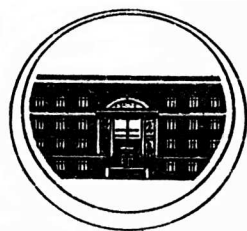


РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

**ТРУДЫ  
ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ  
И МЕХАНИКИ**

ТОМ 2



Екатеринбург

1992

**Труды Института математики и механики. Том 2. Екатеринбург: УрО РАН. 1992. ISBN 5-7691-0379-5.**

Исследуются абстрактное строение и свойства линейных представлений некоторых конечных групп. Рассматриваются вопросы приближения функций полиномами от двух переменных, сплайнами с нефиксированными узлами и рациональными дробями; изучаются экстремальные свойства алгебраических и тригонометрических полиномов; исследуется непрерывность метрической проекции и  $\epsilon$ -проекции, а также существование чебышевских систем векторнозначных функций. Для некоторых классов дифференциальных игр предложены алгоритмы их численного решения. Исследуются вязкие решения уравнения Гамильтона-Якоби на многообразии. Изучаются некоторые задачи управления с неполной и неточной информацией. Ищутся решения в моделях с неоднозначно заданной информацией, строятся алгоритмы нахождения евклидова расстояния между выпуклыми оболочками.

Сборник представляет интерес для специалистов в области математики, механики и процессов управления.

**Редакционная коллегия**

акад. РАН Ю. С. Осипов (главный редактор)

**В. И. Бердышев** (зам. главного редактора), **А. В. Маринов** (ответственный секретарь)

**В. В. Васин**, член-корр. РАН **И. И. Еремин**, акад. РАН **Н. Н. Красовский**,  
**А. В. Кряжковский**, акад. РАН **А. Ф. Сидоров**, **А. И. Старостин**,  
член-корр. РАН **А. И. Субботин**, **Ю. Н. Субботин**.

ISBN 5-7691-0379-5.

© УрО РАН, Институт  
математики и механики, 1992 г.

УДК 517.97

## ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИИ ЦЕНЫ В ЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ С ФИКСИРОВАННЫМ МОМЕНТОМ ОКОНЧАНИЯ

М. А. Зарх, А. Г. Иванов

Предлагается алгоритм численного построения функции цены в линейной дифференциальной игре произвольной размерности с выпуклой терминальной платой. Задача сводится к построению множества позиционного поглощения (максимального стабильного моста). Алгоритм обобщает идеи, лежащие в основе ранее разработанных алгоритмов для игр размерности 2,3.

### Введение

В последние годы интенсивно разрабатываются численные методы решения дифференциальных игр [1–7, 9, 10, 13, 16, 17]. В данной статье для линейной антагонистической дифференциальной игры с выпуклой терминальной функцией платы предлагается алгоритм численного построения функции цены. Используются два способа представления функции цены игры: посредством семейства множеств уровня и через надграфик. В обоих случаях задача сводится к построению множества позиционного поглощения (максимального стабильного моста). Несмотря на то, что давно известны общие схемы построений [5, 11, 12] и соответствующие оценки [2, 9, 10], их алгоритмизация и численная реализация наталкиваются на сложности, связанные с требуемым большим объемом памяти и быстродействием ЭВМ.

Предлагаемый алгоритм обобщает на случай произвольной размерности идеи, заложенные в основу процедур решения двумерных [1] и трехмерных [3, 4] игр. При этом максимально используется специфика рассматриваемого класса задач: линейность, выпуклость функции платы, независимость ограничений на компоненты управляющих воздействий. Приводятся результаты расчетов на ЭВМ.

Другой алгоритм численного решения линейной дифференциальной игры высокой размерности излагается в статье Боткина Н.Д. и Рязанцевой Е.А. в данном томе.

### § 1. Постановка задачи

Рассмотрим линейную дифференциальную игру

$$\begin{aligned} \dot{x} &= B(t)u + C(t)v, & x &\in R^n, \\ u &\in P \subset R^k, & v &\in Q \subset R^m, \end{aligned} \quad (1.1)$$

с фиксированным моментом окончания  $\vartheta$  и выпуклой терминальной функцией платы  $\gamma(x(\vartheta))$ . Отсутствие фазового вектора в правой части системы достигается известной заменой переменных [5], и рассмотрение

игры (1.1) не сужает общности исследований. Будем предполагать, что множества  $P, Q$ , ограничивающие управляющие воздействия игроков, имеют вид

$$P = \{p : |p_i| \leq \mu_i, i = \overline{1, k}\},$$

$$Q = \{q : |q_j| \leq \nu_j, j = \overline{1, m}\}.$$

Таким образом, множества  $P, Q$  – параллелепипеды, симметричные относительно нуля.

Обозначим через  $\Gamma(t, x)$  функцию цены игры (1.1). Рассмотрим два варианта ее представления: посредством семейства множеств уровня  $W_c = \{(t, x) : \Gamma(t, x) \leq c\}$  и через надграфик  $\hat{W} = \{(t, x, s) : s \geq \Gamma(t, x)\}$ .

Множество  $W_c$  есть максимальный стабильный мост (множество позиционного поглощения) в игре сближения-уклонения с целевым множеством  $M_c = \{x : \gamma(x) \leq c\}$ .

Надграфик  $\hat{W}$  также можно интерпретировать [14] как максимальный стабильный мост в дифференциальной игре  $n + 1$  порядка

$$\begin{cases} \dot{x} = B(t)u + C(t)v, & u \in P, \quad v \in Q, \\ \dot{x}_{n+1} = 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

с целевым множеством

$$\hat{M} = \{(x, x_{n+1}) : x_{n+1} \geq \gamma(x)\}.$$

Указанная связь функции цены игры с максимальными стабильными мостами позволяет свести построение функции цены либо к построению семейства мостов в пространстве  $R^1 \times R^n$ , либо к построению одного моста в пространстве  $R^1 \times R^{n+1}$ . Во втором случае, чтобы работать с ограниченными множествами, можно выполнить построение части надграфика  $\hat{W}_c = \{(t, x, x_{n+1}) : \Gamma(t, x) \leq x \leq c\}$ , лежащей ниже уровня  $c$ , взяв в качестве целевого множества  $\hat{M}_c = \{(x, x_{n+1}) : \gamma(x) \leq x_{n+1} \leq c\}$ .

Дальнейшее изложение посвящено разработке алгоритма численного построения максимального стабильного моста в игре сближения-уклонения с выпуклым целевым множеством  $M \subset R^n$ , динамика которой записана в форме (1.1).

В соответствии с общей схемой [5, 11, 12], мост  $W$  представляется последовательностью множеств  $W_j$ , каждое из которых аппроксимирует сечение моста  $W(\vartheta - j\Delta) = \{x : (\vartheta - j\Delta, x) \in W\}$ . Последовательность  $W_j$  определяется при помощи рекуррентных формул

$$W_{j+1} = (W_j + B(\vartheta - j\Delta)P\Delta) \div C(\vartheta - j\Delta)Q\Delta, \quad W_0 = M, \quad (1.3)$$

где  $\div$  – символ геометрической разности [11]:

$$R \div D = \bigcap_{d \in D} (R - d),$$

$M$  аппроксимирует  $M$ . Известно [2, 10], что если  $\Delta$  мало, а  $M$  близко к  $M$ , то  $W_j$  близко к  $W(\vartheta - j\Delta)$ ,  $j = 1, 2, \dots$ .

