Нѣсколько примѣровъ рѣшенія особаго рода задачъ о наибольшихъ и наименьшихъ величинахъ.

А. А. Маркова.

ЗАДАЧА 1.

Между данными точками A и B (см. фиг. 1-ю) провести кратчайшую кривую линію при слѣдующихъ двухъ условіяхъ: 1) радіусъ кривизны нашей кривой повсюду долженъ быть не меньше данной величины ϱ, 2) въ точкѣ A касательная къ нашей кривой должна имѣть данное направленіе AC.

РѢШЕНІЕ.

Пусть M одна изъ точекъ нашей кривой, а прямая NMT соотвѣтствующая касательная.

Обозначимъ буквою s дугу AM и буквою φ уголъ TNC.

Затѣмъ возьмемъ AC за ось x-овъ, а перпендикуляръ къ ней AD за ось y-овъ.

Тогда, принимая s за перемѣнное независимое, можемъ выразить координаты x и y точки M слѣдующими формулами

$$x=\int_0^s \cos\varphi ds, \qquad y=\int_0^s \sin\varphi ds .$$

По условіямъ задачи кривая AMB должна оканчиваться данною точкою B.

Соотвѣтственно этому имѣемъ:

$$a=\int_0^S \cos\varphi ds, \qquad b=\int_0^S \sin\varphi ds \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

гдѣ a есть координата x точки B, b координата y точки B и S вся дуга кривой AB.

При возрастаніи s, отъ нуля до S, число φ можетъ, то возрастать, то убывать. Если φ возрастаетъ вмѣстѣ съ s, то по условіямъ задачи $\frac{ds}{d\varphi} > \varrho$; по тѣмъ же условіямъ $-\frac{ds}{d\varphi} > \varrho$ всякій разъ, когда при возрастаніи s число φ убываетъ.

Разобьемъ наши интегралы

$$\int_0^S \cos\varphi ds \quad \text{и} \quad \int_0^S \sin\varphi ds$$

на такія части, въ каждой изъ которыхъ $\frac{d\varphi}{ds}$ сохраняетъ постоянно одинъ и тотъ же знакъ.

Пусть эти части будутъ

$$\int_0^{s_1} \cos\varphi ds, \quad \int_{s_1}^{s_2} \cos\varphi ds, \ldots \int_{s_{n-1}}^{s_n=S} \cos\varphi ds$$

и

$$\int_0^{s_1} \sin\varphi ds, \quad \int_0^{s_2} \sin\varphi ds, \ldots \int_{s_{n-1}}^{s_n=S} \sin\varphi ds.$$

Обозначимъ черезъ $-\alpha_i$, β_i соотвѣтственно наименьшее и наибольшее значеніе φ для значеній s, лежащихъ между s_{i-1} и s_i; и черезъ σ_i численное значеніе $\frac{ds}{d\varphi}$ для тѣхъ же значеній s.

Въ такомъ случаѣ

$$\int_{s_{i-1}}^{s_i} \cos\varphi ds = \int_{-\alpha_i}^{\beta_i} \sigma_i \cos\varphi d\varphi, \quad \int_{s_{i-1}}^{s_i} \sin\varphi ds = \int_{-\alpha_i}^{\beta_i} \sigma_i \sin\varphi d\varphi$$

$$s_i - s_{i-1} = \int_{-\alpha_i}^{\beta_i} \sigma_i d\varphi$$

и потому

$$\left.\begin{aligned}
a &= \int_{-\alpha_1}^{\beta_1} \sigma_1 \cos\varphi d\varphi + \int_{-\alpha_2}^{\beta_2} \sigma_2 \cos\varphi d\varphi + \ldots + \int_{-\alpha_n}^{\beta_n} \sigma_n \cos\varphi d\varphi \\
b &= \int_{-\alpha_1}^{\beta_1} \sigma_1 \sin\varphi d\varphi + \int_{-\alpha_2}^{\beta_2} \sigma_2 \sin\varphi d\varphi + \ldots + \int_{-\alpha_n}^{\beta_n} \sigma_n \sin\varphi d\varphi \\
S &= \int_{-\alpha_1}^{\beta_1} \sigma_1 d\varphi + \int_{-\alpha_2}^{\beta_2} \sigma_2 d\varphi + \ldots + \int_{-\alpha_n}^{\beta_n} \sigma_n d\varphi
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (2)$$

По условіямъ задачи всѣ значенія σ_1, σ_2, ... σ_n не меньше ϱ и одно изъ чиселъ α_1, β_1 равно нулю.

Обозначимъ черезъ α наибольшее изъ чиселъ α_1, α_2, ..., α_n и черезъ β наибольшее изъ чиселъ β_1, β_2, ..., β_n.

Конечно $\alpha \geqq 0$ и $\beta \geqq 0$.

Если $\alpha = 0$, то формулы (2) можно переписать такъ:

$$a = \int_0^\beta \sigma\cos\varphi d\varphi, \quad b = \int_0^\beta \sigma\sin\varphi d\varphi, \quad S = \int_0^\beta \sigma d\varphi \quad . \; . \; . \; (3)$$

гдѣ σ означаетъ сумму нѣсколькихъ σ_i и потому не меньше ϱ.

Подобнымъ же образомъ при $\beta = 0$ получаемъ:

$$a = \int_{-\alpha}^0 \sigma\cos\varphi d\varphi, \quad b = \int_{-\alpha}^0 \sigma\sin\varphi d\varphi, \quad S = \int_{-\alpha}^0 \sigma d\varphi \quad . \; . \; . \; . \; (4),$$

гдѣ σ также не меньше ϱ.

Если же ни α ни β не нуль, то перемѣнная φ должна пройти дважды черезъ всѣ значенія, лежащія между $-\alpha$ и 0, или черезъ всѣ значенія, лежащія между 0 и β.

Вмѣстѣ съ тѣмъ формуламъ (2) можно придать слѣдующій видъ:

$$\left.\begin{aligned} a &= \int_{-\alpha}^0 \sigma\cos\varphi d\varphi + \int_{-\alpha}^\beta \sigma\cos\varphi d\varphi \;\text{ или }\; \int_0^\beta \sigma\cos\varphi d\varphi + \int_{-\alpha}^\beta \sigma\cos\varphi d\varphi \\ b &= \int_{-\alpha}^0 \sigma\sin\varphi d\varphi + \int_{-\alpha}^\beta \sigma\sin\varphi d\varphi \;\text{ или }\; \int_0^\beta \sigma\sin\varphi d\varphi + \int_{-\alpha}^\beta \sigma\sin\varphi d\varphi \\ S &= \int_{-\alpha}^0 \sigma d\varphi + \int_{-\alpha}^\beta \sigma d\varphi \;\text{ или }\; \int_0^\beta \sigma d\varphi + \int_{-\alpha}^\beta \sigma d\varphi \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Здѣсь σ также означаетъ сумму нѣсколькихъ σ_i и потому не меньше ϱ.

Разсмотримъ одинъ изъ указанныхъ нами случаевъ.

Пусть напримѣръ:

$$\left.\begin{aligned} a &= \int_{-\alpha}^0 \sigma\cos\varphi d\varphi + \int_{-\alpha}^\beta \sigma\cos\varphi d\varphi \\ b &= \int_{-\alpha}^0 \sigma\sin\varphi d\varphi + \int_{-\alpha}^\beta \sigma\sin\varphi d\varphi \\ S &= \int_{-\alpha}^0 \sigma d\varphi + \int_{-\alpha}^\beta \sigma d\varphi \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (6)$$

Изъ этихъ равенствъ выводимъ:

$$\left.\begin{aligned}
a-\varrho\int_{-\alpha}^{0}\cos\varphi d\varphi-\varrho\int_{-\alpha}^{\beta}\cos\varphi d\varphi=a_1=\int_{-\alpha}^{0}(\sigma-\varrho)\cos\varphi d\varphi+\int_{-\alpha}^{\beta}(\sigma-\varrho)\cos\varphi d\varphi\\
b-\varrho\int_{-\alpha}^{0}\sin\varphi d\varphi-\varrho\int_{-\alpha}^{\beta}\sin\varphi d\varphi=b_1=\int_{-\alpha}^{0}(\sigma-\varrho)\sin\varphi d\varphi+\int_{-\alpha}^{\beta}(\sigma-\varrho)\sin\varphi d\varphi\\
S-\varrho\int_{-\alpha}^{0}d\varphi-\varrho\int_{-\alpha}^{\beta}d\varphi=S_1=\int_{-\alpha}^{0}(\sigma-\varrho)d\varphi+\int_{-\alpha}^{\beta}(\sigma-\varrho)d\varphi
\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

и затѣмъ

$$\left.\begin{aligned}
a-2\varrho\sin\alpha-\varrho\sin\beta=a_1=\int_{-\alpha}^{\beta}\tau\cos\varphi d\varphi\\
b+\varrho(1-\cos\alpha)+\varrho(\cos\beta-\cos\alpha)=b_1=\int_{-\alpha}^{\beta}\tau\sin\varphi d\varphi\\
S-2\varrho\alpha-\varrho\beta=S_1=\int_{=\alpha}^{\beta}\tau d\varphi
\end{aligned}\right\}\ .\ .\ .\ (7')$$

Здѣсь τ при $0<\varphi<\beta$ означаетъ $\sigma-\varrho$ и при $\alpha<\varphi<0$ сумму двухъ $\sigma-\varrho$. Во всякомъ случаѣ τ не меньше нуля.

