

**РОССИЯ**

**ХІХ МЕЖДУНАРОДНАЯ  
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ  
КОНФЕРЕНЦИЯ**

**РАДИОЛОКАЦИЯ  
НАВИГАЦИЯ  
СВЯЗЬ**

**Том 3**

**Воронеж  
2013**



**РОССИЯ**

**XIX международная  
научно-техническая конференция**

**РАДИОЛОКАЦИЯ,  
НАВИГАЦИЯ,  
СВЯЗЬ.**

**Том 3**

**Секции 7-9, 10, 11, 15, 16**

**16-18 апреля 2013 г.**

**Воронеж**

## **Совместная обработка данных от нескольких РЛС для выявления систематических ошибок по азимуту и дальности**

Бедин Д.А., Беляков А.В., Ганебный С.А., Иванов А.Г., Строков К.В., Федотов А.А.

*Описываются три варианта решения задачи оценивания систематических ошибок при обработке замеров нескольких радиолокаторов (РЛС) с перекрывающимися зонами наблюдения. В предлагаемом подходе принципиально ни одна из рассматриваемых РЛС не считается эталоном. Систематические ошибки определяются при совместной обработке замеров «соседних» РЛС за счёт избыточности радиолокационных данных. Предлагаемые методы могут быть использованы в вычислительных комплексах систем управления воздушным движением (УВД).*

### **Co-Processing of Data from Several Radars**

#### **for Determination of Systematic Errors in Azimuth and Range**

Bedin D.A., Belyakov A.V., Ganebniy S.A., Ivanov A.G., Strokov K.V., Fedotov A.A.

*The paper describes three approaches for solving the problem of estimating the systematic errors in the radar measurements obtained from several overlapping observation domains. In the proposed approaches, neither one of the radars could be considered as a reference standard one. Systematic errors are determined by co-processing the measurements of the nearby radars on the basis of the informational redundancy in the radar data. The proposed methods can be used in computer information complexes of the air traffic management systems.*

В крупных центрах УВД обрабатываются данные, полученные от большого количества РЛС, в том числе сильно удалённых. При совместной обработке замеров важным является выявление систематических ошибок в геометрическом положении замеров РЛС. Наличие таких ошибок может существенно влиять на точность и корректность работы алгоритмов систем УВД. Текущий контроль за точностными характеристиками РЛС – одно из направлений повышения надёжности систем УВД в целом. Современные зоны ответственности УВД имеют большие размеры, особенно с учётом областей видимости РЛС, от которых в систему УВД поступают замеры. Все коридоры движения для гражданских воздушных судов накрываются, как правило, зонами видимости нескольких РЛС (до 10). Избыточную информацию от многократного перекрытия зон видимости РЛС можно использовать для вычисления систематических ошибок РЛС.

#### **Модель наблюдения**

Радиолокатор получает измерения в собственной сферической системе координат в виде  $(r, \alpha, \beta)$ , где  $r$  – дальность до наблюдаемого объекта,  $\alpha$  – азимут,  $\beta$  – угол места. Рассмотрим горизонтальную плоскость  $\Gamma$  в точке стояния радиолокатора (касательная плоскость к земному эллипсоиду). Тогда  $\beta$  есть угол между лучом  $\Lambda$ , выпущенным из РЛС на объект, и плоскостью  $\Gamma$ , то есть угол возвышения объекта над горизонтом. Луч  $\Lambda$  проецируется на  $\Gamma$ , также проецируется луч направления от РЛС на север. Угол азимута  $\alpha$  есть угол между этими проекциями (рис. 1).

Обзорные РЛС, используемые в управлении воздушным движением гражданской авиации, угол  $\beta$  обычно не измеряют. Вторичным радиолокаторам доступна информация о высоте объекта  $h$ , которая измеряется на самом ВС высотомером. Как правило, измерения высоты достаточно точные и одинаковые у разных РЛС при наблюдении за

одним и тем же ВС в близкие моменты времени. По тройке  $(r, \alpha, h)$ , полученной от  $i$ -ой РЛС, легко восстановить координаты ВС в геоцентрической и географической системах координат.

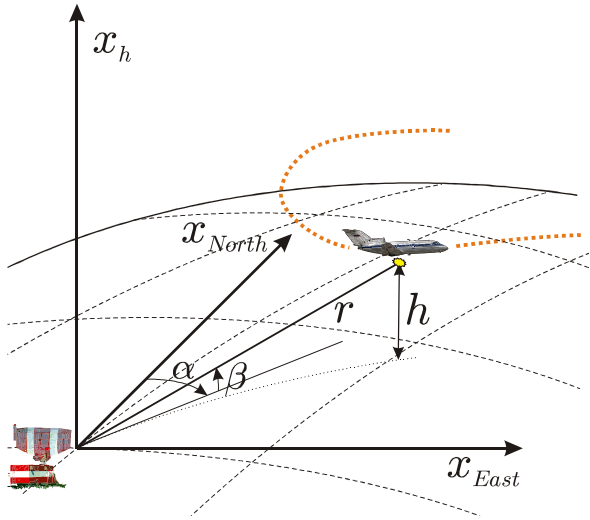


Рис. 1. Наблюдение за ВС при помощи радиолокатора.

