . При  $\varphi = 0.3$  сечение не является односвязным, а при  $\varphi = 0$  и  $\varphi = 0.15$  сечения односвязные. Раскраска границы соответствует рис. 2.

Выполнение ПМП является необходимым для управлений, ведущих на границу множества достижимости. Вообще говоря, для машины Дубинса это условие не является достаточным. Установлено, что в каждом из случаев а) и б) существует программное кусочно-постоянное управление, для которого ПМП выполнен, но соответствующее движение в момент  $t_f$  находится внутри множества  $G(t_f)$ , т.е. внутри некоторого его  $\varphi$ -сечения. Для случаев с) и d) доказано, что ПМП является достаточным условием перевода на границу. Бросается в глаза, что это связано с выпуклостью  $\varphi$ -сечений. Для случая d)

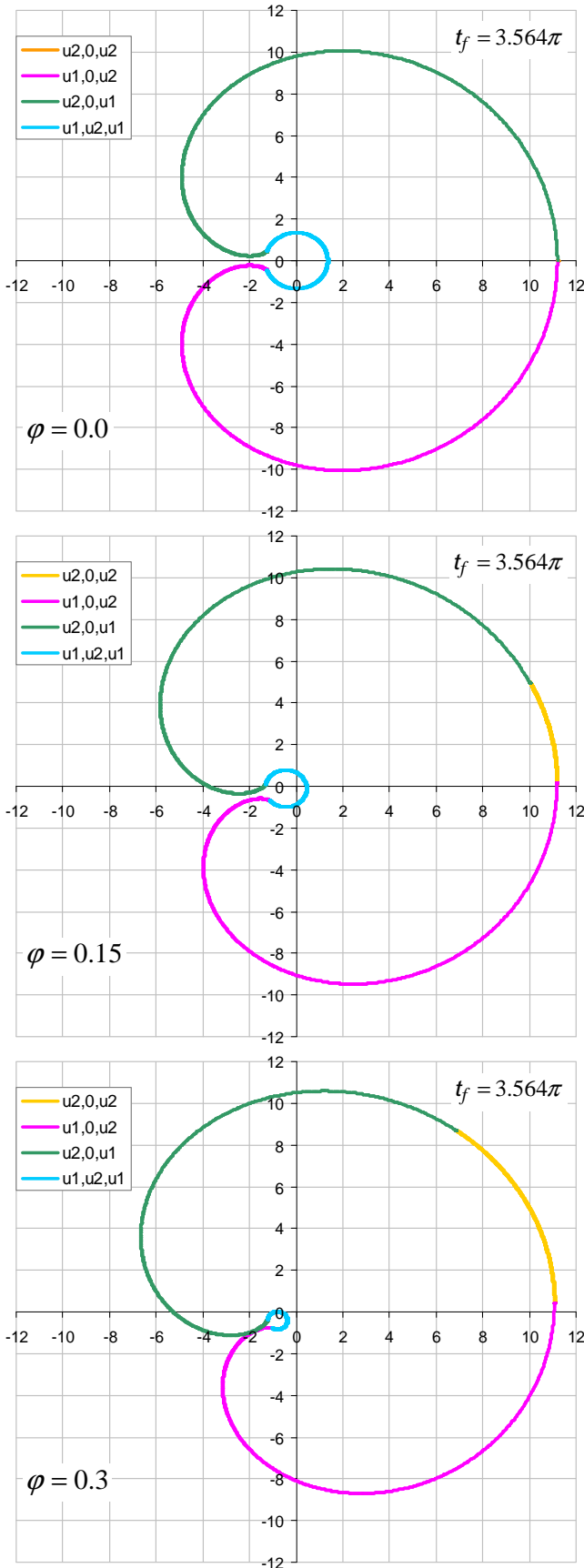


Рис. 5. Двумерные  $\varphi$ -сечения множества достижимости при  $u_1 = -1$ ,  $u_2 = 1$ ,  $t_f = 3.564$

$\varphi$ -сечения являются строго выпуклыми. Установлено, что в этом случае кусочно-постоянное программное управление, удовлетворяющее ПМП, определяет единственное движение, ведущее в соответствующую точку на границе множества  $G(t_f)$ . Связь между ПМП и свойством выпуклости  $\varphi$ -сечений отражена на рис. 6.

Выпуклость, а тем более строгую выпуклость  $\varphi$ -сечений, можно использовать при анализе достаточности ПМП в различных задачах оптимизации, в которых движение объекта описывается системой (1), (2) с ограничениями вида с) или d) на управление  $u$ . К таким задачам относится, например, задача быстрогодействия, в которой цель управления — перевод системы на выпуклое замкнутое множество в плоскости геометрических координат. При этом в момент перевода угол  $\varphi$  должен принимать заданное значение.