При однихъ и тѣхъ же значеніяхъ α и β дуга S будетъ тѣмъ меньше, чѣмъ меньше S_1. Будемъ же искать наименьшее значеніе

$$S_1=\int_{-\alpha}^{\beta}\tau d\varphi$$

при данныхъ значеніяхъ

$$\alpha;\ \beta,\ a_1=\int_{-\alpha}^{\beta}\tau\cos\varphi d\varphi,\ b_1=\int_{-\alpha}^{\beta}\tau\sin\varphi d\varphi.$$

Для упрощенія дальнѣйшихъ разсужденій введемъ вмѣсто φ новую перемѣнную ψ равную $\varphi+\alpha$ и составимъ выраженія

$$\left.\begin{aligned}
a'=a_1\cos\alpha-b_1\sin\alpha=\int_{-\alpha}^{\beta}\tau\cos(\varphi+\alpha)d\varphi=\int_{0}^{\alpha+\beta}\tau\cos\psi d\psi\\
b'=a_1\sin\alpha+b_1\cos\alpha=\int_{-\alpha}^{\beta}\tau\sin(\varphi+\alpha)d\varphi=\int_{0}^{\alpha+\beta}\tau\sin\psi d\psi
\end{aligned}\right\}\ .\ .\ .\ (8)$$

Такимъ образомъ мы приходимъ къ слѣдующей задачѣ.

Соотвѣтственно даннымъ значеніямъ

$$\alpha+\beta,\ \int_{0}^{\alpha+\beta}\tau\cos\psi d\psi=a',\ \int_{0}^{\alpha+\beta}\tau\sin\psi d\psi=b'$$

опредѣлить наименьшее значеніе

$$S_1 = \int_{-\alpha}^{\beta} \tau d\varphi = \int_0^{\alpha+\beta} \tau d\psi$$

при условіи

$$\tau \geqq 0 .$$

Приступая къ рѣшенію этой задачи, прежде всего замѣтимъ, что отношеніе

$$\frac{\int_0^{\alpha+\beta} \tau \cos\psi d\psi}{\int_0^{\alpha+\beta} \tau \sin\psi d\psi}$$

равно котангенсу нѣкотораго числа γ, лежащаго между 0 и $\alpha+\beta$.

Слѣдовательно, при $\alpha+\beta<\pi$, равно какъ и при $\alpha+\beta>2\pi$, можемъ положить

$$a' = \int_0^{\alpha+\beta} \tau \cos\psi d\psi = c\cos\gamma\,,\ b' = \int_0^{\alpha+\beta} \tau \sin\psi d\psi = c\sin\gamma \quad . \quad . \quad . \quad (9),$$

гдѣ c означаетъ число положительное, а γ заключается между 0 и $\alpha+\beta$.

Вмѣстѣ съ тѣмъ имѣемъ

$$c = \int_0^{\alpha+\beta} \tau \cos(\psi-\gamma) d\psi$$

и потому

$$c \leqq \int_0^{\alpha+\beta} \tau d\psi .$$

Отсюда не трудно заключить, что при $\alpha+\beta<\pi$, равно какъ и при $\alpha+\beta>2\pi$, наименьшее значеніе интеграла

$$\int_{-\alpha}^{\beta} \tau d\varphi$$

равно

$$c = \sqrt{a'^2+b'^2} = \sqrt{a_1{}^2+b_1{}^2}$$

и соотвѣтствуетъ тому случаю, когда кривая линія, опредѣляемая уравненіями

$$x=\int_{-\alpha}^{\varphi}\tau\cos\varphi d\varphi\,, \qquad y=\int_{-\alpha}^{\varphi}\tau\sin\varphi d\varphi\,,$$

обращается въ прямую.

Если же $\alpha+\beta$ заключается между π и 2π, то въ формулахъ (9) число c иногда нельзя считать положительнымъ и тогда предыдущій выводъ теряетъ свою силу.

Съ другой стороны при $\pi<\alpha+\beta<2\pi$ каждый изъ интеграловъ

$$\int_0^{\alpha+\beta}\tau\cos\psi d\psi\,, \quad \int_0^{\alpha+\beta}\tau\sin\psi d\psi\,, \quad \int_0^{\alpha+\beta}\tau d\psi\,,$$

можно разбить на два: одинъ отъ $\psi=0$ до $\psi=\pi$, другой отъ $\psi=\pi$ до $\psi=\alpha+\beta$.

Соотвѣтственно этому положимъ

$$\int_0^{\pi}\tau\cos\psi d\psi=\lambda_0\,, \quad \int_{\pi}^{\alpha+\beta}\tau\cos\psi d\psi=\lambda\,, \quad \int_0^{\pi}\tau\sin\psi d\psi=\mu_0\,, \quad \int_{\pi}^{\alpha+\beta}\tau\sin\psi d\psi=\mu\,;$$

такъ что

$$a'=\lambda_0-\lambda\,, \qquad b'=\mu_0-\mu \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

При однихъ и тѣхъ же значеніяхъ $\alpha+\beta$, λ_0, λ, μ_0, μ интегралъ

$$\int_0^{\alpha+\beta}\tau d\psi\,,$$

тѣмъ меньше, чѣмъ меньше интегралы

$$\int_0^{\pi}\tau d\psi \quad \text{и} \quad \int_{\pi}^{\alpha+\beta}\tau d\psi\,.$$

А наименьшія значенія послѣднихъ двухъ интеграловъ, при данныхъ $\alpha+\beta$, λ_0, λ, μ_0, μ, опредѣляются изъ формулъ

$$\left.\begin{array}{ll} \lambda_0'=z_0\cos\xi_0\,, & -\lambda=z\cos\xi \\ \mu_0=z_0\sin\xi_0\,, & -\mu=z\sin\xi \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

Здѣсь

$$z_0 \text{ означаетъ наименьшее значеніе } \int_0^{\pi} \tau d\psi\,,$$

$$z \quad » \qquad » \qquad » \quad \int_{\pi}^{\alpha+\beta} \tau d\psi\,,$$

$$0 < \xi_0 < \pi < \xi < \alpha + \beta\,.$$

У насъ $\alpha+\beta$ число данное, а λ_0, λ, μ_0, μ могутъ получать различныя значенія, такъ какъ даны только разности

$$\lambda_0 - \lambda = a'\,, \qquad \mu_0 - \mu = b'\,.$$

Между различными возможными значеніями λ_0, λ, μ_0, μ слѣдуетъ остановиться на тѣхъ, для которыхъ сумма z_0+z достигаетъ своего наименьшаго значенія, такъ какъ наименьшее значеніе

$$S_1 = \int_0^{\alpha+\beta} \tau d\psi = \int_0^{\pi} \tau d\psi + \int_{\pi}^{\alpha+\beta} \tau d\psi\,,$$

равно наименьшему значенію z_0+z.

Формулы (10) и (11) даютъ

$$a' = z_0\cos\xi_0 + z\cos\xi\,, \qquad b' = z_0\sin\xi_0 + z\sin\xi\,.$$

Отсюда посредствомъ дифференцированія выводимъ

$$0 = \cos\xi_0 dz_0 + \cos\xi dz - z_0\sin\xi_0 d\xi_0 - z\sin\xi d\xi\,,$$

$$0 = \sin\xi_0 dz_0 + \sin\xi dz + z_0\cos\xi_0 d\xi_0 + z\cos\xi d\xi\,,$$

и затѣмъ

$$\left.\begin{array}{l} \sin(\xi-\xi_0)dz_0 = z_0\cos(\xi-\xi_0)d\xi_0 + zd\xi \\ \sin(\xi-\xi_0)dz = -z_0 d\xi_0 - z\cos(\xi-\xi_0)d\xi \\ \sin(\xi-\xi_0)d(z+z_0) = (zd\xi - z_0 d\xi_0([1-\cos(\xi-\xi_0)] \end{array}\right\} \quad . \; . \quad (12)$$

Послѣднее равенство показываетъ, что сумма z_0+z достигаетъ своего наименьшаго значенія въ одномъ изъ слѣдующихъ случаевъ:

$$1) \quad z=0 \quad \text{или} \quad z_0=0\,,$$

$$2) \quad \xi_0=0 \quad \text{и} \quad \xi=\alpha+\beta\,,$$

такъ какъ во всѣхъ прочихъ случаяхъ всегда можно уменьшить эту сумму z_0+z посредствомъ нѣкоторыхъ достаточно малыхъ измѣненій чиселъ ξ_0 и ξ.

