

**РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ  
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ**

**ТРУДЫ  
ИНСТИТУТА  
МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ**

**Том 15, № 4**

**2009**

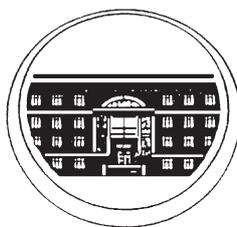
ТРУДЫ  
ИНСТИТУТА  
МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ  
УрО РАН

ВЫХОДЯТ 4 РАЗА В ГОД

ТОМ 15

№ 4

2009



ЕКАТЕРИНБУРГ

**Труды Института математики и механики УрО РАН. Том 15, № 4.** Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2009. 304 с.

ISSN 0134–4889

**Главный редактор** чл.-корр. РАН В. И. Бердышев

**Зам. гл. редактора** В. В. Кабанов

**Редакционная коллегия**

Н. В. Величко, Л. П. Власов, М. И. Гусев, А. Р. Данилин,  
А. Ф. Клейменов, А. С. Кондратьев, А. И. Короткий, В. И. Максимов,  
О. Н. Ульянов (*отв. секретарь*)

**Редакционный совет**

чл.-корр. РАН В. В. Васин, акад. РАН И. И. Еремин,  
акад. РАН А. М. Ильин, акад. РАН Н. Н. Красовский,  
чл.-корр. РАН А. А. Махнев, акад. РАН Ю. С. Осипов,  
чл.-корр. РАН Ю. Н. Субботин, чл.-корр. РАН В. Н. Ушаков,  
чл.-корр. РАН А. Г. Ченцов

**Отв. редактор выпуска** М. И. Гусев

© Учреждение Российской академии наук  
Институт математики и механики  
Уральского отделения РАН, 2009

УДК 517.97, 62–50

**ПРЕОДОЛЕНИЕ САМОЛЕТОМ ПРЕПЯТСТВИЙ ПО ВЫСОТЕ  
В УСЛОВИЯХ ВЕТРОВОГО ВОЗМУЩЕНИЯ<sup>1</sup>****С. А. Ганебный, А. И. Красов, В. С. Пацко, М. А. Смольникова**

Метод адаптивного управления применен к задаче преодоления самолетом препятствий по высоте в условиях действия ветровых помех. Используются конструкции теории дифференциальных игр.

Ключевые слова: адаптивное управление, дифференциальные игры, управление самолетом, ветровое возмущение, численные построения.

S. A. Ganebnyi, A. I. Krasov, V. S. Patsko, M. A. Smol'nikova. Vertical passage of obstacles by an aircraft under wind disturbance.

The adaptive control method is applied to the problem of the vertical passage of obstacles by an aircraft under wind disturbance. Constructions of the theory of differential games are used.

Keywords: adaptive control, differential games, aircraft control, wind disturbance, numerical methods.

**Введение**

Работа посвящена построению управления в задаче о преодолении самолетом препятствий по высоте при действии неизвестной ограниченной ветровой помехи. Рассматривается случай гарантированного обхода двух препятствий. Рассуждения легко переносятся на случай нескольких препятствий. Предложенный способ опирается на идеи теории дифференциальных игр [1, 2] и метод адаптивного управления, изложенный в [3, 4].

Предполагается, что до обнаружения препятствия самолет движется горизонтально в установившемся режиме. Зафиксировано некоторое расстояние, на котором происходит обнаружение находящихся впереди препятствий. После обнаружения начинается маневр преодоления препятствий по высоте. Управление, обеспечивающее гарантированное преодоление первого препятствия, строится с использованием вспомогательной дифференциальной игры. При обнаружении следующего препятствия рассматривается вторая игра. Предложен способ выбора управления, который гарантирует выполнение цели (т. е. обход двух препятствий) в обеих играх.

Построение управления в каждой отдельной игре происходит следующим образом. В вертикальной плоскости строится прямолинейное опорное движение и производится линеаризация нелинейной динамики относительно этого движения. Рассматривается вспомогательная линейная дифференциальная игра с фиксированным моментом окончания, в качестве которого берется момент номинального пролета препятствия. Векторное полезное управление имеет две компоненты: одна регулирует отклонение силы тяги от номинала, вторая представляет собой фиктивное управление, обрабатываемое рулем высоты и имеющее смысл целевого угла тангажа. Мешающее воздействие — две компоненты (продольная и вертикальная) скорости ветра. Накладываются геометрические ограничения на полезное управление и мешающее воздействие.

Вспомогательная игра приводится к виду, в котором фазовая переменная является одномерной. Она просчитывается на основе текущего состояния при помощи фундаментальной

<sup>1</sup>Работа выполнена в рамках программы Президиума РАН «Математическая теория управления» и при поддержке РФФИ (проекты 07-01-96085, 09-01-00436).

матрицы Коши линеаризованной системы и характеризует прогноз отклонения по высоте от номинала на момент пролета препятствия. Свойство одномерности позволяет легко построить в пространстве игры две линии, между которыми полезное управление гарантирует нахождение фазовой переменной, как бы ни действовала в оговоренных пределах ветровая помеха. При этом, если реализуется помеха меньшего уровня, чем заложено при описании вспомогательной игры, то и компенсация ее осуществляется полезным управлением малого уровня. Вспомогательные дифференциальные игры используются для выбора управления, моделирование движения проводится в рамках исходной нелинейной системы.

Задача о преодолении самолетом препятствий по высоте в условиях непредсказуемых порывов ветра близка к задачам взлета и прекращения посадки при наличии ветровых возмущений. Применение современных методов математической теории управления и теории дифференциальных игр к таким задачам рассматривалось в работах [5–12].

Первый раздел статьи посвящен постановке задачи и описанию динамики самолета. Во втором разделе рассмотрено применение адаптивного управления в случае одного препятствия. В третьем — расширение способа управления для случая нескольких препятствий. В четвертом разделе приведены результаты моделирования.

## 1. Постановка задачи и описание нелинейной динамики

Рассматривается задача о предотвращении столкновения самолета с двумя наземными препятствиями (рис. 1). Уклонение производится по высоте, соответственно движение самолета рассматривается в вертикальной плоскости. Допускаются внезапные ветровые возмущения.

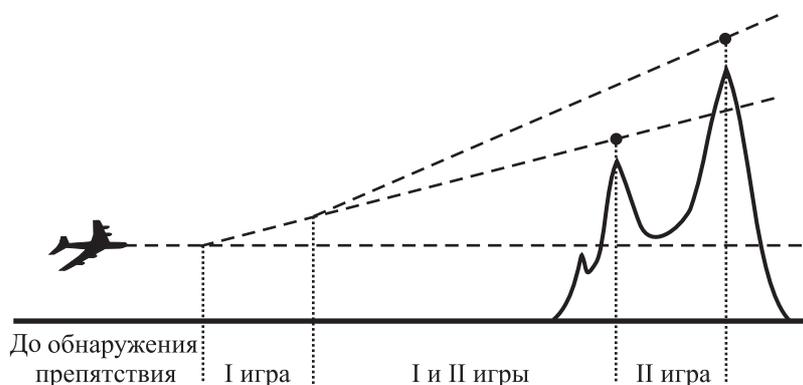


Рис. 1. Задача о преодолении двух препятствий.

