

ДВУМЕРНОЕ МНОЖЕСТВО ДОСТИЖИМОСТИ МАШИНЫ ДУБИНСА ПРИ ДВОЙНОМ ОГРАНИЧЕНИИ НА УПРАВЛЕНИЕ: ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ И ИМПУЛЬСНОМ

В.С. Пацко, Г.И.Трубников, А.А. Федотов



Институт математики и механики имени Н.Н. Красовского,
Екатеринбург

Семинар отдела оптимального управления

10.06.2026

Машина Дубинса (unicycle)

Геометрическое ограничение:

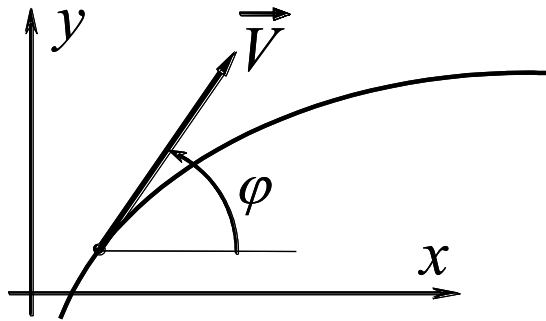
$$|u(t)| \leq \nu, \quad t \in [t_0, t_f], \quad \nu > 0$$

Импульсное ограничение:

$$\int_{t_0}^{t_f} |u(t)| dt \leq \gamma, \quad \gamma > 0$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \cos \varphi, \\ \dot{y} = \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} = u; \end{cases}$$

$$\varphi \in (-\infty, +\infty)$$



$$t_0 = 0; \quad x(0) = y(0) = \varphi(0) = 0$$

$$|\vec{V}| = 1$$

Двумерное множество достижимости в момент t_f :

при геометрическом
ограничении

$$\mathcal{G}(t_f, \nu) = \bigcup_{u(\cdot)} \begin{pmatrix} x(t_f) \\ y(t_f) \end{pmatrix}$$

при импульсном
ограничении

$$\mathcal{G}(t_f, \gamma) = \bigcup_{u(\cdot)} \begin{pmatrix} x(t_f) \\ y(t_f) \end{pmatrix}$$

при двойном
ограничении

$$\mathcal{G}(t_f, \gamma, \nu) = \bigcup_{u(\cdot)} \begin{pmatrix} x(t_f) \\ y(t_f) \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{G}(t_f, \gamma, \nu) \subset \mathcal{G}(t_f, \nu) \cap \mathcal{G}(t_f, \gamma)$$

Слайд 2

Мы (как и другие авторы) для краткости называем объект слева “машиной Дубинса”. Можно было бы говорить “unicycle”. Но это тоже условно.

Здесь x, y — координаты точки, движущейся на плоскости. Угол φ направления вектора линейной скорости отсчитывается от направления оси x против часовой стрелки. Управление u определяет мгновенную угловую скорость.

Начальный момент и начальное трёхмерное фазовое состояние полагаются нулевыми. То, что в качестве стандарта взяты нулевой начальный момент и нулевое начальное фазовое состояние, совершенно не принципиально. Так же, как и равно единице значение величины линейной скорости. Но важно, что *величина скорости постоянна*.

Конечно, реальные модели движения более сложные. Простейшее усложнение может состоять в том, что управление $u(t)$ непосредственно влияет лишь на вторую производную от $\varphi(t)$. Кроме того, величина линейной скорости также может регулироваться при помощи некоторого дополнительного управления.

Мы считаем, что скалярное управление $u(\cdot)$ стеснено двойным ограничением. “Геометрическое” ограничение говорит о том, что модуль управления в каждый момент времени не должен превышать заданного числа ν . “Импульсное” ограничение есть способ ограничения суммарной по времени траты управления. Подчеркнём, что под интегралом модуль стоит в первой степени. Это значит, что при подсчёте интегрального расхода управления величина управления, взятая по модулю, суммируется непосредственно, без какого-либо преобразования.

Допустимые программные управления $u(\cdot)$ определяются как измеримые функции времени, удовлетворяющие двум ограничениям. Нас интересует множество достижимости $\mathcal{G}(t_f, \gamma, \nu)$ “в момент” t_f . Если мы учитываем только геометрическое ограничение (или только импульсное), будем использовать обозначение $\mathcal{G}(t_f, \nu)$ (соответственно, $\mathcal{G}(t_f, \gamma)$). Является очевидным вложение, записанное внизу слайда.

Свойства симметрии (следуют из кинематики машины Дубинса)

1) **Лемма 1.** Пусть значения $t_f^{(1)}, \nu^{(1)}, \gamma^{(1)}$ и $t_f^{(2)}, \nu^{(2)}, \gamma^{(2)}$ таковы, что $t_f^{(1)}\nu^{(1)} = t_f^{(2)}\nu^{(2)}$, $\gamma^{(1)} = \gamma^{(2)}$. Тогда выполнено соотношение

$$\mathcal{G}(t_f^{(2)}, \gamma^{(2)}, \nu^{(2)}) = \alpha \mathcal{G}(t_f^{(1)}, \gamma^{(1)}, \nu^{(1)}), \quad \alpha = \frac{t_f^{(2)}}{t_f^{(1)}} = \frac{\nu^{(1)}}{\nu^{(2)}}.$$

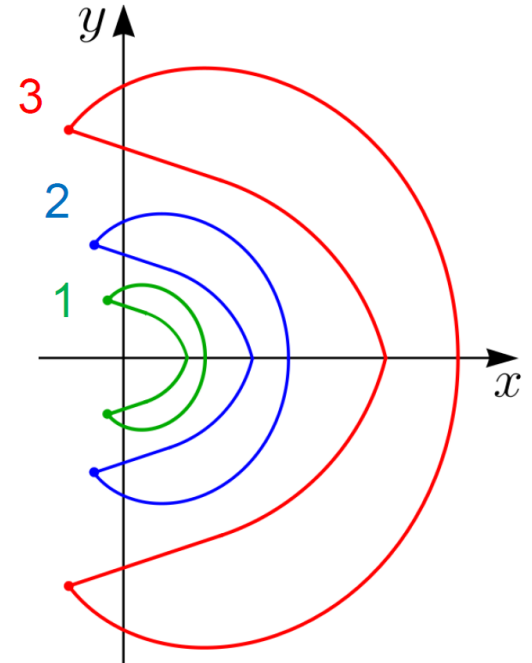
$$\gamma^{(1)} = \gamma^{(2)} = \gamma^{(3)} = 2.5$$

1

2

3

$t_f^{(1)} = 0.5$ $\nu^{(1)} = 8$
$t_f^{(2)} = 1$ $\nu^{(2)} = 4$
$t_f^{(3)} = 2$ $\nu^{(3)} = 2$



2) Множество $\mathcal{G}(t_f, \gamma, \nu)$ симметрично относительно оси x .

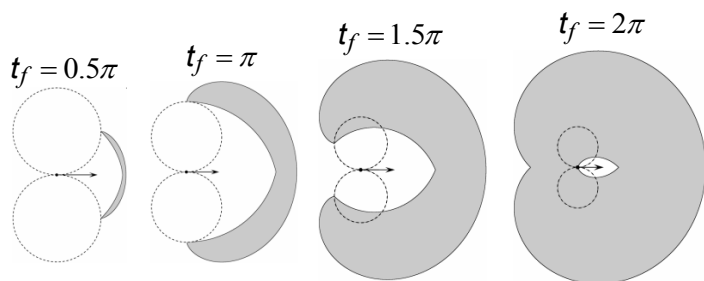
Слайд 3

В кинематической модели Дубинса есть “симметрии”. Например, уже упоминалась независимость геометрии множества достижимости от начального фазового состояния.

Здесь отметим свойство симметрии, заключающееся в подобии множеств достижимости $\mathcal{G}(t_f^{(1)}, \gamma^{(1)}, \nu^{(1)})$ и $\mathcal{G}(t_f^{(2)}, \gamma^{(2)}, \nu^{(2)})$, если для параметров t_f, γ, ν выполнены соотношения, указанные в формулировке леммы. Важно, что доказательство этого свойства опирается только на вид кинематики исследуемой модели: мы можем не уметь строить множество достижимости, но знаем свойство подобия.

Совсем очевидным (чётность функции $\cos \varphi$ и нечётность функции $\sin \varphi$) является зеркальная симметрия множества достижимости относительно оси x .