Соотвѣтственно этому интегралъ

$$\int_{-\alpha}^{\beta} \tau d\varphi = S_1$$

достигаетъ, при $\pi < \alpha + \beta < 2\pi$, своего наименьшаго значенія только тогда, когда кривая линія, опредѣляемая уравненіями

$$x = \int_{-\alpha}^{\varphi} \tau \cos\varphi d\varphi , \quad y = \int_{-\alpha}^{\varphi} \tau \sin\varphi d\varphi ,$$

обращается въ двѣ прямыя, составляющія съ осью x углы $-\alpha$ и $+\beta$, или въ одну прямую. Вспомнимъ, что при $\alpha + \beta < \pi$ и при $\alpha + \beta > 2\pi$ тотъ же интегралъ достигаетъ своего наименьшаго значенія только тогда, когда кривая линія опредѣляемая уравненіями

$$x = \int_{-\alpha}^{\varphi} \tau \cos\varphi d\varphi , \quad y = \int_{-\alpha}^{\varphi} \tau \sin\varphi d\varphi ,$$

обращается въ прямую.

Сопоставляя эти результаты съ формулами (5), (6) и (7), заключаемъ, что при $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ дуга S достигаетъ наименьшаго значенія для такой кривой AMB (см. фиг. 2-ю), которая состоитъ изъ дуги AM_1 круга радіуса ϱ, изъ прямой M_1M_2, касательной къ дугѣ AM_1, изъ дуги M_2M_3 другаго круга радіуса ϱ и, наконецъ, изъ прямой M_3B, касательной къ дугѣ M_2M_3, или — изъ дугъ трехъ круговъ радіуса ϱ и изъ прямой (см. фиг. 3-ю).

Каждыя двѣ смежныя части нашей кривой, конечно, должны въ общей ихъ точкѣ имѣть общую касательную.

Замѣтимъ еще, что для кривой, составленной изъ трехъ дугъ и одной прямой, центры двухъ круговъ, касательныхъ къ прямой, должны лежать по одну и ту же сторону отъ этой послѣдней.

Подобнымъ же образомъ убѣдимся, что при $\alpha = 0$, равно какъ и при $\beta = 0$, дуга S достигаетъ наименьшаго значенія для такой кривой AMB, которая состоитъ изъ одной дуги круга радіуса ϱ и двухъ прямыхъ, касательныхъ къ ней (фиг. 4-я), или — изъ дугъ двухъ круговъ радіуса ϱ и прямой, касательной къ нимъ (фиг. 5-я).

До сихъ поръ мы предполагали α и β данными.

Мы предполагали также извѣстнымъ, который изъ двухъ промежутковъ, отъ 0 до $-\alpha$ или отъ 0 до β, перемѣнная φ проходитъ дважды.

Соотвѣтствующее этимъ даннымъ наименьшее значеніе S обозначимъ черезъ Σ.

На самомъ дѣлѣ числа α и β могутъ получать различныя значенія и изъ двухъ промежутковъ, отъ 0 до $-\alpha$ и отъ 0 до β, перемѣнная φ можетъ проходить дважды тотъ или другой.

Этою неопредѣленностью, очевидно, слѣдуетъ воспользоваться такъ, чтобы Σ достигло своего наименьшаго значенія, которое вмѣстѣ съ тѣмъ будемъ наименьшимъ значеніемъ S.

Приступая къ разысканію наименьшего значенія Σ, остановимся сначала на тѣхъ случаяхъ, когда кривая AMB составлена изъ двухъ дугъ и двухъ прямыхъ.

Вмѣстѣ съ тѣмъ для опредѣленности положимъ, что φ проходитъ дважды промежутокъ отъ 0 до $-\alpha$.

Тогда

$$\left.\begin{aligned}
\Sigma &= (2\alpha+\beta)\varrho+z_0+z,\\
a &= 2\varrho\sin\alpha+\varrho\sin\beta+z_0\cos\alpha+z\cos\beta,\\
b &= 2\varrho\cos\alpha-\varrho-\varrho\cos\beta-z_0\sin\alpha+z\sin\beta.
\end{aligned}\right\}\quad \ldots\ldots (13)$$

Отсюда, по дифференцированіи, получаемъ:

$$d\Sigma=2\varrho d\alpha+\varrho d\beta+dz_0+dz,$$

$$\cos\alpha dz_0+\cos\beta dz=(z_0\sin\alpha-2\varrho\cos\alpha)d\alpha+(z\sin\beta-\varrho\cos\beta)d\beta,$$

$$\sin\alpha dz_0-\sin\beta dz=-(z_0\cos\alpha+2\varrho\sin\alpha)d\alpha+(z\cos\beta+\varrho\sin\beta)d\beta,$$

и затѣмъ

$$\left.\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta)dz_0 &= -[z_0\cos(\alpha+\beta)+2\varrho\sin(\alpha+\beta)]d\alpha+zd\beta,\\
\sin(\alpha+\beta)dz &= z_0d\alpha-[z\cos(\alpha+\beta)+\varrho\sin(\alpha+\beta)]d\beta,\\
\sin(\alpha+\beta)d\Sigma &= (z_0d\alpha+zd\beta)[1-\cos(\alpha+\beta)].
\end{aligned}\right\}\quad \ldots (14)$$

Послѣднее равенство показываетъ, что при z_0, z, α, β не равныхъ нулю Σ всегда можно уменьшить посредствомъ нѣкоторыхъ достаточно малыхъ измѣненій въ числахъ α и β.

Иначе сказать, кривыя AMB, составленныя изъ двухъ дугъ и двухъ прямыхъ, не даютъ для Σ наименьшаго значенія, если ни одна изъ этихъ дугъ и прямыхъ не исчезаетъ.

Если въ нашей кривой исчезаетъ одна изъ прямыхъ, то такую кривую можно разсматривать какъ частный случай кривыхъ, составленныхъ изъ трехъ дугъ и одной прямой.

Этими послѣдними кривыми мы теперь и займемся.

Для нихъ имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned}
\Sigma &= \varrho(2\alpha+\beta)+z\,, \qquad z>0\,, \\
a &= 2\varrho\sin\alpha+\varrho\sin\beta+z\cos\xi\,, \\
b &= 2\varrho\cos\alpha-\varrho-\varrho\cos\beta+z\sin\xi\,, \qquad -\alpha<\xi<\beta\,.
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (15)$$

Отсюда, по дифференцированіи, выводимъ:

$$d\,\Sigma = 2\varrho d\alpha+\varrho d\beta+dz\,,$$

$$\cos\xi dz - z\sin\xi d\xi = -2\varrho\cos\alpha d\alpha - \varrho\cos\beta d\beta\,,$$

$$\sin\xi dz + z\cos\xi d\xi = 2\varrho\sin\alpha d\alpha - \varrho\sin\beta d\beta\,,$$

и затѣмъ

$$\left.\begin{aligned}
dz &= -2\varrho\cos(\alpha+\xi)d\alpha - \varrho\cos(\xi-\beta)d\beta\,, \\
zd\xi &= 2\varrho\sin(\alpha+\xi)d\alpha + \varrho\sin(\xi-\beta))d\beta\,, \\
d\Sigma &= 2\varrho[1-\cos(\alpha+\xi)]d\alpha + \varrho[1-\cos(\xi-\beta)]d\beta\,.
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (16)$$

Отсюда видно, что наименьшее значеніе Σ можетъ соотвѣтствовать только одному изъ слѣдующихъ случаевъ:

1) $\xi=-\alpha\,, \quad \alpha>0\,, \quad \beta>0\,, \quad z>0\,;$
2) $\xi=\beta\,, \quad \alpha>0\,, \quad \beta>0\,, \quad z>0\,;$
3) $z=0\,;$
4) $\alpha=0$ или $\beta=0\,.$

При $\xi=-\alpha$, $\alpha>0$, $\beta>0$, $z>0$ имѣемъ:

$$d\xi = -\frac{\varrho\sin(\alpha+\beta)}{\xi}\,d\beta\,,$$

$$d(\xi+\alpha) = d\alpha - \frac{\varrho\sin(\alpha+\beta)}{\xi}\,d\beta\,,$$

$$d\Sigma = \varrho[1-\cos(\alpha+\beta)]d\beta\,,$$

и можемъ уменьшить Σ: стоитъ только β уменьшить на нѣкоторое достаточно малое положительное число ε, а α увеличить на нѣкоторое также достаточно малое число η, удовлетворяющее неравенству

$$\eta + \frac{\varrho\sin(\alpha+\beta)}{\xi}\,\varepsilon > 0\,.$$

Мы предполагаемъ здѣсь, что сумма $\alpha+\beta$ не равна 2π. Если же $\xi=-\alpha$ и $\alpha+\beta=2\pi$, то

$$\int_{-\alpha}^{\beta}\varrho\cos\varphi d\varphi = \int_{-\alpha}^{\beta}\varrho\sin\varphi d\varphi = 0\ ,$$

и Σ можно уменьшить на величину равную

$$\int_{-\alpha}^{\beta}\varrho d\varphi = 2\pi\varrho\ .$$

Наше замѣчаніе о случаѣ

$$\xi = -\alpha$$

можно распространить и на случай

$$\xi = \beta\ .$$

Поэтому при α и β не равныхъ нулю Σ можетъ достигать своего наименьшаго значенія только для такой кривой AMB, которая состоитъ изъ двухъ дугъ; прямолинейныя же части должны исчезать (см. фиг. 6-ю).

