

## ДВУМЕРНОЕ МНОЖЕСТВО ДОСТИЖИМОСТИ МАШИНЫ ДУБИНСА ПРИ ИНТЕГРАЛЬНОМ ОГРАНИЧЕНИИ НА УПРАВЛЕНИЕ

ВАЛЕРИЙ ПАЦКО<sup>1</sup>, ГЕОРГИЙ ТРУБНИКОВ<sup>2</sup>, АНДРЕЙ ФЕДОТОВ<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского, Екатеринбург, Россия

<sup>2</sup>Уральский федеральный университет им. Б.Н. Ельцина, Екатеринбург, Россия

Посвящается профессору Ф.Л. Черноушко в честь его 87-летия

**Аннотация.** Рассматривается кинематическая модель “машина Дубинса”. Скалярное управление стеснено квадратичным интегральным ограничением. Фиксируется трёхмерное начальное фазовое состояние и строится двумерное множество достижимости “в момент” на плоскости геометрических координат. В основе анализа лежит принцип максимума Понтрягина. Приводятся примеры численного построения множества достижимости. Делается сравнение со случаем геометрического ограничения на управление.

**Ключевые слова.** Машина Дубинса, интегральное ограничение на управление, двумерное множество достижимости в геометрических координатах, принцип максимума Понтрягина, численные построения

**2020 Mathematics Subject Classification.** 33E05, 49K15, 49M05, 93B03, 93C10.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

“Машина Дубинса” — одна из самых популярных нелинейных кинематических моделей движения управляемого объекта на плоскости. Другое название — “unicycle”. Переменные  $x, y$  задают точечное положение объекта, угол  $\varphi$  характеризует направление вектора скорости. Величина скорости считается постоянной. Обычно её полагают равной 1. Скалярное управление  $u(t)$  определяет мгновенную угловую скорость объекта:  $\dot{\varphi} = u(t)$ . Типичным является *геометрическое* ограничение  $|u(t)| \leq \mu$  на управление. Таковую модель с геометрическим ограничением на управление широко используют при упрощённом рассмотрении движения самолёта в горизонтальной плоскости, при решении различных задач управляемого движения морских судов, подводных аппаратов и т.д. Из последних работ, отметим, например, [1, 2].

Во многих случаях естественно считать заданным трёхмерное начальное фазовое состояние  $(x(t_0), y(t_0), \varphi(t_0))^T$  и исследовать (при  $t \geq t_0$ ) движения в координатах  $x, y$ . Например, при помощи какого программного управления  $u(\cdot)$  можно перевести объект за наименьшее время в заданное геометрическое положение  $(x^*, y^*)^T$ ? Для решения подобных задач полезным является понятие *двумерного множества достижимости*  $\mathcal{G}(t_f, \mu)$ : совокупность всех точек  $(x, y)^T$ , в каждую из которых возможен перевод объекта в момент  $t_f$  из фиксированного начального трёхмерного фазового

состояния. Описание свойств множества  $\mathcal{G}(t_f, \mu)$ , в том числе исследование управлений, ведущих на его границу, составляли “фольклор” в литературе по математической теории управления в 70-е годы прошлого века (см., например, [3]). Наиболее полно множество  $\mathcal{G}(t_f, \mu)$  для случая геометрического ограничения на управление описано в [4].

В данной работе мы исследуем множество достижимости  $\mathcal{G}(t_f, \mu)$  при *интегральном* квадратичном ограничении

$$\int_{t_0}^{t_f} u^2(t) dt \leq \mu. \quad (1.1)$$

Ограничение на мгновенные значения  $u(t)$  отсутствует. Интегральное ограничение является очень важным, ибо оно связано с “энергией”, затрачиваемой на повороты.

