АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

ТЕХНИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА

4

МОСКВА · 1984

ТЕХНИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА
№ 4 · 1984

УДК 62-50

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР

ТУРОВА В. Л.

Введение. Настоящая работа связана с задачей оптимального управления системой, подверженной влиянию помехи. Предполагается, что движение системы описывается обыкновенным дифференциальным уравнением. Рассматривая задачу в рамках теории антагонистических дифференциальных игр, будем говорить, что управляющим воздействием распоряжается первый игрок, а помехой — второй. Первый игрок минимизирует значение заданного функционала платы, а второй — максимизирует.

В теории дифференциальных игр наряду с исследованием проблемы существования цены игры и оптимальных стратегий большое внимание уделяется разработке методов и алгоритмов их вычисления на ЭВМ. Так в [1—4] доказано, что цена игры совпадает со стохастическим программным максимином, и для некоторых классов дифференциальных игр получены эффективные формулы вычисления этого максимина.

В [4] рассматривается линейная дифференциальная игра с фиксированным моментом окончания и функционалом платы, складывающимся из терминального члена и интеграла вдоль движения системы от квадратичной формы относительно управлений первого и второго игроков. Особенность задачи состоит в отсутствии априорных ограничений на величины управлений. Это позволяет свести вычисление стохастического программного максимина к решению задачи математического программирования на максимум квадратичной функции n переменных (n — размерность пространства) при квадратичном ограничении. Если размерность n велика, то указанная задача не является простой с точки зрения реализации вычислений на ЭВМ. В данной статье такая задача математического программирования доводится до вычислительных процедур, легко реализуемых на ЭВМ. Рассматривается также вопрос о построении оптимального гарантирующего управления первого игрока. Опираясь на результаты [4], проблема сведена к достаточно простым численным процедурам.

На основе описываемых в статье алгоритмов разработана стандартная программа вычисления цены и оптимального гарантирующего управления первого игрока. Эта программа была опробована на ряде примеров второго и четвертого порядков, в том числе и на тех, для которых в [3] получено аналитическое решение. В качестве примера в работе рассматривается игровая задача о приведении двойного физического маятника в верхнее неустойчивое положение равновесия. Решение задачи получено на ЭВМ при помощи стандартной программы.

1. Постановка задачи. Данная статья непосредственно связана с работой [4]. Приведем кратко постановку дифференциальной игры из [4]. Пусть движение системы описывается уравнением

$$\dot{x}=A(t)x+B(t)u+C(t)v, \quad x\in R^n, \quad u\in R^p, \quad v\in R^q, \quad t\in[t_0, \vartheta]. \quad (1.1)$$

Здесь x — фазовый вектор; u — управление первого игрока; v — второго; $A(t), B(t), C(t)$ — непрерывные матрицы; t_0, ϑ — фиксированные моменты времени. Управления u и v не стеснены никакими априорными ограничениями. Задан функционал платы (показатель качества процесса $\{x[\cdot]$,

$u[\cdot], v[\cdot]\})$

$$\gamma(x[\cdot],u[\cdot],v[\cdot])=\int\limits_{t_*}^{\vartheta}[\langle\Phi(t)u[t],u[t]\rangle-\langle\Psi(t)v[t],v[t]\rangle]dt+|x(\vartheta)|, \tag{1.2}$$

где символ $\langle a, b\rangle$ означает скалярное произведение; $\langle\Phi(t)u,u\rangle$, $\langle\Psi(t)v,v\rangle$ — определенно-положительные при $t_0\leqslant t\leqslant\vartheta$ квадратичные формы; матрицы $\Phi(t)$, $\Psi(t)$ непрерывны; $t_*\in[t_0,\vartheta]$ — момент начала управления. Цель первого игрока — минимизировать значение показателя качества, интересы второго игрока противоположны.