Совершенно такъ же убѣдимся, что при $\alpha=0$, равно какъ и при $\beta=0$, Σ можетъ достигать наименьшаго значенія только для такой кривой AMB, которая состоитъ изъ одной прямой и одной дуги (см. фиг. 7-ю).

Кривую AMB, составленную изъ прямой AM и дуги MB, слѣдуетъ отбросить, такъ какъ при $\alpha=\xi=0$, $z>0$, $\beta>0$ формулы (16) даютъ

$$dz = -\varrho\cos\beta d\beta\ ,$$

$$zd\xi = -\varrho\sin\beta d\beta\ ,\ \ zd(\alpha+\xi) = zd\alpha - \varrho\sin\beta d\beta\ ,$$

$$d\Sigma = \varrho(1-\cos\beta)d\beta\ ,$$

и показываютъ, что Σ можно уменьшить.

Съ другой стороны изъ чертежа не трудно видѣть, что кривая AMB, составленная изъ двухъ дугъ, можетъ давать наименьшее значеніе для Σ только въ тѣхъ случаяхъ, когда точка B лежитъ внутри одного изъ двухъ круговъ радіуса ϱ, касающихся прямой AC въ точкѣ A (см. фиг. 8-ю). (Дуга AM_0 съ касательною M_0B представляетъ длину меньшую суммы соотвѣтствующихъ дугъ AM и MB).

Напротивъ, кривая AMB, составленная изъ дуги и прямой, можетъ давать наименьшее значеніе для Σ только въ тѣхъ случаяхъ, когда точка B лежитъ внѣ обоихъ круговъ радіуса ϱ, касательныхъ къ прямой AC въ точкѣ A (см. фиг. 9-ю). (Дуга AMM_0 съ касательною M_0B представляетъ длину большую суммы дугъ AM и $MM'B$, такъ какъ $\widehat{M_0AM} < \overline{M_0B} + \widehat{MB}$).

Итакъ, если точка B лежитъ внѣ обоихъ круговъ радіуса ϱ, касающихся прямой AC въ точкѣ A, то для полученія искомой кратчайшей кривой AMB слѣдуетъ провести изъ точки B касательную къ ближайшему изъ этихъ круговъ и составить затѣмъ кривую изъ дуги круга и проведенной нами касательной къ нему.

Если же точка B лежитъ внутри одного изъ круговъ, касающихся прямой AC въ точкѣ A, то искомую кратчайшую кривую слѣдуетъ составлять изъ двухъ дугъ.

ЗАДАЧА 2-я.

Даны направленія двухъ прямолинейныхъ путей AOB и COD (см. фиг. 10-ю).

Требуется соединить эти пути такою кривою XMY (courbe de raccordement), которая была бы кратчайшею при слѣдующихъ условіяхъ:

1) наша кривая XMY должна касаться въ одномъ изъ своихъ концовъ X прямой AB, въ другомъ Y — прямой CD;

2) кривизна ея въ началѣ и въ концѣ должна быть равною нулю, а въ другихъ точкахъ должна не превосходить нѣкотораго даннаго числа $\frac{1}{\varrho}$;

3) производная отъ кривизны по дугѣ новсюду должна быть не больше другого даннаго числа g;

4) начальное направленіе движенія по нашей кривой, отъ X къ Y, должно совпадать съ AB, а окончательное — съ CD.

РѢШЕНІЕ.

Для всякой точки M нашей кривой обозначимъ дугу XM черезъ s, а уголъ BNT между AB и касательною NMT къ кривой черезъ φ.

При этомъ будемъ придавать φ положительное значеніе для такихъ угловъ BNT, которые можно получить посредствомъ поворота NB около N по направленію стрѣлки часовъ; въ противномъ же случаѣ будемъ придавать φ отрицательное значеніе.

Пусть уголъ BOD выражается числомъ φ_0.

Согласно чертежу примемъ

$$0 < \varphi_0 < \pi .$$

Наконецъ буквою S обозначимъ всю дугу XMY.

По условіямъ задачи начальныя значенія s и φ равны нулю (для точки X).

Затѣмъ при непрерывномъ измѣненіи s число φ должно измѣняться также непрерывно и окончательное значеніе φ (для точки Y) равно φ_0 или $\varphi_0 - 2\pi$.

Предположимъ, что φ постоянно возрастаетъ вмѣстѣ съ s. Тогда окончательное значеніе φ число положительное и равно φ_0.

Вмѣстѣ съ тѣмъ имѣемъ

$$\frac{1}{\varrho} > \frac{d\varphi}{ds} > 0$$

и не трудно убѣдиться въ справедливости слѣдующихъ неравенствъ:

$$\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 - 2g\varphi \leqq 0,$$

$$\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 - 2g(\varphi_0 - \varphi) \leqq 0;$$

такъ какъ по условіямъ вопроса

$$\frac{d}{ds}\left\{\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 - 2g\varphi\right\} = 2\left\{\frac{d^2\varphi}{ds^2} - g\right\}\frac{d\varphi}{ds} < 0,$$

$$\frac{d}{ds}\left\{\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 - 2g(\varphi_0 - \varphi)\right\} = 2\left\{\frac{d^2\varphi}{ds^2} + g\right\}\frac{d\varphi}{ds} > 0,$$

$\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 - 2g\varphi$ обращается въ нуль при $s = 0$, $\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 - 2g(\varphi_0 - \varphi)$ обращается въ нуль при $s = S$.

Поэтому

$$\frac{ds}{d\varphi} \geqq \varrho, \quad \frac{ds}{d\varphi} \geqq \frac{1}{\sqrt{2g\varphi}} \quad \text{и} \quad \frac{ds}{d\varphi} \geqq \frac{1}{\sqrt{2g(\varphi_0 - \varphi)}} \quad \ldots\ldots (1)$$

Съ другой стороны имѣемъ

$$S = \int_0^{\varphi_0} \frac{ds}{d\varphi} d\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Различимъ теперь два случая:

$$1)\ \varrho < \frac{1}{\sqrt{g\varphi_0}}, \qquad 2)\ \varrho > \frac{1}{\sqrt{g\varphi_0}}.$$

Если

$$\varrho < \frac{1}{\sqrt{g\varphi_0}},$$

то при $0 < \varphi < \frac{\varphi_0}{2}$ всѣ неравенства (1) равносильны второму

$$\frac{ds}{d\varphi} \geqq \frac{1}{\sqrt{2g\varphi}}\,,$$

а при $\frac{\varphi_0}{2} < \varphi < \varphi_0$ — третьему

$$\frac{ds}{d\varphi} \geqq \frac{1}{\sqrt{2g(\varphi_0 - \varphi)}}\,.$$

Разбивая соотвѣтственно этому интегралъ

$$\int_0^{\varphi_0} \frac{ds}{d\varphi}\, d\varphi$$

на два

$$\int_0^{\frac{\varphi_0}{2}} \frac{ds}{d\varphi}\, d\varphi \quad \text{и} \quad \int_{\frac{\varphi_0}{2}}^{\varphi_0} \frac{ds}{d\varphi}\, d\varphi$$

и замѣняя $\frac{ds}{d\varphi}$ въ интегралѣ

$$\int_0^{\frac{\varphi_0}{2}} \frac{ds}{d\varphi}\, a$$

выраженіемъ $\frac{1}{\sqrt{2g\varphi}}$, а въ интегралѣ

$$\int_{\frac{\varphi_0}{2}}^{\tau\upsilon} \frac{ds}{d\varphi}\, d\varphi\,,$$

выраженіемъ $\frac{1}{\sqrt{2g(\varphi_0 - \varphi)}}$, приходимъ къ неравенству

$$S \geqq \int_0^{\frac{\varphi_0}{2}} \frac{ds}{\sqrt{2g\varphi}} + \int_{\frac{\varphi_0}{2}}^{\varphi_0} \frac{ds}{\sqrt{2(\varphi_0 - \varphi)}} = 2\sqrt{\frac{\varphi_0}{g}} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Не трудно также видѣть, что S равняется $2\sqrt{\frac{\varphi_0}{g}}$ въ томъ случаѣ, когда

$$\text{при } 0 < \varphi < \frac{\varphi_0}{2} \text{ имѣемъ } \frac{d^2\varphi}{ds^2} = g\,,$$

$$\text{а при } \frac{\varphi_0}{2} < \varphi < \varphi_0 \text{ имѣемъ } \frac{d^2\varphi}{ds^2} = -g\,.$$

Если же

$$\varrho > \frac{1}{\sqrt{g\varphi_0}}\,,$$

то прежде всего мы опредѣлимъ два числа φ_1 и φ_2 по условію

$$\frac{1}{\sqrt{2g\varphi_1}} = \varrho = \frac{1}{\sqrt{2g(\varphi_0 - \varphi_2)}}\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