Двумерное множество достижимости на плоскости x, y при геометрическом ограничении на управление (канонический случай $|u(t)| \leq 1$)



SIAM J. CONTROL
Vol. 13, No. 1, January 1975

PLANE MOTION OF A PARTICLE SUBJECT TO CURVATURE CONSTRAINTS*

E. J. COCKAYNE AND G. W. C. HALL†

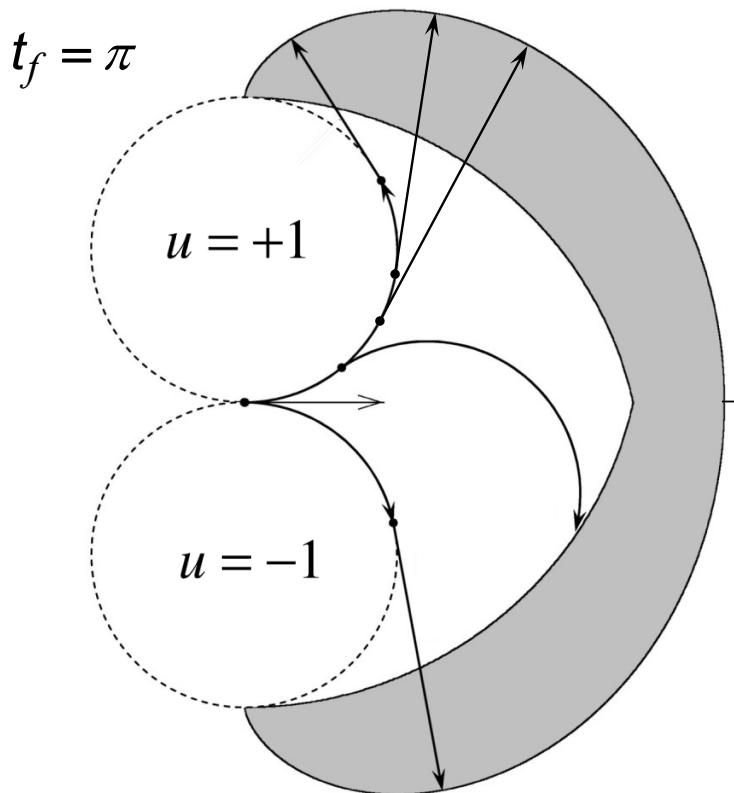
Abstract. A particle P moves in the plane with constant speed and subject to an upper bound on the curvature of its path. This paper studies the classes of trajectories by which P can reach a given point in a given direction and obtains, for all t , the set $R(t)$ of all possible positions for P at time t , thus extending the results of several recent authors.

Ю.И.Бердышев

Нелинейные задачи последовательного управления и их приложение. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2015, 193 с.

М.Э. Бузиков, А.А. Галяев

Перехват подвижной цели машиной Дубинса за кратчайшее время // АиТ. 2021 № 5. С. 3–19.



Граница состоит из дуг
двух эвольвент круга (внешняя граница)
и двух кардиоид (внутренняя граница)

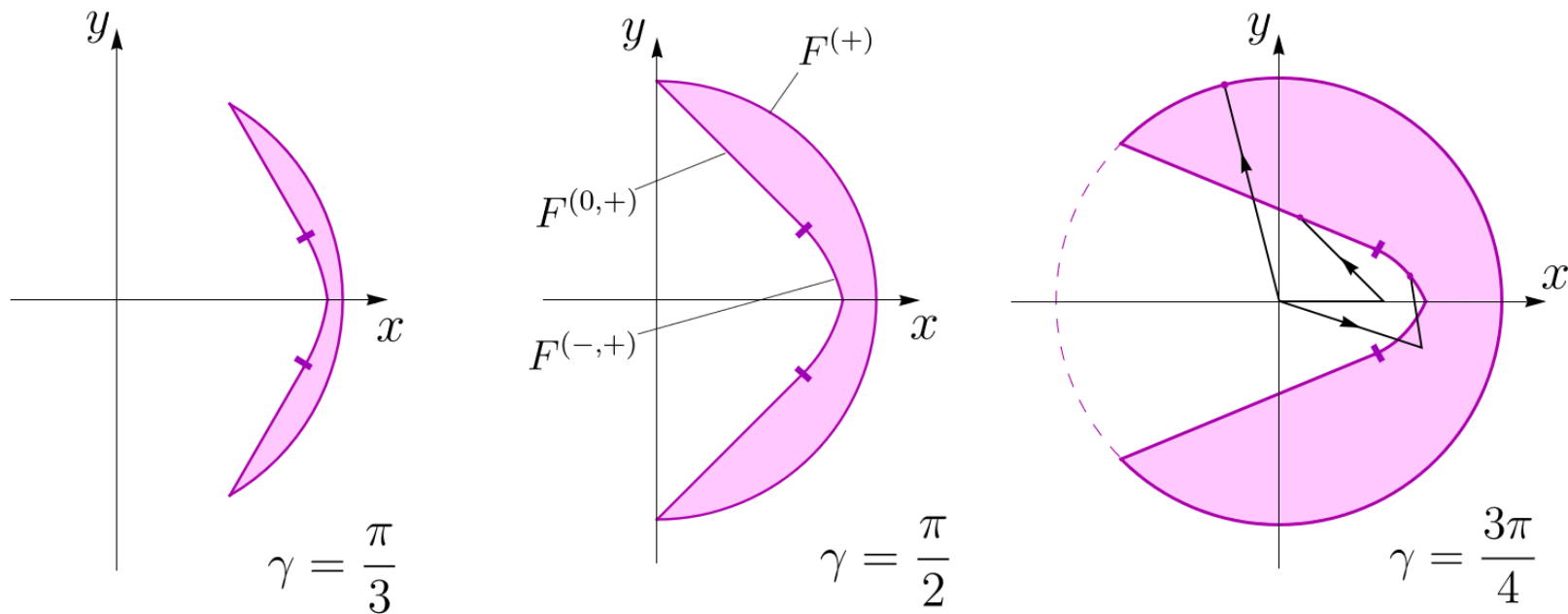
Слайд 4

Конечно, мы опираемся на известные факты о двумерном множестве достижимости $\mathcal{G}(t_f, \nu)$ при геометрическом ограничении. Результаты подробного изучения этого множества содержатся в статье Е.Ј. Соскауне и G.W.C. Hall, 1975 г.

На уровне фольклора геометрия множества $\mathcal{G}(t_f, \nu)$ и виды движений, ведущих на его границу, были широко известны и использовались многими авторами примерно с начала 70-х годов. В нашем Институте близкими и более сложными (по сравнению с кинематикой машины Дубинса) задачами занимался Ю.И. Бердышев. В сравнительно недавней статье М.Э. Бузикова и А.А. Галяева показано, как граничные управления, связанные с множеством достижимости $\mathcal{G}(t_f, \nu)$, можно применить к задачам перехвата движущейся цели.

Рисунок справа показывает движения, ведущие на внешнюю (две эвольвенты) и внутреннюю (две кардиоиды) части границы множества $\mathcal{G}(t_f, \nu)$. На внешнюю границу ведут экстремальные движения “поворот, прямая”, на внутреннюю – “поворот в одну сторону, поворот в другую сторону”.

Множество достижимости машины Дубинса при импульсном ограничении на управление



Пацко В.С., Трубников Г.И., Федотов А.А. Двумерное множество достижимости машины Дубинса при импульсном управлении // Труды ИММ УрО РАН, 32, № 1, 2026. С. 164–182.

Слайд 5

Структура замыкания множества достижимости $\mathcal{G}(t_f, \gamma)$ при действии импульсного управления описана недавно. Граница множества порождается предельными “чисто импульсными” управлениями с общим расходом $\gamma \leq \pi$. Внешний участок границы — дуга окружности. На него ведут импульсы $|\delta\varphi| \leq \gamma$ в начальный момент времени. Внутренний участок — либо один импульс величиной $|\delta\varphi| = \gamma$ в некоторый момент из $(0, t_f)$, либо один импульс $\delta_1\varphi$ в начальный момент и один импульс $\delta_2\varphi$ в некоторый промежуточный момент из $(0, t_f)$. При этом импульсы $\delta_1\varphi$ и $\delta_2\varphi$ противоположны по знаку, но $|\delta_1\varphi| + |\delta_2\varphi| = \gamma$. Импульсные движения показаны на правом рисунке.

В отличие от случая только геометрического ограничения, никакие участки границы множества $\mathcal{G}(t_f, \gamma)$ (за исключением особой точки $(t_f, 0)^T$) *не могут* лежать на границе множества $\mathcal{G}(t_f, \gamma, \nu)$. Тем не менее, понимание геометрии замыкания множества $\mathcal{G}(t_f, \gamma)$ является полезным при исследовании границы множества $\mathcal{G}(t_f, \gamma, \nu)$.

Замкнутость множества достижимости $\mathcal{G}(t_f, \gamma, \nu)$. Существование оптимального управления. 1.

Расширенная система :

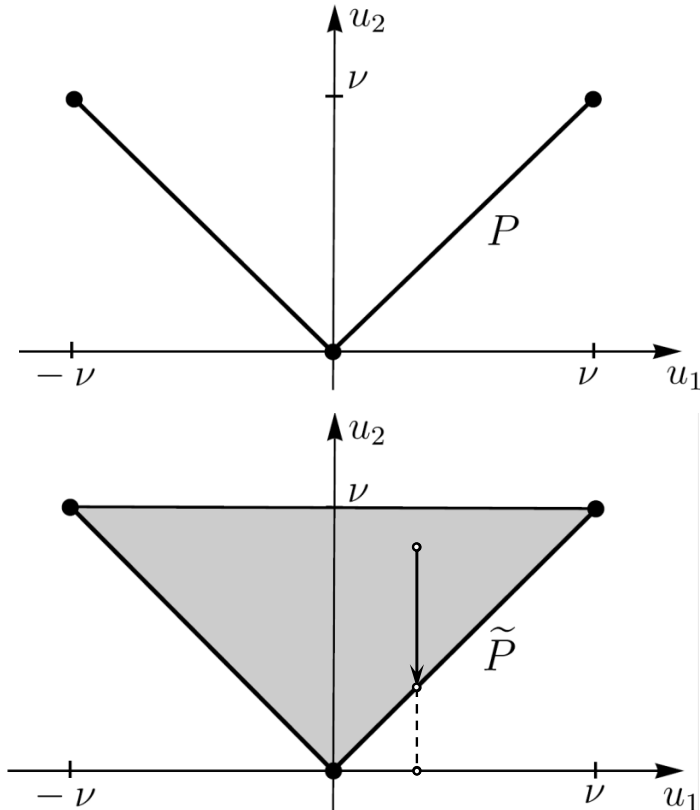
$$\dot{x} = \cos\varphi, \quad \dot{y} = \sin\varphi, \quad \dot{\varphi} = u_1, \quad \dot{\theta} = u_2$$

$$1. (u_1, u_2)^T \in P, \quad u_1 = u, \quad u_2 = |u|$$

$$P = \left\{ (u_1, u_2)^T : |u_1| \leq \nu, u_2 = |u_1| \right\}$$

$$2. (u_1, u_2)^T \in \tilde{P} = \text{conv} P$$

$\tilde{\mathcal{R}}(t_f, \nu)$ – четырёхмерное множество достижимости
(ограниченное и замкнутое)



Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 576 с.
(теорема 2, стр. 265)

Слайд 6

Ограниченность множества достижимости $\mathcal{G}(t_f, \gamma, \nu)$ очевидна. Нас интересует замкнутость этого множества. Следующим будет вопрос об экстремальных управлениях, ведущих на границу множества $\mathcal{G}(t_f, \gamma, \nu)$.