	Pontryagin Maximum Principle	$\varphi$ -sections of the reachable set	Controls leading onto the boundary
$u_1 = -1$ symmetric case	Only necessary condition	Non-convex	Non-uniqueness in the class of piecewise constant controls
$u_1 \in (-1, 0)$ asymmetric case			
$u_1 = 0$ case of one-sided turn	Necessary and sufficient condition	Convex	Uniqueness in the class of piecewise constant controls
$u_1 \in (0, 1)$ case of strictly one-sided turn		Strict convex	

Рис. 6. Принцип максимума Понтрягина и свойство выпуклости  $\varphi$ -сечений множества достижимости

#### IV. ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ ЗАДАЧИ НАБЛЮДЕНИЯ

В разделах II и III начальное множество было взято в виде точки в трёхмерном пространстве. При решении задачи наблюдения необходимо решать задачу о построении множества достижимости при произвольном начальном множестве. По аналогии с [22] будем использовать аппроксимацию множеств достижимости при помощи совокупности выпуклых плоских  $\varphi$ -сечений. Сечение множества достижимости  $G$

по  $\varphi$  будем обозначать  $G_\varphi$ . Совокупность непустых  $\varphi$ -сечений множества  $G(t)$  обозначим через  $\{G_\varphi(t)\}$ . Аналогичные обозначения будем использовать для сечений оценочных информационных множеств. Например,  $\mathbf{I}_\varphi(t)$  — это сечение множества  $\mathbf{I}(t)$  по координате  $\varphi$ . Выпукление множества  $A$  в плоскости  $x, y$  обозначим  $\text{conv}(A)$ .

Пусть в момент  $t_i$  задано некоторое оценочное информационное множество  $\mathbf{I}(t_i)$ . Предполагаем, что оно имеет выпуклые  $\varphi$ -сечения. Опишем построение оценки сверху  $\mathbf{G}(t_{i+1}, \mathbf{I}(t_i))$  множества достижимости  $G(t_{i+1}, \mathbf{I}(t_i))$  для момента  $t_{i+1} > t_i$ . Множество  $\mathbf{G}(t_{i+1}, \mathbf{I}(t_i))$  назовём множеством прогноза.

Учитывая материал предыдущего раздела, считаем, что мы располагаем описанием совокупности  $\{G_\varphi(t_f)\}$  всех непустых  $\varphi$ -сечений  $G_\varphi(t_f)$  множества достижимости при точечном  $(x_0 = 0, y_0 = 0, \varphi_0 = 0)$  начальном фазовом состоянии. Для начальной точки  $x(t_0) = 0, y(t_0) = 0$  и  $\varphi(t_0) = \varphi_0$  обозначим через  $G_\varphi(t_f, \varphi_0)$  соответствующее  $\varphi$ -сечение множества достижимости на момент  $t_f$ . Множество  $G_\varphi(t_f, \varphi_0)$  представляет собой повернутое на угол  $\varphi_0$  относительно начала координат множество  $G_\varphi(t_f)$ .

Возьмем в качестве начального момента момент  $t_i$ , а в качестве момента  $t_f$  момент  $t_{i+1}$ . Рассмотрим положения системы на плоскости  $x, y$  в момент  $t_i$  в виде сечения  $\mathbf{I}_{\varphi_*}(t_i)$  множества  $\mathbf{I}(t_i)$  при некотором  $\varphi_*$ . Тогда для любого  $\varphi$  такого, что  $G_\varphi(t_{i+1}, \varphi_*) \neq \emptyset$ , совокупность возможных положений на момент  $t_{i+1}$  записывается в виде алгебраической суммы (сумма Минковского)

$$\mathbf{I}_{\varphi_*}(t_i) + G_\varphi(t_{i+1}, \varphi_*).$$

Такое представление справедливо в силу отсутствия  $x, y$  в правой части системы (1). Далее возьмём объединение по совокупности  $\{\varphi_*(t_i)\}$  значений  $\varphi_*$ , для которых  $\mathbf{I}_{\varphi_*}(t_i) \neq \emptyset, G_\varphi(t_{i+1}, \varphi_*) \neq \emptyset$ , с последующим выпуклением:

$$\mathbf{G}_\varphi(t_{i+1}, \mathbf{I}(t_i)) = \text{conv} \bigcup_{\varphi_* \in \{\varphi_*(t_i)\}} [\mathbf{I}_{\varphi_*}(t_i) + G_\varphi(t_{i+1}, \varphi_*)].$$