Задачи с такой же кинематикой, как в машине Дубинса, но с оптимизацией интегрального функционала

$$J(u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_f} u^2(t) dt, \quad (1.2)$$

исследовались ещё в конце XVII века. В частности, подобная задача детально исследована в книге Л. Эйлера [5, Приложение 1], изданной в 1744 г. Позднее возникло понятие “эластика Эйлера”. Такой термин стали использовать для обозначения движений, удовлетворяющих необходимым условиям оптимальности при заданных трехмерных краевых условиях  $(x(t_0), y(t_0), \varphi(t_0))^T$  и  $(x(t_f), y(t_f), \varphi(t_f))^T$ . История работ, связанных с эластичными Эйлером, хорошо изложена, например, в [6].

Вопросам локальной и глобальной оптимальности эластик Эйлера с трёхмерным правым краевым условием посвящены работы Ю.Л. Сачкова и А.А. Ардентова (см., например, [7, 8]). Если правое краевое условие является двумерным и задано в координатах  $x, y$ , то такие эластики называются свободными [9]. Исследуются также задачи оптимизации квадратичного функционала Больца для систем с кинематикой машины Дубинса [10].

В данной работе, исследуя двумерное множество достижимости  $\mathcal{G}(t_f, \mu)$ , мы используем факты, установленные при интегральном ограничении для трёхмерного множества достижимости  $G(t_f, \mu)$ . Соответствующие утверждения, базирующиеся на принципе максимума Понтрягина (ПМП) с уточнением из работы [11] для движений, ведущих на границу множества  $G(t_f, \mu)$ , приведены в [12, 13].

В работе [14] обосновано дополнительное краевое условие для сопряжённой системы ПМП, которому удовлетворяют движения, ведущие на границу двумерного множества  $\mathcal{G}(t_f, \mu)$ . Опираясь на него, доказываем утверждение о том, что любое программное управление  $u(\cdot)$ , ведущее на границу множества  $\mathcal{G}(t_f, \mu)$ , является непрерывным и имеет не более одного момента смены знака управления. Это позволяет численно построить границу множества достижимости  $\mathcal{G}(t_f, \mu)$ . Структурные свойства границы во многом аналогичны тому, что имеет место для множества  $\mathcal{G}(t_f, \mu)$  при геометрическом ограничении на управление. Но полной аналогии нет, и построение границы множества достижимости при интегральном ограничении сложнее, чем при геометрическом ограничении.

Изложение в статье ведётся по следующей схеме. После разд. 2 о постановке задачи идёт разд. 3 с описанием свойств симметрии трёхмерного множества достижимости

с указанием на то, как они трансформируются для случая двумерного множества. Такие свойства являются следствием специфики кинематики машины Дубинса и доказываются без применения ПМП. Далее в разд. 3 мы выводим основные соотношения ПМП применительно к трёхмерному множеству  $G(t_f, \mu)$  и формулируем теорему о шести типах программных управлений, формирующих границу этого множества. В разд. 4 доказываем свойства программных управлений, ведущих на границу двумерного множества  $\mathcal{G}(t_f, \mu)$ . В разд. 5 приводятся соотношения, позволяющие численно построить границу множества достижимости  $\mathcal{G}(t_f, \mu)$  при интегральном ограничении. Примеры построения множеств достижимости  $\mathcal{G}(t_f, \mu)$  даны в разд. 6. Там же рассматривается сравнение с двумерными множествами достижимости при геометрическом ограничении.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть движение управляемого объекта на плоскости описывается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = \cos \varphi, \quad \dot{y} = \sin \varphi, \quad \dot{\varphi} = u. \quad (2.1)$$

Здесь  $x, y$  — координаты геометрического положения,  $\varphi$  — угол наклона вектора скорости, отсчитываемый против часовой стрелки от положительного направления оси  $x$ . Величина скорости равна единице. Начальный момент времени  $t_0$  полагаем равным нулю. Начальные значения  $x(t_0), y(t_0), \varphi(t_0)$  также считаем нулевыми. Допустимыми являются измеримые интегрируемые с квадратом программные управления  $u(\cdot)$ , удовлетворяющие ограничению (1.1).

Множество достижимости  $\mathcal{G}(t_f, \mu)$ , где  $t_f > t_0$ , есть совокупность всех точек  $(x, y)^\top$ , в каждую из которых возможен перевод системы (2.1) в момент  $t_f$  из начального фазового состояния  $(x(t_0), y(t_0), \varphi(t_0))^\top = (0, 0, 0)^\top$  при помощи некоторого допустимого управления  $u(\cdot)$ .