которое даетъ

$$\varphi_1 = \varphi_0 - \varphi_2 = \frac{1}{2g\varrho^2}\,, \quad \varphi_2 = \varphi_0 - \frac{1}{2g\varrho^2}\,, \quad \varphi_2 - \varphi_1 = \varphi_0 - \frac{1}{g\varrho^2}\,. \quad (5)$$

Пока φ меньше φ_1, всѣ неравенства (1) равносильны второму

$$\frac{ds}{d\varphi} \geqq \frac{1}{\sqrt{2g\varphi}}\,;$$

при $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$ они равносильны первому

$$\frac{ds}{d\varphi} \geqq \varrho$$

и наконецъ при $\varphi_2 < \varphi < \varphi_0$ — третьему

$$\frac{ds}{d\varphi} \geqq \frac{1}{\sqrt{2g(\varphi_0 - \varphi)}}\,.$$

Соотвѣтственно этому разбиваемъ нашъ интегралъ

$$\int_0^{\varphi_0} \frac{ds}{d\varphi}\, ds$$

на три

$$\int_0^{\varphi_1} \frac{ds}{d\varphi}\, d\varphi\,, \quad \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{ds}{d\varphi}\, d\varphi\,, \quad \int_{\varphi_2}^{\varphi_0} \frac{ds}{d\varphi}\, d\varphi$$

и замѣняемъ $\dfrac{ds}{d\varphi}$

въ интегралѣ $\displaystyle\int_0^{\varphi_1} \frac{ds}{d\varphi}\, d\varphi$ выраженіемъ $\dfrac{1}{\sqrt{2g\varphi}}$,

» » $\displaystyle\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{ds}{d\varphi}\, d\varphi$ » ϱ,

» » $\displaystyle\int_{\varphi_2}^{\varphi_0} \frac{ds}{d\varphi}\, d\varphi$ » $\dfrac{1}{\sqrt{2g(\varphi_0 - \varphi)}}$.

Такимъ образомъ мы приходимъ къ неравенству

$$S \geqq \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{2g\varphi}} + \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varrho d\varphi + \int_{\varphi_2}^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{2g(\varphi_0-\varphi)}} = \varrho\varphi_0 + \frac{1}{g\varrho} \quad . . (6)$$

которое обращается въ равенство

$$S = \varrho\varphi_0 + \frac{1}{g\varrho}$$

въ томъ частномъ случаѣ, когда

$$\text{при } 0 < \varphi < \varphi_1 \text{ имѣемъ } \frac{d^2\varphi}{ds^2} = g,$$

$$\text{при } \varphi_1 < \varphi < \varphi_2 \quad » \quad \frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{\varrho},$$

$$\text{и при } \varphi_2 < \varphi < \varphi_0 \quad » \quad \frac{d^2\varphi}{ds^3} = -g.$$

Совершенно такъ-же получимъ неравенство

$$S \geqq 2\sqrt{\frac{2\pi-\varphi_0}{g}} \quad \text{при } \varrho < \frac{1}{\sqrt{g(2\pi-\varphi_0)}}$$

и неравенство

$$S \geqq \varrho(2\pi-\varphi_0) + \frac{1}{g\varrho} \quad \text{при } \varrho > \frac{1}{\sqrt{g(2\pi-\varphi_0)}},$$

если предположимъ, что при возрастанiи s число φ постоянно убываетъ.

У насъ $0 < \varphi_0 < \pi$ и потому наименьшее значенiе S во второмъ предположенiи больше чѣмъ въ первомъ:

$$2\sqrt{\frac{2\pi-\varphi_0}{g}} > 2\sqrt{\frac{\varphi_0}{g}} \quad \text{и} \quad \varrho(2\pi-\varphi_0) + \frac{1}{g\varrho} > \varrho\varphi_0 + \frac{1}{g\varrho}.$$

Обратимся къ разсмотрѣнiю тѣхъ кривыхъ, для которыхъ производная $\frac{d\varphi}{ds}$ получаетъ какъ положительныя, такъ и отрицательныя значенiя. Для опредѣленности положимъ, что послѣднее значенiе φ равно φ_0.

Пусть наименьшее значенiе φ для нашей кривой равно α. Конечно

$$\alpha \leqq 0.$$

Выкинемъ изъ нашей кривой тѣ части, на которыхъ $\frac{d\varphi}{ds} < 0$. Общая длина всѣхъ оставшихся частей, конечно, будетъ меньше S. Для каждой изъ нихъ $\frac{ds}{d\varphi} > \varrho$ и вмѣстѣ съ тѣмъ не трудно убѣдиться въ справедливости слѣдующихъ неравенствъ:

$$\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 - 2g(\varphi - \alpha) \leqq 0 \quad \text{и} \quad \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 - 2g(\varphi_0 - \varphi) \leqq 0 \, .$$

Отсюда затѣмъ, разсуждая по прежнему, заключаемъ, что

$$S \geqq 2\sqrt{\frac{\varphi_0 - \alpha}{g}} \quad \text{при } \varrho < \frac{1}{\sqrt{g(\varphi_0 - \alpha)}}$$

и

$$S \geqq \varrho(\varphi_0 - \alpha) + \frac{1}{g\varrho} \quad \text{при } \varrho > \frac{1}{\sqrt{g(\varphi_0 - \alpha)}} \, .$$

Совершенно такъ-же получимъ неравенство

$$S \geqq 2\sqrt{\frac{2\pi - \varphi_0 + \beta}{g}} \quad \text{при } \varrho < \frac{1}{\sqrt{g(2\pi - \varphi_0 + \beta)}}$$

и неравенство

$$S \geqq \varrho(2\pi - \varphi_0 + \beta) + \frac{1}{g\varrho} \quad \text{при } \varrho > \frac{1}{\sqrt{g(2\pi - \varphi_0 + \beta)}} \, ,$$

если предположимъ, что послѣднее значенiе φ равно $\varphi_0 - 2\pi$ и наибольшее равно β.

Сопоставимъ теперь всѣ наши результаты.

Изъ нихъ слѣдуетъ, что при опредѣленiи кратчайшей кривой XMY надо различать два случая:

$$1) \;\; \varphi_0 < \frac{1}{g\varrho^2} \qquad \text{и} \qquad 2) \;\; \varphi_0 > \frac{1}{g\varrho^2} \, .$$

Если $\varphi_0 < \frac{1}{g\varrho^2}$, то кратчайшая кривая XMY должна состоять изъ двухъ частей. Первая часть опредѣляется уравненiемъ

$$\varphi = \frac{1}{2} g s^2$$

при условіи $0 < \varphi < \frac{\varphi_0}{2}$, а вторая часть—уравненіемъ

$$\varphi = \varphi_0 - \frac{1}{2} g \left\{ 2\sqrt{\frac{\varphi_0}{g}} - s \right\}^2$$

при условіи $\frac{\varphi_0}{2} < \varphi < \varphi_0$.

Если же $\varphi_0 > \frac{1}{g\varrho^2}$, то кратчайшая кривая XMY должна состоять изъ трехъ частей. Первая часть опредѣляется уравненіемъ

$$\varphi = \frac{1}{2} gs^2$$

при условіи $0 < \varphi < \varphi_1 = \frac{1}{2g\varrho^2}$. Вторая часть дуга круга радіуса ϱ и опредѣляется уравненіемъ

$$\varphi = \frac{s}{\varrho} - \frac{1}{2g\varrho^2}$$

при условіи $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2 = \varphi_0 - \frac{1}{2g\varrho^2}$. Наконецъ третья часть опредѣляется уравненіемъ

$$\varphi = \varphi_0 - \frac{1}{2} g \left(\varrho\varphi_0 + \frac{1}{g\varrho} - s \right)^2$$

при условіи $\varphi_2 < \varphi < \varphi_0$.

Для окончательнаго опредѣленія положенія и вида кратчайшей кривой примемъ прямую OA за ось x-овъ, а OD за ось y-овъ. Иначе сказать, будемъ проводить черезъ каждую точку M нашей кривой двѣ прямыя ME и MF соотвѣтственно параллельныя AO и DO и обозначимъ длину ME черезъ x, длину MF черезъ y.

При такихъ обозначеніяхъ не трудно вывесть слѣдующія формулы:

$$\left.\begin{aligned} x &= \int_{\varphi}^{\varphi_0} \frac{\sin(\varphi_0 - \varphi)}{\sin\varphi_0} \frac{ds}{d\varphi} d\varphi \\ y &= \int_0^{\varphi} \frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_0} \frac{ds}{d\varphi} d\varphi \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Въ частности для точки X

$$x=\int_0^{\varphi_0}\frac{\sin(\varphi_0-\varphi)}{\sin\varphi_0}\,\frac{ds}{d\varphi}\,d\varphi\,,\quad y=0\,,\quad .\ .\ .\ .\ .\ (8)$$

а для точки Y

$$x=0\,,\quad y=\int_0^{\varphi_0}\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_0}\,\frac{ds}{d\varphi}\,d\varphi\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (9)$$

Въ послѣднихъ формулахъ (7), (8) и (9) производная $\frac{ds}{d\varphi}$ постоянно равна наибольшему изъ трехъ выраженій

$$\frac{1}{\sqrt{2g\varphi}}\,,\ \varrho\,,\ \frac{1}{\sqrt{2g(\varphi_0-\varphi)}}\,.$$

Замѣтимъ еще, что кратчайшая кривая XMY расположена симметрично относительно прямой OH, дѣлящей уголъ AOD пополамъ.