Пусть  $B_i(\cdot)$  ( $C_i(\cdot)$ ) –  $i$ -й столбец матрицы  $B(\cdot)$  ( $C(\cdot)$ ). Обозначим через  $p_i^j$  ( $q_i^j$ ) отрезок с вершинами  $\pm\mu_i B_i(\vartheta - j\Delta)\Delta$  ( $\pm\nu_i C_i(\vartheta - j\Delta)\Delta$ ). Имеем

$$B(\vartheta - j\Delta)P\Delta = \sum_{i=1}^k p_i^j, \quad C(\vartheta - j\Delta)Q\Delta = \sum_{i=1}^m q_i^j.$$

Выражение (1.3) можно переписать в виде

$$W_{j+1} = (W_j + (\sum_{i=1}^k p_i^j)) \div (\sum_{i=1}^m q_i^j) \quad (1.4)$$

и затем перейти к соотношению

$$W_{j+1} = (\dots((\dots(W_j + p_1^j) + \dots + p_k^j) \div q_1^j)\dots \div q_m^j). \quad (1.5)$$

Выполнение (1.5) сводится к последовательности действий, в которых одним из операндов является отрезок. Переход от (1.4) к (1.5) возможен в силу ассоциативности сложения и свойства операции взятия геометрической разности, выраженного равенством

$$R \div (D + F) = \bigcap_{d \in D, f \in F} (R - (d + f)) = \bigcap_{f \in F} (\bigcap_{d \in D} (R - d) - f) = (R \div D) \div F.$$

Будем считать, что множество  $M$  – выпуклый многогранник. Тогда результат выполнения операции сложения с отрезком – выпуклый многогранник, результат выполнения операции геометрической разности с отрезком – либо выпуклый многогранник, либо пустое множество. В последнем случае построения завершаются.

Таким образом,  $W_j$  – последовательность многогранников. Ее построение сводится к решению двух задач:

1. Нахождение алгебраической суммы выпуклого многогранника и отрезка.

2. Нахождение геометрической разности между выпуклым многогранником и отрезком.

Введем основные обозначения, а также определим форму входной и выходной информации для алгоритмов решения задач 1 и 2.

Пусть

$$\rho_F(l) = \max_{f \in F} l^l f$$

– значение опорной функции выпуклого компакта  $F \subset R^n$  на векторе  $l$ ;  $\text{con}$ ,  $\text{conv}$  – символы конической и выпуклой оболочек.

Для выпуклого многогранника  $V \subset R^n$  с непустой внутренностью введем следующие обозначения:

$A_V$  – множество вершин  $V$ ;

$L_V$  – множество единичных внешних нормалей к граням размерности  $n - 1$ ;

$P_V$  – набор значений  $\rho_V(l)$  для  $l \in L_V$ ;

$G_V = \{G_V(l), l \in L_V\}$  – описание граней размерности  $n - 1$  многогранника  $V$ . Здесь  $G_V(l) \subset A_V$  – совокупность вершин грани с нормалью  $l$ ;

$K_V = \{K_V(a), a \in A_V\}$  – информация, двойственная  $G_V$ , т.е.  $K_V(a)$  – совокупность нормалей к граням, содержащим вершину  $a$ .

Пусть

$$g_V(l) = \{v \in V : l'v = \max_{v \in V} l'v\}.$$

В частности, для  $l \in L_V$  имеем  $g_V(l) = \text{con}V(G_V(l))$  – грань с нормалью  $l$ . Обозначим  $k_V(a) = \text{con}(K_V(a))$  – конус, соответствующий вершине  $a$ .

Приведем некоторые свойства, поясняющие взаимосвязь введенных объектов:

1)  $R^n = \bigcup_{a \in A_V} k_V(a)$ ,

2)  $\text{int}(k_V(a')) \cap \text{int}(k_V(a'')) = \emptyset, a', a'' \in A_V$ ,

3) Сужение опорной функции  $\rho_V(\cdot)$  на каждый из конусов  $k_V(a), a \in A_V$  – линейная функция.

Таким образом, пространство  $R^n$  разбивается на конусы линейности опорной функции  $\rho_V(\cdot)$ , каждый из которых соответствует вершине многогранника  $V$ .

Информацию о многограннике  $V$ , состоящую из  $A_V, L_V, P_V, G_V, K_V$ , обозначим через  $I_V$ . Теперь можно формализовать задачи 1 и 2: в задаче 1 (2) требуется построить  $I_{V+p} (I_{V \div q})$  по заданным  $I_V$  и отрезку  $p (q)$ . Отметим, что информация  $I_V$  избыточна для идентификации многогранника. Однако ее использование позволяет разработать эффективные алгоритмы решения задач 1 и 2.

### § 2. Алгоритм построения суммы многогранника и отрезка

Пусть заданы информация  $I_V$  о многограннике  $V$  и отрезок  $p$  с вершинами  $p^+, p^-$ . Обозначим  $\bar{p} = p^+ - p^-, \pi = \{l : l'\bar{p} = 0\}, \pi^+ = \{l : l'\bar{p} > 0\}, \pi^- = \{l : l'\bar{p} < 0\}, \bar{\pi}^+ = \pi \cup \pi^+, \bar{\pi}^- = \pi \cup \pi^-$ .

Опорная функция многогранника  $V + p$  определяется по формуле

$$\rho_{V+p}(l) = \rho_V(l) + \rho_p(l).$$

Имеем

$$\rho_p(l) = \begin{cases} l'p^+, & l \in \pi^+ \\ l'p^-, & l \in \pi^- \end{cases}$$

тогда,

$$\rho_{V+p}(l) = \begin{cases} \rho_V(l) + l'p^+, & l \in \pi^+ \\ \rho_V(l) + l'p^-, & l \in \pi^- \end{cases}$$

Следовательно, если  $k_V(a) \subset \pi^+ (k_V(a) \subset \pi^-)$ , то  $a + p^+ (a + p^-) \in A_{V+p}$  и  $k_{V+p}(a + p^+) = k_V(a) (k_{V+p}(a + p^-) = k_V(a))$ .

Пусть  $\text{int } k_V(a) \cap \pi \neq \emptyset$ . Тогда

$$\rho_{V+p}(l) = \begin{cases} l'(a + p^+), & l \in k_V(a) \cap \pi^+ \\ l'(a + p^-), & l \in k_V(a) \cap \pi^- \end{cases}$$

т.е. вершины, чьи конусы линейности пересекаются плоскостью  $\pi$ , порождают две новые вершины  $a + p^+, a + p^-$  и, соответственно, два конуса линейности.

Нам удобно ввести в рассмотрение многогранник  $V^*$ , совокупность граней которого порождает разбиение  $R^n$  на конусы линейности опорной функции  $\rho_V(\cdot)$ , а именно, каждый конус  $k_V(a)$  есть коническая оболочка соответствующей грани  $V^*$ . В качестве такого многогранника можно взять двойственный [8] многогранник

$$V^* = \{v^* \in R^n : v^{*'}(v - v_0) \leq 1, v \in V\},$$

где  $v_0$  — произвольная зафиксированная внутренняя точка  $V$ . Для упрощения изложения будем считать, что  $V$  содержит начало координат и  $v_0$  совпадает с ним.