Для дифференциальной игры (1.1), (1.2) в [4] выведена формула цены игры. Зная эту формулу, нетрудно получить выражение для цены игры в том случае, когда терминальный член в функционале платы имеет более общий вид, а именно: $\left[\sum\limits_{i=1}^{m}x_i^2(\vartheta)\right]^{1/2}$, $1\leqslant m\leqslant n$. Цена игры в этом случае определяется по формуле

$$\rho(t_*,x_*)=\max_{|l|\leqslant1}[\langle l,X_m(\vartheta,t_*)x_*\rangle+\langle N_m(t_*)l,l\rangle-\lambda[t_*]|l|^2]+\lambda[t_*],\quad l\in R^m. \tag{1.3}$$

Символом $X_m(\vartheta,t_*)$ в (2.3) обозначена матрица $m\times n$, состоящая из m первых строк фундаментальной матрицы системы $\dot{x}=A(t)x$. Матрица $N_m(t)$ и число $\lambda[t]$ определяются равенствами

$$N_m(t)=-\frac{1}{4}\int\limits_{t}^{\vartheta}X_m(\vartheta,\tau)(B(\tau)\Phi^{-1}(\tau)B'(\tau)-C(\tau)\Psi^{-1}(\tau)C'(\tau))X_m'(\vartheta,\tau)d\tau, \tag{1.4}$$

$$\lambda[t]=\max_{t\leqslant\tau\leqslant\vartheta}\lambda(\tau),\quad \lambda(\tau)=\max_{|l|\leqslant1}\langle N_m(\tau)l,l\rangle. \tag{1.5}$$

В п. 2 будет описан алгоритм сведения формулы (1.3) к вычислительным процедурам, легко реализуемым на ЭВМ.

Кроме изложения алгоритма вычисления цены, цель данной статьи состоит в описании алгоритма оптимального способа поведения первого игрока. Используемые в [4] позиционные универсальные стратегии $u(t,x,\varepsilon)$ (ε — параметр точности) первого игрока для практических целей не очень удобны, поскольку разность между результатом, гарантируемым оптимальной стратегией $u^0(t,x,\varepsilon)$, и ценой игры зависит от длины промежутка $[t_0,\vartheta]$, вообще говоря, по экспоненциальному закону. В связи с этим вместо стратегии $u^0(t,x,\varepsilon)$ будем рассматривать некоторый способ управления $U^0(t,x,\varepsilon)$ первого игрока, использующий стабилизирующую добавку. Способы управления со стабилизирующей добавкой описаны для несколько других целей в [5]. Разность между результатом, гарантируемым стратегией $U^0(t,x,\varepsilon)$, и ценой игры линейно зависит от длины промежутка $[t_0,\vartheta]$. В п. 3 будет дано строгое определение стратегии $U^0(t,x,\varepsilon)$ и указан основанный на простых численных процедурах алгоритм вычисления значений этой стратегии.

2. Нахождение цены игры. Преобразуем формулу (1.3) к более удобному виду. Объединив второй и третий члены в выражении под знаком максимума и обозначив матрицу $N_m(t_*)-\lambda[t_*]E$ символом $K(t_*)$, получим

$$\rho(t_*,x_*)=\max_{|l|\leqslant1}[\langle l,X_m(\vartheta,t_*)x_*\rangle+\langle K(t_*)l,l\rangle]+\lambda[t_*]. \tag{2.1}$$

Перейдем от операции max к операции min

$$\rho(t_*, x_*) = -\min_{|l|\leqslant 1}[\langle l, a\rangle + \langle Hl, l\rangle] + \lambda_*. \tag{2.2}$$