Для точки пересѣченія прямой OH съ кратчайшею кривою XMY имѣемъ:

$$y=x=\int_0^{\frac{\varphi_0}{2}}\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_0}\,\frac{ds}{d\varphi}\,d\varphi\,;\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (10)$$

разстояніе же этой точки отъ O равно

$$\int_0^{\frac{\varphi_0}{2}}\frac{\sin\varphi}{\cos\frac{\varphi_0}{2}}\,\frac{ds}{d\varphi}\,d\varphi\,.$$

При построеніи кратчайшей кривой главную трудность представляютъ тѣ части ея, гдѣ

$$\frac{ds}{d\varphi}=\frac{1}{\sqrt{2g\varphi}}\ \text{ или }\ \frac{1}{\sqrt{2g(\varphi_0-\varphi)}}\,.$$

По симметричности кривой относительно OH достаточно разсмотрѣть одну изъ этихъ частей.

Остановимся на первой, гдѣ

$$\frac{ds}{d\varphi}=\frac{1}{\sqrt{2g\varphi}}\,.$$

Для этой части имѣемъ

$$y\sin\varphi_0=\int_0^\varphi \frac{\sin\varphi d\varphi}{\sqrt{2g\varphi}}=$$

$$=\int_0^\varphi \frac{\varphi^{\frac{1}{2}}d\varphi}{\sqrt{2g}}-\frac{1}{6}\int_0^\varphi \frac{\varphi^{\frac{5}{2}}d\varphi}{\sqrt{2g}}+\dots$$

$$=\frac{2}{3}\frac{\varphi^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2g}}-\frac{1}{21}\frac{\varphi^{\frac{7}{2}}}{\sqrt{2g}}+\dots\dots\dots \quad (11)$$

и

$$x=a-\int_0^\varphi \frac{\cos\varphi d\varphi}{\sqrt{2g\varphi}}+y\cos\varphi_0=$$

$$=a+y\cos\varphi_0-\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{2g\varphi}}+\frac{1}{2}\int_0^\varphi \frac{\varphi^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2g}}d\varphi-\dots$$

$$=a+y\cos\varphi_0-\frac{2\varphi^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2g}}+\frac{1}{5}\frac{\varphi^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{2g}}-\dots\dots\dots \quad (12)$$

гдѣ

$$a=\int_0^{\varphi_0}\frac{\sin(\varphi_0-\varphi)}{\sin\varphi_0}\frac{ds}{d\varphi}d\varphi=\int_0^{\varphi_0}\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_0}\frac{ds}{d\varphi}d\varphi\dots\dots \quad (13)$$

Быстрота сходимости нашихъ рядовъ (11) и (12) зависитъ отъ величины числа φ, которое во всякомъ случаѣ меньше $\frac{1}{2g\varrho^2}$.

При достаточно малыхъ значеніяхъ $\frac{1}{2g\varrho^2}$ можно положить

$$\left.\begin{aligned} y\sin\varphi_0&=\frac{2}{3}\frac{\varphi^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2g}}\\ a-x+y\cos\varphi_0&=\frac{2\varphi^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2g}}\end{aligned}\right\};\dots\dots\dots \quad (14)$$

иначе сказать, можно замѣнить первую часть кривой XMY параболою третьей степени

$$y\sin\varphi_0=\frac{g}{6}(a-x+y\cos\varphi_0)^3\dots\dots \quad (15)$$

Желая примѣнить наши разсужденія къ желѣзно-дорожной практикѣ, положимъ, согласно „Taschenbuch zum Abstecken von Kreisbögen“ bearbeitet von *O. Sarrazin* und *H. Oberbeck*, 1888;

$$\varrho = 300\,,\ g = \frac{1}{12000}\,.$$

Здѣсь за единицу длины принятъ метръ. При такихъ значеніяхъ ϱ и g имѣемъ:

$$\frac{1}{2g\varrho^2} = \frac{1}{15}\,,$$

$$y\sin\varphi_0 < \frac{2}{3}\frac{\varphi^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2g}} < \frac{40}{45} = \frac{8}{9}\,,$$

$$a - x + y\cos\varphi_0 < \frac{2\varphi^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2g}} < 40\,.$$

Обращаясь затѣмъ къ рядамъ

$$\frac{2}{3}\frac{\varphi^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2g}} - \frac{1}{21}\frac{\varphi^{\frac{7}{2}}}{\sqrt{2g}} + \ldots$$

и

$$\frac{2\varphi^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2g}} - \frac{1}{5}\frac{\varphi^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{2g}} + \ldots$$

видимъ, что для каждаго изъ нихъ отношеніе второго члена къ первому меньше $\frac{1}{2250}$. Отсюда можно заключить, что парабола (15) третьей степени дѣйствительно мало уклоняется отъ первой части нашей кратчайшей кривой.

M. Nordling, насколько мнѣ извѣстно, первый предложилъ соединять прямую съ кругомъ посредствомъ параболы третьей степени *).

При измѣненіи однихъ элементовъ кривой XMY необходимо измѣнить и другіе ея элементы для того, чтобы не было разрыва ни въ самой кривой ни въ значеніяхъ ея радіуса кривизны.

Для уясненія вопроса остановимся еще на томъ случаѣ, когда

$$\varphi_0 > \frac{1}{g\varrho^2}\,.$$

---

*) Annales des ponts et chaussées 1867, „Note sur le raccordement des courbes des voies de fer“, par Nordling.

Въ этомъ случаѣ мы составляемъ кривую XMY изъ трехъ частей.

Если первую часть мы замѣнимъ параболою (15), то радіусъ кривизны для этой части нашей кривой будетъ равенъ

$$\text{не}\ \frac{1}{\sqrt{2g\varphi}},\quad \text{а}\ \frac{(1+\varphi^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2g\varphi}}.$$

При $\varphi=\varphi_1$ выраженіе $\frac{1}{\sqrt{2g\varphi}}$ обращается въ ϱ, а выраженіе $\frac{(1+\varphi^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2g\varphi}}$ въ $\varrho(1+\varphi_1{}^2)^{\frac{3}{2}}$.

Поэтому, замѣнивъ первую часть нашей кратчайшей кривой XMY параболою (15), мы должны за радіусъ кривизны второй части взять не ϱ, а $\varrho(1+\varphi_1{}^2)^{\frac{3}{2}}$, или же продолжить первую часть до такого значенія φ, которое удовлетворяетъ уравненію

$$\frac{(1+\varphi^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2g\varphi}}=\varrho \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

Мы предположимъ послѣднее и обозначимъ корень φ уравненія (16) черезъ Φ_1.

Не трудно видѣть, что уравненіе (16) равносильно слѣдующему:

$$\frac{\varphi}{\varphi_1}=(1+\varphi^2)^3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

Необходимо принять во вниманіе также и то обстоятельство, что перемѣнная φ въ уравненіяхъ (14) не уголъ TNB, какъ прежде, а тангенсъ этого угла. Поэтому, если желаемъ сохранить за φ прежнее значеніе, то въ уравненіяхъ (14), (16) и (17) слѣдуетъ замѣнить φ на $\Phi=tg\varphi$.

Теперь мы можемъ составить изъ дуги круга радіуса ϱ и изъ двухъ совершенно одинаковыхъ параболъ третьей степени такую кривую, которая будетъ удовлетворять всѣмъ условіямъ нашей задачи, кромѣ одного: она не будетъ кратчайшей. Длина ея равна

$$\varrho(\varphi_0-2\operatorname{arctg}\Phi_1)+2\int_0^{\Phi_1}\frac{\sqrt{1+\Phi^2}\,d\Phi}{\sqrt{2g\Phi}}$$

и мало отличается отъ длины кратчайшей кривой.

Что касается разстояній OX, OY отъ O до точекъ касанія новой кривой съ прямыми AB и CD, то они равны

$$\frac{2\sqrt{\Phi_1}}{\sqrt{2g}}+\frac{2}{3}\operatorname{tg}\frac{\varphi_0}{2}\frac{\sqrt{\Phi_1}^3}{\sqrt{2g}}+\varrho\frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi_0}{2}-\Phi_1}{\sqrt{1+\Phi_1^2}}\,.$$

Въ „Taschenbuch zum Abstecken von Kreisbögen", на стр. 54—55, приведенъ примѣръ составленія кривой XMY изъ дуги круга и двухъ параболъ третьей степени. Останавливаясь на этомъ примѣрѣ, положимъ

$$\varrho=300 \text{ (метровъ)},\ g=\frac{1}{12000},\ \varphi_0=1{,}89863\ (108^0 47'0'',3)\,.$$

При такихъ данныхъ

$$\varphi_1=\frac{1}{15}=0{,}0666667\ (3^0 49'11''),$$

$$\Phi_1=0{,}0675844$$

$$\operatorname{arctg}\Phi_1=0{,}0674817\ (3^0 51'59'',1)\,.$$

Длина дуги круга: для кратчайшей кривой $=529{,}589$ (метровъ), для кривой составленной изъ дуги круга и двухъ параболъ, $=529{,}100$ (метровъ).