Пусть за движением ВС с идентификатором  $A$  наблюдают  $m$  разных РЛС. Рассмотрим наблюдение РЛС под номером  $i$ , что будем отмечать соответствующим индексом. Обозначим через  $x(t)$  текущее положение ВС в момент  $t$  и введём функции  $r_i(x)$ ,  $\alpha_i(x)$ , возвращающие, соответственно, дальность и азимут объекта относительно  $i$ -ой РЛС, функция  $h(x)$  возвращает высоту. Тогда наблюдение можно описать следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} z_i^r(A, t) &= r_i(x(t)) + \Delta_i^r(x(t)) + w_i^r(t), \\ z_i^\alpha(A, t) &= \alpha_i(x(t)) + \Delta_i^\alpha(x(t)) + w_i^\alpha(t), \\ z^h(A, t) &= h(x(t)) + w^h(t). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $z_i^r$ ,  $z_i^\alpha$ ,  $z^h$  есть измерения дальности, азимута и высоты, соответственно. Аргументы в скобках показывают, что измерения ведутся для ВС с идентификатором  $A$  в момент времени  $t$ ; такие символы в дальнейшем будут опускаться, за исключением случаев, когда это может привести к двусмысленности. Отметим, что измерения высоты не имеют индекса  $i$ . Считаем, что погрешность по высоте не связана с каким-либо радиолокатором.

Символами  $\Delta_i^r(x)$ ,  $\Delta_i^\alpha(x)$  обозначены систематические ошибки по дальности и азимуту – неслучайные поправки к измерениям, зависящие, в общем случае, от того, где относительно радиолокатора находится ВС. В следующих разделах будут приведены три алгоритма определения систематических ошибок.

В каждом «канале» измерений присутствуют случайные ошибки. В (1) они обозначены  $w_i^r(t)$ ,  $w_i^\alpha(t)$ ,  $w^h(t)$ . Случайные ошибки имеют хорошее вероятностное описание: с достаточной точностью их можно считать имеющими нулевое математическое ожидание и конечные среднеквадратичные отклонения  $\sigma_{ri}$ ,  $\sigma_{\alpha i}$  и  $\sigma_h$ , не зависящие от положения наблюдаемого ВС.

Случайные ошибки измерений в различных «каналах» считаем независимыми. Также будем предполагать независимость случайных ошибок разных РЛС. Для разных моментов времени будем предполагать некоррелированность.

В геоцентрической системе координат уравнение (1) может быть записано в виде

$$z_i(A, t) = x(t) + s_i(x(t)) + w_i(t). \quad (2)$$

Здесь символ  $z_i(A, t)$  означает векторное измерение РЛС с номером  $i$ , соответствующее тройке  $(z_i^r(A, t), z_i^\alpha(A, t), z_i^h(A, t))$ ;  $s_i(x)$  – вектор сдвига от воздействия систематических ошибок для  $i$ -ой РЛС (зависит от текущего положения ВС);  $w_i(t)$  – вектор сдвига от случайных ошибок по дальности, азимуту и высоте. Свойства случайных ошибок в «каналах» дальности, азимута и высоты переносятся на  $w_i(t)$ : для разных моментов времени случайные ошибки некоррелированы, для различных РЛС независимы. Случайная величина  $w_i(t)$  имеет близкое к нулю математическое ожидание, её матрица ковариаций зависит от местоположения наблюдаемого ВС.

### **Постановка задачи**

На практике, одновременно с измерениями РЛС, не всегда легко доступны какие-либо достоверные «внешние» данные, которые можно было бы использовать как эталон при нахождении систематических ошибок (в качестве эталона могут выступать спутниковые измерения системы АЗН или показания контрольных измерений). В работе рассматриваются алгоритмы, в которых используется только информация, поступающая от обзорных радиолокаторов при наблюдении за регулярным воздушным движением. Нахождение систематических ошибок в таком случае можно рассматривать как задачу нахождения поправок, позволяющих максимально хорошо согласовать данные.

Рассматривается зона, в которой за движением ВС наблюдают одновременно несколько радиолокаторов. Каждый из них имеет свои систематические ошибки  $\Delta_i^r(x)$  и  $\Delta_i^\alpha(x)$  по дальности и азимуту. Это приводит к тому, что треки разных РЛС, наблюдающих одно ВС, разнесены между собой.

В случае, если неизвестные поправки  $\Delta_i^r(x)$  и  $\Delta_i^\alpha(x)$  к измерениям РЛС найдены, можно осуществить коррекцию измерений, вычитая из них такие поправки. Требуется найти такие значения  $\Delta_i^r(x)$  и  $\Delta_i^\alpha(x)$  для всех РЛС, что после коррекции на эти значения данные разных РЛС будут наилучшим образом согласованы между собой. Предполагается, что систематические ошибки мало изменяются со временем.

## **1. Алгоритм на основе оптимизационной процедуры большой размерности**

Алгоритм базируется на индивидуальном вычислении систематических ошибок на базе отдельной траектории (отдельного ВС), наблюдаемой несколькими РЛС. Итоговое поле коррекций показаний радиолокатора по азимуту и дальности строится на основе усреднения индивидуальных зависимостей коррекций, полученных для большого числа ВС, наблюдаемых радиолокаторами зоны в течение некоторого промежутка времени.

### **Алгоритм вычисления систематических ошибок для одного ВС**

Алгоритм вычисления систематических ошибок работает при следующих предположениях: моменты замеров РЛС известны точно; систематическая ошибка по азимуту непрерывно зависит от азимута; систематическая ошибка по наклонной дальности является относительной (ошибка пропорциональна дальности) и не зависит от азимута и дальности.

Последовательность замеров координат ВС, сделанных одной РЛС, будем называть РЛС-треком. Предварительно РЛС-треки фильтруются от сбойных замеров разного ти-

па. Замеры первичных РЛС содержат информацию об азимуте и наклонной дальности ВС, замеры вторичных РЛС могут дополнительно содержать информацию о высоте ВС. Время прихода замеров данного ВС от разных РЛС не синхронизировано. Для вычислений берутся участки РЛС-треков, удовлетворяющие условию наблюдения ВС несколькими РЛС, т.е. если в течение значительного времени ВС наблюдалось только одной РЛС, то такой участок РЛС-трека не используется.