Цель статьи — изучение множества  $\mathcal{G}(t_f, \mu)$ .

Пусть  $\partial$  — символ границы множества. Ради краткости положим  $z = (x, y, \varphi)^\top$ . Символом  $z^0(t_f)$  обозначим точку на  $\partial G(t_f, \mu)$ , порождаемую управлением  $u(t) \equiv 0$ .

## 3. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ О ТРЁХМЕРНОМ МНОЖЕСТВЕ ДОСТИЖИМОСТИ

При построении двумерного множества достижимости  $\mathcal{G}(t_f, \mu)$  на плоскости геометрических координат  $x, y$  будем опираться на некоторые факты, известные [13] для трёхмерного множества достижимости  $G(t_f, \mu)$  в пространстве координат  $x, y, \varphi$ . Определение множества  $G(t_f, \mu)$  аналогично определению, приведённому для множества  $\mathcal{G}(t_f, \mu)$  с тем отличием, что в момент  $t_f$  учитываем не только координаты  $x(t_f), y(t_f)$ , но и координату  $\varphi(t_f)$ . Удобно считать, что  $\varphi \in (-\infty, \infty)$ . Множество  $\mathcal{G}(t_f, \mu)$  представляет собой проекцию множества  $G(t_f, \mu)$  на плоскость координат  $x, y$ .

Символом  $G_\varphi(t_f, \mu)$  обозначим двумерное сечение множества  $G(t_f, \mu)$  при фиксированном  $\varphi$ . Крайние значения  $\varphi$ , для которых  $G_\varphi(t_f, \mu) \neq \emptyset$ , определяются величинами  $\varphi = \pm \varphi_{\max}$ , где  $\varphi_{\max} = \sqrt{t_f \mu}$ . Для таких значений  $\varphi$  множество  $G_\varphi(t_f, \mu)$  является однопточечным и порождается, соответственно, постоянными управлениями  $u(t) \equiv \sqrt{\mu/t_f}$  и  $u(t) \equiv -\sqrt{\mu/t_f}$ .

**3.1. Свойства симметрии.** Перечислим следующие нетрудно доказываемые свойства симметрии трёхмерных и двумерных множеств достижимости. Свойства 1–3 относятся к трёхмерным множествам  $G(t_f, \mu)$ . Они изложены в работе [13]. Свойства 4, 5 связаны с двумерными множествами  $\mathcal{G}(t_f, \mu)$ . Они вытекают из свойств 1, 3 с использованием того, что любое двумерное множество  $\mathcal{G}(t_f, \mu)$  можно представить как объединение по  $\varphi$  всех  $\varphi$ -сечений  $G_\varphi(t_f, \mu)$  трёхмерного множества  $G(t_f, \mu)$ .

1) Пусть значения  $t_f^{(1)}, \mu^{(1)}$  и  $t_f^{(2)}, \mu^{(2)}$  таковы, что  $t_f^{(1)} \mu^{(1)} = t_f^{(2)} \mu^{(2)}$ . Тогда области определения по  $\varphi$  множеств  $G(t_f^{(1)}, \mu^{(1)})$  и  $G(t_f^{(2)}, \mu^{(2)})$  совпадают и для любого  $\varphi$  выполнено соотношение

$$G_\varphi(t_f^{(2)}, \mu^{(2)}) = \alpha G_\varphi(t_f^{(1)}, \mu^{(1)}), \quad \alpha = t_f^{(2)}/t_f^{(1)} = \mu^{(1)}/\mu^{(2)}.$$

2) Любое  $\varphi$ -сечение  $G_\varphi(t_f, \mu)$  зеркально симметрично относительно вспомогательной оси  $X$ . Ось  $X$  проводится через начало координат  $x, y$  под углом  $\varphi(t_f)/2$  к направлению оси  $x$ . Угол отсчитывается против часовой стрелки.