Здесь $a=-X_m(\vartheta, t_*)x_*$, $H=-K(t_*)$, $\lambda_*=\lambda[\lambda_*]$. Из определения (1.5) следует, что λ_* есть максимальное из собственных значений матриц $N_m(t)$, $t\in[t_*, \vartheta]$. Поэтому все собственные значения матрицы $K(t_*)$ неположительны, а матрицы H — неотрицательны. Следовательно, минимизируемая функция, стоящая в квадратных скобках, выпукла по l. Поскольку матрица H симметрична, то существует ортогональная матрица Y, приводящая H к диагональному виду [6]. Чтобы упростить минимизируемую функцию, сделаем в формуле (2.2) замену переменных $l=Ys$, где $s\in R^m$, а Y — матрица $m\times m$, состоящая из собственных векторов матрицы H. Обозначая $b=Y'a$, $G=Y'HY$ и учитывая, что ортогональное преобразование не меняет длины вектора, получаем

$$\rho(t_*, x_*) = -\min_{|s|\leqslant 1}[\langle s, b\rangle + \langle Gs, s\rangle] + \lambda_*. \tag{2.3}$$

Отметим, что G — диагональная матрица с собственными значениями матрицы H на диагонали.

Таким образом, приходим к задаче минимизации выпуклой функции $\langle s, b\rangle+\langle Gs, s\rangle$ при ограничении $\langle s, s\rangle-1\leqslant 0$. Воспользуемся теоремой Куна — Таккера [7]. Приведем ее формулировку в удобном для нас виде.

Пусть $f_0(s)$, $f_1(s)$ — выпуклые функции из R^m в R. Назовем задачей (1) экстремальную задачу

(1) $f_0(s)\to\min$, $f_1(s)\leqslant 0$, $s\in R^m$.

Введем функцию Лагранжа $L(\lambda, s)=f_0(s)+\lambda f_1(s)$. Предположим, что выполнено условие Слейтера, т. е. существует такой вектор $\bar{s}\in R^m$, что $f_1(\bar{s})<0$. Тогда, если вектор s_0 является решением задачи (1), то найдется такое $\lambda_0\geqslant 0$, что справедливы условия: a) $\min_s L(\lambda_0, s)=L(\lambda_0, s_0)$, b) $\lambda_0 f_1(s_0)=0$. Обратно. Пусть нашлись $\lambda_0\geqslant 0$ и $s_0\in R^m$, удовлетворяющие условиям a), b) и условию c) $f_1(s_0)\leqslant 0$. Тогда вектор s_0 является решением задачи (1).

Нетрудно видеть, что для функций $f_0(s)=\langle s, b\rangle+\langle Gs, s\rangle$, $f_1(s)=\langle s, s\rangle-1$ требования теоремы выполнены. Выпишем конкретный вид условий a)—c) применительно к этим функциям. Имеем: $a1$) $b+2(\lambda E+G)s=0$, $b1$) $\lambda(\langle s, s\rangle-1)=0$, $c1$) $\langle s, s\rangle-1\leqslant 0$. Отметим, что функция Лагранжа $L(\lambda, s)=\langle s, b\rangle+\langle Gs, s\rangle+\lambda(\langle s, s\rangle-1)$ выпукла и дифференцируема по s при каждом фиксированном λ. Поэтому условие a) теоремы эквивалентно равенству нулю производной по s. Из первой части теоремы вытекает, что пара $\lambda_0\geqslant 0$, $s_0\in R^m$, удовлетворяющая условиям $a1$)—$c1$), существует. Перейдем к задаче отыскания такой пары. Ниже будут выделены случаи, когда решение этой задачи единственно и когда оно не единственно.

Будем предполагать, что собственные значения μ_i матрицы G упорядочены по возрастанию. Рассмотрим два случая.

1) Все собственные значения матрицы G положительны: $0<\mu_1\leqslant\mu_2\leqslant\ldots\leqslant\mu_m$. В этом случае систему $a1$) можно разрешить относительно s при любом $\lambda\geqslant 0$. Запишем решение в координатной форме

$$s_i(\lambda)=-b_i/2(\mu_i+\lambda),\quad i=\overline{1, m}. \tag{2.4}$$

Положим

$$f(\lambda)=\langle s(\lambda), s(\lambda)\rangle=\sum_{i=1}^{m} b_i^2/4(\mu_i+\lambda)^2,\quad \lambda\in[0, +\infty]. \tag{2.5}$$

Легко убедиться, что функция f выпукла по λ, монотонно убывает, стремится к нулю при $\lambda\to\infty$ и в нуле принимает конечное положительное значение.