Воспользуемся стандартным приёмом введения дополнительной фазовой переменной (обозначим её θ), характеризующей расход $\int_0^{t_f} |u(t)| dt$ интегрального ресурса при действии управления $u(\cdot)$, стеснённого геометрическим ограничением $|u(t)| \leq \nu, t \in [0, t_f]$. Новое управление считаем двумерным с компонентами u_1, u_2 . При этом компонента u_2 зависит от u_1 . Двумерное геометрическое ограничение в расширенной системе обозначим через P . Если мы овыпуклим его (т.е. перейдём к $\tilde{P} = \text{conv} P$), то можем рассмотреть четырёхмерное множество достижимости $\tilde{\mathcal{R}}(t_f, \nu)$ расширенной системы с геометрическим ограничением $\tilde{P}$.

В силу стандартной теоремы (можно взять теорему 2 из книги Э.Б. Ли, Л. Маркус) множество $\tilde{\mathcal{R}}(t_f, \nu)$ ограничено и замкнуто.

Замкнутость множества достижимости $\mathcal{G}(t_f, \gamma, \nu)$.

Существование оптимального управления. 2.

$\tilde{\mathcal{R}}(t_f, \nu)$ – компактное четырёхмерное множество достижимости при ограничении $(u_1, u_2)^T \in \tilde{P}$.

На первые три координаты x, y, φ расширенной системы влияет *только* компонента u_1 двумерного управления, которая совпадает с исходным управлением u .

1) $\implies \Pr_{x,y} \tilde{\mathcal{R}}(t_f, \nu) = \mathcal{G}(t_f, \nu)$.

2) Величина $\theta(t) = \int_0^t u_2(\tau) d\tau$ не убывает и $\theta(t) \leq \nu t_f, t \in [0, t_f]$. Поэтому

$$\mathcal{G}(t_f, \tilde{\gamma}, \nu) = \Pr_{x,y} \left[\tilde{\mathcal{R}}(t_f, \nu) \cap \left\{ (x, y, \varphi, \theta)^T : \theta \leq \tilde{\gamma} \right\} \right], \quad \tilde{\gamma} \in [0, \nu t_f].$$

$\implies \mathcal{G}(t_f, \tilde{\gamma}, \nu)$ – компакт.

3) Пусть $(\hat{x}, \hat{y})^T \in \mathcal{G}(t_f, \nu)$. Рассмотрим двумерный компакт

$$\tilde{\mathcal{R}}(t_f, \nu) \cap \left\{ (x, y, \varphi, \theta)^T : x = \hat{x}, y = \hat{y} \right\}.$$

В нём выделяем точку $(\hat{x}, \hat{y}, \varphi^*, \theta^*)^T$ с минимальной координатой θ^* . Обозначим через $(u_1^*(\cdot), u_2^*(\cdot))^T$ управление расширенной системы, ведущее в такую точку. Сравнивая множества P и $\tilde{P}$, заключаем, что $(u_1^*(\cdot), u_2^*(\cdot))^T \in P$ п.в. по $t \in [0, t_f]$.

Имеем $u_2^*(t) = |u_1^*(t)| = |u^*(t)|, t \in [0, t_f]$.

$\implies$ Существует управление исходной системы, приводящее в точку $(\hat{x}, \hat{y})^T$ и минимизирующее $\int_0^{t_f} |u(t)| dt$.

Слайд 7

Из компактности множества $\tilde{\mathcal{R}}(t_f, \nu)$ с учётом кинематики машины Дубинса и соотношения множеств P и $\tilde{P}$ следует замкнутость множества $\mathcal{G}(t_f, \tilde{\gamma}, \nu)$, где $\tilde{\gamma} \in (0, \nu t_f]$. Справедливо также утверждение о том, что для любой точки $(\hat{x}, \hat{y})^\top \in \mathcal{G}(t_f, \nu)$ существует оптимальное управление $u^*(\cdot)$ исходной системы с геометрическим ограничением $|u(t)| \leq \nu$, $t \in [0, t_f]$, переводящее систему в эту точку и минимизирующее функционал $\int_0^{t_f} |u(t)| dt$.

Наметим логику рассуждений при доказательстве указанных фактов.

1) Убеждаемся, что проекция множества $\tilde{\mathcal{R}}(t_f, \nu)$ на плоскость x, y совпадает с множеством $\mathcal{G}(t_f, \nu)$.

2) Фиксируем произвольное $\tilde{\gamma} \in (0, \nu t_f]$ и рассматриваем пересечение множества $\tilde{\mathcal{R}}(t_f, \nu)$ с полупространством $\{(x, y, \varphi, \theta)^\top : \theta \leq \tilde{\gamma}\}$. Показываем, что проекция пересечения на плоскость x, y совпадает с множеством $\mathcal{G}(t_f, \tilde{\gamma}, \nu)$.

3) Берём произвольную точку $(\hat{x}, \hat{y})^\top \in \mathcal{G}(t_f, \nu)$. В соответствие ей поставим двумерное множество — сечение множества $\tilde{\mathcal{R}}(t_f, \nu)$ при взятой точке $(\hat{x}, \hat{y})^\top$. Пусть θ^* — минимальное значение координаты θ в этом множестве. Показываем, что при переводе исходной системы с геометрическим ограничением $|u(t)| \leq \nu$, $t \in [0, t_f]$, в точку $(\hat{x}, \hat{y})^\top$ минимально возможное значение интеграла $\int_0^{t_f} |u(t)| dt$ равно θ^* . Соответствующее управление обозначаем $u^*(\cdot)$.

Принцип максимума Понтрягина

Исходная система: $\dot{x} = \cos \varphi, \quad \dot{y} = \sin \varphi, \quad \dot{\varphi} = u; \quad |u(t)| \leq \nu$

Краевые условия: $(x(0), y(0), \varphi(0))^T, \quad (x(t_f), y(t_f))^T \neq (t_f, 0)^T$

Минимизируемый
показатель: $J(u(\cdot)) = \int_0^{t_f} |u(t)| dt$

Функция Понтрягина: $H(z, u, \psi, \psi_0) = \psi_1 \cos \varphi + \psi_2 \sin \varphi + \psi_3 u + \psi_0 |u|$

Здесь $z = (x, y, \varphi)^T, \quad \psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)^T$.

Пусть $u^*(\cdot)$ – оптимальное управление, $z^*(\cdot)$ – соответствующее движение.

Тогда существуют число $\psi_0^* \leq 0$ и решение $\psi^*(\cdot)$ сопряженной системы

$$\dot{\psi}_1 = 0, \quad \dot{\psi}_2 = 0, \quad \dot{\psi}_3 = \psi_1 \sin \varphi^*(t) - \psi_2 \cos \varphi^*(t)$$

такие, что $(\psi_0^*, \psi^*(t))^T \neq 0, \quad t \in [0, t_f]$, выполнены условие трансверсальности

$\psi_3^*(t_f) = 0$ и п.в. по $t \in [0, t_f]$ условие максимума

$$\max_{|p| \leq \nu} \{ \psi_3^*(t)p + \psi_0^* |p| \} = \psi_3^*(t)u^*(t) + \psi_0^* |u^*(t)|.$$

Галеев Э.М., Зеликин М.И., Конягин С.В. [и др.] Оптимальное управление;
ред.: Н.П. Осмоловский, В.М. Тихомиров. Москва: МЦНМО, 2008. 320 с. (стр. 83–87)