Каждой грани размерности  $r$  многогранника  $V$  соответствует грань размерности  $n - r - 1$  многогранника  $V^*$ . В частности, вершине  $V$  соответствует  $n - 1$ -грань  $V^*$ , и наоборот. Полная информация о  $V^*$  содержится в  $I_V$ . Действительно,

$$A_{V^*} = \{a^* = l/\rho_V(l), l \in L_V\},$$

$$L_{V^*} = \{l^* = a/|a|, a \in A_V\},$$

$$P_{V^*} = \{\rho^*(l^*) = 1/|a|, l^* = a/|a|\},$$

$$K_{V^*} = G_V, \quad G_{V^*} = K_V.$$

В терминах двойственного многогранника  $V^*$  опишем построение обрезающих новых конусов линейности  $\rho_{V+p}$ .

Предварительно сформулируем ряд лемм.

**Лемма 1.** Пусть  $F$  — выпуклый многогранник,  $H = \{x : h'x \leq 0\}$  — полупространство. Если  $F \cap H \neq \emptyset$ , то  $\text{conv}(F) \cap H = \text{conv}(F \cap H)$ .

**Лемма 2.** Пусть  $\{A_i\}$  — конечный набор множеств. Справедливо равенство

$$\text{conv}\left(\bigcup_i (\text{conv} A_i)\right) = \text{conv}\left(\bigcup_i A_i\right).$$

В следующей лемме символы  $\dim$ ,  $\partial$  означают размерность и относительную границу.

**Лемма 3.** Пусть  $F$  — выпуклый многогранник,  $H = \{x : l'h \leq 0\}$  — полупространство, причем  $\dim(F) > 1$ . Тогда

$$F \cap H = \text{conv}(\partial F \cap H).$$

В обозначении многогранника  $F^j$  в качестве верхнего индекса будем указывать его относительную размерность.

**Лемма 4.** Пусть  $F^{n-1}$  — многогранник,  $H = \{x : l'h \leq 0\}$  — полупространство. Тогда

$$F^{n-1} \cap H = \text{conv}\left(\bigcup_m (F_m^1 \cap H)\right), \quad (2.1)$$

где  $\{F_m^1\}$  — совокупность одномерных граней многогранника  $F^{n-1}$ .

Как уже отмечалось, каждый конус линейности  $K_V(a)$ , рассекаемый плоскостью  $\pi$ , порождает два конуса линейности функции  $\rho_{V+p}: k_V(a) \cap \pi^+$  и  $k_V(a) \cap \pi^-$ .

Рассмотрим, например, задачу построения  $k_V(a) \cap \pi^+$ . Равенство  $k_V(a) = \text{con}(g_{V^*}(a/|a|))$  и лемма 1 позволяют свести поставленную задачу к нахождению пересечения грани  $g_{V^*}(a)$  и полупространства  $\pi^+$ . Отыскав вершины пересечения  $g_{V^*}(a/|a|) \cap \pi^+$ , тем самым построим образующие конуса  $k_V(a) \cap \pi^+$ .

Согласно лемме 4 вершинами  $g_{V^*}(a/|a|) \cap \pi^+$  являются все вершины грани  $g_{V^*}(a/|a|)$ , принадлежащие  $\pi^+$ , плюс точки пересечения одномерных граней грани  $g_{V^*}(a/|a|)$  с плоскостью  $\pi$ . Действительно, пересечение каждой одномерной грани с полупространством в выражении (2.1) либо совпадает с этой гранью, либо является отрезком, у которого одна из вершин новая, либо пусто. В первом случае отрезок представляем в виде выпуклой оболочки двух старых вершин, во втором случае — в виде выпуклой оболочки старой вершины и новой точки. Воспользовавшись леммой 2, приходим к выводу о совокупности вершин пересечения  $g_{V^*}(a/|a|) \cap \pi^+$ .

Таким образом, совокупность нормалей  $L_{V+p}$  составляют нормали  $L_V$  и новые нормали, которые порождаются одномерными гранями двойственного многогранника  $V^*$ , рассекаемыми плоскостью  $\pi$ . В терминах многогранника  $V$  этот факт формулируется следующим образом. Новая нормаль порождается гранью размерности  $n - 2$  многогранника  $V$ , являющейся пересечением двух граней размерности  $n - 1$  с нормальями, лежащими по разные стороны от плоскости  $\pi$ . Именно: новая нормаль принадлежит ортогональному дополнению к  $n - 1$ -мерному линейному подпространству, определяемому  $n - 2$ -мерной гранью и вектором  $p$ .

Информация о гранях является двойственной по отношению к информации о конусах. Поэтому правило определения совокупности граней  $G_{V+p}$  однозначно устанавливается по сформулированному способу построения  $K_{V+p}$ . Если  $l \in L_V$ , то  $G_{V+p}(l) = G_V(l) + p^\pm$ ,  $l \in \pi^\pm$ . Пусть  $l$  — новая нормаль и  $a_1, \dots, a_m$  — вершины  $n - 2$ -мерной грани, ее породившей. Тогда  $G_{V+p}(l) = \{a_i + p^+, a_i + p^-, i = 1, 2, \dots, m\}$ .

Дадим формализованное описание построения  $I_{V+p}$ .

Разбиваем  $L_V$  и  $A_V$  на подмножества:

$$L_V^+ = L_V \cap \pi^+, \quad L_V^- = L_V \cap \pi^-, \quad L^0 = L_V \cap \pi,$$

$$A_V^\pm = \{a \in A_V : K_V(a) \subset \pi^\pm\}, \quad A_V^0 = A_V \setminus (A_V^+ \cup A_V^-).$$

Определяем  $A_{V+p}$ ,  $L_{V+p}$ ,  $P_{V+p}$ :

$$A_{V+p} = \{A_V^- + p^-\} \cup \{A_V^+ + p^+\} \cup \{A_V^0 + p^-\} \cup \{A_V^0 + p^+\},$$

$$L_{V+p} = L_V \cup L_{\text{нов}},$$

$$L_{\text{нов}} = \{l = \lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2 : \lambda_1, \lambda_2 > 0, l' \bar{p} = 0, |l| = 1, l_1, l_2 \in L_V, l_1 \in \pi^-, l_2 \in \pi^+, \dim(g_V(l_1) \cap g_V(l_2)) = n - 2\},$$

$$\rho_{V+p}(l) = \rho_V(l) + l' p^\pm, \quad l \in \pi^\pm.$$



Отметим, что для  $l \in L_V$  величина  $\rho_V(l)$  известна, а для  $l = \lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2 \in L_{\text{нов}}$  вычисляется по формуле  $\rho_V(l) = \lambda_1 \rho_V(l_1) + \lambda_2 \rho_V(l_2)$ .

Определяем  $G_{V+p}$ . Если  $l \in L_V^\pm$ , то  $G_{V+p}(l) = G_V(l) + p^\pm$ . Если  $l \in L_V^0$ , то

$$G_{V+p}(l) = \{G_V(l) \cap (A_V^+ \cup A_V^0) + p^+\} \cup \{G_V(l) \cap (A_V^- \cup A_V^0) + p^-\}.$$

Если  $l \in L_{\text{нов}}$  и порождена парой  $l_1, l_2 \in L_V$ , то

$$G_{V+p}(l) = \{G_V(l_1) \cap G_V(l_2) + p^+\} \cup \{G_V(l_1) \cap G_V(l_2) + p^-\}.$$

Определяем  $K_{V+p}(a)$ . Если  $a \in A_V^\pm + p^\pm$ , то  $K_{V+p}(a) = K_V(a - p^\pm)$ . Если  $a \in A_V^0 + p^\pm$ , то  $K_{V+p}(a) = \{K_V(a - p^\pm) \cap \pi^\pm\} \cup L_{\text{нов}}(a - p^\pm)$ . Здесь  $L_{\text{нов}}(a - p^\pm)$  – новые нормали, соответствующие тем  $n-2$ -мерным граням с вершинами из  $A^0$ , в которые входит вершина  $a - p^\pm$ .

