РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

ПРОБЛЕМЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

Труды 35-й Региональной молодежной
конференции, 26 - 30 января 2004 г.

ЕКАТЕРИНБУРГ
2004

У Д К 517

ПРОБЛЕМЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ: Труды 35-й Региональной молодежной конференции. Екатеринбург: УрО РАН, 2004. ISBN 5-7691-1490-8.

Настоящее издание включает материалы 35-й Региональной конференции молодых ученых, состоявшейся с 26 по 30 января 2004 года в г. Екатеринбурге.

Представлены работы по следующим вопросам: алгебра и топология, теория функций, дифференциальные и интегральные уравнения и их приложения, математическая теория оптимального управления и дифференциальные игры, распознавание образов и математическое программирование, информатика и вычислительная техника.

Сборник представляет интерес для специалистов по указанным разделам математики.

Конференция проведена при финансовой поддержке РФФИ, грант №04–01–10024 и Президиума УрО РАН.

Ответственный редактор — чл.-корр. РАН В.И. Бердышев

Рецензенты:
акад. РАН И.И. Еремин, чл.-корр. РАН В.И. Бердышев,
чл.-корр. РАН А.А. Махнев, д.ф.-м.н. А.И. Короткий,
д.ф.-м.н. В.И. Максимов, д.ф.-м.н. В.Н. Ушаков,
к.ф.-м.н. В.Л. Авербух, к.ф.-м.н. Е.Н. Акимова,
к.ф.-м.н. М.Ю. Хачай

Ответственные за выпуск:
Е.Н. Акимова, Н.А. Ваганова
М.Ю. Филимонов

ISBN 5-7691-1490-8.

П $\frac{\text{ПРП-2004—13 (04)}}{\text{8П6 (03) 1998}}$ ПВ-2004

ЧИСЛЕННОЕ ПОСТРОЕНИЕ СТАБИЛЬНЫХ МОСТОВ В НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ НА ПЛОСКОСТИ

Жаринов А.Н., Кумков С.С.[1]
e-mail: zharinov@pm.convex.ru, 2445@r66.ru

Рассматривается автономная дифференциальная игра

$$\begin{aligned} &\dot{x} = f(x) + g(x)u + h(x)v, \\ &x \in R^2, \quad u \in P, \quad v \in Q, \end{aligned} \tag{1}$$

где функции $f : R^2 \to R^2$, $g, h : R^2 \to R$ липшицевы; $P, Q \subset R^2$ — выпуклые компактные множества, ограничивающие управления u и v первого и второго игроков. Цель первого игрока — привести систему в момент окончания T на терминальное множество M, второй препятствует этому.

Задача состоит в построении максимального стабильного моста $W \subset [t_0, T] \times R^2$ (см., например, [1]), т.е. максимального множества, откуда первый игрок гарантирует приведение системы в момент T на терминальное множество M вне зависимости от действий второго игрока.

В 80-90-х годах в ИММ были разработаны различные методы численного решения дифференциальных игр на плоскости (см., например, [2, 3]). Данная работа наиболее близка к [3, 4], где рассматривался алгоритм конструирования множеств уровня функции цены в задачах игрового быстродействия на плоскости.

Основная идея алгоритма конструирования максимального стабильного моста W в задаче (1) заключается в следующем. Построения ведутся в обратном времени на некоторой сетке моментов времени $\{t_0 < t_1 < \ldots < t_{N-1} < t_N = T\}$. При этом множества P, Q, M подменяются многоугольниками. Моменту t_k соответствует сечение $W(t_k)$ множества W. В момент $t_N = T$ сечение $W(t_N)$ берется совпадающим с множеством M. На шаге $[t_k, t_{k+1}]$ граница $\Gamma(t_{k+1})$ многоугольника $W(t_{k+1})$ разбивается на ломаные. Разбиение производится так, что для точек каждой из ломаных экстремальные по

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №03-01-00415.