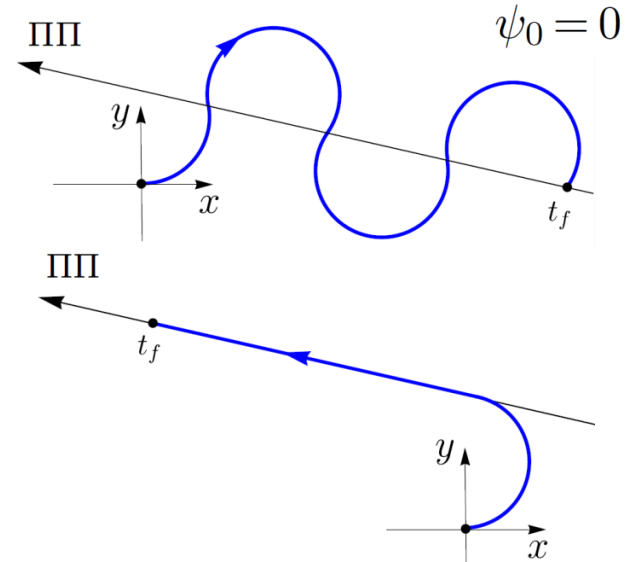
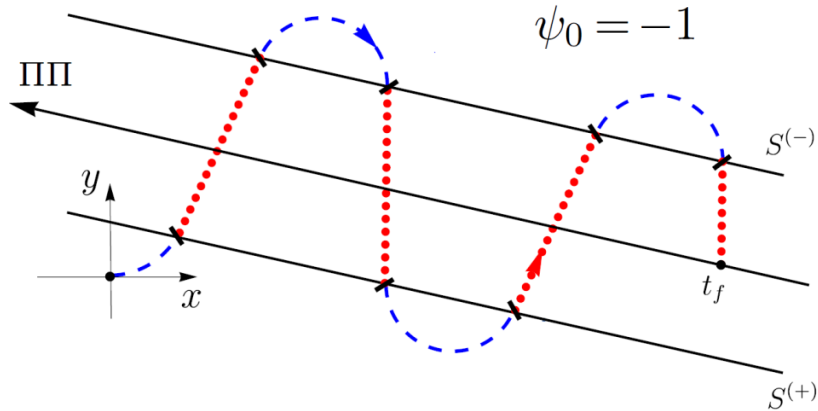
Слайд 8

В формулировке ПМП на слайде учтена конкретика рассматриваемой задачи оптимального управления. Существование оптимального управления при конечной точке $(x(t_f), y(t_f))^T \in \mathcal{G}(t_f, \nu)$ нами установлено.

Предположение о том, что $(x(t_f), y(t_f))^T \neq (t_f, 0)^T$, исключает случай, когда $\psi_1^* = 0$, $\psi_2^* = 0$, если $\psi_0^* < 0$. Относительно точки $a^{(0)}(t_f) = (t_f, 0)^T$ очевидно, что она лежит на границе двумерного множества достижимости и в неё ведёт управление $u^*(t) \equiv 0$.

Внизу слайда указана книга, откуда можно взять формулировку ПМП для задач оптимального управления общего вида.

Движения, удовлетворяющие принципу максимума



Теорема 4. Пусть $\hat{y} = \hat{F}(\hat{u})$ является граничной точкой множества $R_1^\nu(\mu)$ – проекции множества достижимости на подпространство $L \subset \mathbb{R}^m$ и пусть P – оператор проектирования на L . Пусть линеаризация управляемой системы в точке $\hat{u}$ является вполне управляемой по выходу $y = Px$. Тогда $\max\{\frac{1}{\nu}\|\hat{u}\|_\infty, \frac{1}{\mu}\|\hat{u}\|_1\} = 1$ и существуют вектор $l^* \neq 0$ и число $\alpha \geq 0$, такие что выполняется равенство (3.15), где $p(t)$ – решение уравнения $\dot{p}(t) = -A^\top(t)p(t)$ с краевым условием $p(t_1) = P^\top l^*$, $A(t), B(t)$ – матрицы линеаризованной системы.

$$p^\top(t)B(t)\hat{u}(t) - \alpha\|\hat{u}(t)\| = \max_{v:\|v\|\leq\nu} (p^\top(t)B(t)v - \alpha\|v\|), \quad \text{п.в. } t \in [t_0, t_1]. \quad (3.15)$$

Слайд 9

Здесь в верхней части слайда приведены примеры траекторий, удовлетворяющих ПМП. Вместо $\psi_0 < 0$ мы пишем $\psi_0 = -1$ как результат нормировки решений сопряжённой системы.

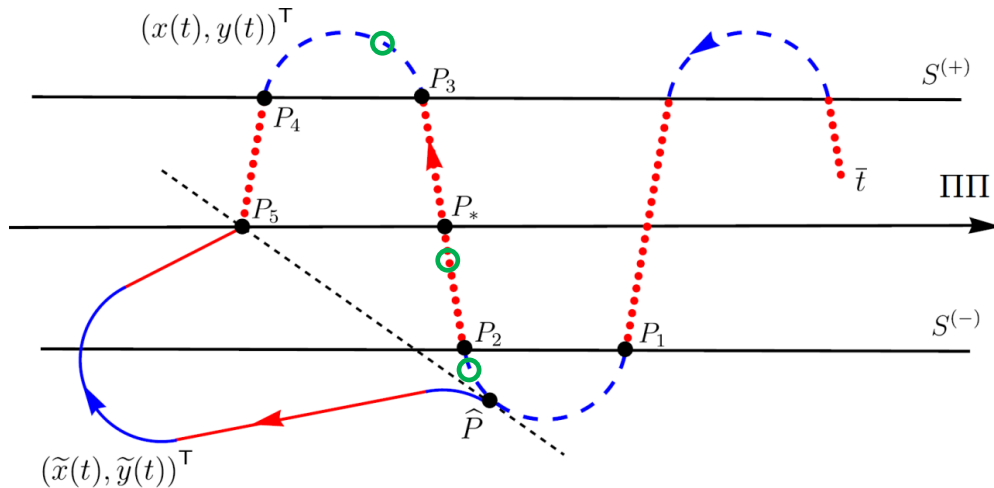
Важно, что при $\psi_0 = -1$ имеем дело с полосой S , внутри которой экстремальное управление является нулевым. Стало быть, траектория движения прямолинейна. Края полосы соответствуют значениям $\psi_3 = \pm 1$. На прямой переключения (ПП) происходит смена знака у компоненты ψ_3 . Вне полосы с её положительной (отрицательной) стороны экстремальное управление принимает значение $+\nu$ ($-\nu$).

Если $\psi_0 = 0$, то полоса вырождается. Однако по-прежнему $\psi_3(t) = 0$ на ПП.

Количество смен знака экстремального управления зависит (пока, до детального анализа) от значения t_f и от величины γ . Далее мы приведём на этот счёт более точное утверждение.

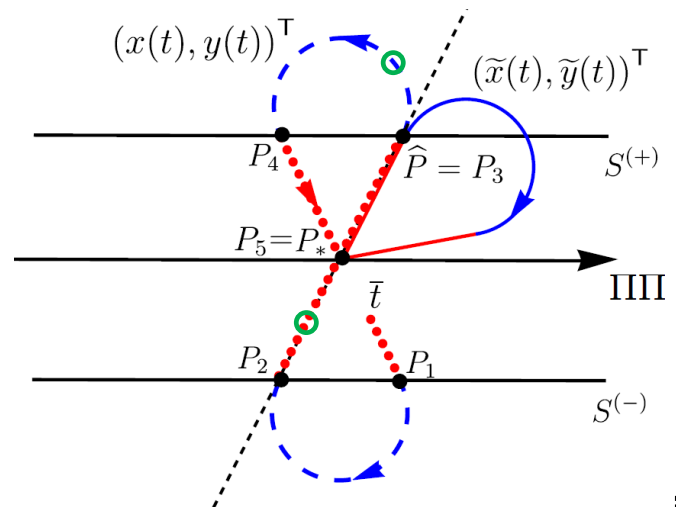
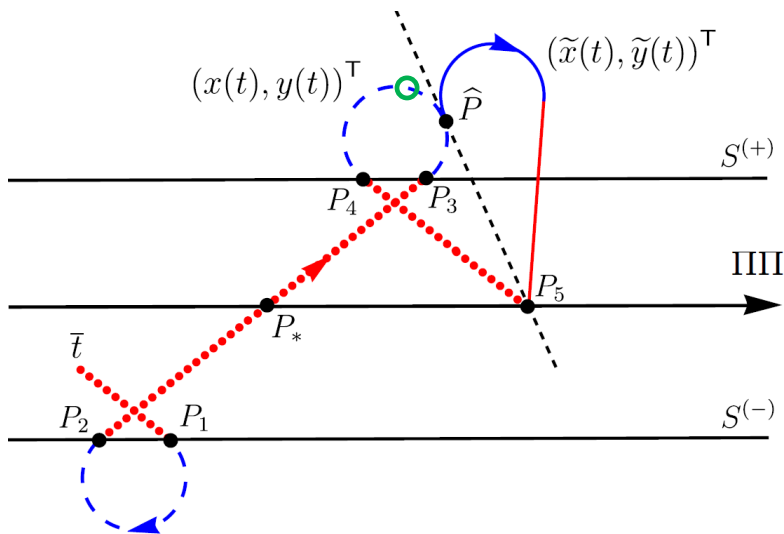
В работе М.И. Гусева, которая в настоящее время принята к печати в журнале Труды ИММ УрО РАН, есть теорема об экстремальных управлениях, ведущих на границу множества достижимости при двойном ограничении (геометрическое + интегральное). В целом статья М.И. Гусева посвящена множествам достижимости нелинейных систем общего вида. Мы могли бы сослаться на неё, говоря, например, о замкнутости множества $\mathcal{G}(t_f, \gamma, \nu)$. Приведённая на слайде теорема могла быть взята как обоснование ПМП в исследуемой нами конкретной задаче.

Уточнение свойств экстремальных движений



Если $\psi_0 = -1$,
то граница полосы S
пересекается не более
3 раз.