Такое свойство симметрии доказывается путём рассмотрения “реверсивного” управления: если некоторое управление  $u(\cdot)$  в момент  $t_f$  приводит в фазовое состояние  $(x, y, \varphi)^\top$ , то управление  $u^\#(t) = u(t_f - t)$  (называемое реверсивным) ведёт в фазовое состояние  $(x^\#, y^\#, \varphi)^\top$ , для которого точки  $(x, y)^\top$ ,  $(x^\#, y^\#)^\top$  зеркально симметричны друг другу относительно оси  $X$ .

3) Имеет место симметрия  $\varphi$ -сечений при положительных и отрицательных значениях  $\varphi$ . А именно,  $\varphi$ -сечение  $G_{\bar{\varphi}}(t_f, \mu)$  при  $\bar{\varphi} < 0$  связано с  $\varphi$ -сечением  $G_\varphi(t_f, \mu)$ , где  $\bar{\varphi} = -\varphi$ , зеркальным отражением относительно оси  $x$ .

4) Из свойства 1 следует, что если  $t_f^{(1)}, \mu^{(1)}$  и  $t_f^{(2)}, \mu^{(2)}$  таковы, что  $t_f^{(1)} \mu^{(1)} = t_f^{(2)} \mu^{(2)}$ , то

$$\mathcal{G}(t_f^{(2)}, \mu^{(2)}) = \alpha \mathcal{G}(t_f^{(1)}, \mu^{(1)}), \quad \alpha = t_f^{(2)}/t_f^{(1)} = \mu^{(1)}/\mu^{(2)}.$$

5) Из свойства 3 вытекает зеркальная симметрия множества  $\mathcal{G}(t_f, \mu)$  относительно оси  $x$ .

**3.2. Принцип максимума Понтрягина.** Выпишем принцип максимума Понтрягина (ПМП), используемый для анализа  $\varphi$ -сечений трёхмерного множества достижимости  $G(t_f, \mu)$ . Мы здесь повторяем основные выкладки из работы [13].

1) В работе [11] установлено, что любое программное управление, ведущее систему (2.1) на границу множества  $G(t_f, \mu)$  и отличное от тождественно равного нулю, удовлетворяет ПМП для задачи минимизации функционала (1.2). При этом минимальное значение функционала на движениях системы (2.1) равно  $\mu$ .

Пусть программное управление  $u(\cdot)$  не является тождественно равным нулю и  $(x(\cdot), y(\cdot), \varphi(\cdot))^\top$  — соответствующее движение системы (2.1) на промежутке  $[t_0, t_f]$ . Дифференциальные уравнения сопряжённой системы имеют вид

$$\dot{\psi}_1 = 0, \quad \dot{\psi}_2 = 0, \quad \dot{\psi}_3 = \psi_1 \sin \varphi(t) - \psi_2 \cos \varphi(t). \quad (3.1)$$

ПМП означает, что если  $u(\cdot)$  — минимизирующее управление, то существует ненулевое решение  $(\psi_1(\cdot), \psi_2(\cdot), \psi_3(\cdot))^\top$  системы (3.1), для которого почти всюду на  $[t_0, t_f]$  выполнено равенство

$$u(t) = \psi_3(t)/2. \quad (3.2)$$

В дальнейшем управление, удовлетворяющее ПМП, полагаем непрерывным.

Функции  $\psi_1(\cdot)$  и  $\psi_2(\cdot)$  есть константы. Обозначим их  $\psi_1$  и  $\psi_2$ . Если  $\psi_1 = 0$  и  $\psi_2 = 0$ , то  $\psi_3(t) \equiv \text{const} \neq 0$ . Следовательно, в этом случае  $u(t) \equiv \text{const} = \pm \sqrt{\mu/t_f}$ . Такие постоянные управления определяют крайние одноточечные  $\varphi$ -сечения множества  $G_\varphi(t_f, \mu)$ .