Предположим, что $f(0)>1$. Тогда в силу свойств функции f уравнение $f(\lambda)=1$ имеет единственное положительное решение. Обозначим его λ_0. Имеем $\langle s(\lambda_0),\ s(\lambda_0)\rangle-1=0$. Очевидно, что пара λ_0, $s_0=s(\lambda_0)$ искомая. Отыскание экстремального вектора s_0 свелось в данном случае к поиску точки пересечения графиков функций $y=f(\lambda)$ и $y=1$ (рис. 1*а*). В случае $f(0)\leqslant 1$ положительное решение уравнения $f(\lambda)=1$ не существует. Следовательно, условие *в*1) выполняется лишь при $\lambda=0$. Пара $\lambda_0=0$, $s_0=s(0)$ удовлетворяет условиям *a*1)—*c*1).

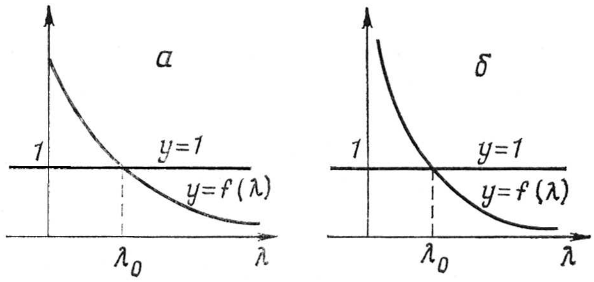

Рис. 1

Случай 1) полностью рассмотрен, при этом пара λ_0, s_0 определяется единственным образом. Перейдем к случаю

2) $\mu_1=\mu_2=\ldots=\mu_r=0$, $\mu_i>0$, $i=\overline{r+1, m}$. Здесь индекс r может принимать значения $1,\ldots,m$. Случай 2) разобьем на подслучаи.

2*а*) Существует такое $k=\overline{1, r}$, что $b_k\neq 0$. В выражении (2.5) для функции f содержится член $b_k^2/4(\mu_k+\lambda)^2$. Поэтому $f(\lambda)\to+\infty$ при $\lambda\to+0$. Стало быть, существует единственное $\lambda_0>0$, при котором $f(\lambda_0)=1$ (рис. 1, *б*). Матрица $G+\lambda_0 E$ невырожденная, поэтому система *a*1) разрешима. Таким образом, пара λ_0, $s_0=s(\lambda_0)$ дает единственное решение задачи.

2*б*) При всех $k=\overline{1, r}$ справедливо равенство $b_k=0$. Примем $f^*(\lambda)=$

$$=\sum_{i=r+1}^{m} b_i^2/4(\lambda+\mu_i)^2,\ \lambda\in[0, +\infty].$$

Функция f^* выпукла по λ, монотонно убывает, стремится к нулю при $\lambda\to+\infty$, в нуле принимает конечное положительное значение. Если $f^*(0)>1$, то существует единственное $\lambda_0>0$, при котором $f^*(\lambda_0)=1$. Пара λ_0, $s_0=s(\lambda_0)$ есть единственное решение задачи. Пусть $f^*(0)\leqslant 1$. Возьмем $\lambda_0=0$. В качестве вектора s_0 подходит любой вектор, последние $m-r$ координат которого определяются однозначно по формуле (2.4) при $\lambda=0$, а первые r координат можно выбирать произвольно, заботясь лишь о выполнении неравенства *c*1). В частности, их можно взять нулевыми.