Описано формирование  $A_{V+p}$ ,  $L_{V+p}$ ,  $P_{V+p}$ ,  $G_{V+p}$ ,  $K_{V+p}$ . Таким образом, изложен алгоритм построения  $V + p$  в форме  $I_{V+p}$ .

### § 3. Алгоритм построения геометрической разности многогранника и отрезка

Пусть задана информация  $I_V$  о многограннике  $V$  и отрезок  $q$  с вершинами  $q^-, q^+$ .

Обозначим  $\bar{q} = q^+ - q^-$ ,  $\pi = \{l : l'\bar{q} = 0\}$ ,  $\pi^+ = \{l : l'\bar{q} > 0\}$ ,  $\pi^- = \{l : l'\bar{q} < 0\}$ ,  $\bar{\pi}^+ = \pi^+ \cup \pi$ ,  $\bar{\pi}^- = \pi^- \cup \pi$ . Для многогранника и отрезка операцию геометрической разности можно записать в виде

$$V \div q = (V - q^+) \cap (V - q^-).$$

Отметим, что  $V - q^-$  является переносом  $V - q^+$  на вектор  $\bar{q}$ .

Введем обозначения

$$L_V^+ = L_V \cap \bar{\pi}^+, \quad L_V^- = L_V \cap \bar{\pi}^-,$$

$$\varphi(l) = \begin{cases} \rho_V(l) - l'q^+, & l \in \bar{\pi}^+ \\ \rho_V(l) - l'q^-, & l \in \bar{\pi}^- \end{cases}$$

Многогранники  $V - q^+$ ,  $V - q^-$  представимы в виде пересечения полупространств:

$$V - q^\pm = \{x : l'x \leq \rho_V(l) - l'q^\pm, l \in L_V\}.$$

Так как

$$l'q^+ \geq l'q^- \text{ при } l \in L_V^+, \quad l'q^+ < l'q^- \text{ при } l \in L_V^-,$$

то

$$V \div q = \{x : l'x \leq \varphi(l), l \in L_V\}.$$

Таким образом,  $V \div q$  есть пересечение опорных полупространств многогранника  $V$  с нормальными из  $\bar{\pi}^+$ , сдвинутых на вектор  $-q^+$ , и опорных полупространств  $V$  с нормальными из  $\bar{\pi}^-$ , сдвинутых на  $-q^-$ .

Если размеры отрезка  $q$  существенно меньше размеров  $V$ , то, как и в случае построения  $V + p$ , значительная часть границы  $V \div q$  наследует структуру граней и конусов линейности многогранника  $V$ .

В терминах функции  $\varphi$  построение  $V \div q$  сводится к нахождению  $\text{conv } \varphi = \rho_{V \div q}$ . При этом выпуклость  $\varphi$  нарушается в окрестности плоскости  $\pi$ , и выпукление  $\varphi$  требует локального изменения  $\varphi$  вдоль  $\pi$ , в то время как для значительной области аргумента значения функций  $\text{conv } \varphi$  и  $\rho_V$  отличаются на постоянную величину.

Если размеры  $q$  соизмеримы или существенно больше размеров  $V$ , то возможен случай, когда  $V \div q = \emptyset$  ( $\text{conv } \varphi$  не существует).

Ниже предлагается четыре варианта построения  $I_{V \div q}$ . Каждый последующий вариант сложнее алгоритмически, но более экономичен с точки зрения быстрой работы. Случай  $V \div q = \emptyset$  в алгоритмах оговариваться не будет. Он формально фиксируется, когда множество вершин результирующего многогранника пусто.

**А л г о р и т м 1.** Пусть  $A$  – множество точек, каждая из которых является пересечением  $n$  плоскостей вида  $l'a = \varphi(l)$  с нормальными  $l$  из  $L_V$ . Тогда

$$\begin{aligned} A_{V \div q} &= \{a \in A : l'a \leq \varphi(l), l \in L_V\}, \\ L_{V \div q} &= \{l \in L_V : \exists a \in A_{V \div q}, l'a = \varphi(l)\}, \\ \rho_{V \div q}(l) &= \varphi(l), \quad l \in L_{V \div q}, \\ G_{V \div q}(l) &= \{a \in A_{V \div q} : l'a = \varphi(l)\}, \\ K_{V \div q}(l) &= \{l \in L_{V \div q} : l'a = \varphi(l)\}. \end{aligned}$$

Центральным моментом этого алгоритма является способ определения вершин  $A_{V \div q}$ . Перебирая возможные комбинации плоскостей, мы включаем точку их пересечения в число вершин, если она принадлежит всем полупространствам.

**А л г о р и т м 2.** Используя то свойство, что часть границы  $V \div q$  получена параллельным переносом соответствующей части границы  $V$ , можно усовершенствовать алгоритм 1. С одной стороны, можно сократить множество точек  $A$ , претендующих на роль вершин  $V \div q$ , рассматривая не все комбинации нормалей из  $L_V$ . С другой стороны, можно выделить подмножество полупространств, принадлежность точки которым требует проверки.

Опишем правило выделения подмножества векторов  $\tilde{L} \subset L_V$ , которые могут породить “новые” вершины  $V \div q$ . Разобьем совокупность вершин  $A_V$  на три подмножества:

$$A_V^\pm = \{a \in A_V : K_V(a) \subset L_V^\pm\}, \quad A_V^0 = A_V \setminus (A_V^+ \cup A_V^-).$$

Обозначим

$$A_\varphi^\pm = (A_V^\pm \cup A^0) - q^\pm.$$

Множество точек  $A_\varphi^+$  ( $A_\varphi^-$ ) – это вершины части границы  $V$ , сдвинутой на  $-q^+$  ( $-q^-$ ). Точки из  $A_\varphi^+$  и  $A_\varphi^-$ , принадлежащие полупространствам  $l'a \leq \varphi(l)$  соответственно для  $l \in L_V^-$  и  $l \in L_V^+$ , являются вершинами многогранника  $V \div q$  и определяют его часть, наследуемую с  $V$ . Обозначим множество таких точек  $\mathcal{A}_\varphi^+$  и  $\mathcal{A}_\varphi^-$ . Пусть  $\mathcal{L}_V = \mathcal{L}_V^+ \cup \mathcal{L}_V^-$  – нормали

к граням, все вершины которых попали в  $\mathcal{A}_\varphi = \mathcal{A}_\varphi^+ \cup \mathcal{A}_\varphi^-$ . Векторы из  $\mathcal{L}_V$  заведомо остаются в качестве нормалей  $V \div q$ , причем соответствующие им грани получаются параллельным переносом “старых” граней и нормали из  $\mathcal{L}_V$  не участвуют в образовании “новых” вершин.