Задаются положения и высоты двух препятствий. Считаем, что изначально самолет движется по горизонтальной траектории, которую можно считать первоначальной опорной траекторией. Оговаривается расстояние  $D$  по горизонтали, на котором происходит обнаружение препятствия. После обнаружения первого препятствия проводим опорную траекторию из текущей точки в некоторую точку, расположенную над препятствием. Задача управления — оказаться выше этой точки в момент пролета препятствия. При обнаружении второго препятствия проводим вторую опорную траекторию. Цель управления состоит в том, чтобы обеспечить гарантированный обход обоих препятствий.

Моделирование движения будем осуществлять в рамках восьмимерной нелинейной систе-

мы [13–16], описывающей вертикальный канал движения самолета:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_g &= V_{xg}, \\
 \dot{V}_{xg} &= [(P \cos \sigma - qSc_x) \cos \vartheta - (P \sin \sigma + qSc_y) \sin \vartheta]/m, \\
 \dot{y}_g &= V_{yg}, \\
 \dot{V}_{yg} &= [(P \cos \sigma - qSc_x) \sin \vartheta + (P \sin \sigma + qSc_y) \cos \vartheta]/m - g, \\
 \dot{\vartheta} &= \omega_z, \\
 \dot{\omega}_z &= M_z/I_z, \\
 \dot{P} &= k_p(\delta_{ps} - P), \\
 \dot{\delta}_e &= k_e(\delta_{es} - \delta_e).
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь  $x_g$  — продольная координата центра масс самолета, м;  $y_g$  — высота, м;  $V_{xg}$ ,  $V_{yg}$  — продольная и вертикальная составляющие вектора скорости, м/с;  $\vartheta$  — угол тангажа, рад;  $\omega_z$  — угловая скорость, рад/с;  $P$  — сила тяги, Н;  $\delta_e$  — отклонение руля высоты, рад;  $\delta_{ps}$  — командное положение силы тяги;  $\delta_{es}$  — командное положение руля высоты.

В систему входят также следующие величины:

$q = \rho \widehat{V}^2/2$  — скоростной напор;

$\widehat{V} = (\widehat{V}_{xg}^2 + \widehat{V}_{yg}^2)^{1/2}$  — модуль воздушной скорости, м/с;

$\widehat{V}_{xg} = V_{xg} - W_{xg}$ ,  $\widehat{V}_{yg} = V_{yg} - W_{yg}$  — составляющие вектора воздушной скорости, м/с;

$W_{xg}$ ,  $W_{yg}$  — составляющие скорости ветра, м/с;

$\rho = 1.207$  — плотность воздуха, кг/м<sup>3</sup>;

$g = 9.81$  — ускорение свободного падения, м/с<sup>2</sup>;

$c_x = \tilde{c}_x \cos \alpha - \tilde{c}_y \sin \alpha$ ,  $c_y = \tilde{c}_y \cos \alpha + \tilde{c}_x \sin \alpha$  — аэродинамические коэффициенты силы сопротивления в связанной [15, 17] системе координат;

$\alpha = \arcsin\{(-\widehat{V}_{xg} \sin \vartheta - \widehat{V}_{yg} \cos \vartheta)/\widehat{V}\}$  — угол атаки;

$M_z = qSbm_z$  — момент силы, Н м.

Оставшиеся величины выпишем в числовых выражениях, соответствующих самолету Ту-154:

$\tilde{c}_x = 0.21 + 0.004\alpha + 0.47 \cdot 10^{-3}\alpha^2$ ,  $\tilde{c}_y = 0.65 + 0.09\alpha + 0.003\delta_e$  — коэффициенты силы сопротивления в полусвязанной [15, 17] системе координат;

$m_z = 0.033 - 0.017\alpha - 0.013\delta_e + 0.047\delta_{st} - 1.29\omega_z/\widehat{V}$  — аэродинамический коэффициент момента в связанной системе координат;  $S = 201$  — площадь крыла, м<sup>2</sup>;

$b = 5.285$  — средняя аэродинамическая хорда, м;

$m = 75 \times 10^3$  — масса самолета, кг;

$\sigma = 1.72$  — угол установки двигателей, град;

$I_z = 6.5 \times 10^6$  — момент инерции, кг м<sup>2</sup>;

$\delta_{st}$  — угол установки стабилизатора, град;

$k_p = 1$ ,  $k_e = 4$  — коэффициенты инерции силы тяги и руля высоты, с<sup>-1</sup>.

В формулах для  $\tilde{c}_x$ ,  $\tilde{c}_y$  и  $m_z$  все угловые величины берутся в градусах. Стабилизатор является органом управления, эквивалентным рулю высоты, его отклонение используется для зануления номинального значения руля высоты. Стабилизатор выставляется в свое номинальное положение согласно выбранной опорной траектории.

Управление осуществляется за счет командных положений силы тяги и руля высоты. Возмущения, действующие на систему, — продольная и вертикальная компоненты скорости ветра.

Управление рулем высоты зададим линейным законом:

$$\delta_{es} = -k_1(u_\vartheta - \vartheta - k_2(\widehat{V} - \widehat{V}^0)) + k_3\omega_z. \quad (1.2)$$

Здесь  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 0.0075$ ,  $k_3 = 0.2$  — коэффициенты;  $\widehat{V}$  и  $\widehat{V}^0$  — текущая и номинальная (на соответствующей опорной траектории) воздушные скорости;  $u_\vartheta$  — фиктивное управление, имеющее смысл целевого угла тангажа. Новое управление вводится по следующим соображениям. Возможности руля высоты достаточно велики, и гораздо более важным является сохранение угла тангажа в заданных пределах. Но так как угол тангажа является фазовой переменной в исходной системе и непосредственный контроль над ним невозможен во вводимой далее одномерной дифференциальной игре, рассматривается целевой угол тангажа (на который накладываются ограничения) и строится закон управления рулем высоты, приближающий реальный угол тангажа к целевому.

Управление по силе тяги ограничим неравенствами

$$P^0 \leq \delta_{ps} \leq P^0 + 1.2m, \quad (1.3)$$

где  $P^0$  — номинальная сила тяги, соответствующая выбранной опорной траектории. Левое крайнее значение для  $\delta_{ps}$  говорит о том, что тягу нельзя сбрасывать ниже номинальной во время маневра преодоления препятствия. Правое крайнее значение соответствует запасу по тяге, который можно использовать при маневре преодоления. Естественно, величина справа не должна превышать некоторого глобального ограничения на силу тяги.