Если $\psi_0 = 0$,
то либо ПП пересекается
без касания не более
1 раза при $t \in [0, t_f)$,
либо движение подходит
к ПП по касательной и
идёт по ней.



Слайд 10

На этом слайде для $\psi_0 = -1$ (т.е. *при наличии полосы S*) выделены три варианта экстремального движения. Варианты отличаются друг от друга характером пересечения ПП рассматриваемым движением. На картинке сверху точки пересечения ПП при увеличении времени располагаются в порядке, противоположном направлению ПП. На нижней картинке слева — расположение точек пересечения соответствует направлению ПП. Третий рисунок относится к пограничной ситуации: здесь все точки пересечения совпадают между собой.

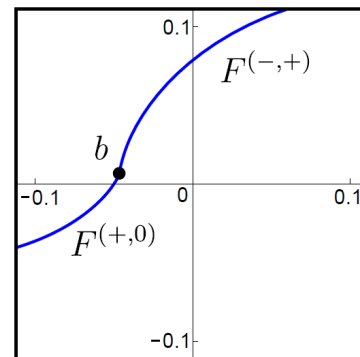
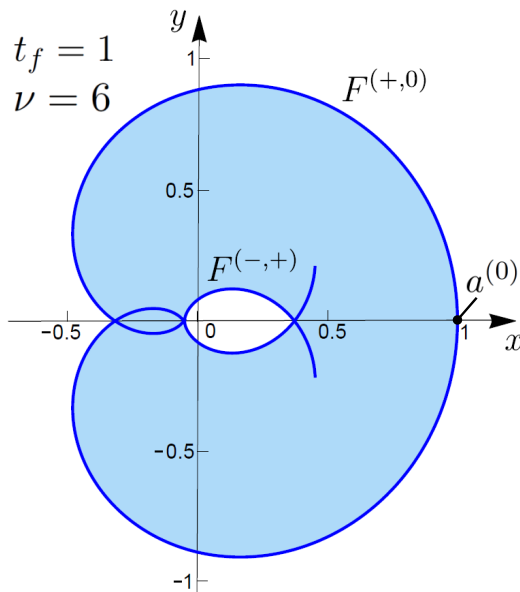
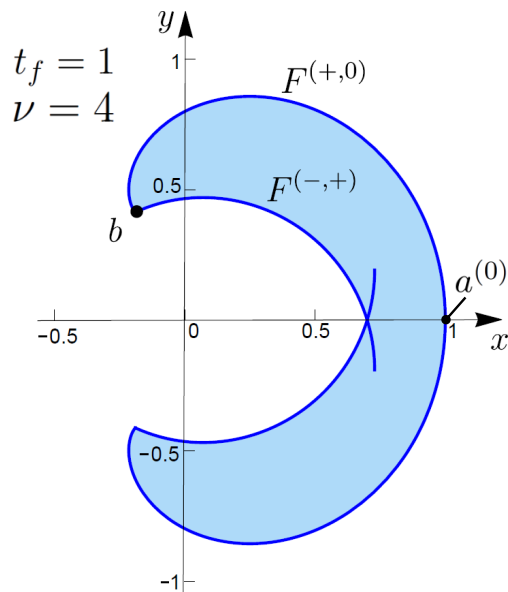
Мы доказываем, что при $\psi_0 = -1$ граница полосы S пересекается *не более 3-х раз*. Доказательство проводится от противного. Используется вспомогательное движение, некоторая дуга которого (показана сплошной линией) отличается от соответствующей исходной дуги, но является зеркально симметричной к ней. Вспомогательное движение приходит в ту же самую конечную точку. Однако в целом для вспомогательного движения ПМП не выполнен. В результате на исходном движении выделяется участок (заканчивающийся последней по времени точкой P_5 на ПП), на котором только и может лежать начальная точка (возможное расположение начальных точек отмечено зелёными кружочками).

Если $\psi_0 = 0$, то аналогичное утверждение формулируется в терминах пересечения ПП. Картинок для этого случая на слайде нет.

Подчеркнём, что при доказательстве утверждений о числе пересечений мы явно не используем время движения по кривой или расход интегрального ресурса. Используется только геометрия движения относительно полосы S при $\psi_0 = -1$ или относительно ПП при $\psi_0 = 0$, обусловленная первичным применением ПМП. Скорее всего, мы опираемся на следующий вариант принципа оптимальности. Пусть имеем два частично совпадающих оптимальных движения с одними и теми же краевыми условиями, а также с одинаковой продолжительностью по времени и одинаковым расходом интегрального ресурса. Тогда для каждого из движений должен быть выполнен ПМП.

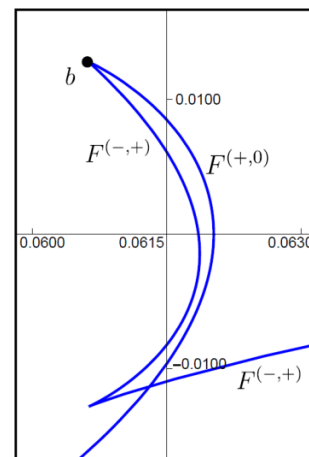
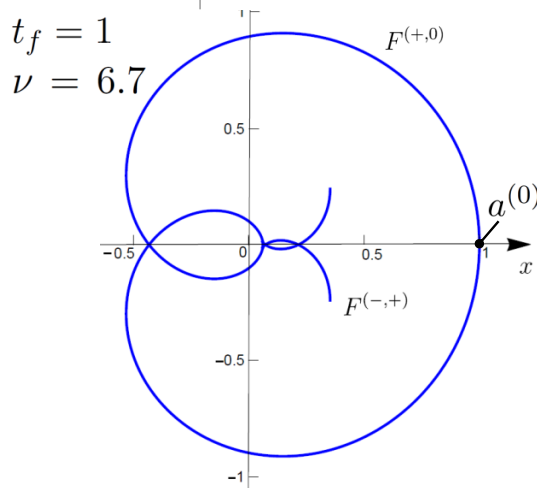
Множество достижимости при геометрическом ограничении

$$H(z, u, \psi, \psi_0) = \psi_1 \cos \varphi + \psi_2 \sin \varphi + \psi_3 u + \psi_0 |u|$$



$\psi_0 = 0$ для случая только геометрического ограничения

Если $\gamma \geq \nu t_f$, то
 $\mathcal{G}(t_f, \gamma, \nu) = \mathcal{G}(t_f, \nu)$.



Слайд 11

Мы используем известный результат построения множества достижимости для случая только геометрического ограничения. Здесь при выписывании функции Понтрягина полагаем $\psi_0 = 0$ (ибо интегрального функционала нет).

На слайде показано множество $\mathcal{G}(t_f, \nu)$ при $t_f = 1$ для трёх значений величины ν . Граница множества достижимости составляется из дуг двух эвольвент и двух кардиоид. При построении *верхней* части границы (когда $y \geq 0$) говорим о верхней эвольвенте $F^{(+,0)}$ (строится целиком и идёт от точки $a^{(0)}$ до точки b), которая продолжается затем дугой $F^{(-,+)}$ кардиоиды. На эвольвенту ведут движения вида “+, 0” (т.е. поворот против часовой стрелки, затем прямолинейное движение). На дуге кардиоиды заканчиваются движения вида “-, +” (поворот по часовой стрелке, затем поворот против часовой стрелки).

Склейку эвольвенты и примыкающей к ней дуги кардиоиды можно назвать кривой “грубых необходимых условий”: верхняя часть границы множества $\mathcal{G}(t_f, \nu)$ набирается из частей этой кривой. Если $\nu t_f \leq 2\pi$, то склейка эвольвенты и дуги кардиоиды представляет собой непрерывную кривую без самопересечений (рисунки в верхней части слайда). В случае $\nu t_f > 2\pi$ есть самопересечение (два рисунка внизу).

В статье E.J. Sockayne и G.W.C. Hall (1975 г.) сформулированы *дополнительные* свойства, которые позволяют выкинуть из склейки кривых $F^{(+,0)}$ и $F^{(-,+)}$ участки, не входящие в границу множества $\mathcal{G}(t_f, \nu)$ при $y \geq 0$. Фактически, в этой статье найдены необходимые и достаточные условия отбора движений, которые ведут на границу множества $\mathcal{G}(t_f, \nu)$. Если $\nu t_f \leq 2\pi$, то дополнительная проверка для построения верхней части границы состоит в отбрасывании из склейки $F^{(+,0)} + F^{(-,+)}$ участков, расположенных ниже оси x .

Подсчитаем расход импульсного ресурса на движениях в точки кривой $F^{(+,0)} + F^{(-,+)}$. При перемещении конца движения от начала $a^{(0)}$ верхней эвольвенты до её последней точки b этот расход монотонно растёт.

Если $\gamma \geq \nu t_f$, то даже для точки b расход не превышает γ . При переводе в любую точку кардиоиды расход равен νt_f . Получаем следующий полезный результат: в случае двойного ограничения, если $\gamma \geq \nu t_f$, то в любую точку границы множества $\mathcal{G}(t_f, \nu)$ можно перейти, не нарушая импульсное ограничение. Отсюда вытекает, что $\mathcal{G}(t_f, \gamma, \nu) = \mathcal{G}(t_f, \nu)$ при $\gamma \geq \nu t_f$.

Если $\gamma < \nu t_f$, это уже не так. При выполнении такого неравенства лишь некоторые части границы множества $\mathcal{G}(t_f, \nu)$ (расположенные на верхней и нижней эвольвентах) остаются на границе множества $\mathcal{G}(t_f, \gamma, \nu)$.

