РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

ПРОБЛЕМЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

Труды 35-й Региональной молодежной
конференции, 26 - 30 января 2004 г.

ЕКАТЕРИНБУРГ
2004

УДК 517

ПРОБЛЕМЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ: Труды 35-й Региональной молодежной конференции. Екатеринбург: УрО РАН, 2004. ISBN 5-7691-1490-8.

Настоящее издание включает материалы 35-й Региональной конференции молодых ученых, состоявшейся с 26 по 30 января 2004 года в г. Екатеринбурге.

Представлены работы по следующим вопросам: алгебра и топология, теория функций, дифференциальные и интегральные уравнения и их приложения, математическая теория оптимального управления и дифференциальные игры, распознавание образов и математическое программирование, информатика и вычислительная техника.

Сборник представляет интерес для специалистов по указанным разделам математики.

Конференция проведена при финансовой поддержке РФФИ, грант №04–01–10024 и Президиума УрО РАН.

Ответственный редактор — чл.-корр. РАН В.И. Бердышев

Рецензенты:
акад. РАН И.И. Еремин, чл.-корр. РАН В.И. Бердышев,
чл.-корр. РАН А.А. Махнев, д.ф.-м.н. А.И. Короткий,
д.ф.-м.н. В.И. Максимов, д.ф.-м.н. В.Н. Ушаков,
к.ф.-м.н. В.Л. Авербух, к.ф.-м.н. Е.Н. Акимова,
к.ф.-м.н. М.Ю. Хачай

Ответственные за выпуск:
Е.Н. Акимова, Н.А. Ваганова
М.Ю. Филимонов

ISBN 5-7691-1490-8.

П $\frac{\text{ПРП-2004—13 (04)}}{\text{8П6 (03) 1998}}$ ПВ-2004

ФОРМУЛЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНО-ОДНОРОДНОЙ ЛИПШИЦЕВОЙ ФУНКЦИИ В ВИДЕ МАКСИМИНА (МИНИМАКСА) ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЙ

Камнева Л.В.[1]
e-mail: kamneva@imm.uran.ru

Обозначим через $\mathbf{S}_r$ сферу в R^N радиуса r с центром в начале координат, $N \geq 2$.

Теорема 1. *Пусть для функции* $\Phi\colon R^N \to R$ *выполнены условия*

1) $\Phi(\alpha p) = \alpha \Phi(p)$, $\alpha > 0$,

2) $|\Phi(p_1) - \Phi(p_2)| \leq L|p_1 - p_2|$, $p_1, p_2 \in R^N$.

Тогда для любого $\lambda \geq \sqrt{2}L$ *верно представление*

$$\Phi(p) = \max_{b \in \mathbf{S}_1} \min_{f \in F_\lambda^+(b)} \langle p, f \rangle, \quad p \in R^N, \tag{1}$$

где $F_\lambda^+(b) := \big\{ f \in \mathbf{S}_\lambda \colon \langle b, f \rangle = M,\ M \in \{L, \Phi(b)\} \big\}$.

Доказательство. По условию 2 функция $\Phi(\cdot)$ непрерывна. С учетом условия 1, при $\alpha \to 0$ получаем $\Phi(0) = 0$. Следовательно, справедлива оценка $|\Phi(b)| \leq L$, $b \in \mathbf{S}_1$.

Выберем $\lambda \geq \sqrt{2}L$ и $p \in R^N$. Так как $\lambda > L \geq |\Phi(b)|$, то $F_\lambda^+(b) \neq \emptyset$. В случае $N = 2$ множество $F_\lambda^+(b)$ состоит из четырех точек (рис. 1).

При $p = 0$ формула (1) является тривиальным равенством.

Пусть $p \neq 0$. Покажем, что для любого $b \in \mathbf{S}_1$ выполнено неравенство

$$\min_{f \in F_\lambda^+(b)} \langle p/|p|, f \rangle \leq \Phi(p/|p|), \tag{2}$$

которое обращается в равенство при $b = p/|p|$. В силу условия 1, из неравенства (2) вытекает представление (1).

Выберем произвольное $b \in \mathbf{S}_1$.

1) Если $b \neq \pm p/|p|$, то пусть $\mu := \langle b, p/|p| \rangle$. Имеем $|\mu| < 1$.

Для числа M, такого, что $|M| < \lambda$, положим

$$\xi_1 := -\sqrt{\lambda^2 - M^2}/\sqrt{1 - \mu^2}, \quad \xi_2 := M - \mu \xi_1, \quad f_M := \xi_1 p/|p| + \xi_2 b.$$

[1] Работа поддержана грантом РФФИ №03-01-00415 и Молодежным научным грантом УрО РАН 2004 г.

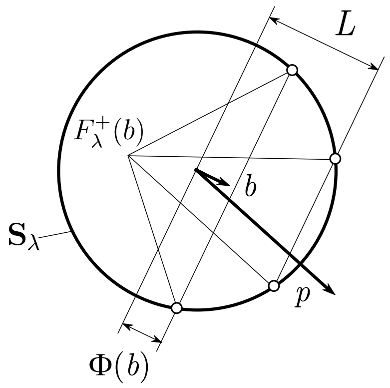

Рис. 1: Множество $F_\lambda^+(b)$ в случае $N = 2$.