Для управления по целевому углу тангажа зададим ограничения

$$0^\circ \frac{\pi}{180^\circ} \leq u_\vartheta \leq 20^\circ \frac{\pi}{180^\circ}. \quad (1.4)$$

Номинальное значение ветровой помехи на всем промежутке движения считаем нулевым. Возможные отклонения компонент скорости ветра примем в виде

$$|W_{xg}| \leq 10 \text{ м/с}, \quad |W_{yg}| \leq 5 \text{ м/с}. \quad (1.5)$$

Предположение о нулевом номинальном ветре не является принципиальным. Ограничения (1.5) на отклонения от номинала выбираются из “здоровых” соображений и используются при построении адаптивного управления в рамках линеаризованных задач и расчете гарантии, им обеспечиваемой.

## 2. Управление в случае одного препятствия

Рассмотрим случай одного препятствия и опишем построение управления в рамках вспомогательной дифференциальной игры (от момента обнаружения препятствия до его прохождения).

**Линеаризация относительно опорной прямой.** При начале маневра уклонения в геометрических координатах  $x$ ,  $y$  строится опорная прямая, проходящая от точки  $(x_{g0}, y_{g0})$  положения самолета в момент обнаружения препятствия до точки  $(x_M, y_M)$ , расположенной на заданной высоте над препятствием. Запас по высоте определяется техническими условиями. С математической точки зрения значение  $y_M$  можно считать высотой препятствия.

Производится расчет параметров номинального движения по опорной прямой. Пусть  $V_{xg}^0$  — номинальная скорость вдоль оси  $x_g$ . Задается вектор  $z$  разностных координат — отклонение текущего положения от соответствующего данному моменту времени вектора номинальных координат на опорной прямой. Третья координата  $z_3$  вектора  $z$  — отклонение от номинала по высоте.

Относительно опорной прямой проводится линеаризация нелинейной системы (1.1):

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \mathbf{A}z + \mathbf{B}u + \mathbf{C}v, \\ u &\in \Omega_u, \quad v \in \Omega_v. \end{aligned} \tag{2.6}$$

В линейной системе вектор управления  $u$  состоит из двух компонент:  $u_p$  — отклонения командного положения силы тяги от номинала ( $u_p = \delta_{ps} - P^0$ ) и  $u^*$  — отклонения целевого угла тангажа от номинального угла тангажа ( $u^* = u_\vartheta - \vartheta^0$ ). Ограничивающее множество, следующее из (1.3) и (1.4), обозначим  $\Omega_u$ . Соотношения (1.5) определяют множество  $\Omega_v$  — ограничение для помехи. Имеем  $0 \in \Omega_u, 0 \in \Omega_v$ .

Рассмотрим вспомогательную игру с фиксированным моментом окончания  $T = (x_M - x_{g0})/V_{xg}^0$ . Первый игрок, распоряжающийся управлением  $u$ , старается обеспечить в момент  $T$  неравенство  $z_3(T) \geq y_M$ . Какого-либо четкого ограничения сверху на величину  $z_3(T)$  нет, однако нежелательно допускать излишне большие значения разности  $z_3(T) - y_M$ . Второй игрок, в ведении которого находится воздействие  $v$ , применяет некоторое заранее неизвестное управление со значениями в множестве  $\Omega_v$ .

**Одномерная дифференциальная игра.** Используя стандартный прием перехода к динамике без фазовой переменной в правой части [1, 2], получим

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= B(\tau)u + C(\tau)v, \quad u \in \Omega_u, \quad v \in \Omega_v, \\ \xi &= Z_3(\tau)z, \quad B(\tau) = Z_3(\tau)\mathbf{B}, \quad C(\tau) = Z_3(\tau)\mathbf{C}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Здесь  $Z_3(\tau)$  — третья строка фундаментальной матрицы Коши системы  $\dot{z} = \mathbf{A}z$ ;  $\tau = T - t$  — обратное время. Фазовая переменная  $\xi$  имеет смысл прогноза по высоте положения системы (2.6) в момент  $t$  на момент  $T$  при  $u = v \equiv 0$ . Первый игрок заинтересован в обеспечении неравенства  $\xi(0) \geq 0$ .

**Построение управления.** В пространстве  $\xi \times \tau$  дифференциальной игры (2.7) строятся два семейства полупроницаемых линий (рис. 2). Полупроницаемая линия [18] — кривая, для каждой точки которой можно подобрать действие первого игрока так, что при любом действии второго движение системы не пересечет эту кривую с + на -. Аналогично для второго игрока, но только с - на +. Линии одного семейства отличаются друг от друга лишь вертикальным переносом. Для линий семейства I (II) знак + находится сверху (снизу).

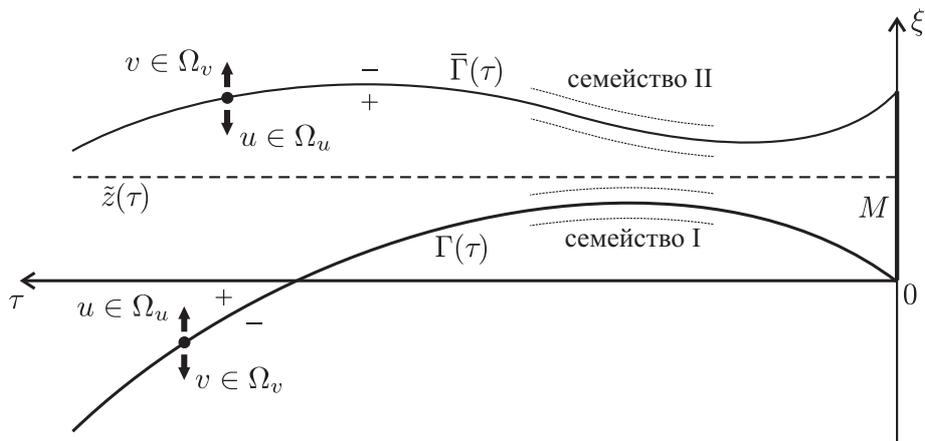


Рис. 2. Два семейства полупроницаемых линий и главный стабильный мост.

Любые две непересекающиеся полупроницаемые линии (одна из семейства I и одна из семейства II) порождают максимальный стабильный мост [1, 2]: линия семейства I образует его нижнюю границу, линия семейства II — верхнюю.

Определим главный стабильный мост. В качестве нижней границы возьмем полупроницаемую линию семейства I, проходящую через точку  $\tau = 0$ ,  $\xi = 0$ . Обозначим эту линию  $\Gamma(\tau)$ . На некотором расстоянии  $\varepsilon$  от нижней границы возьмем горизонтальную прямую  $\tilde{z}(\tau)$  (см. рис. 2). Полупроницаемую линию семейства II, расположенную на расстоянии  $\varepsilon$  выше прямой  $\tilde{z}(\tau)$ , примем за верхнюю границу главного моста и обозначим  $\bar{\Gamma}(\tau)$ .