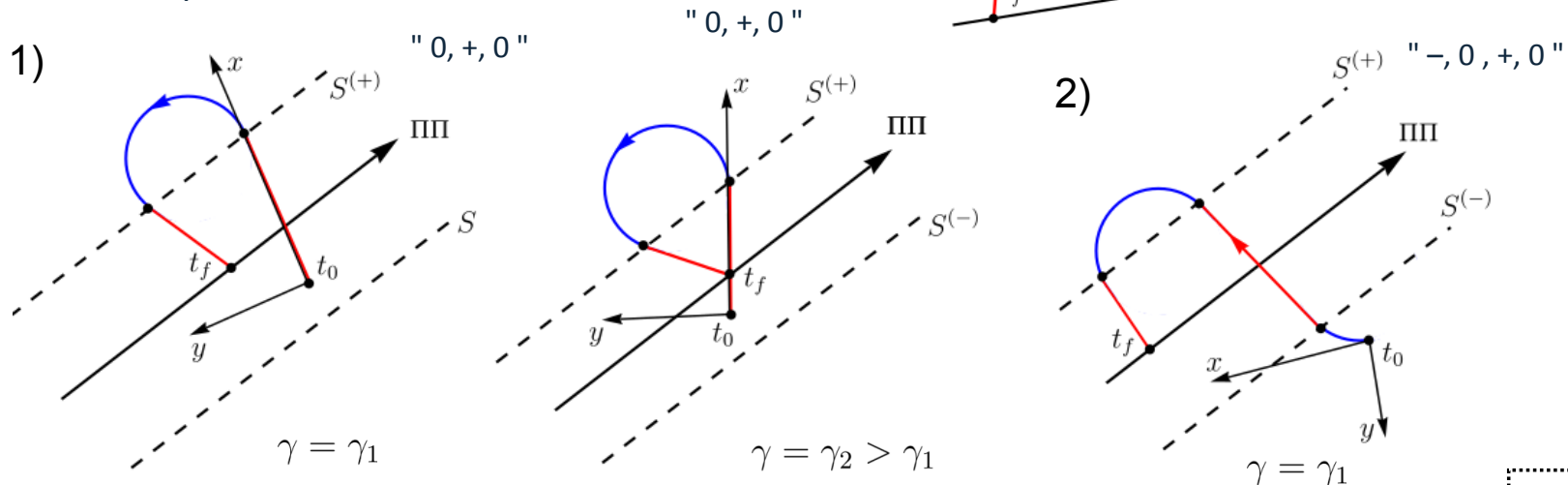
Случай $\gamma < \nu t_f$

Если $\gamma \geq \nu t_f$, то $\mathcal{G}(t_f, \gamma, \nu) = \mathcal{G}(t_f, \nu)$.

Пусть $\gamma < \nu t_f$. Тогда участки двух кардиоид не принадлежат $\partial \mathcal{G}(t_f, \gamma, \nu)$:
для перехода в точки кардиоид расход импульсного ресурса равен νt_f .

Рассмотрим *верхнюю эвольвенту*.
Обращаясь к случаю $\psi_0 = -1$
(есть полоса S), получаем
движения вида "+, 0".

При $\psi_0 = -1$ остаются только
такие варианты:



Слайд 12

Начинаем детально исследовать случай $\gamma < \nu t_f$ при наличии двух ограничений.

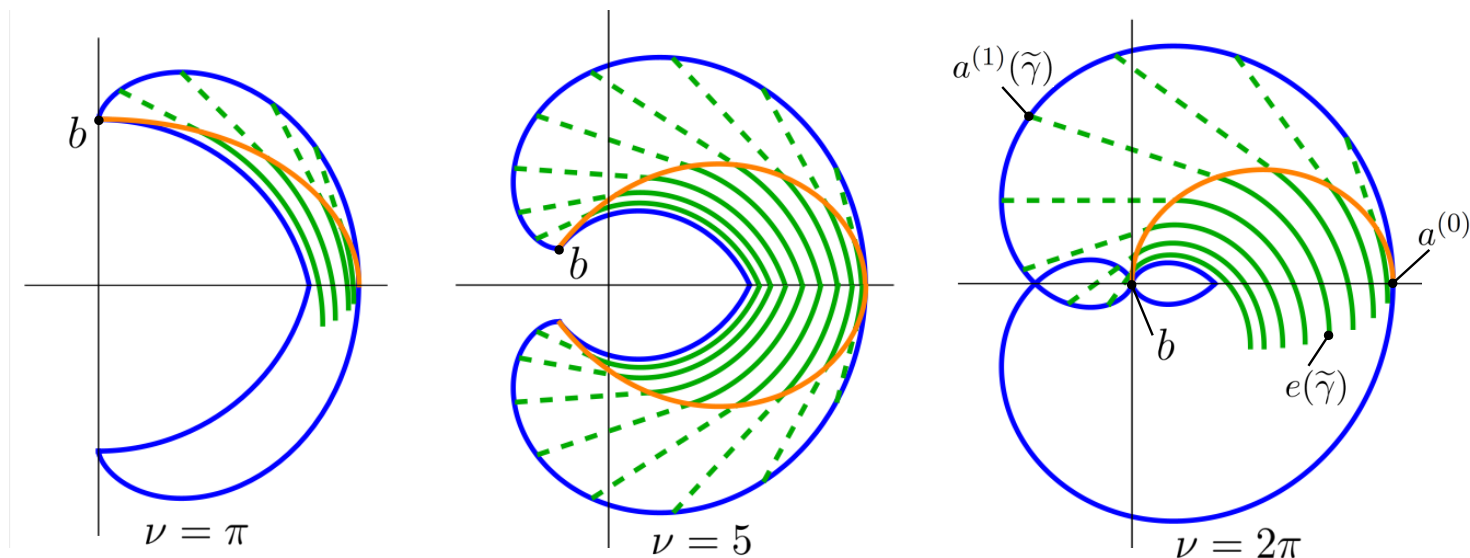
Дуги кардиоид (играющих ключевую роль в формировании границы множества $\mathcal{G}(t_f, \nu)$) не могут принадлежать границе множества $\mathcal{G}(t_f, \gamma, \nu)$, ибо расход импульсного ресурса при переходе в любую точку кардиоиды равен νt_f .

Движения вида “+, 0” на верхнюю эвольвенту и “-, 0” — на нижнюю можно отнести как экстремальные под случай $\psi_0 = -1$. Вид траектории, ведущей на верхнюю эвольвенту, показан на слайде сверху. При $\psi_0 = -1$ логически остаются только варианты, поясняемые внизу слайда.

В варианте 1) экстремальное движение имеет вид “0, +, 0” (два прямолинейных участка внутри полосы S и между ними поворот против часовой стрелки). Частным случаем такого варианта является движение, показанное внизу на среднем рисунке. Здесь траектория лежит на дуге “бантика”.

В варианте 2) экстремальное движение имеет вид “-, 0, +, 0” (поворот по часовой стрелке, прямолинейное движение, поворот против часовой стрелки, прямолинейное движение). Симметричным по отношению к варианту “0, +, 0” является вариант “0, -, 0”, а по отношению к варианту “-, 0, +, 0” — вариант “+, 0, -, 0”.

Кривые постоянных значений $\tilde{\gamma}$



Для случая $\nu t_f \leq 2\pi$ показаны кривые концов в момент $t_f = 1$ движений вида "0, +, 0" (зелёный пунктир) и "-, 0, +, 0" (зелёная сплошная) при фиксированном $\tilde{\gamma} \in (0, \nu t_f)$. Оранжевая кривая проведена через точки сочленения пунктирной и сплошной линий. Движения, ведущие на склеенную кривую $a^{(0)}-a^{(1)}(\tilde{\gamma})-e(\tilde{\gamma})$, удовлетворяют грубым необходимым условиям ПМП.

Если $\nu t_f \leq 2\pi$, то каждая зелёная кривая (при постоянном $\tilde{\gamma}$) гладкая и семейство зелёных кривых упорядочено.

Если $\nu t_f > 2\pi$, то при $\tilde{\gamma} \in (2\pi, \nu t_f)$ нарушается гладкость соединения пунктирной и сплошной зелёных кривых. Склеенная кривая имеет самопересечение. Поэтому случай $\nu t_f > 2\pi$ пока не рассмотрен.

Слайд 13

Полагаем $\nu t_f \leq 2\pi$. Взяв произвольное $\tilde{\gamma} \in (0, \nu t_f)$, построим в множестве $\mathcal{G}(t_f, \nu)$ кривую, образованную конечными точками движений вида “0, +, 0” и “-, 0, +, 0”. Изменяя $\tilde{\gamma}$, получим верхнее семейство кривых. По симметрии относительно оси x ему соответствует нижнее семейство.

Для каждой зелёной кривой расход импульсного ресурса один и тот же.

Выстраивая пунктирную часть зелёной кривой, используем в качестве параметра длину первого прямолинейного участка рассматриваемого движения. Поскольку $t_f = 1$ и $\tilde{\gamma}$ зафиксированы, то конкретное значение такого параметра полностью определяет всё движение вида “0, +, 0”. Параметр изменяем от нуля до некоторого значения, когда длина первого участка становится равной удвоенной длине второго прямолинейного участка. Построения очень наглядны, если при этом вообразить полосу S (слайд 12). Начальная точка пунктирной части зелёной кривой обозначена символом $a^{(1)}(\tilde{\gamma})$ и находится на верхней эвольвенте.