Общая длина двухъ другихъ частей: для кратчайшей кривой $=80$ (метровъ), для кривой, составленной изъ дуги круга и двухъ параболъ, $=80{,}586$ (метровъ).

Вся длина кратчайшей кривой $=609{,}589$ (метровъ), длина кривой, составленной изъ дуги круга и двухъ параболъ $=609{,}686$ (метровъ).

Длина отрѣзковъ OX: для кратчайшей кривой $=439{,}215$ (метровъ), для кривой, составленной изъ дуги круга и двухъ параболъ, $=439{,}267$ (метровъ).

Обращаясь къ Taschenbuch, замѣчаемъ, что всѣ вычисленія этой книжки основаны на такихъ приближенныхъ формулахъ, при которыхъ кривая, составленная изъ дуги круга и двухъ параболъ, совпадаетъ формально съ кратчайшею кривою.

Такое формальное совпаденіе должно, по моему мнѣнію, сопровождаться замѣтнымъ разрывомъ какъ въ величинѣ кривизны кривой, такъ и въ величинѣ угла φ, если только параболы не будутъ замѣнены вышеуказанными кривыми, для которыхъ производная отъ кривизны по дугѣ сохраняетъ постоянное значеніе.

Дѣло въ томъ, что при

$$\varrho=300\,,\ g=\frac{1}{12000},\ \varphi=\varphi_1$$

радіусъ кривизны параболы (15) отличается отъ $\varrho=300$ на 2 (метра) и φ отличается отъ $\operatorname{arctg}\varphi$ на 0,000098 (20").

ЗАДАЧА 3-я.

Даны направленія двухъ прямолинейныхъ путей AB и CD и двѣ точки A и D на нихъ (см. фиг. 11-ю).

Требуется соединить эти пути такою кривою AMD, для которой производная отъ кривизны по дугѣ наименѣе уклоняется отъ нуля при соблюденіи слѣдующихъ условій:

1) касательная къ нашей кривой въ точкѣ A должна совпадать съ AB и въ точкѣ D—съ CD;

2) при увеличеніи дуги AM точка M должна постоянно удаляться отъ AB и приближаться къ CD;

3) въ точкахъ A и D кривизна нашей кривой должна обращаться въ нуль.

РѢШЕНІЕ.

Замѣнивъ X на A и Y на D, мы можемъ пользоваться обозначеніями предыдущей задачи: s, φ, φ_0, x, y.

Относительно числа φ_0 попрежнему можемъ предположить, что оно заключается между 0 и π.

Пусть отрѣзки OA и OD выражаются соотвѣтственно числами a и b.

При такихъ обозначеніяхъ имѣемъ:

$$\left.\begin{array}{c} \varphi=0 \quad \text{и} \quad \dfrac{d\varphi}{ds}=0 \quad \text{при} \quad s=0 \\[2ex] \varphi=\varphi_0 \quad \text{и} \quad \dfrac{d\varphi}{ds}=0 \quad \text{при} \quad s=S \\[2ex] 0\leqq\varphi\leqq\varphi_0 \\[2ex] a=\displaystyle\int_0^S \frac{\sin(\varphi_0-\varphi)}{\sin\varphi_0}\,ds, \quad b=\int_0^S\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_0}\,ds \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Разсмотримъ теперь произвольную кривую, удовлетворяющую всѣмъ этимъ условіямъ, и обозначимъ для нея наибольшее отклоненіе $\dfrac{d^2\varphi}{ds^2}$, производной кривизны по дугѣ, отъ нуля буквою g; такъ что

$$-g\leqq\frac{d^2\varphi}{ds^2}\leqq+g \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Разсуждая совершенно такъ-же, какъ при рѣшеніи предыдущей задачи, приходимъ къ неравенствамъ

$$\sqrt{g} \geqq \frac{1}{a}\int_0^{\frac{\varphi}{2}} \frac{\sin(\varphi_0-\varphi)}{\sin\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{2\varphi}} + \frac{1}{a}\int_{\frac{\varphi_0}{2}}^{\varphi_0} \frac{\sin(\varphi_0-\varphi)}{\sin\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{2(\varphi_0-\varphi)}} \,. \quad (3)$$

и

$$\sqrt{g} \geqq \frac{1}{b}\int_0^{\frac{\varphi_0}{2}} \frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{2\varphi}} + \frac{1}{b}\int_{\frac{\varphi_0}{2}}^{\varphi_0} \frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{2(\varphi_0-\varphi)}} \quad . \; . \; . \; . \quad (4)$$

откуда затѣмъ выводимъ

$$g \geqq \frac{1}{2a^2}\left\{\int_0^{\frac{\varphi_0}{2}} \frac{\cos\left(\frac{\varphi_0}{2}-\varphi\right)}{\cos\frac{\varphi_0}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi}}\right\}^2 = g' \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

и

$$g \geqq \frac{1}{2b^2}\left\{\int_0^{\frac{\varphi_0}{2}} \frac{\cos\left(\frac{\varphi_0}{2}-\varphi\right)}{\cos\frac{\varphi_0}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi}}\right\}^2 = g'' \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ не трудно убѣдиться, что g можно сдѣлать равнымъ наибольшему изъ двухъ чиселъ g' и g''.

Въ самомъ дѣлѣ, если $a > b$, то g достигаетъ значенія равнаго g'' для кривой AMB, составленной изъ слѣдующихъ трехъ частей:

1) первая часть прямая линія и опредѣляется уравненіемъ

$$y = 0 \quad \text{при условіи } b \leqq x \leqq a \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

2) вторая часть опредѣляется уравненіями

$$\left.\begin{aligned} x &= b - \int_0^{\varphi} \frac{\sin(\varphi_0-\varphi)}{\sin\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{2g''\varphi}}, \\ y &= \int_0^{\varphi} \frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{2g''\varphi}}, \quad \text{при условіи } 0 \leqq \varphi \leqq \frac{\varphi_0}{2} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (8)$$

3) третья часть опредѣляется уравненіями

$$\left.\begin{aligned} x &= \int_{\varphi}^{\varphi_0} \frac{\sin(\varphi_0-\varphi)}{\sin\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{2g''(\varphi_0-\varphi)}}, \\ y &= b - \int_{\varphi}^{\varphi_0} \frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{2g''(\varphi_0-\varphi)}}, \quad \text{при } \frac{\varphi_0}{2} \leqq \varphi \leqq \varphi_0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (9)$$

Если же $a < b$, то g достигаетъ значенія равнаго g' для кривой AMB, составленной изъ слѣдующихъ трехъ частей:

1) первая часть опредѣляется уравненіями

$$\left.\begin{aligned} x &= a - \int_0^{\varphi} \frac{\sin(\varphi_0-\varphi)}{\sin\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{2g'\varphi}}, \\ y &= \int_0^{\varphi} \frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{2g'\varphi}}, \quad \text{при условіи } 0 \leqq \varphi \leqq \frac{\varphi_0}{2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (10),$$

2) вторая—уравненіями

$$\left.\begin{aligned} x &= \int_{\varphi}^{\varphi_0} \frac{\sin(\varphi_0-\varphi)}{\sin\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{2g'(\varphi_0-\varphi)}} \\ y &= a - \int_{\varphi}^{\varphi_0} \frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{2g'(\varphi_0-\varphi)}}, \quad \text{при } \frac{\varphi_0}{2} \leqq \varphi \leqq \varphi_0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots (11),$$

3) третья часть прямая линія и опредѣляется уравненіемъ

$$x = 0 \quad \text{при условіи } a \leqq y \leqq b \quad \ldots\ldots\ldots (12)$$

Отсюда заключаемъ, что производная кривизны по дугѣ отклоняется наименѣе отъ нуля для такой кривой AMB, которая составлена изъ вышеуказанныхъ трехъ частей.

Численное значеніе производной кривизны по дугѣ въ прямолинейной части составленной нами кривой равно нулю, а въ другихъ частяхъ той же кривой равно наибольшему изъ чиселъ g' и g''.

Замѣтимъ еще, что для всякой другой кривой AMB, удовлетворяющей условіямъ нашей задачи, наибольшее значеніе производной кривизны по дугѣ больше каждаго изъ чиселъ g' и g''.

ЗАДАЧА 4-я.

Къ тремъ условіямъ предыдущей задачи прибавимъ четвертое:

4) кривизна кривой AMB должна не превосходить данной величины $\frac{1}{\varrho}$.

Требуется изъ всѣхъ кривыхъ AMB, удовлетворяющихъ нашимъ четыремъ условіямъ, опредѣлить ту, для которой производная кривизны по дугѣ наименѣе отклоняется отъ нуля.

РѢШЕНІЕ.