Сечение главного моста в момент  $\tau = 0$  назовем терминальным отрезком  $M$ . Отрезок  $M$  определяется динамикой игры (2.7) и выбранным значением параметра  $\varepsilon$ . Величина отрезка характеризует отклонение вверх от точки  $\xi = 0$ , которое допускает первый игрок в момент  $\tau = 0$ .

Из теории дифференциальных игр применительно к задачам с одномерной фазовой переменной следует, что для текущей позиции на нижней границе моста надо выбирать управление в системе (2.7), дающее вектор скорости, направленный максимально вверх. Соответственно, для текущей позиции, расположенной на верхней границе, следует брать управление, направляющее вектор скорости максимально вниз. Это дает гарантию, что если начальная позиция находится в пределах главного моста и ветровое возмущение не превосходит заданных ограничений, то движение останется внутри и придет на отрезок  $M$ , оказавшись тем самым в момент окончания  $\tau = 0$  не ниже точки  $\xi = 0$ , но и не слишком высоко.

В целом управление будем строить на основе идеологии адаптивного управления [3, 4]. Если главный мост, образованный двумя полупроницаемыми линиями, пропорционально уменьшить умножением на коэффициент  $0 \leq k < 1$  относительно  $\tilde{z}(\tau)$  в каждом сечении по времени, то получившееся множество также будет максимальным стабильным мостом. Новый мост (рис. 3) соответствует ограничениям  $k\Omega_u$ ,  $k\Omega_v$  на управление и помеху, а также терминальному множеству  $M_k$ , полученному сжатием с коэффициентом  $k$  множества  $M$  относительно точки  $\tilde{z}(0)$ . При этом прямая  $\tilde{z}(\tau)$  становится вырожденным мостом для нулевых ограничений. На граничных линиях главного моста и вне его пределов выбираем экстремальное (крайнее) управление, на линии  $\tilde{z}(\tau)$  — нулевое. Поэтому назовем  $\tilde{z}(\tau)$  линией переключения. В пределах главного моста ниже и выше линии переключения применяем пропорционально измененное управление.

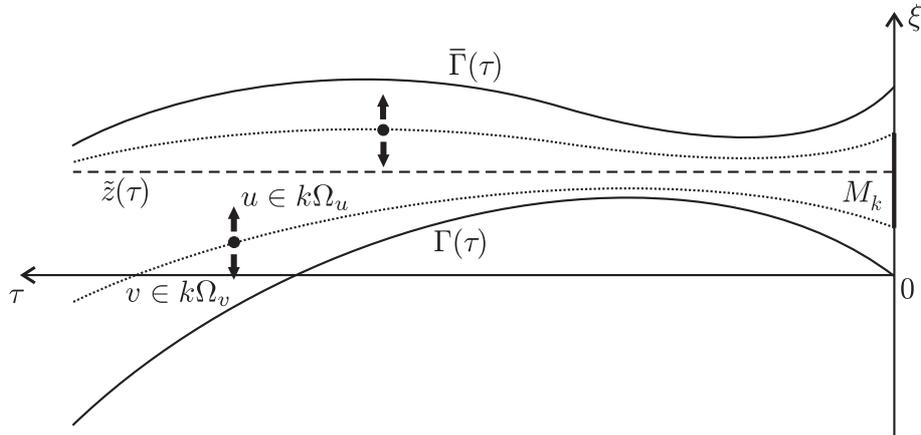


Рис. 3. Идея адаптивного управления: пропорциональное изменение  $t$ -сечений мостов.

В вычислениях в качестве обратного времени  $\tau$  берем прогнозируемое обратное время  $\tau = (x_M - x_g(t))/V_{xg}(t)$ .

### 3. Управление при наличии двух препятствий

В случае последовательного обнаружения нескольких препятствий требуется построить управление, которое гарантировало бы уклонение от каждого из них. Рассмотрим, как это делается для случая двух препятствий, зоны действия которых накладываются друг на друга.

Считаем, что в процессе движения проведены опорные прямые, получены линеаризованные системы (2.6) и одномерные дифференциальные игры (2.7). Каждая индивидуальная игра дает свой вектор управления. Требуется выбрать из двух управлений такое, которое гарантировало бы выполнение цели в обеих играх. Это можно сделать достаточно просто, учитывая одномерность дифференциальных игр и тот факт, что основная цель в игре — не пересечь с + на — нижнюю границу главного моста; пересечение верхней границы по смыслу задачи, вообще говоря, допустимо.

Введем операции сравнения между мостами, получаемыми в двух играх умножением главного моста на скалярный коэффициент  $k$ . Из двух мостов меньшим будем называть тот, который получен умножением на меньший коэффициент. Второй мост будем называть большим.

Рассмотрим варианты расположения текущих позиций в двух играх (рис. 4). Подчеркнем, что речь идет именно о двух позициях, соответствующих одному и тому же состоянию нелинейной системы (1.1) в рассматриваемый момент времени.

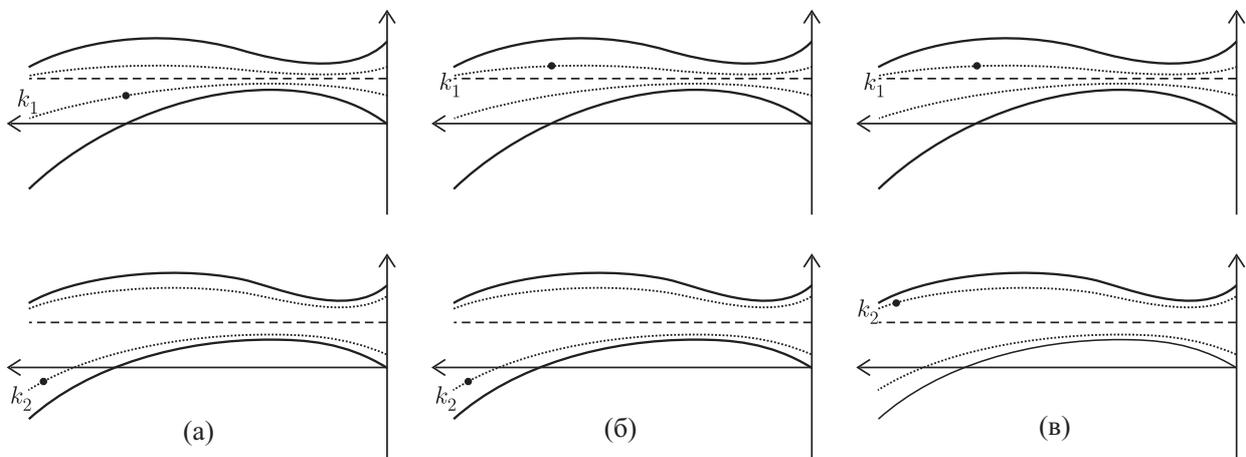


Рис. 4. Различные варианты положения текущих позиций в двух играх.