В качестве вспомогательной структуры вводится понятие восстанавливаемого трека – ломаной в трёхмерном пространстве, которая аппроксимирует истинное движение ВС, не противоречащее всем РЛС-трекам. Узлам восстановленного трека приписываются фиксированные моменты времени, расположенные на всём промежутке наблюдения рассматриваемого ВС. На отрезках линейности восстановленного трека предполагается линейное течение времени.

В случае, если замер содержит информацию о высоте, он представляет собой точку в трёхмерном пространстве, чьи координаты зависят от координат РЛС, наклонной дальности, азимута и высоты замера, а также от предполагаемых ошибок по азимуту и дальности (на данном этапе мы игнорируем наличие случайных ошибок замеров). Если замер не содержит информации о высоте (первичная РЛС, вторичная с невалидной высотой), то его множество неопределённости является (полу)окружностью в трёхмерном пространстве. Положение окружности зависит от координат РЛС, наклонной дальности, азимута замера, предполагаемых ошибок по дальности и азимуту.

Для каждого замера можем вычислить невязку замера – квадрат расстояния между множеством неопределённости замера (это точка или окружность) и точкой восстановленного трека, соответствующей времени замера. Невязка замера зависит от координат двух вершин восстановленного трека, данных замера (азимут, наклонная дальность и, может быть, высота), предполагаемых систематических ошибок рассматриваемой РЛС, координат рассматриваемой РЛС.

Суммируя все невязки замеров, относящиеся к данному воздушному судну, получаем невязку ВС. Невязка ВС зависит от координат вершин восстановленного трека, данных всех замеров, относящихся к этому ВС, предполагаемых систематических ошибок всех РЛС, наблюдавших это ВС, координат РЛС. Координаты вершин восстановленного трека и предполагаемые систематические ошибки РЛС можно рассматривать как варьируемые независимые переменные, остальные величины – как фиксированные параметры задачи. В итоге, сводим проблему к задаче минимизации функции многих переменных:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \min$$

При решении этой задачи получаем значения вершин восстановленного трека (таким образом, попутно идёт восстановление некоторой «средней» траектории ВС) и предполагаемые систематические ошибки РЛС, наиболее удовлетворяющие параметрам задачи (данным замеров и координатам РЛС).

Для решения задачи минимизации функции многих переменных использовался алгоритм Хука – Дживса с небольшими модификациями.

На начальном этапе исследований предполагалось, что систематическая ошибка по дальности отсутствует, а систематическая ошибка по азимуту для каждой РЛС есть число, не зависящее от азимута и наклонной дальности замера. Однако использование такой модели систематической ошибки при обработке реальных данных часто давало неудовлетворительные результаты: разброс восстановленной систематической ошибки для разных ВС был очень большой. Одновременно была замечена корреляция систематической ошибки со средним азимутом РЛС-трека. Это позволило выдвинуть гипотезу о зависимости систематической ошибки по азимуту от азимута замера. Программно были реализованы кусочно-линейная и тригонометрическая зависимости систематиче-

ской ошибки по азимуту от азимута замера. При обработке реальных данных тригонометрическая зависимость себя не оправдала. Также в программу была введена относительная систематическая ошибка по дальности, постоянная для каждой РЛС.

Пример результата работы алгоритма для одного ВС показан на рис. 2.

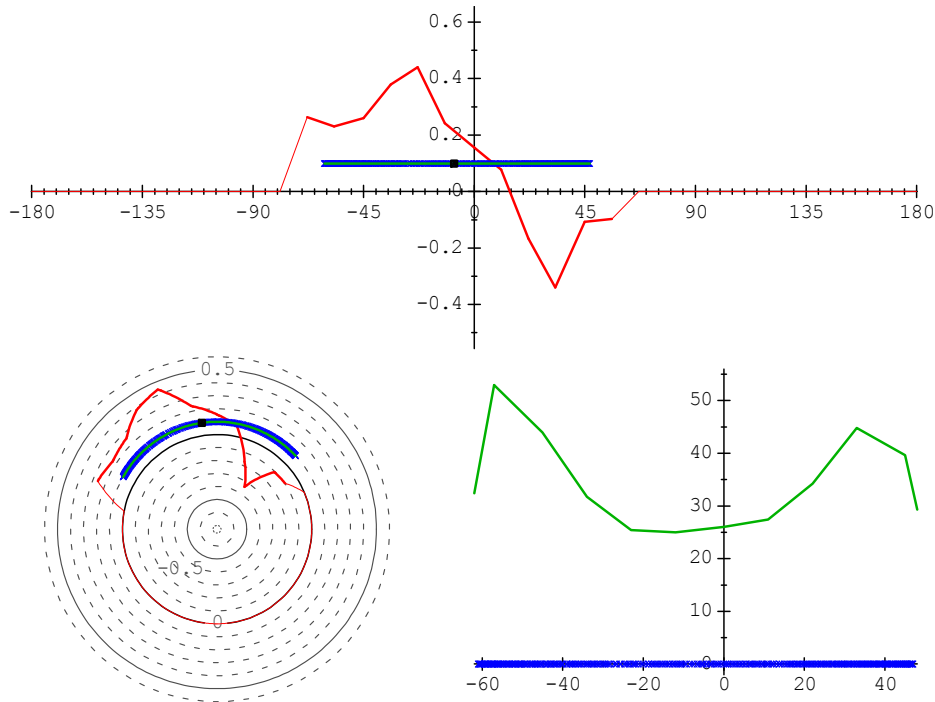


Рис. 2. Пример восстановления систематической ошибки РЛС по азимуту для одного ВС. Красная ломаная линия на верхнем и нижнем левом графиках – зависимость систематической ошибки по азимуту от азимута замера. Зелёная линия в правой нижней части рисунка – функция плотности замеров в зависимости от азимута. Синие маркеры – азимуты замеров, вертикальная координата маркеров – среднее значение систематической ошибки.