Выделим также множество векторов  $\bar{L}$ , которые не могут являться нормальями  $V \div q$ :

$$\bar{L} = \bar{L}^+ \cup \bar{L}^-,$$

$$\bar{L}^\pm = \{l \in L_V^\pm : \exists l_1 \in L_V^\mp, \forall v \in G(l) - q^\pm, l'_1 v \geq \varphi(l_1)\}.$$

Другими словами,  $\bar{L}$  составляют нормали к граням, целиком отсекаемым одним полупространством.

Положим

$$\tilde{L}_V = L_V \setminus (\bar{L}_V \cup \mathcal{L}_V).$$

Далее выполняем алгоритм поиска новых вершин, аналогичный алгоритму 1. Опишем его. Пусть  $\tilde{A}$  – множество точек, каждая из которых является пересечением плоскостей  $l'_i x = \varphi(l_i)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , с нормальями  $l_i \in \tilde{L}_V$ , причем рассматриваются лишь такие комбинации  $\{l_i\}$ ,  $i = \overline{1, n}$ , в которых есть нормали как из  $L_V^-$ , так и из  $L_V^+$ . Вершинами  $V \div q$  являются те точки из  $\tilde{A}$ , которые принадлежат полупространствам  $l'x \leq \varphi(l)$ ,  $l \in \tilde{L}$ .

Точки из  $\tilde{A}$ , прошедшие указанные проверки, в совокупности со “старыми” точками  $\mathcal{A}_\varphi$  составляют множество вершин  $A_{V \div q}$ . Нормали  $V \div q$  из множества  $\tilde{L}_V$ , соответствующие им грани, конусы новых вершин определяются как в алгоритме 1. Остальная информация  $I_{V \div q}$  (соответствующая старым вершинам) наследуется из  $I_V$ .

Ниже приводится обоснование алгоритма 2, состоящее из двух пунктов.

1) Поясним, почему в множество  $\tilde{A}$  можно не включать точки, соответствующие комбинациям векторов  $\{l_i\}$ ,  $i = \overline{1, n}$ , лежащих по одну сторону от  $\pi$ . Пусть, например,  $l_i \in \bar{\pi}^+$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Рассмотрим два возможных случая. В первом случае набору  $\{l_i\}$  соответствует вершина  $v$  многогранника  $V$ , т.е.  $l_i \in K_V(v)$ . Тогда, если  $v - q^+ \in A_\varphi \setminus \mathcal{A}_\varphi$  (т.е.  $l'(v - q^+) > \varphi(l)$  для некоторого  $l$ ), то  $v - q^+$  не является вершиной  $V \div q$ . Если же  $v - q^+ \in \mathcal{A}_\varphi$ , то информация, связанная с  $v$ , переносится в  $I_{V \div q}$  из  $I_V$ . Рассмотрим второй случай, когда набору  $l_i$  не соответствует вершина  $V$ . Обозначим через  $\kappa$  точку пересечения плоскостей  $l'_i x = \rho_V(l_i)$ . Так как  $\kappa \notin A_V$  и  $l_i \in L_V^+$ , то найдется такая нормаль  $l_* \in L_V^+$ , что  $l'_* \kappa > \rho_V(l_*)$ . Следовательно, для точки  $\kappa - q^+$ , являющейся пересечением плоскостей  $l'_i x = \varphi(l_i)$ , справедливо неравенство  $l'_*(\kappa - q^+) > \varphi(l_*)$ . Поэтому  $\kappa - q^+$  не является вершиной  $V \div q$ . Изложенное позволяет заключить, что комбинации векторов, лежащих по одну сторону от  $\pi$ , не могут порождать новых вершин.

2) Из описания алгоритма 2 следует, что для включения точки  $a \in \tilde{A}$  в совокупность вершин  $V \div q$  достаточно проверить ее принадлежность полупространствам  $l'x \leq \varphi(l)$  с нормальями  $l$  из  $\tilde{L}_V$ , а не всем полупространствам, как в алгоритме 1. Обоснуем такое сокращение. Пусть  $a \in \tilde{A}$ ,  $l'a \leq \varphi(l)$ ,  $l \in \tilde{L}_V$  и  $l_* \in \mathcal{L}_V$ . Требуется показать, что  $l'_* a \leq \varphi(l_*)$ . Пусть для определенности  $l_* \in \mathcal{L}_V^+$ . Рассмотрим вектор  $\tilde{l} \in \tilde{L}^+$ , для которого

$\tilde{l}'a = \varphi(\tilde{l})$ . Такой вектор найдется, так как точки из  $\tilde{A}$  образуются комбинациями векторов, лежащих по разные стороны от  $\pi$ . Ввиду того, что  $a \in g_V(\tilde{l}) - q^+$ , а  $g_V(\tilde{l}) - q^+$  принадлежит полупространству  $l'_*x \leq \varphi(l_*)$ , получаем  $l'_*a \leq \varphi(l_*)$ .

**А л г о р и т м 3.** Следующее усовершенствование алгоритма 2 связано со способом определения множества вершин  $\mathcal{A}_\varphi$ . Напомним, что множество  $\mathcal{A}_\varphi$  составляют те вершины  $V \div q$ , которые получены в результате параллельного переноса вершин  $V$ . Другими словами, усовершенствование касается способа отсеивания лишних точек из  $\mathcal{A}_\varphi$ . В алгоритме 2 для точки  $a \in A_\varphi^\pm$  требовалось проверить неравенство  $l'a \leq \varphi(l)$  для всех векторов  $l \in L_V^\pm$ . Алгоритм 3 направлен на сокращение совокупности векторов  $l$ , требующих такой проверки.

Алгоритм 3 имеет итерационный характер. Нижний индекс вводимых обозначений будет соответствовать шагу алгоритма. Обозначим через  $\bar{A}$  совокупность точек из  $A_\varphi$ , которые в результате проверок не включаются в число вершин  $V \div q$ . Напомним, что  $\bar{L}$  — множество векторов из  $L_V$ , не попадающих в  $L_{V \div q}$ . Множества  $\bar{A}$ ,  $\bar{L}$  будут формироваться в ходе итерационного процесса. Изложим его общую схему.

Положим

$$L_1^+ = \bigcup_{a \in A^0} (K_V(a) \cap L_V^+).$$

На первом шаге пополняются множества  $\bar{A}$ ,  $\bar{L}$  и формируется набор нормалей  $L_2^-$ . На втором шаге формируется набор нормалей  $L_3^+$  и продолжается пополнение  $\bar{A}$ ,  $\bar{L}$  и т.д.

Опишем первый шаг алгоритма 3. Зафиксируем вектор  $l \in L_1^+$ . Рассмотрим его в паре с каждой точкой  $a \in A_\varphi^-$ . Если  $l'a < \varphi(l)$ , то берем следующую точку. В противном случае множество  $\bar{A}$  пополняем точкой  $a$ , а векторы  $K_V(a + q^-) \cap L_V^-$ , не содержащиеся в  $\bar{L}$ , включаем в  $L_2^-$ . Если среди точек, которые на основании проверки с вектором  $l$  включены в  $\bar{A}$ , содержатся все вершины какой-либо грани, то нормаль этой грани включаем в  $\bar{L}$ . Перебрав все  $l \in L_1^+$ , завершаем первый шаг.