При построении сплошной части зелёной кривой в качестве параметра берём время первого поворота по часовой стрелке. Конкретное значение этого параметра (при фиксированных t_f и $\tilde{\gamma}$) полностью определяет движение вида “-, 0, +, 0”. Длина первого прямолинейного участка зафиксирована и в два раза больше длины второго прямолинейного участка. Построение сплошной зелёной ведём до значения параметра, при котором угловая величина первого участка становится равной $\tilde{\gamma}/3$.

При $\nu t_f \leq 2\pi$ имеем гладкость зелёных кривых и их упорядоченность.

Подчеркнём, что при фиксированных t_f и $\tilde{\gamma}$ пунктирная зелёная часть исчерпывает совокупность конечных точек, удовлетворяющих экстремальным движениям вида “0, +, 0”. Аналогично для движений вида “-, 0, +, 0”, кончики которых составляют сплошную часть зелёной кривой. Дополнительно отметим, что для любой точки на зелёной кривой, лежащей *ниже* оси x , можно построить некоторое вспомогательное движение, ведущее в эту же точку с соблюдением значений t_f и $\tilde{\gamma}$, но ПМП для вспомогательного движения не будет выполненным. Стало быть, участки на зелёных кривых с отрицательной координатой y должны быть отброшены. Аналогично для нижнего семейства кривых: отбрасываются участки с положительной координатой y .

Слайд 13, продолжение описания

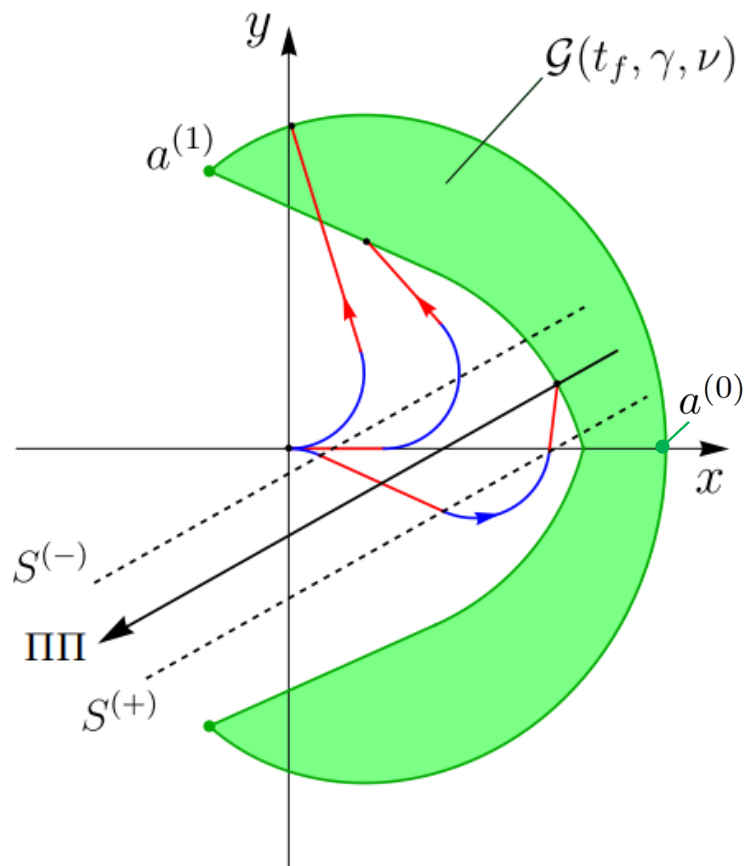
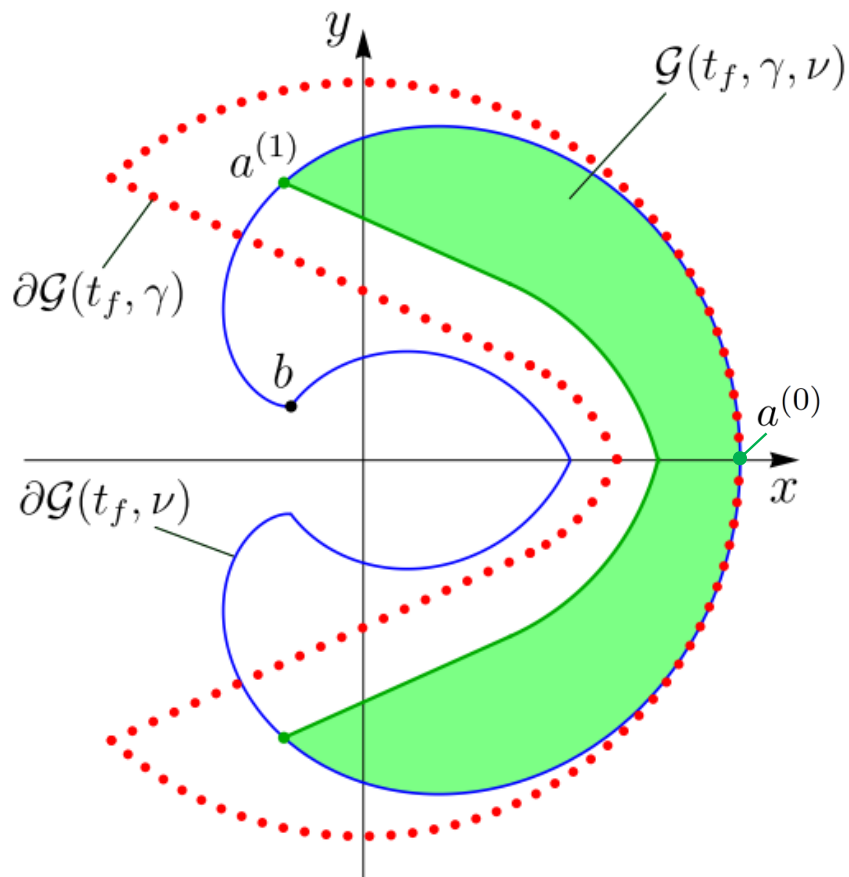
В итоге заключаем, что мы построили в пределах множества $\mathcal{G}(t_f, \nu)$ совокупность множеств уровня в задаче минимизации интегрального показателя $\int_0^{t_f} |u(t)| dt$. Поэтому при любом $\tilde{\gamma} \in (0, \nu t_f)$ совокупность участков зелёной кривой при $y \geq 0$ даёт часть границы множества $\mathcal{G}(t_f, \tilde{\gamma}, \nu)$, лежащую в $\mathcal{G}(t_f, \nu)$ не ниже оси x .

Не вдаваясь в подробности, отметим, что сплошной участок каждой зелёной кривой представляет собой дугу “усложнённой” кардиоиды, отличающейся от обычной тем, что в порождаемом движении вида “ $-, 0, +, 0$ ” помимо криволинейных движений по дугам окружностей вставлены (в начале и посередине) прямолинейные движения заданной длины.

Если $\nu t_f > 2\pi$, то также можно строить, опираясь на грубые необходимые условия, семейство зелёных кривых. Однако при $\tilde{\gamma} \in (2\pi, \nu t_f)$ получаемые кривые имеют *самопересечение*, а также негладкую склейку пунктирных и сплошных участков. В связи с этим происходит резкое усложнение рассуждений. Случай $\nu t_f > 2\pi$ пока нами не охвачен.

Сравнение множеств достижимости $\mathcal{G}(t_f, \nu)$, $\mathcal{G}(t_f, \gamma)$, $\mathcal{G}(t_f, \gamma, \nu)$.