### Статистическая обработка многих ВС

По многим причинам результаты обработки только одного ВС не могут быть использованы для другого ВС. В частности, диапазон азимутов замеров одного ВС может не совпадать с диапазоном другого ВС. С другой стороны, после обработки массива данных движения воздушных судов по воздушной зоне за некоторый достаточно большой промежуток времени (несколько часов / сутки) можно составить среднюю картину систематических ошибок РЛС этой зоны, свободную от недостатков результатов обработки данных одного ВС. Пример зависимости систематической ошибки по азимуту от азимута по результатам обработки массива данных показан на рис. 3.

Азимуты и дальности разных РЛС-замеров различных ВС отличаются, поэтому при статистической обработке можем получить зависимость систематической ошибки по азимуту и по дальности как от азимута, так и от дальности, например, в виде векторного поля смещений, которое может применяться для коррекции замеров РЛС как по дальности, так и по азимуту (рис. 4).

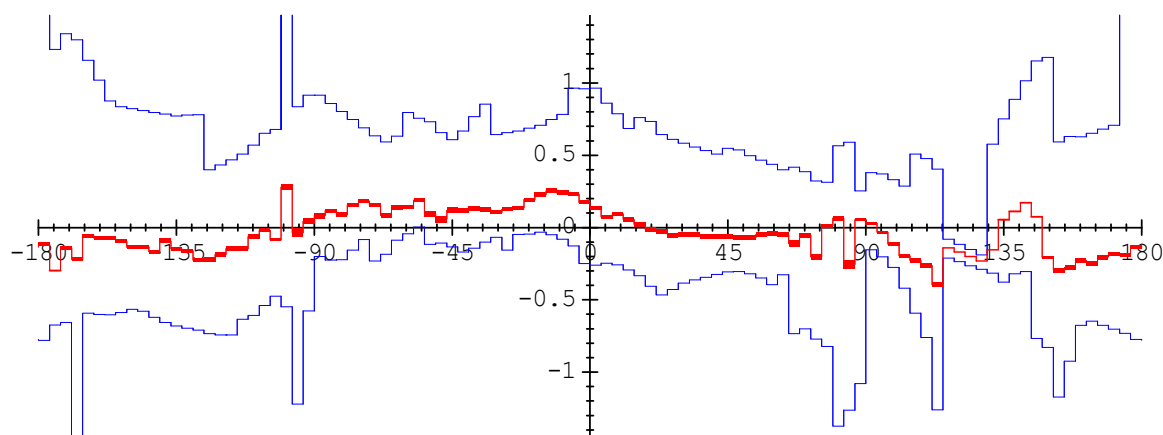


Рис. 3. Пример зависимости систематической ошибки РЛС по азимуту от азимута замера по результатам обработки многих ВС Новосибирской зоны. Центральная линия – средняя систематическая ошибка, крайние линии – максимумы и минимумы систематической ошибки, достигающиеся на отдельных ВС.

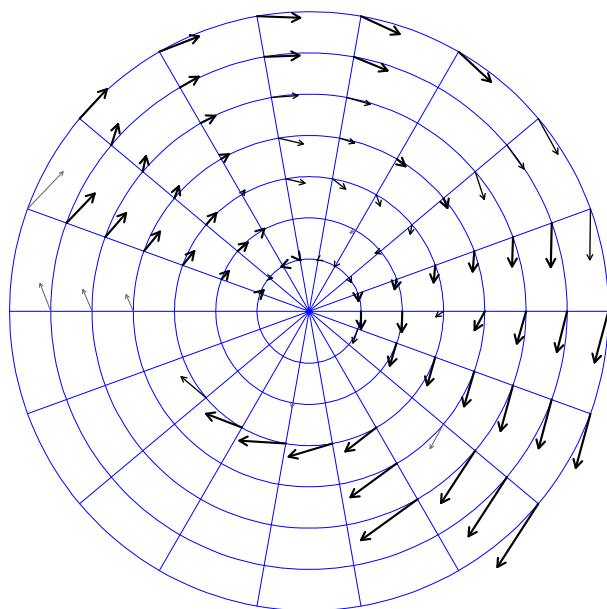


Рис. 4. Зависимость систематической ошибки радиолокатора по результатам обработки многих ВС Новосибирской зоны, показанная в виде векторного поля смещений замеров.

## **2. Геометрический подход к определению систематических ошибок РЛС**

В данном разделе будем предполагать, что у РЛС, участвующих в наблюдении за воздушным движением в некоторой зоне УВД, есть неизвестные, но постоянные систематические ошибки по азимуту  $\Delta^\alpha$  и дальности  $\Delta^r$ . Ошибка по дальности считается аддитивной, не зависящей от дальности. Если с учётом данных предположений рассмотреть две РЛС с пересекающимися областями видимости, то взаимное наложение ошибок будет давать некоторое векторное поле геометрического расхождения замеров для данных РЛС (поле относительных ошибок РЛС).

На рис. 5 показаны возможные модельные варианты такого рода полей со взаимными геометрическими ошибками двух РЛС. Здесь в проекции на плоскость географических координат показаны векторы результирующего относительного расхождения замеров на некоторой равномерной сетке по широте/долготе. Расстояние между РЛС составляет примерно 370 км, для наглядности размер векторов сдвига относительно своих реальных значений был увеличен в 50 раз.