Пусть теперь хотя бы одно из чисел  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  не равно нулю. Тогда в силу (2.1) и (3.1) имеем

$$\psi_3(t) = \psi_1 y(t) - \psi_2 x(t) + C. \quad (3.3)$$

Следовательно,  $\psi_3(t) = 0$  тогда и только тогда, когда точка  $(x(t), y(t))^T$  геометрического положения системы (2.1) в момент  $t$  при выбранном  $u(\cdot)$  удовлетворяет уравнению

$$\psi_1 y - \psi_2 x + C = 0 \quad (3.4)$$

прямой переключения (ПП).

Положим  $\chi = (-\psi_2, \psi_1)^T$ . Одну из двух открытых полуплоскостей, определяемых ПП, куда направлен вектор  $\chi$ , назовём положительной. В силу (3.2) и (3.4) в ней получаем  $u(t) > 0$ . Противоположную полуплоскость считаем отрицательной. В ней имеем  $u(t) < 0$ . Для точек  $(x(t), y(t))^T$  на ПП управление  $u(t)$  является нулевым. Направление на ПП выберем так, чтобы оно совпадало с направлением вектора  $(\psi_1, \psi_2)^T$ , то есть с направлением вектора  $\chi$ , повернутым на угол  $\pi/2$  по часовой стрелке (рис. 1).

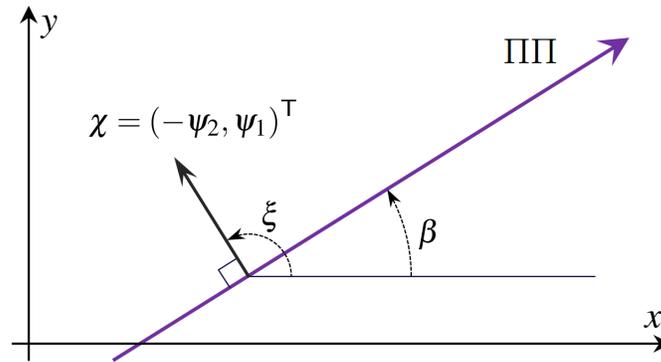


Рис. 1. Пояснение обозначений  $\chi$ ,  $\xi$ ,  $\beta$

Дополнив системы (2.1), (3.1) соотношением (3.2), приходим к замкнутой системе дифференциальных уравнений, для которой выполнены стандартные условия теорем существования и единственности решения. Поэтому, в частности, не может быть движений на плоскости  $x, y$ , которые подходили бы по касательной к ПП за конечное время. Аналогично, не может быть движений, которые сходят с ПП после некоторого движения по ней. Возможно лишь пересечение ПП под ненулевым углом, либо сход с неё в начальный момент (соответственно, вход в последний момент) под ненулевым углом. Перебирая дополнительно к фиксированному начальному условию  $z(t_0) = 0$  значения  $\psi_1$ ,  $\psi_2$ ,  $\psi_3(t_0)$ , получаем совокупность движений  $t \rightarrow z(t)$ , среди которых необходимо должны быть все движения, ведущие на  $\partial G(t_f, \mu)$ .

2) С учетом (3.2) имеем

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{\psi_3(t)}{2} = \frac{\psi_1}{2} \sin \varphi(t) - \frac{\psi_2}{2} \cos \varphi(t) = \rho \left( \frac{\psi_1}{2\rho} \sin \varphi(t) - \frac{\psi_2}{2\rho} \cos \varphi(t) \right).$$

Здесь  $\rho = \sqrt{\left(-\frac{\psi_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\psi_1}{2}\right)^2}$ . Определим угол  $\xi$ :  $\cos \xi = -\frac{\psi_2}{2\rho}$ ,  $\sin \xi = \frac{\psi_1}{2\rho}$ . По договорённости отсчёт углов ведём от направления оси  $x$  против часовой стрелки. Получаем, что  $\xi$  – это угол наклона вектора  $\chi$  по отношению к оси  $x$ .