(а) Текущие позиции в обеих играх находятся ниже линий переключения. Следовательно, вектор  $B(\tau)u$  в правой части системы (2.7) в каждой игре направлен вверх, но модули различны: для первой игры управление берется с границы множества  $k_1\Omega_u$ , для второй — с границы  $k_2\Omega_u$ . Если из этих двух управлений выберем максимальное, т. е. соответствующее большему мосту, то сохраним гарантированный результат в обеих играх, так как лишь увеличим модуль действующего вектора в одной из них.

(б) Одна позиция находится выше линии переключения, другая — ниже. В этом случае выберем управление из игры, позиция которой находится ниже линии переключения. Таким образом, сохраняем результат в этой игре. Однако появляется возможность пересечения верхней границы моста во второй игре.

(в) Обе позиции находятся сверху. Будем брать управление, соответствующее меньшему мосту. Сделано это из следующих соображений. Вариант (в) может появиться из варианта (б) при переходе нижней точки через линию переключения. Если взять управление, отвечающее большему мосту, это вызовет резкое изменение управляющего сигнала. В нашем случае происходит смена знака управления, но его уровень остается небольшим.

Резюмируя три рассмотренных случая, получаем, что всегда выбирается управление, которое сильнее направляет движение системы вверх. Это управление соответствует большему мосту, если текущие точки расположены ниже линий переключения, и меньшему, если выше.

#### 4. Результаты моделирования

При моделировании движения нелинейной системы (1.1) в качестве ветровой помехи будем брать возмущение, обусловленное микровзрывом ветра [19]. Опишем используемую модель микровзрыва [20, 21]. В трехмерном пространстве  $x_g, y_g, z_g$  задается тор (рис. 5). Вне тора создается турбулентность, внутри же происходит пропорциональное уменьшение скорости ветра при приближении к основному кольцу тора. Параметры микровзрыва:  $\mathcal{V}$  — скорость ветра в центральной точке (эта скорость не является максимальной, у края тора скорость ветра может быть до двух раз больше);  $h$  — высота центральной точки;  $R$  — радиус основного кольца тора;  $R_C = 0.8h$  — радиус кольца тора;  $\tilde{x}_0, \tilde{z}_0$  — положение центра тора в плоскости земли.

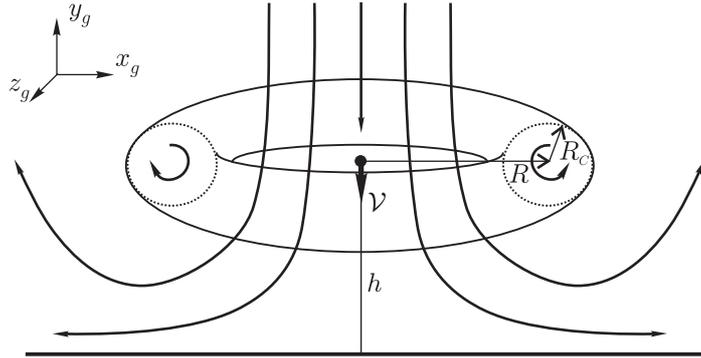


Рис. 5. Модель микровзрыва ветра.

При проходе зоны микровзрыва самолет сначала попадает в поток встречного ветра, который в течение достаточно быстрого времени изменяется на нисходящий, затем на попутный. Встречный поток увеличивает воздушную скорость и, соответственно, подъемную силу, попутный и нисходящий — наоборот.

Моделирование проведено с двумя вариантами микровзрыва. Параметры первого:  $\mathcal{V} = 5$  м/с;  $h = 600$  м;  $R = 1200$  м;  $R_C = 480$  м. Центр микровзрыва (в проекции на плоскость земли) расположен на расстоянии 500 м от точки начала движения:  $\tilde{x}_0 = 500$  м,  $\tilde{z}_0 = 0$ . Второй микровзрыв отличается большей силой — скорость ветра в центральной точке  $\mathcal{V} = 8$  м/с.

Предполагаем, что препятствие обнаруживается на расстоянии  $D = 1400$  м.

Параметр  $\varepsilon$  в играх с динамикой (2.7) подбираем так, чтобы величина терминального отрезка  $M$  равнялась примерно 30 м.

Сначала представим результаты моделирования для первого варианта микровзрыва.

На рис. 6 приведены графики движений в координатах двух дифференциальных игр (2.7) и график изменения высоты. На графиках движений по горизонтальной оси откладывается обратное время  $\tau$  в соответствующей игре, по вертикальной — координата  $\xi$  (обозначения:  $\tau_1, \xi_1$  для первой игры и  $\tau_2, \xi_2$  для второй). Графики сдвинуты по времени так, чтобы был виден момент начала действия игры и момент ее окончания. Тонкими линиями показаны границы главного моста и линия переключения. График высоты приведен в координатах  $x_g, y_g$ . Показаны линия земли, препятствия (в виде вертикальных отрезков), три опорные прямые.

Видно, что в первой игре движение пересекает верхнюю границу главного моста и идет на некотором промежутке выше. Это говорит о том, что управление берется из второй игры и, следовательно, ключевую роль здесь играет второе препятствие.

На рис. 7 представлены графики силы тяги, руля высоты, целевого угла тангажа, угла тангажа, реализации ветрового возмущения. По горизонтальной оси отложено время в секундах. На графике силы тяги тонким пунктиром показаны три номинальные значения силы тяги, соответствующие трем опорным прямым, и три максимальные значения силы тяги, отстоящие от номинальных на  $1.2m$ . На графике отклонения руля высоты пунктиром изображены

нулевое значение и максимальные допустимые отклонения руля (они достаточно широкие и не учитываются в алгоритме построения управления). На графике целевого угла тангажа даны максимальные допустимые значения и три номинальных. Три номинальные значения показаны на графике угла тангажа.

На начальном участке до обнаружения первого препятствия значение силы тяги  $P$  было постоянным и равным расчетному номинальному. Постоянным был также целевой угол тангажа  $u_\vartheta$ . Его значение совпадало с номинальным значением угла тангажа. Влияние ветрового возмущения компенсировалось управлением по рулю высоты согласно формуле (1.2).

Поскольку реализации скорости ветра укладываются в ограничения 10 м/с для  $W_{xg}$  и 5 м/с для  $W_{zg}$ , то одномерная фазовая переменная идет выше нижней линии  $\Gamma(\tau)$  главного моста в каждой из вспомогательных дифференциальных игр. При этом значение  $P$  силы тяги и величина  $u_\vartheta$  целевого угла тангажа не выходят на свои максимально допустимые значения.