Вектор f_M удовлетворяет равенствам

$$\langle f_M, b\rangle = M, \quad |f_M| = \lambda, \quad \langle p/|p|, f_M\rangle = \mu M - \sqrt{(\lambda^2 - M^2)(1-\mu^2)}.$$

а) Если $\mu \in (-1, 0]$, то пусть $M := L$. Имеем $f_M \in F_\lambda^+(b)$.

Покажем, что $\langle p/|p|, f_M\rangle \leq -L$, т.е.

$$\mu L - \sqrt{(\lambda^2 - L^2)(1-\mu^2)} \leq -L. \tag{3}$$

Поскольку $\lambda^2 - 2L^2 \geq 0$ и $\mu\lambda^2 \leq 0$, то

$$(\lambda^2 - L^2)(1-\mu^2) - L^2(1+\mu)^2 = (1+\mu)(\lambda^2 - 2L^2 - \mu\lambda^2) \geq 0.$$

Таким образом, $\sqrt{(\lambda^2 - L^2)(1-\mu^2)} \geq L(1+\mu)$, откуда следует (3).

Так как $-L \leq \Phi(p/|p|)$, то из (3) получаем $\langle p/|p|, f_M\rangle \leq \Phi(p/|p|)$.

Поскольку $f_M \in F_\lambda^+(b)$, то верно неравенство (2).

б) Если $\mu \in (0, 1)$, то пусть $M := \Phi(b)$. Имеем $f_M \in F_\lambda^+(b)$.

Используя условия 1 и 2, получаем

$$\big|\mu\Phi(b) - \Phi(p/|p|)\big| \leq L\big|\mu b - p/|p|\big|. \tag{4}$$

Так как $\lambda^2 \geq 2L^2$ и $L^2 \geq \Phi^2(b)$, то $\lambda^2 \geq L^2 + \Phi^2(b)$. Следовательно,

$$L \leq \sqrt{\lambda^2 - \Phi^2(b)}. \tag{5}$$

Из оценок (4), (5), с учетом равенства $\big|\mu b - p/|p|\big| = \sqrt{1-\mu^2}$, имеем
$$\big|\mu\Phi(b) - \Phi(p/|p|)\big| \le \sqrt{(\lambda^2 - \Phi^2(b))(1-\mu^2)}.$$
Поэтому
$$\langle p/|p|, f_M\rangle = \mu\Phi(b) - \sqrt{(\lambda^2 - \Phi^2(b))(1-\mu^2)} \le \Phi(p/|p|).$$

Так как $f_M \in F_\lambda^+(b)$, то верно неравенство (2).

2) Если $b = p/|p|$, то
$$\min_{f\in F_\lambda^+(b)} \langle p/|p|, f\rangle = \min\{L, \Phi(p/|p|)\} = \Phi(p/|p|).$$

3) Если $b = -p/|p|$, то
$$\min_{f\in F_\lambda^+(b)} \langle p/|p|, f\rangle = \min\{-L, -\Phi(p/|p|)\} = -L \le \Phi(p/|p|).$$

Таким образом, неравенство (2) установлено. Теорема доказана.

Заметим, что в случае $N = 1$ формула (1) теряет смысл, поскольку, в силу неравенств $|\Phi(b)| \le L < \sqrt{2}L \le \lambda$, получаем $F_\lambda^+(b) = \emptyset$, $b = \pm 1$.

Формула (1) является модификацией формулы представления
$$\Phi(p) = \max_{b\in\mathbf{S}_1} \min_{f\in\mathbf{F}_\lambda^+(b)} \langle p, f\rangle, \quad \mathbf{F}_\lambda^+(b) = \big\{f \in \mathbf{S}_\lambda \colon \langle b, f\rangle \ge \Phi(b)\big\},$$
используемой в [1, стр. 15] для определения обобщенного (минимаксного) решения дифференциального уравнения в частных производных первого порядка. Ранее похожие представления возникли в работе [2, стр. 5], посвященной унификации дифференциальных игр.

Следующая теорема дает формулу представления при дополнительном условии на знак исследуемой функции. При этом сужается множество, по которому берется минимум.

Теорема 2. *Пусть для функции $\Phi\colon R^N \to R$ выполнены условия*

1) $\Phi(\alpha p) = \alpha\Phi(p)$, $\alpha > 0$,

2) $|\Phi(p_1) - \Phi(p_2)| \le L|p_1 - p_2|$, $p_1, p_2 \in R^N$,

3) $\Phi(p) \ge 0$, $p \in R^N$.

Тогда для любого $\lambda \geq \sqrt{2}L$ *верно представление*

$$\Phi(p) = \max_{b \in \mathbf{S}_1} \min_{a \in A(b)} \langle p, f(a,b) \rangle, \quad p \in R^N, \tag{6}$$

где $f(a,b) := b\Phi(b) + a\sqrt{\lambda^2 - \Phi^2(b)}$, $\quad A(b) := \{a \in \mathbf{S}_1 : \langle a, b \rangle = 0\}$.