Продолжая соотношение для  $\dot{\varphi}$ , получаем

$$\dot{\varphi}(t) = \rho (\sin \xi \sin \varphi(t) + \cos \xi \cos \varphi(t)) = \rho \cos(\varphi(t) - \xi).$$

Положим  $\beta = \xi - \pi/2$ . Угол  $\beta$  рассматривается между направлением оси  $x$  и направлением ПП (рис. 1). Поскольку  $\varphi(t_0) = 0$ , то можно сказать, что  $\beta$  – угол между направлением вектора скорости в начальный момент и направлением ПП. Имеем

$$\cos(\varphi(t) - \xi) = \cos\left(\varphi(t) - \beta - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(\varphi(t) - \beta).$$

Поэтому

$$\dot{\varphi}(t) = \rho \sin(\varphi(t) - \beta). \quad (3.5)$$

Таким образом, при анализе экстремальных движений с помощью ПМП, рассмотрение констант  $\psi_1$ ,  $\psi_2$ ,  $\psi_3(0)$  можно заменить рассмотрением значений  $\rho$ ,  $\beta$  и  $\dot{\varphi}(0) = \psi_3(0)/2$ .

3) Умножая соотношение (3.5) на  $2\dot{\varphi}(t)$  (по аналогии с [15, стр. 94]), имеем

$$\frac{d(\dot{\varphi}(t))^2}{dt} = 2\dot{\varphi}(t)\ddot{\varphi}(t) = 2\dot{\varphi}(t)\rho \sin(\varphi(t) - \beta).$$

Отсюда

$$(\dot{\varphi}(t))^2 = c_* - 2\rho \cos(\varphi(t) - \beta). \quad (3.6)$$

При  $\dot{\varphi}(t) \neq 0$  получаем

$$\dot{\varphi}(t) = \pm \sqrt{c_* - 2\rho \cos(\varphi(t) - \beta)}. \quad (3.7)$$

Эту формулу используем на интервалах движения, где  $\dot{\varphi}(t) \neq 0$ . Знак “+” соответствует управлению  $u(t) > 0$ , знак “-” означает, что  $u(t) < 0$ .

Константы  $C$  в (3.4) и  $c_*$  в (3.6) связаны соотношением

$$c_* = 2\rho \cos \beta + C^2/4. \quad (3.8)$$

Действительно, с учётом (3.2) и (3.3) запишем

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{\psi_3(t)}{2} = \frac{\psi_1 y(t) - \psi_2 x(t) + C}{2}.$$

В силу (3.7) получаем

$$c_* - 2\rho \cos(\varphi(t) - \beta) = \frac{(\psi_1 y(t) - \psi_2 x(t) + C)^2}{4}.$$

В начальный момент  $t_0$  имеем  $x(t_0) = y(t_0) = \varphi(t_0) = 0$ . Это даёт (3.8).

Если в некоторый момент  $t$  точка  $(x(t), y(t))^T$  лежит на ПП, то

$$c_* = 2\rho \cos \beta'. \quad (3.9)$$

Здесь  $\beta' = \beta - \varphi(t)$  — угол наклона вектора скорости системы (2.1) в момент  $t$  по отношению к направлению ПП, отсчитываемый против часовой стрелки от направления вектора скорости.

Из (3.7) имеем

$$dt = \frac{d\varphi}{\pm \sqrt{c_* - 2\rho \cos(\varphi - \beta)}}. \quad (3.10)$$

Формула (3.10) позволяет заменить интегрирование по  $t$  интегрированием по  $\varphi$  в полуплоскостях с постоянным знаком управления.

4) При построении движений, удовлетворяющих ПМП, мы используем прямую переключения. Если движение пересекает ПП в некоторый момент, то после этого момента оно идёт по траектории, которая является центрально симметричной (относительно точки пересечения) участку траектории до момента пересечения. В следующем утверждении указываются некоторые дополнительные (непосредственно вытекающие из ПМП) свойства движений, проходящих через ПП. Это утверждение в несколько более общей формулировке приведено в работе [13, Утверждение 5.1].