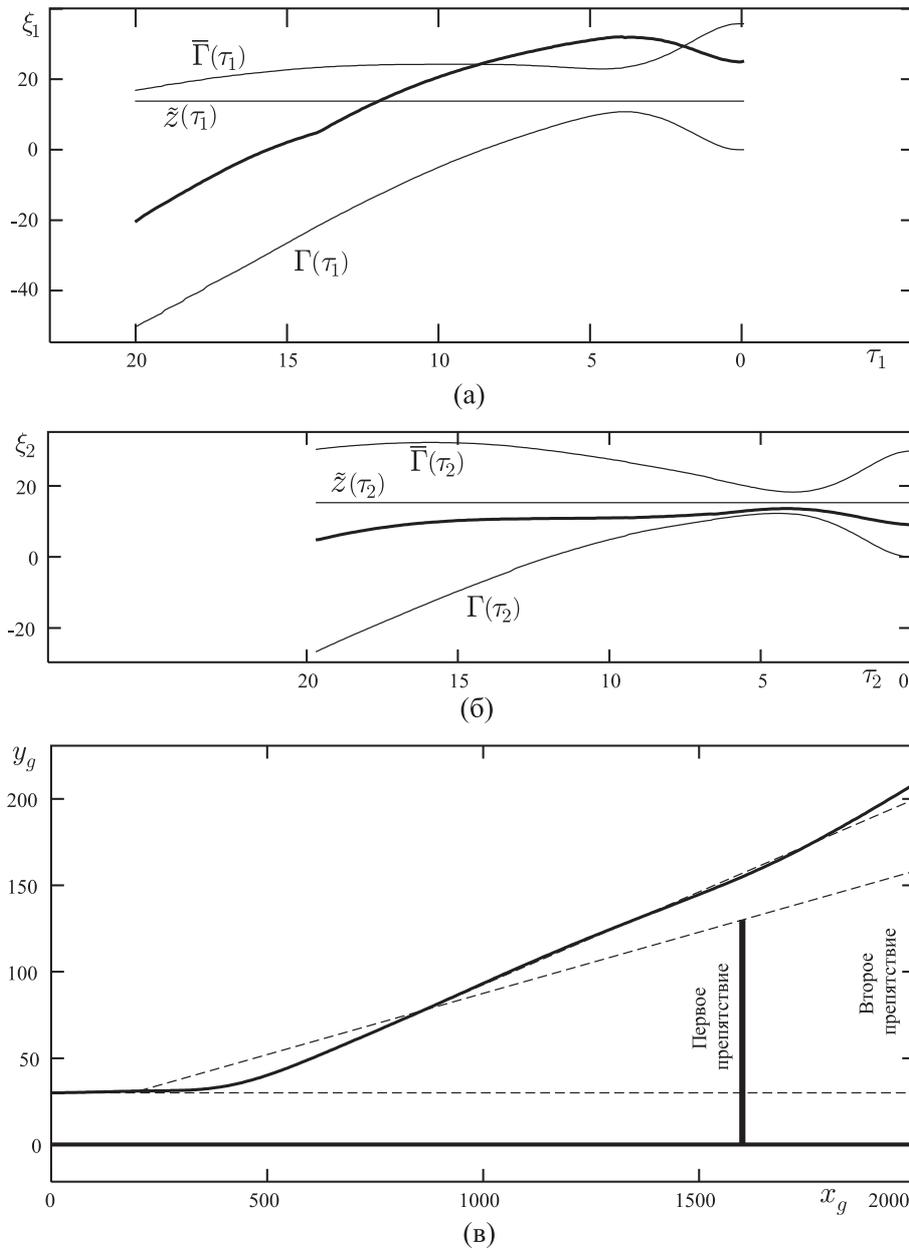


Рис. 6. Микровзрыв 1: (а), (б) — графики движений в двух дифференциальных играх, (в) — график высоты. Время — в секундах, расстояния — в метрах.

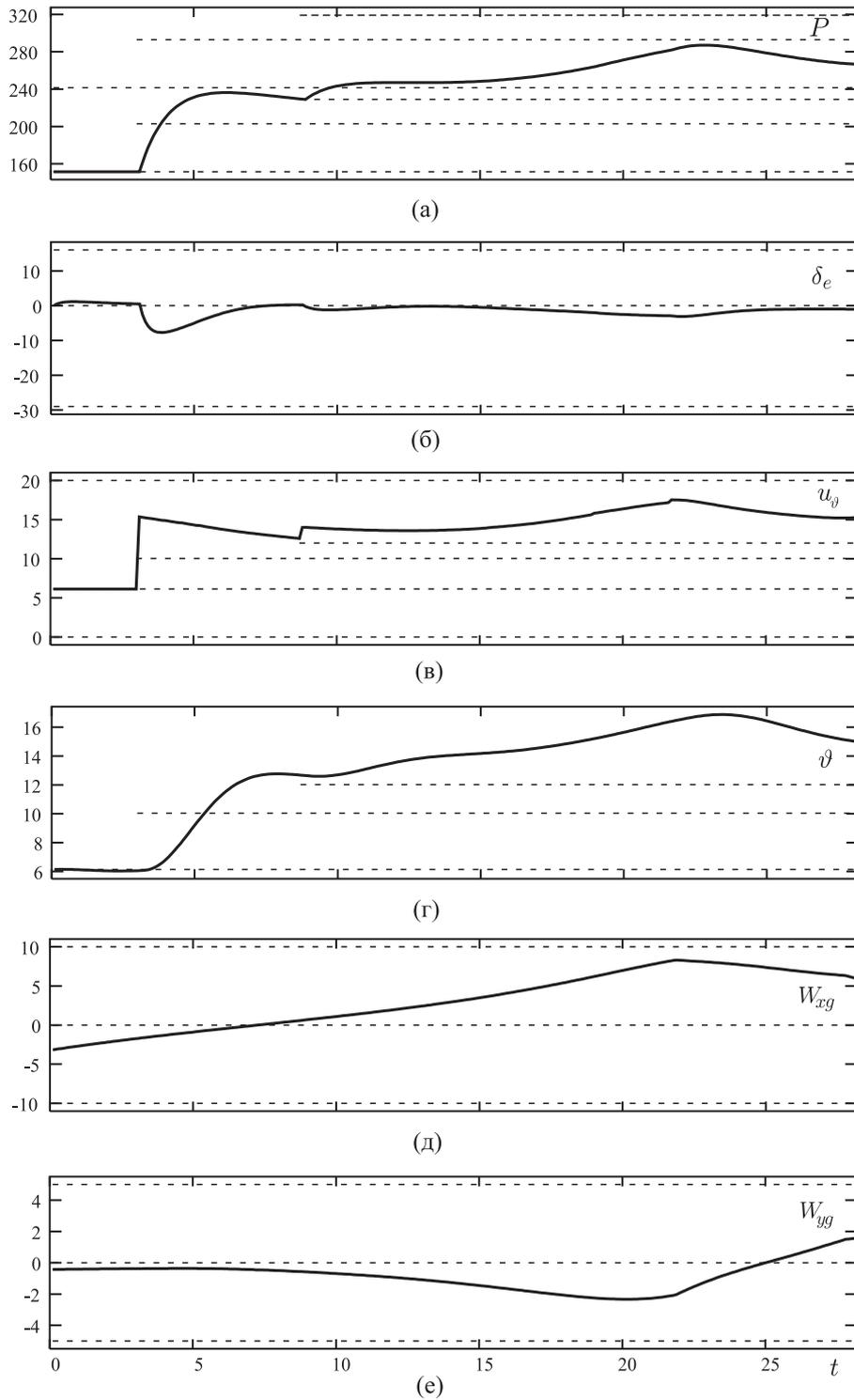


Рис. 7. Микровзрыв 1. Графики: (а) силы тяги  $P$ ,  $\times 1000$  Н; (б) изменения руля высоты  $\delta_e$ , град; (в) целевого угла тангажа  $u_\vartheta$ , град; (г) угла тангажа  $\vartheta$ , град; (д), (е) продольной  $W_{xg}$  и вертикальной  $W_{yg}$  компонент скорости ветра, м/с.

