РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

ПРОБЛЕМЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

Труды 35-й Региональной молодежной конференции, 26 - 30 января 2004 г.

ЕКАТЕРИНБУРГ
2004

У Д К 517

ПРОБЛЕМЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ: Труды 35-й Региональной молодежной конференции. Екатеринбург: УрО РАН, 2004. ISBN 5-7691-1490-8.

Настоящее издание включает материалы 35-й Региональной конференции молодых ученых, состоявшейся с 26 по 30 января 2004 года в г. Екатеринбурге.

Представлены работы по следующим вопросам: алгебра и топология, теория функций, дифференциальные и интегральные уравнения и их приложения, математическая теория оптимального управления и дифференциальные игры, распознавание образов и математическое программирование, информатика и вычислительная техника.

Сборник представляет интерес для специалистов по указанным разделам математики.

Конференция проведена при финансовой поддержке РФФИ, грант №04–01–10024 и Президиума УрО РАН.

Ответственный редактор — чл.-корр. РАН В.И. Бердышев

Рецензенты:
акад. РАН И.И. Еремин, чл.-корр. РАН В.И. Бердышев,
чл.-корр. РАН А.А. Махнев, д.ф.-м.н. А.И. Короткий,
д.ф.-м.н. В.И. Максимов, д.ф.-м.н. В.Н. Ушаков,
к.ф.-м.н. В.Л. Авербух, к.ф.-м.н. Е.Н. Акимова,
к.ф.-м.н. М.Ю. Хачай

Ответственные за выпуск:
Е.Н. Акимова, Н.А. Ваганова
М.Ю. Филимонов

ISBN 5-7691-1490-8.

П $\dfrac{\text{ПРП-2004—13 (04)}}{\text{8П6 (03) 1998}}$ ПВ-2004

ПОСТРОЕНИЕ СЕМЕЙСТВА ЭКИВОКАЛЬНЫХ ЛИНИЙ ДЛЯ ЗАДАННОГО ПОЛЯ ХАРАКТЕРИСТИК В ИГРОВОЙ ЗАДАЧЕ О БРАХИСТОХРОНЕ

Васильева Т.В., Камнева Л.В.[1]
e-mail: kamneva@imm.uran.ru

1. Постановка задачи

Рассмотрим один из вариантов игровой задачи о брахистохроне [1, 2]. Пусть динамика управляемой системы имеет вид

$$\dot{x}_1 = \sqrt{x_2}\cos u, \quad \dot{x}_2 = \sqrt{x_2}\sin u + wv,$$

$$u \in P = [0, 2\pi], \quad v \in Q = [-1, 1], \quad t \geq 0, \quad x_0 \in R^2_+,$$

где R^2_+ – полуплоскость $x_2 \geq 0$. Здесь u и v – управления первого (минимизирующего) и второго (максимизирующего) игроков. Платой в игре является время достижения терминального множества $M = [-d, 0] \times [0, h]$, d, $h > 0$.

Вектограмма первого игрока представляет собой окружность радиуса $\sqrt{x_2}$, второго – вертикальный отрезок длины $2w$, центр которого совпадает с началом координат. От постоянной $w > 0$ зависят возможности второго игрока. Если $w = 0$, то получаем динамику классической задачи о брахистохроне [3].

В работах [4, 5] проведено аналитическое и численное исследование оптимальных траекторий в рассматриваемой задаче при различных соотношениях между параметрами h и w. Решение симметрично относительно вертикальной прямой $x_2 = -d/2$. В случае $h > w^2$ в правой полуплоскости возникает сингулярная линия (рис. 1), имеющая рассеивающий ($\mathcal{D}$) и экивокальный ($\mathcal{E}$) участки, а также участок переключения ($\mathcal{S}$) за второго игрока.

Рассмотрим более подробно экивокальную линию $\mathcal{E}$. Оптимальные траектории приходят на экивокальную линию при управлении $v = -1$ второго игрока. В точках линии $\mathcal{E}$ оптимальная траектория расщепляется на две: одна идет вдоль экивокальной линии при $v = -1$, другая при $v = 1$ переходит в область выше сингулярной линии и идет вдоль характеристики первичного поля до угловой точки $(0, h)$ множества M.

[1] Работа поддержана грантом РФФИ №03-01-00415 и Молодежным научным грантом УрО РАН 2004 г.