отношению к внешней нормали управления $u^*(x)$, $v^*(x)$ будут сохраняться. Далее динамика (1) "замораживается":

$$f(x) + g(x)u + h(x)v \rightsquigarrow f\big(x(t_k)\big) + g\big(x(t_k)\big)u^* + h\big(x(t_k)\big)v^*.$$

Каждая ломаная преобразуется переносом вершин под воздействием "замороженной" динамики. Возможно добавление новых ломаных, возникающих из точек–вершин многоугольника $W(t_{k+1})$. Граница $\Gamma(t_k)$ нового сечения $W(t_k)$ строится обработкой построенного набора ломаных. При этом находятся точки пересечения отдельных ломаных, и по этим точкам производится сшивка отдельных ломаных в единый замкнутый контур.

Из особенностей разработанных процедур следует отметить следующий момент. От точки к точке ломаной $\Gamma(t_{k+1})$ динамика в силу своей нелинейности меняется. Поскольку не делается никаких особых предположений на величину константы Липшица правой части, то при малом изменении фазового вектора изменение динамики может быть весьма существенным. Следовательно, для корректной обработки длинных ребер многоугольника $W(t_{k+1})$ необходимо разбивать их на более мелкие отрезки. Это приводит к тому, что граница многоугольника $W(t_{k+1})$ может состоять из значительного числа отрезков (до тысячи и более). Обработка набора ломаных в таких ситуациях с использованием старых алгоритмов приводила к неприемлемым временам счета. В связи с этим в разработанные процедуры был включен эффективный алгоритм [5] поиска точек пересечения семейства отрезков на плоскости.

При помощи созданной программы просчитан ряд примеров. В частности, были просчитаны максимальные стабильные мосты для конфликтно-управляемого математического маятника:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + u_1 + v_1, \\ \dot{x}_2 &= -\sin x_1 + u_2 + v_2, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} & x \in R^2, \quad M = \{x : \|x\| \leqslant 0.1\}\,, \\ & u \in P = [(0.0, -0.5),\ (0.0, 2.5)]\,, \\ & v \in Q = [(-2.1, -1.0),\ (2.0, 0.0)]\,. \end{aligned}$$

Векторы управлений u и v ограничены отрезками P и Q с концами в указанных точках. Счет производился в обратном времени на промежутке $t \in [0, 6.25]$ на равномерной сетке с шагом $\Delta = 0.01$.

На рис. 1 приведены некоторые сечения $W(t_k)$ максимального стабильного моста W. Изображено каждое 60-е из просчитанных сечений. Целевое множество M — маленький кружок, обозначенный

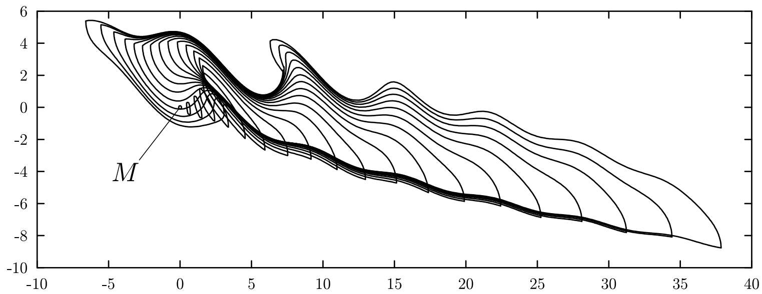

Рис. 1: Сечения максимального стабильного моста для конфликтно управляемого маятника

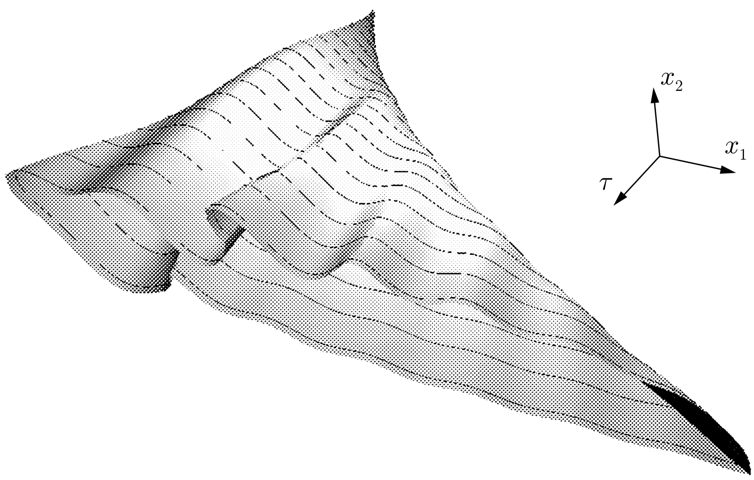

Рис. 2: Трехмерный вид максимального стабильного моста для конфликтно-управляемого маятника