Следующие шаги аналогичны первому. Имеется единственное отличие: в формируемые множества  $L_3^+$ ,  $L_4^-$ ,  $L_5^+$ , ... не включаются векторы, уже участвовавшие в проверках на предыдущих шагах.

Итерационный процесс заканчивается, если на очередном шаге формируемое множество ( $L_{i+1}^+$ , если  $i$  четное;  $L_{i+1}^-$ , если  $i$  нечетное) остается пустым.

В результате описанной процедуры формируются множества  $\mathcal{A}_\varphi = A_\varphi \setminus \bar{A}$  и  $\bar{L}$ . Вторая часть алгоритма 3 выполняется так же, как в алгоритме 2.

Для обоснования алгоритма 3 дадим его интерпретацию в терминах построения  $\text{con}v \varphi$ . Результат первой части алгоритма можно рассматривать как построение функции  $\tilde{\varphi}(\cdot)$ , совпадающей с  $\varphi(\cdot)$  в конусах, соответствующих точкам из  $\mathcal{A}_\varphi$  (на нормалях из  $\bar{L}$ ), и равной  $+\infty$  в конусах, соответствующих выброшенным вершинам (на выброшенных нормалях).

Покажем, что  $\text{con}v \tilde{\varphi} = \text{con}v \varphi$ . Для этого установим, что для любого вектора  $l$ , где  $\tilde{\varphi}(l) = \infty$  (или, что то же самое,  $\tilde{\varphi}(l) \neq \varphi(l)$ ) имеет место неравенство  $\rho_{V \div q}(l) < \varphi(l)$ . Сначала установим это свойство для

векторов из конусов выкинутых вершин, не являющихся его образующими. Пусть  $k_V(a + q^+)$  – такой конус (для определенности считаем  $a \in A_\varphi^+$ ) и  $\tilde{l} \in L_V^-$  – вектор, для которого  $\tilde{l}'a > \varphi(\tilde{l})$ . Обозначим через  $D$  пересечение полупространств  $\{l'x \leq \varphi(l), l \in \{\tilde{l}\} \cup K_V(a + q^+)\}$ . Вершины  $D$  суть пересечение плоскости  $\tilde{l}'x = \varphi(\tilde{l})$  с образующими конуса  $\{l'x \leq \varphi(l), l \in K_V(a + q^+)\}$ . Поэтому для  $l \in k_V(a + q^+) \setminus K_V(a + q^+)$  имеем  $\rho_{V \div q}(l) \leq \rho_D(l) < \varphi(l)$ . Аналогичными рассуждениями можно прийти к такому же выводу и для векторов  $l \in \bar{L}$ .

Покажем, что структура конусов и граней, построенная в ходе второй части алгоритма 3, соответствует выпуклой функции, равной  $\text{con}v \tilde{\varphi}$ . Введем понятие локальной выпуклости.

Функция  $\xi$ , определенная разбивкой на конусы линейности и значениями на образующих конусов, локально выпукла на образующей  $l_*$ , если она выпукла в окрестности  $l_*$ , содержащейся в объединении всех конусов линейности с образующей  $l_*$ . Пусть  $k(a_j)$  – конусы, для которых  $l_*$  является образующей,  $a_j$  – соответствующие точки. Локальная выпуклость эквивалентна выполнению неравенства

$$l'a_j \leq \xi(l) \quad (3.1)$$

для всех точек  $a_j$  и любой образующей  $l \in \cup_j K(a_j)$  рассматриваемых конусов.

Действительно, локальная выпуклость функции  $\xi$  означает, что она является опорной функцией множества  $F = \{x: l'x \leq \xi(l), l \in \cup_j K(a_j)\}$ , а точки  $a_j$  – вершины  $F$ .

Покажем, что функция  $\xi$ , построенная в результате выполнения второй части алгоритма 3, локально выпукла на каждой образующей.

Пусть  $l_*$  – образующая одного из конусов построенной функции. Если  $l_* \in \mathcal{L}_V$ , то структура грани и конусов линейности, соответствующих  $l_*$ , наследуется с  $V$ . Следовательно, наследуется и локальная выпуклость.

Рассмотрим случай, когда  $l_* \in \tilde{L}$ . Пусть  $k(a_j)$  – конусы с образующей  $l_*$ ,  $a_j$  – соответствующие им точки. Пусть  $a \in \cup_j a_j$ ,  $l \in \cup_j K(a_j)$ . Для пары  $a, l$  возможны четыре варианта:

1)  $a$  – новая вершина, образованная в ходе второй части алгоритма 3,  $l \in \tilde{L}$ . Неравенство (3.1) выполнено в силу проверок этой части алгоритма.

2)  $a$  – новая,  $l \in \mathcal{L}_V$ . Неравенство (3.1) для этого случая обосновано в алгоритме 2.

3)  $a$  – старая,  $l \in \tilde{L}$ . В этом случае неравенство выполнено согласно первой части алгоритма 3.

4)  $a$  – старая,  $l \in \mathcal{L}_V$ . Если  $a \in \mathcal{A}_V^+$ ,  $l \in \mathcal{L}_V^+$  ( $a \in \mathcal{A}_V^-$ ,  $l \in \mathcal{L}_V^-$ ), то свойство (3.1) наследуется с  $V$ . Покажем, что вариант  $a \in \mathcal{A}_V^+$ ,  $l \in \mathcal{L}_V^-$  ( $a \in \mathcal{A}_V^-$ ,  $l \in \mathcal{L}_V^+$ ) невозможен. Действительно, если  $a \in \mathcal{A}_V^+$ , то  $l_* \in L_V^+$ . Но  $l \in L_V^-$ . Следовательно, общие точки для нормалей  $l, l_*$  – новые, что противоречит условию  $l \in \mathcal{L}_V$ .

Таким образом, построенная функция локально выпукла и совпадает с  $\tilde{\varphi}$  на образующих конусов. Поэтому она выпукла глобально и

$$\xi = \text{con}v \tilde{\varphi} = \text{con}v \varphi = \rho_{V \div q}.$$

**А л г о р и т м 4.** В алгоритме 3 для фиксированной нормали  $l \in L_i^+$  ( $l \in L_i^-$ ) проверяется выполнение неравенств  $l'a \leq \varphi(l)$  для всех  $a \in A_\varphi^-$  ( $a \in A_\varphi^+$ ). Алгоритм 4 связан с сокращением перебора вершин в указанном пункте алгоритма 3. Предполагаемое усовершенствование основано на следующем факте.

Пусть  $l \in L_V^+$ . Тогда часть границы многогранника  $V - q^-$ , лежащая выше плоскости  $l'x = \varphi(l)$ , — односвязное множество, причем в ней имеются вершины из  $A_V^+ - q^-$ . Поэтому указанная часть границы  $V - q^-$  без граней с нормальными из  $L_V^+$  либо пуста, либо имеет конечное число компонент связности. На границе каждой компоненты связности содержится точка из множества  $A_V^0 - q^-$ .

Сформулируем правило перебора вершин для фиксированной нормали  $l \in L_i^+$  ( $l \in L_i^-$ ). Проверяем неравенство  $l'a \leq \varphi(l)$  для точек  $a \in A_V^0 - q^-$  ( $a \in A_V^0 - q^+$ ). Далее берем еще не проверенные вершины граней с нормальными из  $L_V^-$  ( $L_V^+$ ), содержащих выбрасываемую точку. Процесс проверок с нормалью  $l$  заканчивается, когда множество вершин, требующих проверки, пусто.