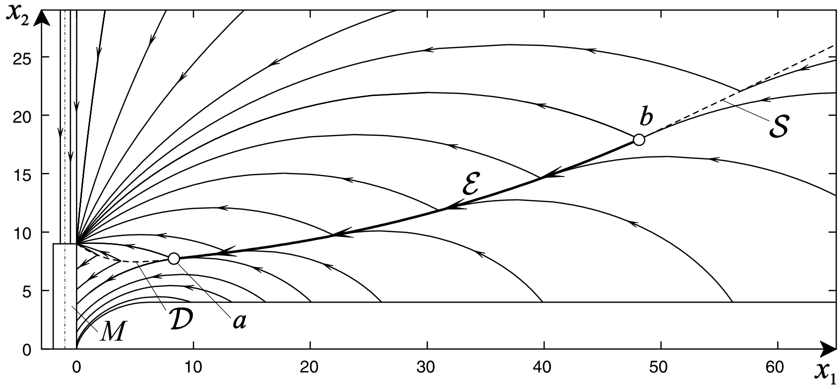

Рис. 1: Оптимальные траектории при $h = 9$, $w = 2$.

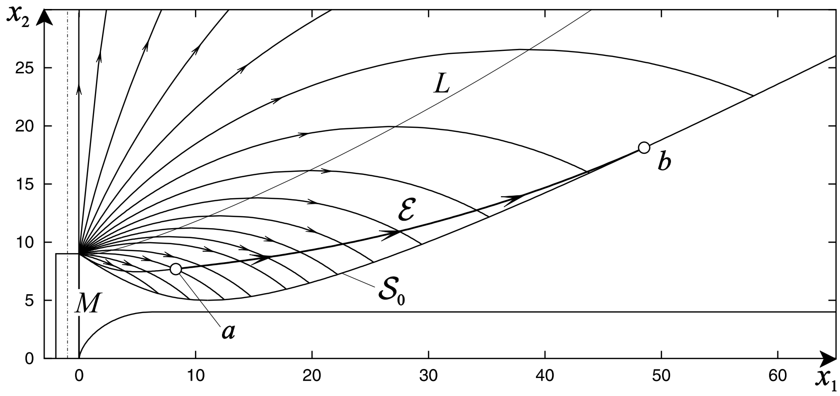

Рис. 2: Поле характеристик при $h = 9$, $w = 2$.

Полностью поле характеристик показано на рис. 2. Поле ограничено снизу линией $\mathcal{S}_0$. На линии L скорость движения вдоль характеристик горизонтальна. Время T достижения характеристикой точки (x_1, x_2) неявно определяется при помощи следующих алгебраических уравнений [4]:

$$\begin{aligned} &-\sqrt{x_2}\|p\| + wp_2 + 1 = 0, \quad x_1 + \sigma(s)F(x_2, p_1) = D_1(s), \\ &T + w\ln\|p\|^2 + p_1^{-1}\operatorname{arctg}(p_2/p_1) = D_2(s), \quad p_1 = \zeta_1(s), \end{aligned} \tag{1}$$

где

$$\begin{aligned} &F(x_2, p_1) = \lambda(p_1)\arcsin\sqrt{x_2/\lambda(p_1)} - \sqrt{x_2(\lambda(p_1) - x_2)}, \\ &\lambda(p_1) = w^2 + 1/p_1^2, \quad \zeta_1(s) = \cos s/(\sqrt{h} - w\sin s), \\ &D_1(s) = \sigma(s)F(h, \zeta_1(s)), \quad D_2(s) = s/\zeta_1(s) - w\ln(\sqrt{h} - w\sin s)^2, \\ &\sigma(s) := \begin{cases} \operatorname{sign}(s^* - s), & s \neq s^*, \\ -1, \quad s = s^*, \end{cases} \qquad s^* = \arcsin(w/\sqrt{h}), \quad s \in (0, \pi/2). \end{aligned}$$

Система (1) представляет собой четыре уравнения относительно четырех неизвестных p_1, p_2, s и T. Она неявно задает функцию $T(x)$ в области, покрытой характеристиками.

Найдены дифференциальные уравнения, описывающие оптимальное движение $y(t)$ вдоль эквивокальной линии:

$$\begin{aligned} &\dot{y}_1 = \sqrt{y_2}\cos\widetilde{u}(y), \quad \dot{y}_2 = \sqrt{y_2}\sin\widetilde{u}(y) - w, \\ &\widetilde{u}(y) = \operatorname{arctg}\frac{p_1(y)}{p_2(y)} + \arccos\frac{wp_2(y) - 1}{\sqrt{y_2}\|p(y)\|}. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $(p_1(y), p_2(y)) = \nabla T(y)$ – вектор-градиент функции $T(\cdot)$ в точке y.

Эквивокальная линия $\mathcal{E}$ строится численно в обратном времени из точки a – точки окончания рассеивающей линии (рис. 2) – до точки b пересечения с линией $\mathcal{S}_0$. Но, вообще говоря, фазовую траекторию системы (2) можно провести через любую точку области, покрытой полем характеристик. Такую линию также будем называть эквивокальной. Это позволяет говорить о семействе эквивокальных линий для заданного поля характеристик. Линия $\mathcal{E}$ принадлежит указанному семейству.