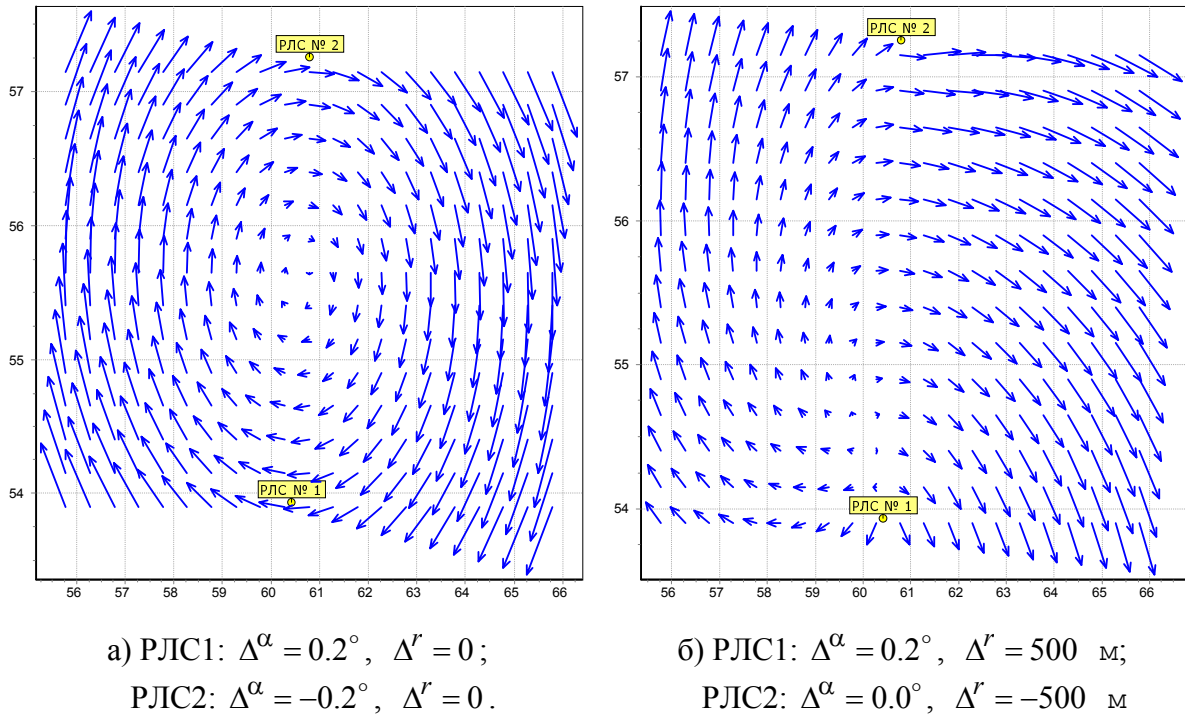


Рис. 5. Модельные варианты полей попарных геометрических ошибок РЛС.

Разностное векторное поле для рассматриваемой пары РЛС, при условии их различного местоположения, однозначно определяет величины поправок обеих РЛС по азимуту и дальности. Такую задачу несложно решить численной оптимизацией путём прямого поиска постоянных систематических ошибок обеих РЛС по азимуту/дальности, компенсирующих фактическое расхождение замеров РЛС в рассматриваемой области географических координат. Т.е. для обеих РЛС численно подбираются такие сдвиги (поправки) по азимуту/дальности, которые компенсируют фактическое расхождение.

Процедура расчёта поправок по азимуту/дальности легко распространяется на случай трёх и более РЛС при наличии соответствующих попарных оценок геометрического расхождения замеров. При этом минимизируется сумма квадратов отклонений между модельными поправками (получаемыми подбором постоянных систематических ошибок по азимуту и дальности) и поправками, рассчитанными по исходным данным (фактическое расхождение). Для сведения треков от большого количества РЛС используется единая сетка в географических координатах.

Самым сложным в описанной выше схеме расчёта оценок постоянных систематических ошибок РЛС по азимуту/дальности является получение исходной информации о геометрическом расхождении замеров для пар РЛС. На практике, задавшись небольшой географической областью, как правило, имеем разноточные замеры, поступающие от соответствующих РЛС с разной частотой в разные моменты времени. Период поступления замеров обзорных РЛС может достигать 20 с.

Для небольших географических областей можно предполагать постоянными систематические ошибки положения замеров РЛС, которые можно задать в виде постоянного вектора сдвига в географических координатах. Для определения искомых разностных векторов по парам РЛС можно воспользоваться геометрией треков ВС, двигавшихся в рассматриваемой области в течение некоторого промежутка времени. Каждый из двух фрагментов с треками РЛС рассматривается как геометрическая фигура (набор ломаных линий) в плоскости местного горизонта. Разностный вектор сдвига вычисля-

ется путём совмещения таких фигур с минимизацией взаимного «суммарного» расстояния между наборами ломаных линий (рис. 6).

Этот метод первоначально использовался для вычисления расхождения по времени в данных РЛС, поскольку при совмещении треков по отметкам замеров соответствующие моменты замеров РЛС не используются. Геометрическое наложение треков позволяет при вычислении оценок рассинхронизации исключить систематические ошибки по азимуту/дальности и, с другой стороны, при вычислении разностных векторов сдвига исключаются ошибки времени.

Операция совмещения может решаться с большим уровнем неопределённости даже в случае наличия большого количества замеров той и другой РЛС, например, в случае движения по параллельным курсам. В общем случае среди наблюдаемых фрагментов треков в небольшой геометрической области должны иметься разнонаправленные участки движения, при этом треки не должны представлять собой набор концентрических дуг.