#### § 4. Регулировка количества нормалей

В соответствии с описанными алгоритмами нахождения суммы и геометрической разности, в рамках принятой кусочно-постоянной с шагом  $\Delta$  дискретизации игры (1.2) последовательность многогранников  $W_i$  строится точно. В процессе операции сложения число нормалей возрастает (за исключением особого случая, когда многогранник имеет “кольцо” граней с нормальными, перпендикулярными отрезку). В ходе построения геометрической разности количество нормалей может сокращаться. В целом при построении последовательности многогранников  $W_i$  число граней может резко возрасти, особенно в пространствах большой размерности.

В связи с этим для реализации на ЭВМ возникает задача дополнения алгоритма тем или иным способом искусственного сокращения количества граней многогранников. Описываемый ниже алгоритм зависит от параметра, который можно рассматривать, с одной стороны, как регулятор количества граней, с другой — как точность аппроксимации.

В процессе построения  $V + p$  формируем множество  $L^\#$  нормалей, которые после завершения построения будут удалены. Совокупность векторов  $L^\#$  является подмножеством новых нормалей, т.е.  $L^\# \subset L_{V+p} \setminus L_V$ . Каждой новой нормали  $l$  соответствует пара старых нормалей  $l_1, l_2$  (см. алгоритм построения  $V + p$ ). Вектор  $l$  включается в  $L^\#$ , если выполнено хотя бы одно из двух неравенств

$$\frac{|l'_1 \bar{p}|}{|\bar{p}|} < \varepsilon, \quad \frac{|l'_2 \bar{p}|}{|\bar{p}|} < \varepsilon \quad (4.1)$$

где  $\varepsilon$  — заданный параметр. Выбор условия включения нормали в  $L^\#$  в виде неравенств (4.1) обеспечивает отсутствие на результирующем многограннике близких нормалей. Кроме того, условие (4.1) исключает “слишком плоские” конусы линейности опорной функции.

Изложим алгоритм удаления граней с нормальными из  $L^\#$ . Грани выбрасываются последовательно. Опишем правило удаления одной грани, с остальными поступаем аналогично.

Обозначим  $D = V + p$ . Пусть  $l^\# \in L^\# \subset L_D$ . Для построения аппроксимирующего многогранника  $\tilde{D} = \{x: l'x \leq \rho_D(l), l \in L_D \setminus \{l^\#\}\}$  рассмотрим совокупность нормалей  $\Lambda(l^\#) = \{l \in L_D: g_D(l^\#) \cap g_D(l) \neq \emptyset\}$ . Из множеств  $L_D, G_D$  удаляем  $l^\#$  и  $G_D(l^\#)$ , из  $A_D, K_D$  — вершины грани  $G_D(l^\#)$  и соответствующие им конусы, а из  $G_D(l)$  для  $l \in \Lambda(l^\#)$  — ссылки на удаленные вершины. Построение  $\tilde{D}$  сводится к выполнению второй части алгоритмов 2–4 (см. описание построения  $V \div q$ ), в которой полагаем  $\tilde{L} = \Lambda(l^\#)$ ,  $\varphi = \rho_D$ .

Отметим, что описанный способ удаления граней требует локального изменения  $I_{V+p}$  в окрестности выбрасываемых граней. Аппроксимирующий многогранник содержит исходный.

### § 5. Численные примеры

На основе предложенного алгоритма разработана программа для ЭВМ, входными данными которой являются динамика системы (возможно с фазовым вектором в правой части) и целевое множество — многогранник, задаваемый вершинами. Программа осуществляет переход к эквивалентной игре без фазового вектора в правой части, переводит заданные вершины целевого множества в информацию  $I_M$  и выполняет построение моста в рамках эквивалентной игры. Ниже приводятся два примера, просчитанных по данной программе. В первом примере строится функция цены двумерной игры, во втором — множество уровня функции цены (максимальный стабильный мост) для четырехмерной игры.

**Пример 1.** Рассмотрим модельную игру с фиксированным моментом окончания  $\vartheta$  и терминальной функцией платы  $\gamma$ :

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 + v & |u| &\leq 1, \quad |v| \leq 1 \\ \dot{y}_2 &= u & \gamma(y) &= \max\{|y_1|, |y_2|\} \end{aligned}$$

Данная игра изучалась аналитически [15], кроме того проводились численные расчеты при помощи программы построения максимальных стабильных мостов в трехмерных играх [3, 4].

В качестве входных данных программы зададим динамику

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} v$$

$$u \in [-1, 1], \quad v \in [-1, 1]$$

и целевое множество  $M$  — часть надграфика функции платы, лежащую ниже уровня 2.5:

$$M = \{y \in R^3 : \gamma(y_1, y_2) \leq y_3 \leq 2.5\}.$$

Многогранник  $M$  – пирамида с вершинами  $(0, 0, 0)$ ,  $(2.5, 2.5, 2.5)$ ,  $(2.5, -2.5, 2.5)$ ,  $(-2.5, 2.5, 2.5)$ ,  $(-2.5, -2.5, 2.5)$ .

На рис.1 показаны график функции цены игры  $\Gamma(t, x)$  ( $x$  – вектор координат эквивалентной дифференциальной игры вида (1.1)) для момента  $t = \vartheta - 2$  и его проекции на координатные плоскости. Полученные результаты соответствуют исследованиям [3, 4, 15].

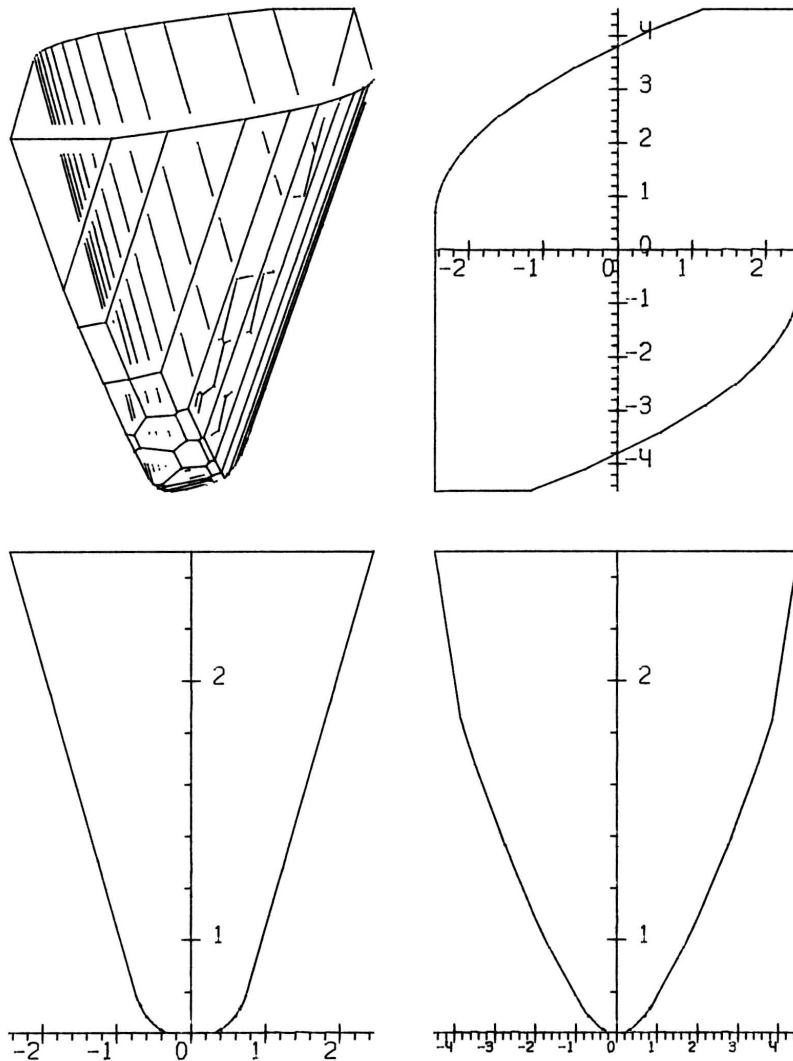


Рис. 1

**Пример 2.** Одну из упрощенных линейных постановок задачи о посадке самолета в условиях ветровых возмущений можно записать в виде дифференциальной игры четвертого порядка