Заданное таким образом через свои  $\varphi$ -сечения множество прогноза  $\mathbf{G}_\varphi(t_{i+1}, \mathbf{I}(t_i))$  даёт аппроксимацию сверху совокупности фазовых состояний системы на момент  $t_{i+1}$ , совместных с динамикой системы (1) и заданным множеством  $\mathbf{I}(t_i)$ . Сечения оценочного информационного множества  $\mathbf{I}(t_{i+1})$  получаем путём пересечения  $\varphi$ -сечений множества  $\mathbf{G}_\varphi(t_{i+1}, \mathbf{I}(t_i))$  с множеством неопределённости  $H(t_{i+1})$  очередного замера на плоскости  $x, y$ :

$$\mathbf{I}_\varphi(t_{i+1}) = \mathbf{G}_\varphi(t_{i+1}, \mathbf{I}(t_i)) \cap H(t_{i+1}).$$

В момент  $t_0$  считаем известным выпуклое множество неопределённости  $H(t_0)$  на плоскости  $x, y$ . Из разумных соображений задаём ограничение  $\{\varphi(t_0)\}$  на координату  $\varphi$ . Полагаем  $\mathbf{I}(t_0) = H(t_0) \times \{\varphi(t_0)\}$ .

В предположении о выпуклости множеств  $H(t_{i+1})$  получаем выпуклые сечения множества  $\mathbf{I}(t_{i+1})$ .

При практическом решении задачи наблюдения работаем с некоторой зафиксированной сеткой по координате  $\varphi$ . Процесс выпукления также проводим на заданной сетке направлений на плоскости  $x, y$ .

На рис. 7 показано в трёх ракурсах множество прогноза  $\mathbf{G}(t_1, \mathbf{I}(t_0))$  просчитанное для случая а), когда  $u_1 = -1$ . Начальное множество  $\mathbf{I}(t_0)$  было взято только с одним  $\varphi$ -сечением в форме квадрата  $H(t_0)$  со сторонами, параллельными осям  $x, y$  и равными  $2/3$ . Момент прогноза  $t_1$  равен  $\pi$ . Некоторая совокупность  $\varphi$ -сечений  $\mathbf{G}_\varphi(t_1, \mathbf{I}(t_0))$  множества  $\mathbf{G}(t_1, \mathbf{I}(t_0))$  выделена на чёрными линиями.

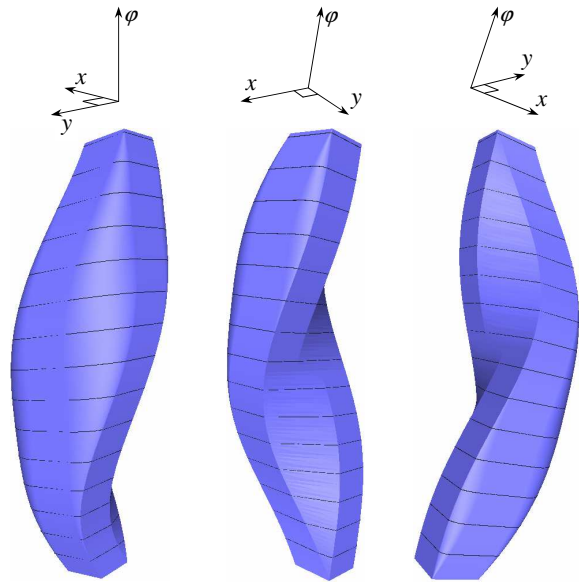


Рис. 7. Пример множества прогноза (в трёх ракурсах)

## V. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В математической модели управляемого движения, называемой машина Дубинса, две координаты имеют смысл геометрического положения точечного объекта на плоскости, а третья координата интерпретируется как угол  $\varphi$  направления вектора линейной скорости. Управление — угловая скорость изменения угла  $\varphi$ . В работе проанализирован характер  $\varphi$ -сечений трёхмерного множества достижимости в момент для машины Дубинса. Выделены случаи, когда  $\varphi$ -сечения являются выпуклыми. Представлены компьютерные изображения множеств достижимости в момент. В дальнейшем планируется разработать алгоритм построения информационных множеств в задаче наблюдения за движением машины Дубинса при неточных измерениях геометрического положения.

## Литература

наблюдения за движением самолета в горизонтальной плоскости, Известия РАН. ТИСУ, № 4, с. 51–61, 2003.