Описание алгоритма отыскания экстремальной пары λ_0, s_0 закончено. Как видно, нахождение вектора s_0, доставляющего минимум в выражении (2.3), свелось к вычислению корня уравнения $f(\lambda)=1$ или $f^*(\lambda)=1$. Матрица G, вектор b и число λ_*, входящие в формулу (2.3), вычисляются в программе при помощи стандартных процедур интегрирования, нахождения фундаментальной матрицы, собственных значений и собственных векторов матрицы.

3. Построение оптимального закона управления. Определим стратегию $U^0(t, x, \varepsilon)$ первого игрока. Будем считать, что матрицы A, B не зависят от времени и система $\dot{x}=Ax+Bu$ стабилизируема [8]. Пусть матрица P размера $p\times n$ такова, что матрица $A+BP$ имеет отрицательные собственные значения. Для определения стратегии U^0 нам понадобится также симметричная положительная матрица Λ размера $n\times n$. Известно [9], что для любой матрицы T с отрицательными собственными значениями существует определенно-положительная квадратичная форма $\langle\Omega x, x\rangle$, производная от которой в силу системы $\dot{x}=Tx$ определенно-отрицательна. Опираясь на это, будем искать матрицу Λ из условия

$$\frac{d}{dt}\langle\Lambda x, x\rangle\Big|_{\dot{x}=(A+BP)x}=-\alpha\langle x, x\rangle, \tag{3.1}$$

где α — заданное положительное число. Соотношение (3.1) эквивалентно матричному уравнению $\Lambda(A+BP)+(A+BP)'\Lambda=-\alpha E$, для которого известны различные методы решения [9—11].

Предположим, что матрицы P, Λ выбраны указанным способом. Зафиксируем $\varepsilon>0$. Пусть задана позиция $(t, x)\in[t_0, \vartheta]\times R^n$. Через $w_0=w_0(t, x, \varepsilon)$, $c_0=c_0(t, x, \varepsilon)$ обозначим пару, удовлетворяющую соотношению

$$\rho(t, w_0(t, x, \varepsilon))-c_0(t, x, \varepsilon)=\min_{w,c}[\rho(t, w)-c] \tag{3.2}$$

при условии

$$\langle\Lambda(x-w), x-w\rangle+c^2\leqslant\varepsilon^2. \tag{3.3}$$

Найдем такой вектор $\tilde{u}(t, x, \varepsilon)\in R^p$, что $\min\limits_{u}[\langle\Lambda(x-w_0), Bu\rangle+c_0\langle\Phi(t)u, u\rangle]=\langle\Lambda(x-w_0), B\tilde{u}(t, x, \varepsilon)\rangle+c_0\langle\Phi(t)\tilde{u}(t, x, \varepsilon)\tilde{u}(t, x, \varepsilon)\rangle$. Получим

$$\tilde{u}(t, x, \varepsilon)=-\frac{1}{2c_0(t, x, \varepsilon)}\Phi^{-1}(t)B'\Lambda(x-w_0(t, x, \varepsilon)). \tag{3.4}$$

Формула (3.4) аналогична формуле для $u^0(t, x, \varepsilon)$ из [4].

Положим $U^0(t, x, \varepsilon)=\tilde{u}(t, x, \varepsilon)+P(x-w_0(t, x, \varepsilon))$. Второе слагаемое в этой формуле имеет смысл стабилизирующей добавки. Рассуждая как в [5], можно получить оценку $\Gamma(t_*, x_*, U^0(\cdot, \cdot, \varepsilon))\leqslant\rho(t_*, x_*)+[1+(\vartheta-t_*)]\beta\varepsilon$, где $\Gamma(t_*, x_*, U^0)$ — гарантированное значение показателя качества при использовании стратегии U^0, а β — постоянная.