Здѣсь надо различать два случая:

1) $$\varphi_0 < \frac{1}{g'\varrho^2} \quad \text{и} \quad < \frac{1}{g''\varrho^2},$$

2) $$\varphi_0 > \frac{1}{g'\varrho^2} \quad \text{или} \quad > \frac{1}{g''\varrho^2}.$$

Въ первомъ случаѣ рѣшеніе нашей новой задачи, очевидно, совпадаетъ съ рѣшеніемъ предыдущей. Во второмъ же случаѣ для всякой кривой AMB

$$\varphi_0 > \frac{1}{g\varrho^2}\,.$$

Полагая затѣмъ

$$\frac{1}{2g\varrho^2} = \varphi_1\,,\quad \varphi_0 - \frac{1}{2g\varrho^2} = \varphi_2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

и разсматривая выраженіе

$$U = \int_0^{\varphi_1} \frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{2g\varphi}} + \varrho\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_0}\,d\varphi + \int_{\varphi_2}^{\varphi_0}\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{2g(\varphi_0-\varphi)}} =$$

$$= \int_0^{\varphi_1}\frac{\cos\left(\frac{\varphi_0}{2}-\varphi\right)}{\cos\frac{\varphi_0}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{2g\varphi}} + \varrho\frac{\sin\left(\frac{\varphi_0}{2}-\varphi_1\right)}{\cos\frac{\varphi_0}{2}}\,, \quad \ldots\ldots \quad (2),$$

приходимъ къ неравенствамъ

$$U \leqq a \quad \text{и} \quad U \leqq b \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

При уменьшеніи g выраженіе U возрастаетъ, такъ какъ

$$\frac{dU}{dg} = -\frac{1}{2g}\int_0^{\varphi_1}\frac{\cos\left(\frac{\varphi_0}{2}-\varphi\right)}{\cos\frac{\varphi_0}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{2g\varphi}} < 0 \quad \ldots\ldots \quad (4).$$

Поэтому наименьшее значеніе g соотвѣтствуетъ наибольшему значенію U и удовлетворяетъ одному изъ уравненій

$$U = a \quad \text{или} \quad U = b \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5).$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ мы видимъ, что при $\varphi_0 > \frac{1}{g'\varrho^2}$ или $> \frac{1}{g''\varrho^2}$ искомая кривая AMB должна быть составлена изъ прямой, дуги круга радіуса ϱ и двухъ такихъ кривыхъ, для которыхъ численное значеніе производной кривизны по дугѣ равно корню (g) одного изъ уравненій (5).

Задача наша имѣетъ смыслъ только до тѣхъ поръ, пока ϱ меньше каждаго изъ выраженій

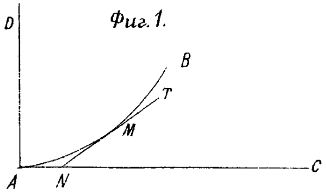
$$a\mathrm{cotg}\frac{\varphi_0}{2} \quad \text{и} \quad b\mathrm{cotg}\frac{\varphi_0}{2}\,.$$

Если же

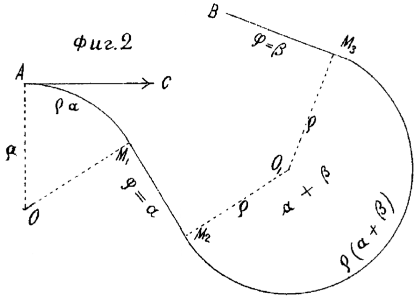
$$\varrho > a\mathrm{cotg}\frac{\varphi_0}{2} \quad \text{или} \quad \varrho > b\mathrm{cotg}\frac{\varphi_0}{2}\,,$$

то первыя три условія нашей задачи несовмѣстны съ четвертымъ.

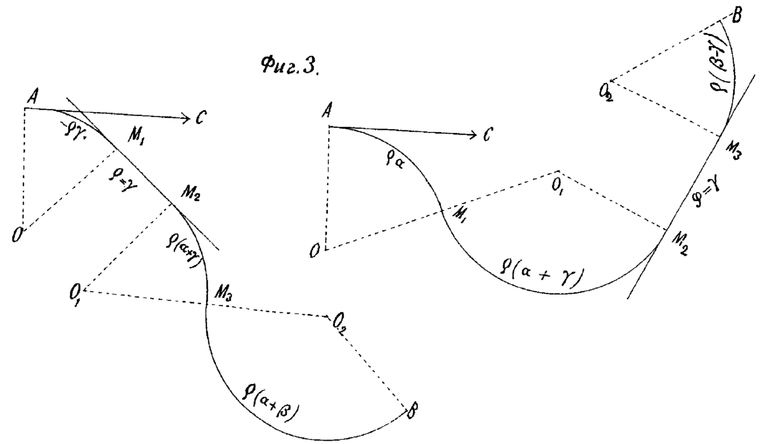
Къ статьѣ А. А. Маркова: „Нѣсколько примѣровъ и т. д.“



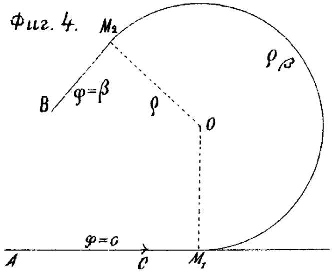
Фиг. 1.



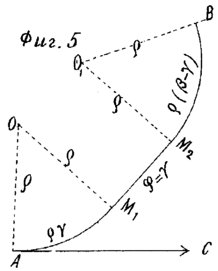
Фиг. 2.



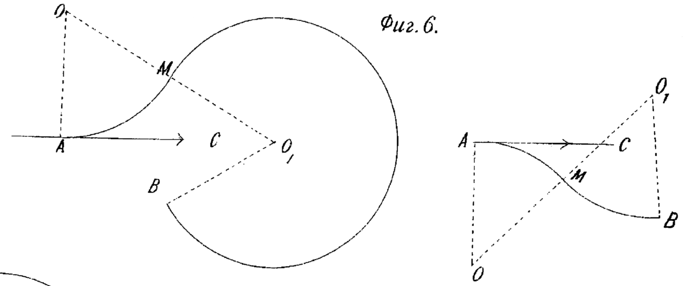
Фиг. 3.



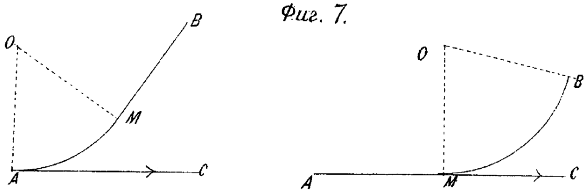
Фиг. 4.



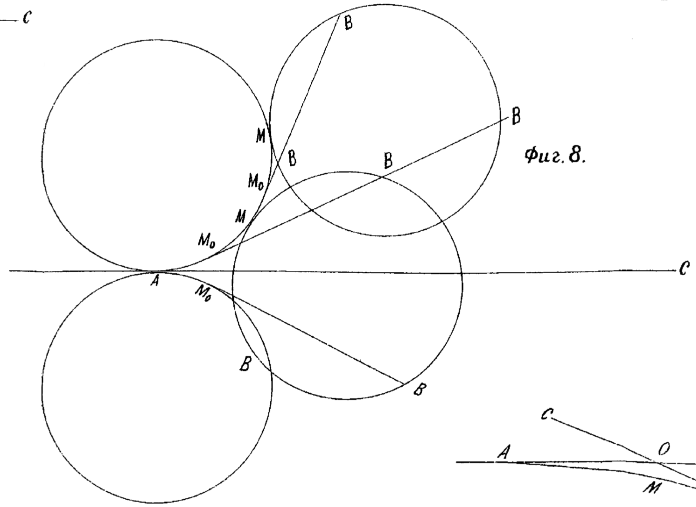
Фиг. 5



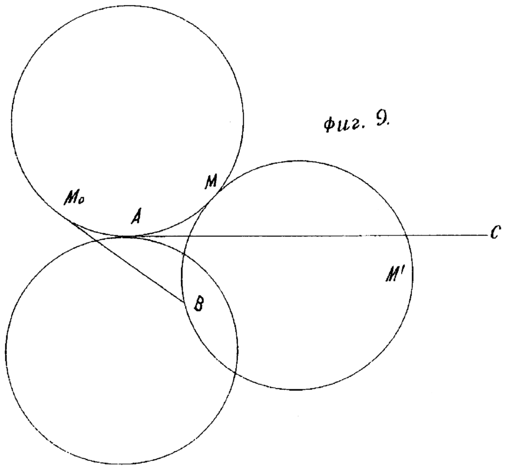
Фиг. 6.



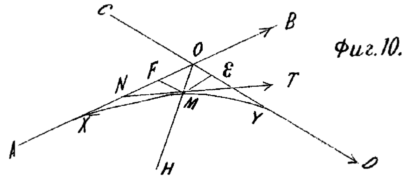
Фиг. 7.



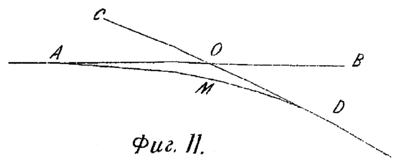
Фиг. 8.



Фиг. 9.



Фиг. 10.



Фиг. 11.