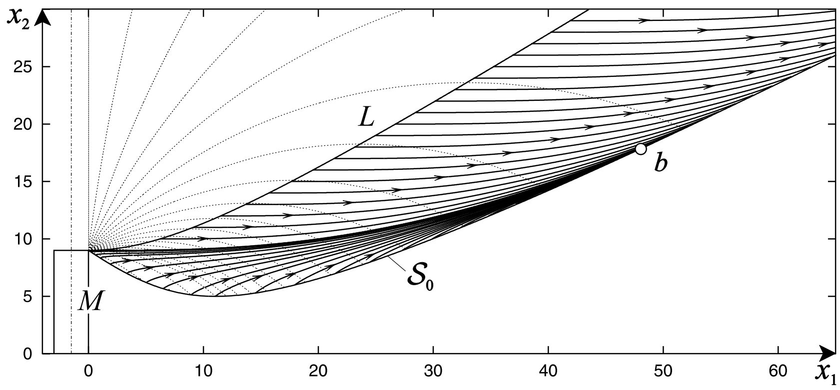

Рис. 3: Семейство экивокальных линий при $h = 9$, $w = 2$.

Интересным оказывается вопрос о том, как выглядит семейство экивокальных линий в рассматриваемой задаче.

2. Построение семейства экивокальных линий

После ряда преобразований и замены прямого времени t на обратное $\tau = c - t$, $c = \mathrm{const}$, система (2) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(\tau) &= \frac{1}{\|p\|^2}\left(-p_1(wp_2 - 1) + 2p_2\sqrt{wp_2}\,\right), \\ \dot{z}_2(\tau) &= \frac{1}{\|p\|^2}\left(\sqrt{p_2} - \sqrt{w}p_1\right)^2, \end{aligned} \tag{3}$$

где $(p_1, p_2) = \nabla T(z)$, $z(\tau) = y(c - \tau)$. Задача сводится к исследованию фазового портрета системы (3).

Поскольку функция $T(\cdot)$ задана неявно, то было проведено лишь частичное аналитическое исследование фазового портрета системы (3). Семейство экивокальных линий для различных значений h и w строилось численно методом Эйлера. Основная трудность заключалась в вычислении градиента функции $T(\cdot)$.

Результаты построений для значений параметров $h = 9$ и $h = 4.05$ при $w = 2$ даны на рис. 3, 4.

На основе проведенного аналитического и численного исследования можно сделать следующие выводы. Экивокальные линии, выпущенные в обратном времени из точек кривой $\mathcal{S}_0$ ниже точки b, собираются в точке b, образуя пучок и касаясь кривой $\mathcal{S}_0$. Последняя эквивокальная линия, приходящая в точку b, строится из угловой точки $(0, h)$. Все линии, выпущенные из точек кривой L, втыкаются под углом в кривую $\mathcal{S}_0$ строго выше точки b.

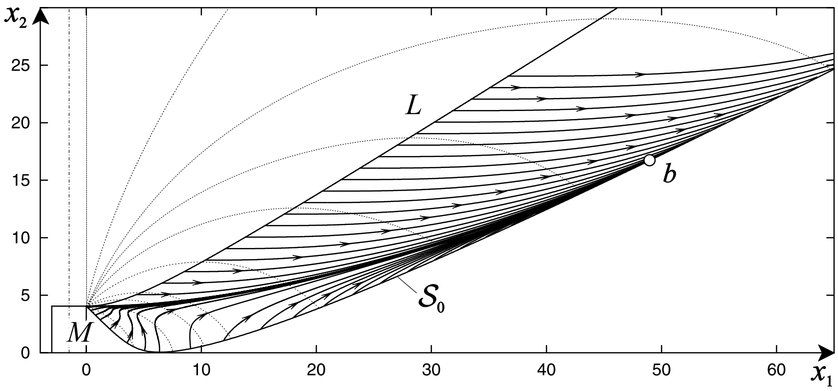

Рис. 4: Семейство эквивокальных линий при $h = 4.05$, $w = 2$.

Список литературы

[1]. *Isaacs R.* Differential Games. N. Y.: Wiley, 1965= *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. - М.: Мир, 1967. 480 с.

[2]. *Чигирь С.А.* Об игровой задаче о долихобрахистохроне// ПММ, 1976. Т.40. Вып. 6. С.1003–1013.

[3]. *Лаврентьев М.А., Люстерник Л.А.* Курс вариационного исчисления. - М. Л: Гостехиздат, 1938. 192 с.

[4]. *Камнева Л.В.* Достаточные условия стабильности для функции цены дифференциальной игры в терминах сингулярных точек// ПММ, 2003. Т. 67. Вып. 3. С. 366–383.

[5]. *Камнева Л.В.* Построение функции цены в игровой задаче о брахистохроне// Пробл. теор. и прикл. мат., Труды 32-й Рег. молод. конф. - Екатеринбург: УрО РАН, 2001. С. 202–206.