- [1] L.S. Pontryagin, V.G. Boltyanskii, R.V. Gamkrelidze, E.F. Mischenko, *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, Interscience, New York, 1962.
- [2] E.B. Lee, L. Markus, *Foundations of Optimal Control Theory*, N Y: Wiley & Sons, New York, 1967.
- [3] L.E. Dubins, On curves of minimal length with a constraint on average curvature and with prescribed initial and terminal positions and tangents, *Amer. J. Math.*, vol. 79, no. 3, pp. 497–516, 1957.
- [4] J.-P. Laumond (ed.), *Robot Motion Planning and Control*, Lecture Notes in Control and Information Sciences, vol. 229, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1998.
- [5] S.M. LaValle, *Planning Algorithms*, Cambridge University Press, 2006.
- [6] Yu.I. Berdyshev, On one nonlinear problem of sequential approach of a controlled object to two evading points, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, vol. 268, no. 1, pp. 23–31, 2010.
- [7] H. Choi, *Time-Optimal Paths for a Dubins Car and Dubins Airplane with a Unidirectional Turning Constraint*: Dissertation for the degree of Doctor of Philosophy, University of Michigan, 134 p., 2014.
- [8] M. Owen, R.W. Beard, T.W. McLain, Implementing Dubins airplane paths on fixed-wing UAVs, *Handbook of Unmanned Aerial Vehicles*, Springer, pp. 1677–1701, 2015.
- [9] Y. Meyer, T. Shima, P. Isaiiah, On Dubins paths to intercept a moving target, *Automatica*, pp. 256–263, 2015.
- [10] A. Otto, N. Agatz, J. Campbell, B. Golden, E. Pesch, Optimization approaches for civil applications of unmanned aerial vehicles (UAVs) or aerial drones: A survey, *Networks*, vol. 72, no. 4, pp. 411–458, 2018.
- [11] Z. Chen, T. Shima, Shortest Dubins paths through three points, *Automatica*, vol. 105, pp. 368–375, 2019.
- [12] E. Vidal, M. Moll, N. Palomeras, J.D. Hernández, M. Carreras, L.E. Kavraki, Online multilayered motion planning with dynamic constraints for autonomous underwater vehicles, *IEEE Intl. Conf. on Robotics and Automation (ICRA)*, May 2019. To appear.
- [13] E.J. Cockayne, G.W.C. Hall, Plane motion of a particle subject to curvature constraints, *SIAM J Control Optim.*, vol. 13, no. 1, pp. 197–220, 1975.
- [14] В.С. Пацко, С.Г. Пятко, А.А. Федотов, Трехмерное множество достижимости нелинейной управляемой системы, *Известия РАН. ТИСУ*, № 3, с. 8–16, 2003.
- [15] A. Fedotov, V. Patsko, V. Turova, Reachable sets for simple models of car motion, *Recent Advances in Mobile Robotics*, edited by Andon Venelinov Topalov, Rijeka, Croatia: InTech, pp. 147–172, 2011. URL: [http://home.imm.uran.ru/kumkov/Intech\\_paper\\_2011/Intech\\_paper.pdf](http://home.imm.uran.ru/kumkov/Intech_paper_2011/Intech_paper.pdf).
- [16] В.С. Пацко, А.А. Федотов, Множество достижимости в момент для машины Дубинса в случае одностороннего поворота, *Труды института математики и механики*, том 24, № 1, с. 143–155, 2018.
- [17] A.A. Fedotov, V.S. Patsko, Investigation of reachable set at instant for the Dubins' car, *Proceedings of the 58th Israel Annual Conference on Aerospace Sciences*, Tel-Aviv & Haifa, Israel, pp. 1655–1669, 2018.
- [18] V.S. Patsko, A.A. Fedotov, Attainability set at instant for one-side turning Dubins car, *Proceedings of 17th IFAC Workshop on Control Applications of Optimization*, Yekaterinburg, Russia, pp. 201–206, 2018.
- [19] E. Bakolas, P. Tsiotras, Optimal synthesis of the asymmetric sinistral/dextral Markov-Dubins problem, *J Optimiz Theory App.*, vol. 150, no. 2, pp. 233–250, 2011.
- [20] R. Takei, R. Tsai, Optimal trajectories of curvature constrained motion in the Hamilton-Jacobi formulation, *J Sci Comput*, vol. 54, pp. 622–644, 2013.
- [21] A.B. Kurzhanski, P. Varaiya, *Dynamics and Control of Trajectory Tubes. Theory and Computation*, Birkhäuser, 2014.
- [22] С.И. Кумков, В.С. Пацко, С.Г. Пятко, В.М. Решетов, А.А. Федотов, Информационные множества в задаче