Результаты моделирования для более сильного микровзрыва представлены на рис. 8 и 9. Здесь максимальная скорость ветра по координате  $x$  на некотором участке выходит за пределы предварительно заданных ограничений. Именно на этом участке текущая позиция во второй игре выходит за нижнюю границу главного моста, соответственно управления по силе тяги и целевому углу тангажа становятся максимальными. Далее, когда скорость ветра возвращается в заданные пределы, движение возвращается внутрь моста, цель игры успешно достигается.

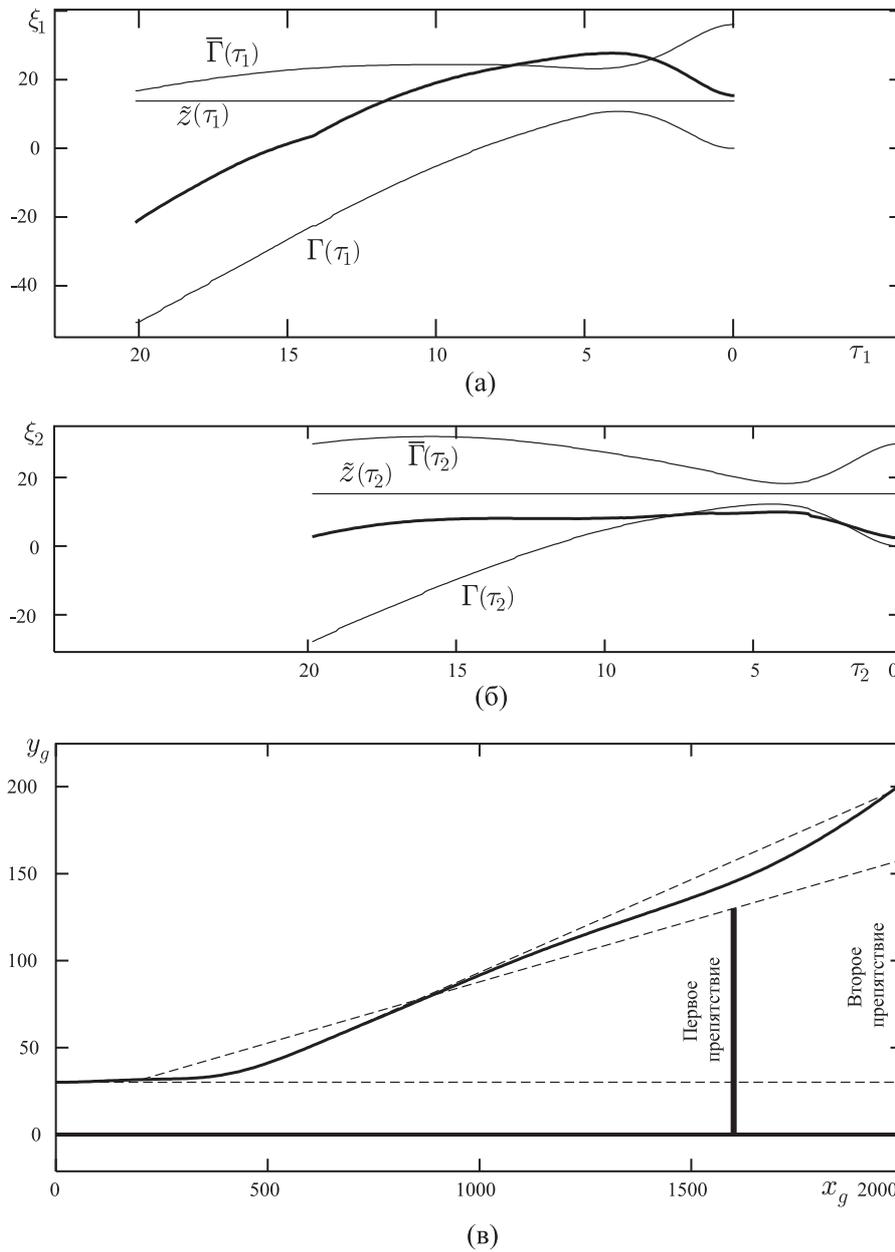


Рис. 8. Микровзрыв 2: (а), (б) — графики движений в двух дифференциальных играх, (в) — график высоты. Время — в секундах, расстояния — в метрах.