Опишем алгоритм вычисления значения стратегии U^0 в произвольной фиксированной позиции $(t, x)\in[t_0, \vartheta)\times R^n$. Как видно, задача состоит в нахождении пары w_0, c_0, удовлетворяющей соотношению (3.2) при условии (3.3). Подставим в правую часть равенства (3.2) выражение для цены игры. Получим

$$\min_{w,c}\max_{|l|\leqslant1}[\langle l, X_m(\vartheta, t)w\rangle+\langle N_m(t)l, l\rangle-\lambda[t]\langle l, l\rangle+\lambda[t]-c]. \tag{3.5}$$

Здесь минимум берется по w, c, связанным условием (3.3). Функция, стоящая в квадратных скобках, вогнута по l и линейна по w, c. Кроме того, при каждом фиксированном l минимум этой функции по w, c достигается на единственной паре $w(l)$, $c(l)$. Поэтому операции min и max можно переставить. Обозначив $K(t)=N_m(t)-\lambda[t]E$, приходим к выражению

$$\max_{|l|\leqslant 1}[\langle l, X_m(\vartheta,t)x\rangle + \langle K(t)l,l\rangle + \min_{w,c}(\langle l, X_m(\vartheta,t)\,(w-x)\rangle - c)]+\lambda[t]. \tag{3.6}$$

Нетрудно показать, что минимум в (3.6) достигается при

$$w(l)=x-\varepsilon\Lambda^{-1}X_m'(\vartheta,t)l/(1+\langle Dl,l\rangle)^{1/2},\quad c(l)=\varepsilon/(1+\langle Dl,l\rangle)^{1/2}, \tag{3.7}$$

где символом D обозначена положительная матрица $X_m(\vartheta,t)\Lambda^{-1}X_m'(\vartheta,t)$ размера $m\times m$. Примем $g=-X_m(\vartheta,t)x$, $M=-K(t)$. После вычисления минимума в (3.6) и перехода от операции $\max\limits_{|l|\leqslant 1}$ к операции $\min\limits_{|l|\leqslant 1}$ получим следующее выражение для правой части соотношения (3.2) при условии (3.3):

$$-\min_{|l|\leqslant 1}[\langle l,g\rangle + \langle Ml,l\rangle + \varepsilon(1+\langle Dl,l\rangle)^{1/2}]+\lambda[t]. \tag{3.8}$$

Матрица M имеет неотрицательные собственные значения. Исследуя вторую производную от функции $\varphi(l)=(1+\langle Dl,l\rangle)^{1/2}$, можно убедиться, что φ строго выпукла по l. Стало быть, строго выпукла и минимизируемая функция.

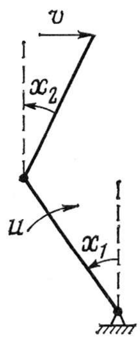

Рис. 2

Таким образом, приходим к задаче минимизации строго выпуклой функции $\langle l,g\rangle+\langle Ml,l\rangle+\varepsilon\varphi(l)$ при выпуклом ограничении $\langle l,l\rangle-1\leqslant 0$. В отличие от аналогичной задачи в п. 2 здесь экстремальный вектор l_0 единствен. Для нахождения l_0 применим теорему Куна — Таккера. Составим функцию Лагранжа $L(\lambda,l)=\langle l,g\rangle+\langle Ml,l\rangle+\varepsilon\varphi(l)+\lambda(\langle l,l\rangle-1)$ и выпишем конкретный вид условий $a)-c)$ теоремы: $a2)$ $g+(2M+2\lambda E+\varepsilon D/\varphi(l))l$, $b2)$ $\lambda(\langle l,l\rangle-1)=0$, $c2)$ $\langle l,l\rangle-1\leqslant 0$. В левой части равенства $a2)$ стоит производная по l от функции Лагранжа. Уравнение $a2)$ нелинейно по l.