Типы экстремальных движений



$$t_f = 1, \quad \gamma = 2.3, \quad \nu = 5.$$

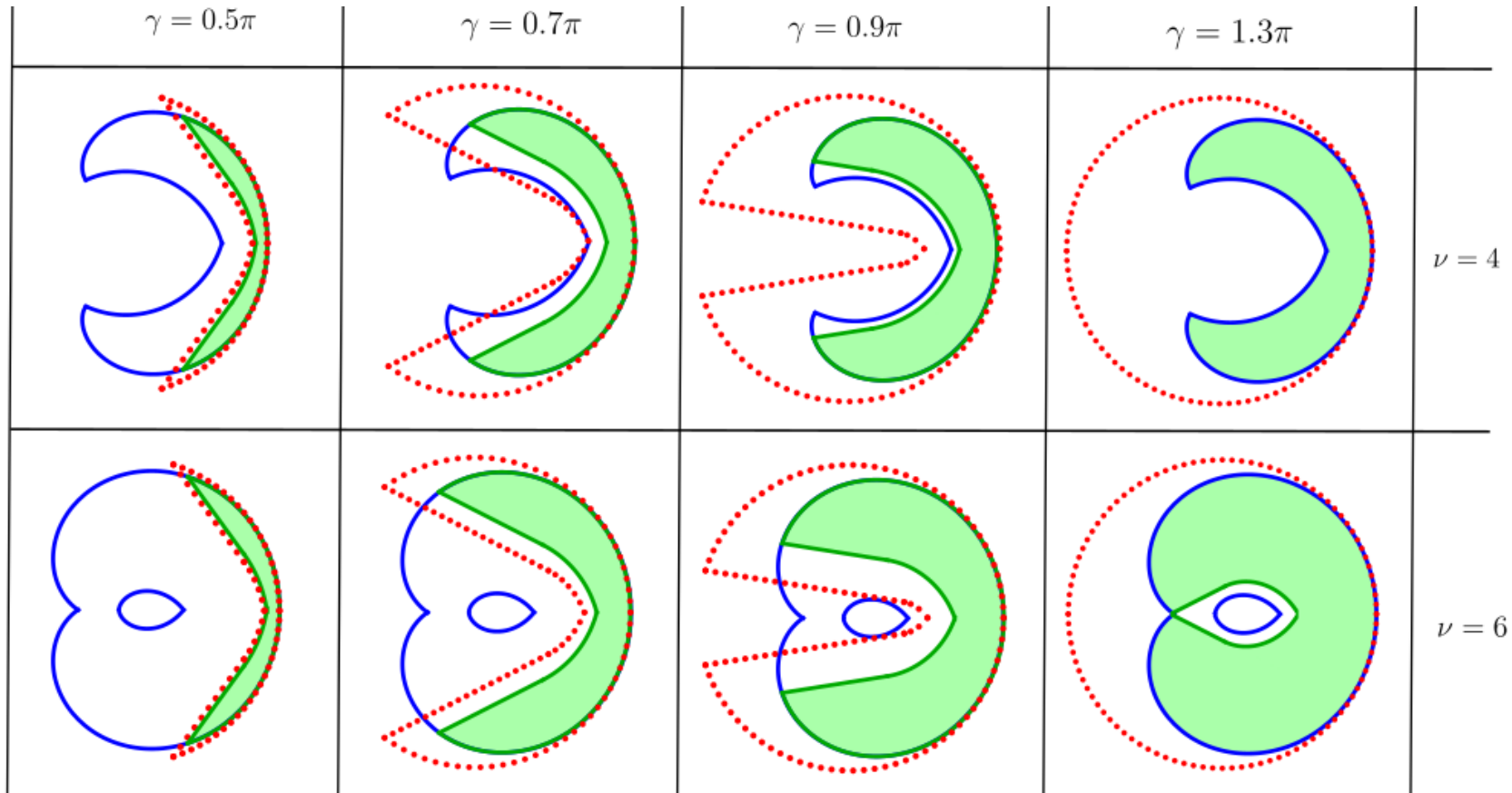
Слайд 14

Здесь слева показаны три множества достижимости. Множество $\mathcal{G}(t_f, \gamma, \nu)$ сопровождается зелёной заливкой. Граница множества $\mathcal{G}(t_f, \gamma)$ (действует только импульсное ограничение) отмечена красными точками. Граница множества $\mathcal{G}(t_f, \nu)$ изображена синей линией. В полуплоскости $y \geq 0$ граница множества $\mathcal{G}(t_f, \gamma, \nu)$ совпадает с границей множества $\mathcal{G}(t_f, \nu)$ на дуге от точки $a^{(0)}$ до точки $a^{(1)}$. У границ множеств $\mathcal{G}(t_f, \gamma, \nu)$ и $\mathcal{G}(t_f, \gamma)$ нет совпадающих точек, кроме точки $a^{(0)}$. Эта *особая* точка принадлежит каждому из трёх показанных множеств.

Справа приведены три характерных варианта “+ , 0”, “0 , + , 0” и “− , 0 , + , 0” экстремальных движений, ведущих на границу множества $\mathcal{G}(t_f, \gamma, \nu)$. Для третьего движения одновременно показана полоса S .

Множества достижимости в зависимости от γ и ν .

Случай $\nu t_f \leq 2\pi$

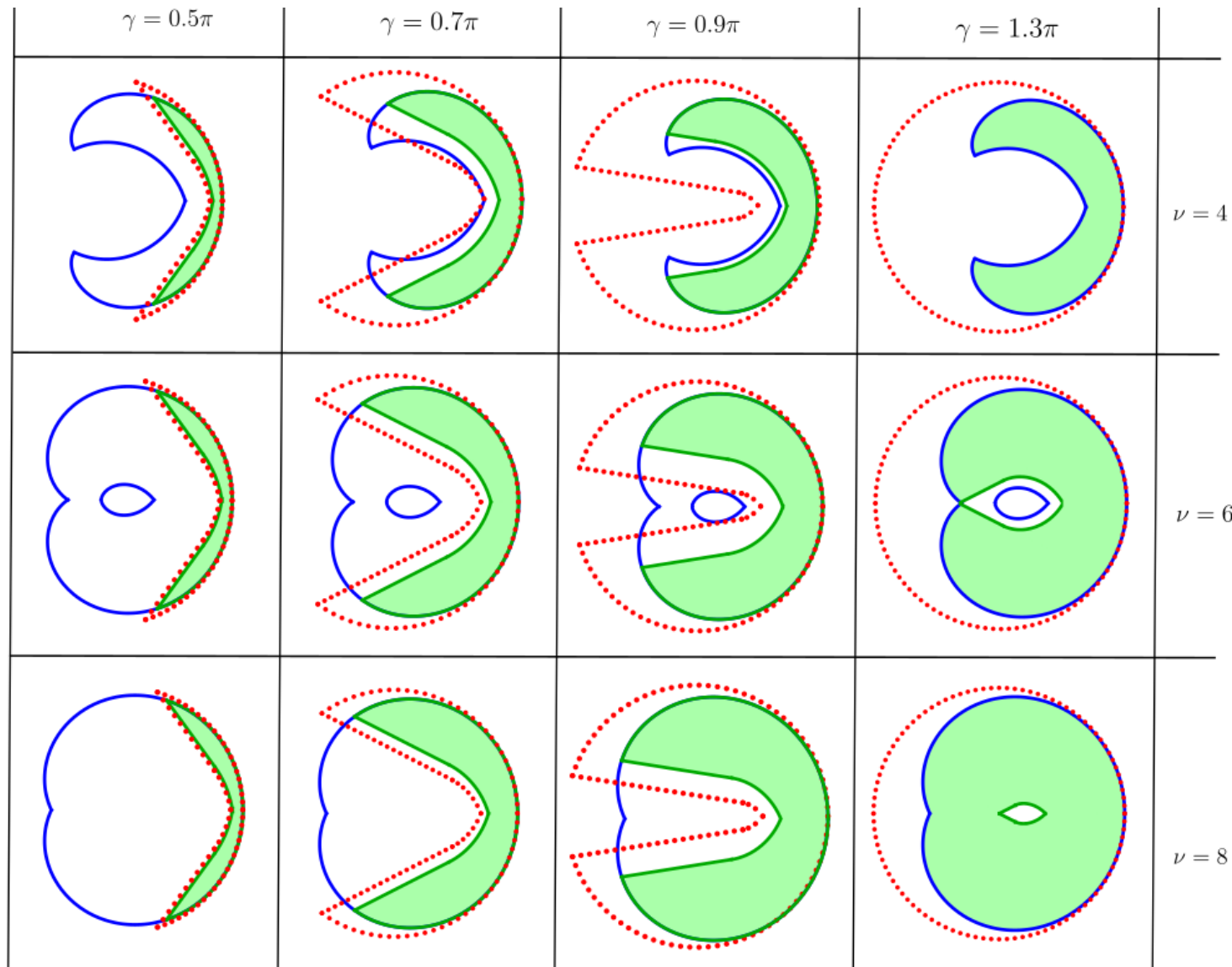


$\partial\mathcal{G}(t_f, \nu)$ – синяя сплошная, $\partial\mathcal{G}(t_f, \gamma)$ – красная точечная, $\partial\mathcal{G}(t_f, \gamma, \nu)$ – зелёная сплошная

Слайд 15

На слайде для случая $\nu t_f \leq 2\pi$ при $t_f = 1$ в виде таблицы показано изменение структуры множеств достижимости. Если $\gamma \geq \pi$, то замыкание множества достижимости при импульсном ограничении представляет собой круг. Для $\nu = 6$, $\gamma = 1.3\pi$ множество $\mathcal{G}(t_f, \gamma, \nu)$ не является односвязным.

Множества достижимости. Общий случай



Слайд 16

Здесь в таблицу добавлена ещё одна строка при $\nu = 8$. Случай $\nu t_f > 2\pi$ нами *не рассмотрен*. Но мы абсолютно уверены, что ответ такой, как указан в нижней строке. Когда $\gamma = 1.3\pi$ и $\nu = 8$, множества $\mathcal{G}(t_f, \gamma)$ и $\mathcal{G}(t_f, \nu)$ односвязные. Однако множество $\mathcal{G}(t_f, \gamma, \nu)$ односвязным не является.

Литература

1. Cockayne E.J., Hall G.W.C. Plane motion of a particle subject to curvature constraints // SIAM J. Control Optim. 1975. Vol. 13, no. 1. P. 197—220.
2. Пацко В.С., Трубников Г.И., Федотов А.А. Двумерное множество достижимости машины Дубинса при импульсном управлении // Тр. ИММ УрО РАН, 32, № 1, 2026. С. 164–182.
3. Гусев М.И. Асимптотика множеств достижимости при двойных ограничениях на управление // Тр. ИММ УрО РАН, 32, № 3, 2026. (принята к печати)
4. Дарьин А.Н., Куржанский А.Б. Нелинейный синтез управлений при двойных ограничениях // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37. № 11. С. 1476–1484.
5. Huseyin A., Huseyin N., Guseinov K.G. Approximations of the set of trajectories, attainable sets, and integral funnel of a control system with integral and geometric constraints on the control functions // Electronic Journal of Differential Equations. Vol. 2026 (2026), no. 27. P. 1–22. DOI: 10.58997/ejde.2026.27