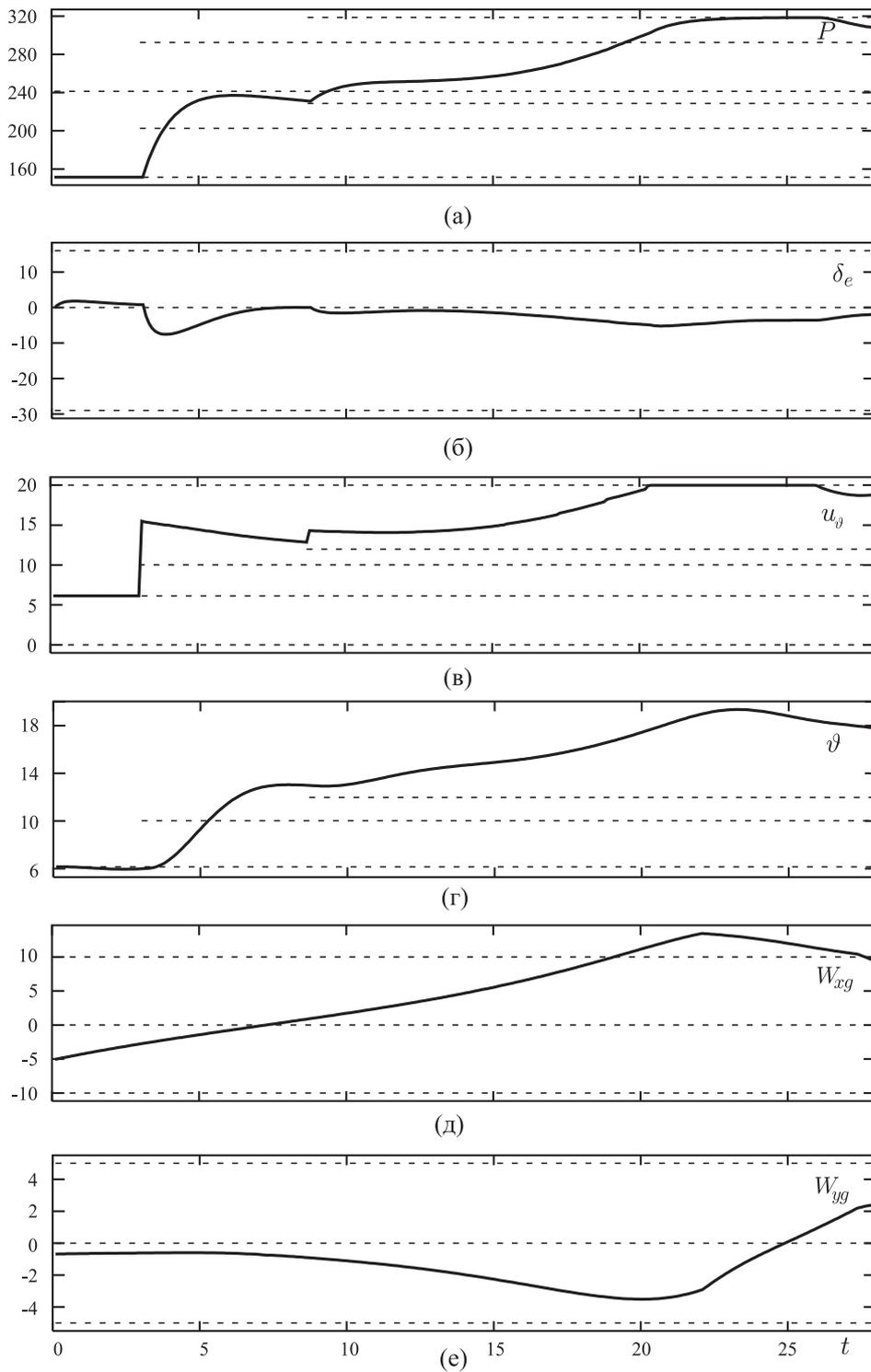


Рис. 9. Микровзрыв 2. Графики: (а) силы тяги  $P$ ,  $\times 1000$  Н; (б) изменения руля высоты  $\delta_e$ , град; (в) целевого угла тангажа  $u_\vartheta$ , град; (г) угла тангажа  $\vartheta$ , град; (д), (е) продольной  $W_{xg}$  и вертикальной  $W_{yg}$  компонент скорости ветра, м/с.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. Game-Theoretical Control Problems. New York: Springer, 1988. 518 p.
3. Ганебный С.А., Кумков С.С., Пацко В.С. Построение управления в задачах с неизвестным уровнем динамической помехи // Прикл. математика и механика. 2006. Т. 70, вып. 5. С. 753–770.
4. Ганебный С.А., Кумков С.С., Пацко В.С. Метод экстремального прицеливания в задачах с неизвестным уровнем динамической помехи // Прикл. математика и механика. 2009. Т. 73, вып. 4. С. 573–586.
5. Кейн В.М. Оптимизация систем управления по минимаксному критерию. М.: Наука, 1985. 248 с.
6. Miele A., Wang T., Melvin W.W. Optimal take-off trajectories in the presence of windshear // J. Optim. Theory Appl. 1986. Vol. 49, no. 1. P. 1–45.
7. Miele A., Wang T., Tzeng C.Y., Melvin W.W. Optimal abort landing trajectories in the presence of windshear // J. Optim. Theory Appl. 1987. Vol. 55, no. 2. P. 165–202.
8. Chen Y.H., Pandey S. Robust control strategy for take-off performance in windshear // Optim. Control Appl. Methods. 1989. Vol. 10, no. 1. P. 65–79.
9. Leitmann G., Pandey S. Aircraft control for flight in an uncertain environment: Take-off in windshear // J. Optim. Theory Appl. 1991. Vol. 70, no. 1. P. 25–55.
10. Bulirsch R., Montrone F., Pesch H.J. Abort landing in the presence of windshear as a minimax control problem // J. Optim. Theory Appl. 1991. Vol. 70, no. 1. P. 1–23.
11. Турова В.Л. Применение численных методов теории дифференциальных игр к задачам о взлете и прекращении посадки самолета // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 1992. Т. 2. С. 188–201.
12. Suebe N., Moitie R., Leitmann G. Aircraft taking-off in windshear: a viability approach // Set-Valued Analysis. 2000. Vol. 8. P. 163–180.
13. Control of an aircraft landing in windshear / V.S. Patsko, N.D. Botkin, V.M. Kein, V.L. Turova, M.A. Zarkh // J. Optim. Theory Appl. 1994. Vol. 83, no. 2. P. 237–267.
14. Боткин Н.Д., Пацко В.С. Анализ применения методов теории дифференциальных игр для имитации ветровых возмущений: отчет. Рег. в ВИНТИ, № 01880003467, инв. № 02880044271. Свердловск, 1987. 46 с.
15. Системы цифрового управления самолетом / под ред. А.Д. Александрова, С.М. Федорова. М.: Машиностроение, 1983. 223 с.
16. Дифференциальные игры и задачи управления самолетом при ветровых помехах / Н.Д. Боткин, М.А. Зарх, В.Н. Кейн, В.С. Пацко, В.Л. Турова // Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1993. № 1. С. 68–76.
17. Остославский И.В., Стражева И.В. Динамика полета. Траектории летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1969. 499 с.
18. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 480 с.
19. Dole С.Е. Flight Theory and Aerodynamics. New York: John Wiley and Sons, 1981. 320 p.
20. Ivan M. A ring-vortex downburst model for real-time flight simulation of severe windshear // AIAA Flight Simulation Technologies Conf. St. Louis, Miss. 1985. P. 57–61.
21. Боткин Н.Д., Пацко В.С., Турова В.Л. Разработка алгоритмов построения экстремальных ветровых возмущений: отчет. Рег. в ВИНТИ, № 01880003467, инв. № 02880054701. Свердловск, 1987. 58 с.

Поступила 01.06.2009

Ганебный Сергей Александрович  
канд. физ.-мат. наук, мл. науч. сотрудник  
Ин-т математики и механики УрО РАН  
e-mail: ganebny@imm.uran.ru

Пацко Валерий Семенович  
канд. физ.-мат. наук, зав. сектором  
Ин-т математики и механики УрО РАН  
e-mail: patsko@imm.uran.ru

Красов Анатолий Иванович  
канд. техн. наук, ст. науч. сотрудник  
фирма “НИТА”, С.-Петербург  
e-mail: sma@nita.ru

Смольникова Мария Анатольевна  
ассистент  
Ун-т гражданской авиации, С.-Петербург  
e-mail: mariasmol@inbox.ru