Описание алгоритма отыскания пары λ_0, l_0, удовлетворяющей условиям $a2)-c2)$, начнем с анализа уравнения $a2)$. Нас интересуют его решения $l(\lambda)$ при фиксированных $\lambda\geqslant 0$. Перепишем $a2)$ в виде системы

$$g+(2M+2\lambda E)l+\varepsilon Dl/(1+d)^{1/2}=0,\quad \langle Dl,l\rangle=d. \tag{3.9}$$

Заметим, что при $\lambda\geqslant 0$ матрица $S_\lambda(d)=2M+2\lambda E+\varepsilon D/(1+d)^{1/2}$ невырожденная. Разрешив первое уравнение системы относительно l, получим $l_\lambda(d)=-S_\lambda(d)^{-1}g$. После подстановки $l_\lambda(d)$ во второе уравнение системы имеем

$$\langle Dl_\lambda(d),\, l_\lambda(d)\rangle=d. \tag{3.10}$$

Если решение уравнения (3.10) существует, то обозначим его символом $d_\lambda{}^*$, найдем решение $l(\lambda)=l_\lambda(d_\lambda)^*$ системы (3.9). Положим $\psi_\lambda(d)=\langle Dl_\lambda(d),\, l_\lambda(d)\rangle-d$. Исследуя вторую производную от функции $\psi_\lambda(d)$ по d, можно убедиться, что $\psi_\lambda(d)$ вогнута по d при каждом фиксированном $\lambda\geqslant 0$. Если $\lambda>0$, то $\psi_\lambda(d)\to-\infty$ при $d\to\infty$. При $\lambda\geqslant 0$ и $d=0$ имеем $\psi_\lambda(0)>0$. Указанные свойства обеспечивают существование и единственность решения уравнения (3.10) для $\lambda>0$. В случае $\lambda=0$ решение уравнения (3.10) может не существовать. (Это обнаруживается в ходе поиска решения при $\lambda=0$). Но если решение существует, то оно единственно.

Пара λ_0, l_0, удовлетворяющая условиям $a2)-c2)$, ищется следующим образом. Положим $\lambda=0$ и найдем $l(0)$ как решение уравнения $a2)$. Если