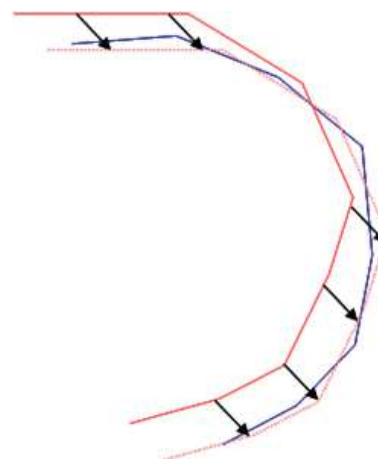


Рис. 6. Вычисление вектора сдвига при совмещении треков

Для тестирования алгоритма было разработано ПО, позволяющее автоматизировать представленную расчётную схему и, в том числе, выбор географических областей для корректного расчёта векторов сдвига замеров по парам РЛС. Тестирование на модельных и реальных данных показало удовлетворительные результаты, особенно для зон с высокой плотностью движения. В таких случаях разностное векторное поле расхождения замеров РЛС оказывается наиболее представительным.

Для иллюстрации приведём некоторые счётные результаты для Новосибирской зоны УВД. По результатам непрерывных наблюдений 8-ми РЛС за сутки было посчитано расхождение в замерах РЛС на некоторой сетке географических координат. Далее путём использования описанной в начале раздела процедуры оптимизации были вычислены поправки по азимуту и дальности для каждой РЛС. На рис. 7 для одной пары РЛС с близким взаимным местоположением показаны начальные смещения замеров (а), остаточные смещения после учета поправок по азимуту (б), остаточные смещения после учета поправок по азимуту и дальности (в).

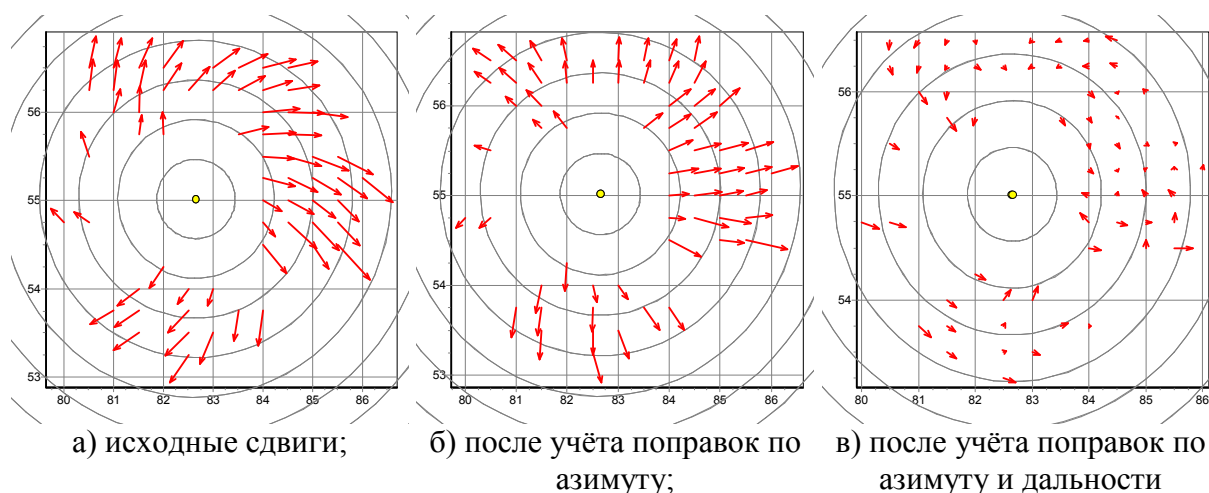


Рис. 7. Результаты расчётов для пары РЛС по Новосибирской зоне УВД.

### 3. Анализ систематических ошибок на основе гарантированного оценивания

Основной особенностью подхода, применяемого в настоящее время для определения систематических ошибок  $\Delta_i^r$ ,  $\Delta_i^\alpha$  радиолокаторов, является заранее заданная структура функций  $\Delta_i^r(x)$ ,  $\Delta_i^\alpha(x)$ , иначе – их модель [1, 2]. Например, делается предположение о том, что систематические ошибки могут быть только следующего вида:  $\Delta_i^r(x) \equiv 0$ ,  $\Delta_i^\alpha(x) \equiv \Delta_i^\alpha = \text{const}$ . После этого создаётся алгоритм, цель которого – определить неизвестные константы  $\Delta_i^\alpha$ . Предположения о структуре могут быть и более изощрёнными, но, так или иначе, они сводятся к формулам

$$\Delta_i^r(x) = \sum_{j=1}^{P(r,i)} f_{ij}^r(x) a_i^{rj}, \quad \Delta_i^\alpha(x) = \sum_{j=1}^{P(\alpha,i)} f_{ij}^\alpha(x) a_i^{\alpha j}.$$

Функции  $f_{ij}^r(x)$ ,  $f_{ij}^\alpha(x)$  фиксируются заранее. При этом дальнейшие вычисления связаны с определением неизвестных констант  $a_i^{rj}$ ,  $a_i^{\alpha j}$ . Алгоритмы такого вида называются алгоритмами параметрического оценивания. В частности, алгоритмы, разобранные в предыдущих разделах, можно отнести к этому классу.

Выбор функций  $f_{ij}^r(x)$ ,  $f_{ij}^\alpha(x)$ , при помощи комбинации которых определяются систематические ошибки, обычно делается исходя из инженерных представлений о существе задачи. Он может оказаться неудачным. Так, например, модель с нулевыми систематическими ошибками по дальности и постоянными по азимуту показала плохую совместимость с реальными данными. Результаты, полученные по разным траекториям ВС, отличались очень сильно, их разброс был примерно в десять раз больше уровня, который можно объяснить влиянием случайных ошибок измерений. На рис. 8 показаны результаты по 7 траекториям, возле отметки результата отложены вертикальные «ворота» по вычисленному уровню среднеквадратичного отклонения, умноженному на три.