сноской. Общая несимметричность сечений относительно нуля вызвана несимметричностью множеств P и Q. Рисунок 2 показывает трехмерную картинку просчитанного стабильного моста. На рисунке x_1, x_2 — оси геометрических координат, τ — ось обратного времени ($\tau = T - t$). Трехмерная картинка получена при помощи специали-

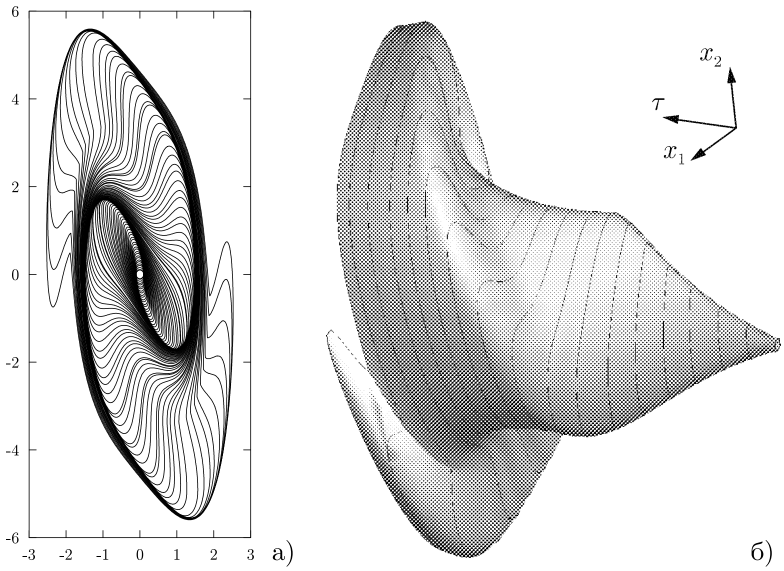

Рис. 3: Максимальный стабильный мост для уравнения Дуффинга: а) двумерная картина сечений, б) общий вид трехмерного множества

зированной программы визуализации решений задач управления и дифференциальных игр, созданной А.И.Зенковым в рабочей группе В.Л.Авербуха в Отделе системного обеспечения ИММ УрО РАН.

Также было численно исследовано уравнение Дуффинга в игровой постановке:

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = x_2 + v, && t \in [0, 3.5],\ M = \{\|x\| \leqslant 0.1\}, \\ &\dot{x}_2 = -x_1 - 2x_1^3 - x_2 + u, && |u| \leqslant 1, \quad |v| \leqslant 0.05. \end{aligned}$$

Данное уравнение описывает движение жесткой упругой пружины в вязкой среде. Счет производился в обратном времени на промежутке $t \in [0, 1.5]$ на равномерной сетке с шагом $\Delta = 0.01$.

На рис. 3а показана двумерная картина сечений $W(t_k)$ построенного максимального стабильного моста W. Показано каждое 5-е из просчитанных сечений. Целевое множество M — маленький кружок в центре рисунка. Для большей наглядности этот же стабильный мост приведен в трехмерном виде на рис. 3б. Здесь τ по-прежнему означает обратное время.

Список литературы

[1]. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. - М: Наука, 1974.

[2]. *Тарасьев А.М., Ушаков В.Н., Хрипунов А.П.* О вычислительном алгоритме решения игровых задач управления // Прикл. мат. и мех., Т. 51, Вып. 2, 1987, С. 216–222.

[3]. *Пацко В.С., Турова В.Л.* Численное решение дифференциальных игр на плоскости. Препринт. - Екатеринбург: Институт математики и механики УрО РАН, 1995.

[4]. *Patsko V.S., Turova V.L.* Level Sets of the Value Function in Differential Games with the Homicidal Chauffeur Dynamics // International Game Theory Review. Vol. 3, No. 1, 2001. P. 67–112.

[5]. *Препарата Ф., Шеймос М.* Вычислительная геометрия: введение. - М: Мир. 1989.