Доказательство. По условию 2 функция $\Phi(\cdot)$ непрерывна. С учетом условия 1, при $\alpha \to 0$ получаем $\Phi(0) = 0$. Следовательно, справедлива оценка $|\Phi(b)| \leq L$, $b \in \mathbf{S}_1$.

Выберем $\lambda \geq \sqrt{2}L$ и $p \in R^N$.

При $p = 0$ формула (6) является тривиальным равенством.

Пусть $p \neq 0$. Покажем, что для любого $b \in \mathbf{S}_1$ выполнено неравенство

$$\min_{a \in A(b)} \langle p/|p|, f(a,b) \rangle \leq \Phi(p/|p|), \tag{7}$$

которое обращается в равенство при $b = p/|p|$. В силу условия 1, из неравенства (7) вытекает представление (6).

Выберем произвольное $b \in \mathbf{S}_1$.

1) Если $b \neq \pm p/|p|$, то пусть $\mu := \langle b, p/|p| \rangle$. Имеем $|\mu| < 1$. Положим

$$\xi_1 := -1/\sqrt{1 - \mu^2}, \quad \xi_2 := -\mu\xi_1, \quad \widetilde{a} := \xi_1 p/|p| + \xi_2 b.$$

Поскольку $|\widetilde{a}| = 1$ и $\langle \widetilde{a}, b \rangle = 0$, то $\widetilde{a} \in A(b)$. Кроме того,

$$\langle \widetilde{a}, p/|p| \rangle = -\sqrt{1 - \mu^2}.$$

Покажем, что

$$\langle p/|p|, f(\widetilde{a}, b) \rangle \leq \Phi(p/|p|). \tag{8}$$

Имеем $\langle p/|p|, f(\widetilde{a}, b) \rangle = \mu\Phi(b) - \sqrt{(\lambda^2 - \Phi^2(b))(1 - \mu^2)}$.

Если $\mu \leq 0$, то

$$\mu\Phi(b) - \sqrt{(\lambda^2 - \Phi^2(b))(1 - \mu^2)} \leq 0 \leq \Phi(p/|p|).$$

Если $\mu > 0$, то, используя условия 1 и 2, получаем

$$\big|\mu\Phi(b) - \Phi(p/|p|)\big| \leq L\big|\mu b - p/|p|\big|. \tag{9}$$

Так как $\lambda^2 \geq 2L^2$ и $L^2 \geq \Phi^2(b)$, то $\lambda^2 \geq L^2 + \Phi^2(b)$. Следовательно,

$$L \leq \sqrt{\lambda^2 - \Phi^2(b)}. \tag{10}$$

Из оценок (9), (10), с учетом равенства $\big|\mu b - p/|p|\big| = \sqrt{1-\mu^2}$, имеем

$$\big|\mu\Phi(b) - \Phi(p/|p|)\big| \le \sqrt{(\lambda^2 - \Phi^2(b))(1-\mu^2)}.$$

Поэтому

$$\mu\Phi(b) - \sqrt{(\lambda^2 - \Phi^2(b))(1-\mu^2)} \le \Phi(p/|p|).$$

Так как $\widetilde{a} \in A(b)$ и выполнено (8), то справедливо неравенство (7).

2) Если $b = p/|p|$, то

$$\min_{a\in A(b)} \langle p/|p|, f(a,b)\rangle = \Phi(b) = \Phi(p/|p|).$$

3) Если $b = -p/|p|$, то, используя условие 3, получим

$$\min_{a\in A(b)} \langle p/|p|, f(a,b)\rangle = -\Phi(b) \le 0 \le \Phi(p/|p|).$$

Таким образом, неравенство (7) установлено. Теорема доказана.

Справедливы также “симметричные” теоремы о представлении положительно однородной липшицевой функции в виде минимакса линейных функций. Приведем, опуская доказательство, теорему, аналогичную теореме 1.

Теорема 3. *Пусть для функции* $\Phi\colon R^N \to R$ *выполнены условия*

1) $\Phi(\alpha p) = \alpha\Phi(p)$, $\alpha > 0$,

2) $|\Phi(p_1) - \Phi(p_2)| \le L|p_1 - p_2|$, $p_1, p_2 \in R^N$.

Тогда для любого $\lambda \ge \sqrt{2}L$ *верно представление*

$$\Phi(p) = \min_{b\in \mathbf{S}_1} \max_{f\in F^-_\lambda(b)} \langle p, f\rangle, \quad p \in R^N, \tag{11}$$

где $F^-_\lambda(b) := \big\{f \in \mathbf{S}_\lambda \colon \langle b, f\rangle = M,\ M \in \{-L, \Phi(b)\}\big\}$.

Список литературы

[1]. *Субботин А. И.* Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона-Якоби. - М.: Наука, 1991. 216 с.

[2]. *Красовский Н. Н.* Унификация дифференциальных игр// Игровые задачи управления. Труды Института математики и механики, УНЦ АН СССР, вып. 24. - Свердловск, 1977.