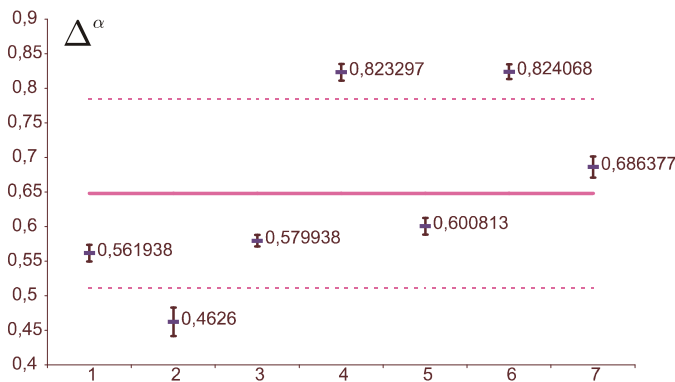


Рис. 8. Разброс результатов по различным траекториям в случае простой модели.

Сделаем попытку исследования систематических ошибок, не применяя заранее фиксированную модель.

В качестве исходных данных рассмотрим измерения, полученные за большой промежуток времени от нескольких РЛС при наблюдении за многими ВС. При этом важно, чтобы зоны наблюдения разных радиолокаторов перекрывались и были доступны наблюдения одного и того же ВС разными РЛС. Такие данные можно разделить на траектории отдельных ВС и, внутри одной траектории, на треки от разных радиолокаторов.

Произведём предварительное сглаживание каждого трека. Это позволяет убрать достаточно большую часть случайных ошибок измерений  $w_i^r(t)$ ,  $w_i^\alpha(t)$ ,  $w^h(t)$ . Сглаживание можно делать различными способами, например, при помощи программы восстановления траектории самолёта [3]. Далее рассматриваем только сглаженные измерения, случайные ошибки в них полагаем настолько малыми, что ими можно пренебречь. Это соответствует равенству нулю значений  $w_i^r(t)$ ,  $w_i^\alpha(t)$ ,  $w^h(t)$  в уравнении (1) и  $w_i(t)$  в уравнении (2).

Рассмотрим группу  $Z$  сглаженных измерений нескольких РЛС от одного и того же ВС в некоторый момент времени  $t$ . В реальности, разные радиолокаторы не производят измерения в один и тот же момент, однако процедура сглаживания позволяет получать замеры в произвольно заданные моменты.

С учётом того, что о систематических ошибках ничего не известно кроме, разве что, ограниченности их значений, истинное положение  $x(t)$  воздушного судна в момент  $t$  может быть где угодно недалеко от группы замеров  $Z$ . Положение  $x(t)$  воздушного судна неизвестно, но это – общая для всех радиолокаторов неизвестная величина. Следовательно, можно составить множество всех вариантов систематических ошибок, совместимых с данными (группой одномоментных замеров) и с тем, что вектор  $x(t)$  один и тот же для разных РЛС. Будем называть такое множество множеством неопределённости систематических ошибок при заданной группе замеров и обозначать его через  $F(Z)$ .

Система, описываемая уравнениями (1) (или (2)), не является полностью наблюдаемой относительно переменных  $\Delta_i^r(x_*)$ ,  $\Delta_i^\alpha(x_*)$  (в предположении плавного изменения функций  $\Delta_i^r(x)$ ,  $\Delta_i^\alpha(x)$  можно восстанавливать их значение в некоторой точке  $x_*$ , близкой к группе замеров  $Z$ ) и неизвестного положения  $x$  воздушного судна. Т.е., даже получив сколь угодно большое количество наблюдений, нельзя однозначно восстановить положение  $x$  и все систематические ошибки. Вместо однозначного варианта удаётся описать только совокупность всех возможных вариантов, которая и составляет множество неопределённости  $F(Z)$ .

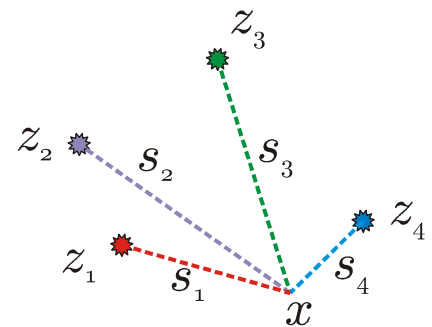


Рис. 9. Вариант сдвигов от систематических ошибок, совместимый с заданной группой замеров.

Наиболее наглядно и просто описывается связь сдвигов от систематических ошибок в геоцентрической системе координат. На рис. 9 показана группа замеров и один из возможных вариантов сдвигов от систематических ошибок.

В ходе анализа реальных данных было замечено, что близкие группы замеров очень похожи друг на друга и меняются достаточно плавно при изменении пространственного положения. Это позволяет ввести в рассмотрение множества неопределённости для систематических ошибок, связанные не с замерами, а с заданным положением в пространстве. Такие множества можно получать усреднением всех множеств неопределённости  $F(Z)$  в геометрической области вокруг заданного положения  $x$ . Будем обозначать множество неопределённости в заданной точке  $x$  символом  $F(x)$ .

С другой стороны, плавное изменение групп замеров, по-видимому, связано с таким же плавным изменением самих систематических ошибок  $\Delta_i^r(x)$ ,  $\Delta_i^\alpha(x)$  в зависимо-



сти от пространственного положения  $x$ . Будем требовать от  $\Delta_i^r(x)$ ,  $\Delta_i^\alpha(x)$  выполнение такого свойства.