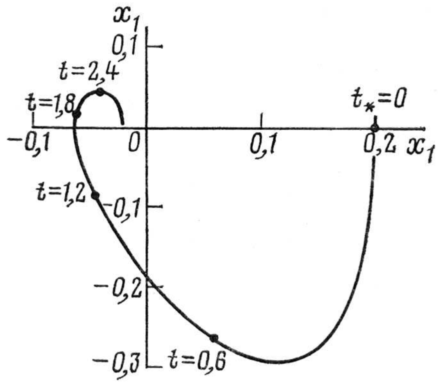

Рис. 3

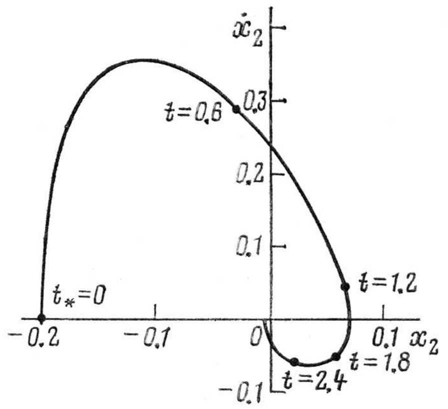

Рис. 4

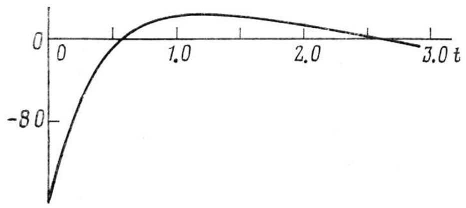

Рис. 5

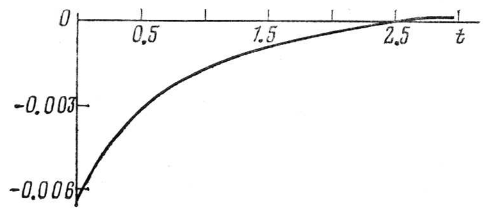

Рис. 6

такое решение существует и $\langle l(0),\ l(0)\rangle \leqslant 1$, то пара $\lambda_0=0$, $l_0=l(0)$ искомая. В противном случае (т. е. когда нет решения или оно существует, но $\langle l(0), l(0)\rangle > 1$) переходим к отысканию такого $\lambda_0>0$, что $\langle l(\lambda_0),\ l(\lambda_0)\rangle=1$. Находим его, решая численным методом уравнение $\langle l(\lambda),\ l(\lambda)\rangle=1$. Полученное $\lambda_0>0$ в паре с $l_0=l(\lambda_0)$ дает единственное решение задачи. Итак, отыскание экстремального вектора l_0, доставляющего минимум в (3.8), сведено к легко реализуемым на ЭВМ численным процедурам. После подстановки l_0 в (2.7) получим пару $w_0=w(l_0)$, $c_0=c(l_0)$. Таким образом, для вычисления значения $U^0(t, x, \varepsilon)$ в позиции (t, x) требуется подсчитать матрицы $X_m(\vartheta, t)$, $N_m(t)$ и собственные значения матриц $N_m(\tau)$, $\tau\in[t, \vartheta]$. Затем по изложенному алгоритму вычисляется вектор l_0.

4. Пример. На основании описанных в п.п. 2, 3 алгоритмов была разработана стандартная программа вычисления цены и значений оптимального гарантирующего управления первого игрока для исследуемой дифференциальной игры. В качестве примера, решение которого получено при помощи этой программы, рассмотрим задачу о приведении двойного физического маятника в верхнее неустойчивое положение равновесия. К нижнему звену маятника приложено управляющее воздействие u в виде момента, на верхнее звено действует сила v, имеющая смысл помехи (рис. 2). Считаем, что длины стержней одинаковы и равны 10. Массы стержней также одинаковы и равны 1. Движение маятника описывается уравнениями $\dot{x}_1=x_3$, $\dot{x}_2=x_4$, $\dot{x}_3=2.253x_1-1.261x_2+0.0171u-0.086v$, $\dot{x}_4=-3.784x_1+3.363x_2-0.0257u+0.429v$. Показатель качества имеет вид $\gamma(x,\ u,\ v)=$

$$=\int\limits_{t_*}^{\vartheta}(10^{-4}u^2-10^2v^2)\,d\tau+|x(\vartheta)|.\ \text{Примем}\ \vartheta=3,\ t_*=0,\ x_*=(0.2,\ -0.2,\ 0,\ 0).$$

При моделировании на ЭВМ за первого игрока использовалась стратегия $U^0(t, x, \varepsilon)$ с $\varepsilon=0.01$, за второго — стратегия экстремального прицеливания по градиенту функции цены игры. На рис. 3, 4 показаны фазовые траектории получившегося движения. Реализации управлений первого и второго игроков показаны на рис. 5, 6. Цена игры в начальной позиции (t_*, x_*) равна 0.4.

Автор благодарит Н. Н. Красовского и В. Е. Третьякова за постановку задачи и обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н., Третьяков В. Е.* Стохастический программный синтез для позиционной дифференциальной игры.– Докл. АН СССР, 1981, т. 259, № 1.
2. *Красовский Н. Н.* О стохастическом программном синтезе стратегий в дифференциальной игре.– Прикл. матем. и механ., 1982, т. 46, № 6.
3. *Красовский Н. Н., Третьяков В. Е.* Одна задача на минимум гарантированного результата.– Изв. АН СССР. Техн. кибернет., 1983, № 2.
4. *Красовский Н. Н., Третьяков В. Е.* Стохастический программный синтез одного гарантирующего управления.– Проблемы управления и теории информации, 1983, т. 12, № 2.
5. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
6. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1966.
7. *Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В.* Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.
8. *Ли Э. Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972.
9. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966.
10. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1976.
11. *Барсук Л. О., Григорьева И. А.* Об одном алгоритме решения матричного уравнения Ляпунова.– В сб.: Динамика систем. Устойчивость, автоколебания, стохастичность. Горький: Изд-во ГГУ, 1981.

Свердловск

Поступила в редакцию
10.X.1983