$$\dot{y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.032 & 0 & -0.135 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.27 & 0 & -0.014 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2.577 & -2.886 \\ 0 & 0 \\ 0.288 & 40.234 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0.032 & 0.135 \\ 0 & 0 \\ -0.27 & 0.014 \end{pmatrix} v$$

$$u = (u_1, u_2)' \in R^2, \quad v = (v_1, v_2)' \in R^2,$$

$$|u_1| \leq 0.7; \quad |u_2| \leq 0.17; \quad |v_1| \leq 22; \quad |v_2| \leq 18.$$

Здесь  $y_1$  – отклонение от номинального движения по продольной оси,  $y_2$  – скорость продольного отклонения,  $y_3$  – отклонение по высоте,  $y_4$  – его скорость,  $u_1$  – отклонение от номинальной тяги,  $u_2$  – отклонение от номинального угла атаки,  $v_1$  – горизонтальная компонента скорости ветра,  $v_2$  – вертикальная компонента скорости ветра.

В качестве целевого множества  $M$  зададим симметричный относительно нуля прямоугольный параллелепипед с гранями, параллельными координатным плоскостям. Одна из его вершин  $(50, 10, 2, 0.5)$ . Остальные 15 вершин получаются перебором различных комбинаций знаков координат.

Максимальный стабильный мост  $W \subset R^1 \times R^4$ , просчитанный от целевого множества  $M$ , можно интерпретировать как множество уровня функции цены  $\Gamma \leq 1$  эквивалентной игры, в которой в качестве функции платы взята функция Минковского множества  $M$ .

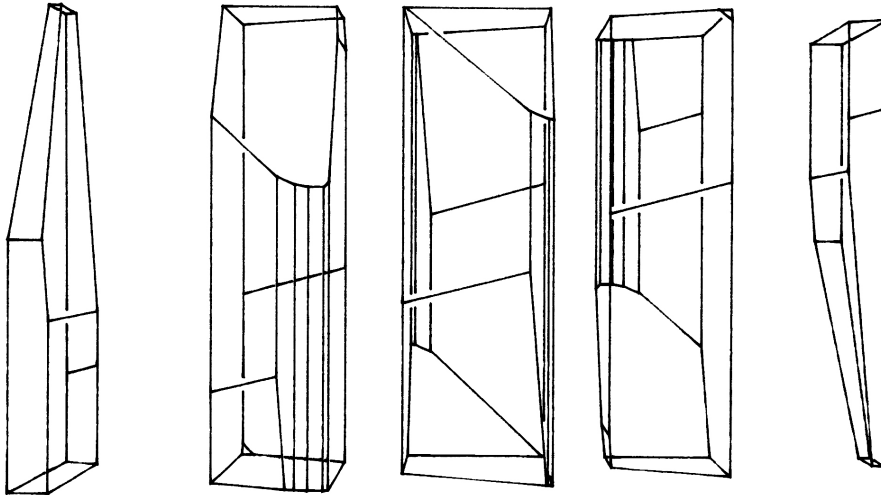


Рис. 2

На рис. 2 приведено множество  $W(t) = \{x \in R^4 : \Gamma(t, x) \leq 1\} \subset R^4$  для  $t = \vartheta - 2$ . Четырехмерный многогранник  $W(t)$  представлен несколькими сечениями гиперплоскостями  $x_4 = \text{const}$ . Каждое сечение изображено как трехмерный многогранник в пространстве координат  $x_1, x_2, x_3$ .

Поступила 13.10.91

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алгоритмы и программы решения линейных дифференциальных игр (материалы по математическому обеспечению ЭВМ).— Свердловск: ИММ УНЦ АН СССР, 1984.— 295 с.
2. Боткин Н.Д. Погрешность аппроксимации в линейной дифференциальной игре // Автоматика и телемеханика.— 1984.— № 12.— С.5–12.
3. Зарх М.А., Пацко В.С. Численное решение дифференциальной игры наведения третьего порядка // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика.— 1987.— № 6.— С.162–169.
4. Зарх М.А., Пацко В.С. Численное решение трехмерных линейных дифференциальных игр с фиксированным моментом окончания / АН СССР. УрО. ИММ.— Свердловск, 1985.— 42с.— Деп. в ВИНТИ 28.10.85, N 7509–В85.
5. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры.— М.: Наука, 1974.— 456 с.
6. Красовский Н.Н., Решетова Т.Н. О программном синтезе гарантированного управления // Проблемы управления и теория информации.— 1988.— Т.17, № 6.— С.333–343.
7. Красовский Н.Н. Управление динамической системой.— М.: Наука, 1985.— 520 с.
8. Лейхтвейс К. Выпуклые множества.— М.: Наука, 1985.— 336 с.
9. Остапенко В.В. Методы решения одного класса задач сближения-уклонения // Автоматика и телемеханика.— 1984.— № 6.— С.42–46.
10. Пономарев А.П., Розов Н.Х. Устойчивость и сходимость альтернированных сумм Понтрягина // Вестник Моск.Ун-та. Серия 15.— 1978.— № 1.— С.82–90.
11. Понтрягин Л.С. О линейных дифференциальных играх. II // Докл. АН СССР.— 1967.— Т.175, № 4.— С. 764–766.
12. Пшеничный Б.Н., Сайгадак М.И. О дифференциальных играх с фиксированным временем // Кибернетика.— 1970.— № 2.— С.54–63.
13. Субботин А.И. Аппроксимация гарантированного результата в игровых задачах управления // Позиционное управление с гарантированным результатом.— Свердловск: УрО АН СССР, 1988.— С.92–100.
14. Субботин А.И., Тарасьев А.М. Сопряженные производные функции цены дифференциальной игры // Докл. АН СССР.— 1985.— Т.283, № 3.— С.559–564.
15. Тарасьев А.М. Об одной нерегулярной дифференциальной игре // Прикл. математика и механика.— 1985.— Т. 49, № 4.— С.682–684.
16. Тарасьев А.М., Успенский А.А., Ушаков В.Н. Приближенное построение множества позиционного поглощения в линейной задаче сближения с выпуклой целью в пространстве  $R^3$  // Управление в динамических системах.— Свердловск: УрО АН СССР, 1990.— С.93–100.
17. Ушаков В.Н. К задаче построения стабильных мостов в дифференциальной игре сближения-уклонения // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика.— 1980.— № 4.— С.29–36.