Задавшись сеткой пространственных положений  $\{x_j\}$ , можно построить в каждой точке  $x_j$  множество  $F(x_j)$ . Совокупность этих множеств описывает все возможные варианты систематических ошибок радиолокаторов, совместимых с исходными данными. Получение множеств  $F(x_j)$  не опирается на какую-либо модель систематических ошибок и не связано с априорными предположениями об их устройстве. Используется лишь уравнение наблюдения (1), вбирающее в себя только самые простые и общие сведения.

По известным множествам неопределённости  $F(x_j)$  можно построить тем или иным способом однозначную реализацию систематических ошибок  $\Delta_i^r(x)$ ,  $\Delta_i^\alpha(x)$  в точках сетки  $\{x_j\}$ . При этом, если значения  $\Delta_i^r(x_j)$ ,  $\Delta_i^\alpha(x_j)$  выбирать из множества  $F(x_j)$ , можно быть уверенным в их полной совместимости с измерениями. Значения систематических ошибок в точках, отличных от точек сетки, можно получать интерполяцией.

Истинная реализация систематических ошибок  $\Delta_i^r(x)$ ,  $\Delta_i^\alpha(x)$  неизвестна. Однако можно сделать разумные допущения о ней, согласованные с множествами неопределённости. Таким допущением, например, может быть требование близости функций  $\Delta_i^r(x)$ ,  $\Delta_i^\alpha(x)$  к константам на наибольшем числе точек сетки  $\{x_j\}$  или ещё какие-либо предположения, имеющие инженерный смысл.

Одним из наиболее естественных предположений, с точки зрения авторов, является требование плавного изменения функций с изменением  $x$ . Такое требование может быть формализовано с помощью функционала, имеющего смысл среднего по точкам  $\{x_j\}$  квадрата от константы Липшица исследуемой функции. Функции  $\Delta_i^r(x)$ ,  $\Delta_i^\alpha(x)$ , близкие к истинным, должны иметь малые значения такого функционала. В качестве «кандидатов» на истинные систематические ошибки  $\Delta_i^r(x)$ ,  $\Delta_i^\alpha(x)$  можно рассмотреть функции, минимизирующие функционал.

В настоящее время разработан алгоритм, позволяющий получить функции  $\Delta_i^r(x)$ ,  $\Delta_i^\alpha(x)$ , которые, с одной стороны, доставляют минимум функционалу, с другой стороны, значения  $\Delta_i^r(x_j)$ ,  $\Delta_i^\alpha(x_j)$  принадлежат множествам неопределённости  $F(x_j)$ .

*Исследования производились в сотрудничестве с фирмой «НИТА».*

*Работа выполнена в рамках программы фундаментальных исследований Президиума РАН «Динамические системы и теория управления», при финансовой поддержке УрО РАН (проект 12-П-1-1002), а также при поддержке РФФИ (проект №12-01-00537).*

## **Литература**

[1] J. J. Renes; P. v. d. Kraan; C. Eymann. Flightpath reconstruction and systematic radar error estimation from multi-radar range-azimuth measurements / 1985 24th IEEE Conference on Decision and Control. V. 24, Part: 1.

[2] Кирсанов А. П. Оценивание систематических ошибок измерений подвижной РЛС при одновременном определении координат воздушных объектов двумя РЛС // Радиотехника, 2011. №8. С. 105–110.

[3] Бедин Д.А., Пацко В.С., Федотов А.А., Беляков А.В., Строков К.С. Восстановление траектории самолёта по неточным измерениям // Автоматика и телемеханика. 2010. №2. С. 17–30.

**Бедин Дмитрий Александрович**



Родился в 1983 г., окончил Уральский государственный университет им. А.М. Горького в 2006 г., работает в Институте математики и механики им. Н.Н.Красовского УрО РАН.

Область научных интересов: статистическое оценивание, прикладные задачи.

e-mail: [bedin@imm.uran.ru](mailto:bedin@imm.uran.ru)

**Беляков Александр Вячеславович**



Родился в 1977 г., окончил Санкт-Петербургский государственный институт точной механики и оптики (технический университет) в 2001 г., работает в ООО “Фирма “НИТА”

Область научных интересов: прикладные задачи.

e-mail: [al@nita.ru](mailto:al@nita.ru)

**Ганебный Сергей Александрович**



Родился в 1981 г., окончил Уральский государственный университет им. А.М. Горького в 2004 г. В 2008 г. защитил диссертацию кандидата физ.-мат. наук, работает в ООО “Фирма “НИТА”

Область научных интересов: прикладные задачи.

e-mail: [gsa@nita.ru](mailto:gsa@nita.ru)

**Иванов Алексей Геннадьевич**



Родился в 1967, окончил Уральский государственный университет им. А.М. Горького в 1990 г., работает в Институте математики и механики им. Н.Н.Красовского УрО РАН.

Область научных интересов: методы оптимизации.

e-mail: [iagsoft@imm.uran.ru](mailto:iagsoft@imm.uran.ru); [iagsoft@nm.ru](mailto:iagsoft@nm.ru)

**Строков Константин Владимирович**



Родился в 1978 г., окончил Санкт-Петербургский государственный институт точной механики и оптики (технический университет) в 2001 г., работает в ООО “Фирма “НИТА”

Область научных интересов: прикладные задачи.

e-mail: [ks@nita.ru](mailto:ks@nita.ru)

**Федотов Андрей Анатольевич**



Родился в 1968 г., окончил Уральский государственный университет им. А.М. Горького в 1993 г., В 2005 г. защитил диссертацию кандидата физ.-мат. наук, работает в Институте математики и механики им.

Н.Н.Красовского УрО РАН

Область научных интересов: методы оптимизации.

e-mail: [andreyfedotov@mail.ru](mailto:andreyfedotov@mail.ru)