**Утверждение 3.1.** Пусть движение  $z(\cdot)$  системы (2.1) на промежутке  $[t_0, t_f]$  порождается непрерывным управлением  $u(\cdot)$  (не равным тождественно нулю) и при этом выполнен ПМП. Тогда управление  $u(\cdot)$  изменяет знак не более чем конечное число раз. Более того:

а) точки геометрического положения системы (2.1) на плоскости  $x, y$  в моменты смены знака управления  $u(\cdot)$  лежат на ПП;

б) если  $z(\cdot)$  таково, что движение  $(x(\cdot), y(\cdot))^T$  попадает на ПП не менее трех раз, то время между любыми соседними моментами нахождения на ПП одинаково; одинаковым также является соответствующее приращение угла по абсолютной величине;

в) если  $z(\cdot)$  таково, что движение  $(x(\cdot), y(\cdot))^T$  попадает на ПП хотя бы один раз, то накопленный угол на каждом интервале постоянства знака управления по абсолютной величине меньше  $2\pi$ .

**3.3. Типы управлений, ведущих на границу трёхмерного множества достижимости.** В работе [13] показано, что для построения границы трёхмерного множества достижимости  $G(t_f, \mu)$  достаточно использовать шесть типов  $U_1 - U_6$  непрерывных программных управлений  $u(\cdot)$  с не более чем двумя моментами смены знака управления. Равенство  $u(t) = 0$  означает, что точка на рассматриваемом экстремальном движении в момент  $t$  находится на ПП.

Перечислим типы программных управлений. Тип  $U_1$  характеризуется тем, что  $u(t) > 0$  на всем промежутке  $[t_0, t_f]$ . Аналогично определяется тип  $U_4$  с заменой положительного управления на отрицательное. Тип  $U_3$  имеет один момент смены знака управления на  $(t_0, t_f)$ , при этом вначале идет знак “+”, потом “−”. Управления, для которых  $u(t) > 0$ ,  $t \in (t_0, t_f)$ , но  $u(t_0) = 0$  или же  $u(t_f) = 0$ , также условимся включать в  $U_3$ . Аналогично для  $U_2$ : один момент смены знака с “−” на “+”. Тип  $U_6$  задаётся двумя моментами смены знака на  $(t_0, t_f)$  и последовательностью −, +, −. Тип  $U_5$  также имеет два момента смены знака управления на  $(t_0, t_f)$ , но используется последовательность +, −, +.

Для управлений, относящихся к типам  $U_6$  и  $U_5$ , справедливо следующее утверждение [13], связанное с продолжительностью среднего участка управления.

**Лемма 3.2.** Пусть движение  $z(\cdot)$  системы (2.1) на промежутке  $[t_0, t_f]$  порождается непрерывным управлением  $u(\cdot)$ , удовлетворяющим ПМП с двумя моментами  $t_1, t_2$  смены знака управления, причем  $t_0 < t_1 < t_2 < t_f$ . Предположим, что

$$(t_1 - t_0) + (t_f - t_2) > (t_2 - t_1). \quad (3.11)$$

Тогда  $z(t_f) \in \text{int} G(t_f)$ .

С использованием этого утверждения в [13] доказана следующая теорема.

**Теорема 3.3.** В любую точку  $z(t_f) \neq z^0(t_f)$  на  $\partial G(t_f, \mu)$  ведёт непрерывное управление, удовлетворяющее ПМП и относящееся к одному из типов  $U_1 - U_6$ . Других вариантов управлений, ведущих на границу, нет.

Если  $\varphi(t_f) > 0$ , то в перечне шести типов оставляем лишь четыре:  $U_1, U_2, U_3, U_6$ . В случае  $\varphi(t_f) < 0$  ограничиваемся четырьмя типами  $U_2, U_3, U_4, U_5$ . Если  $\varphi(t_f) = 0$ , оставляем типы  $U_2, U_3, U_5, U_6$ ; при этом управления типов  $U_5$  и  $U_6$  порождают одну и ту же совокупность точек.

На рис. 2 приведён пример трёхмерного множества достижимости для  $t_f = (1.5\pi)^2$ ,  $\mu = 1$ . Трёхмерное множество показано с двух ракурсов. Цветом отмечены участки границы, соответствующие различным типам управления.

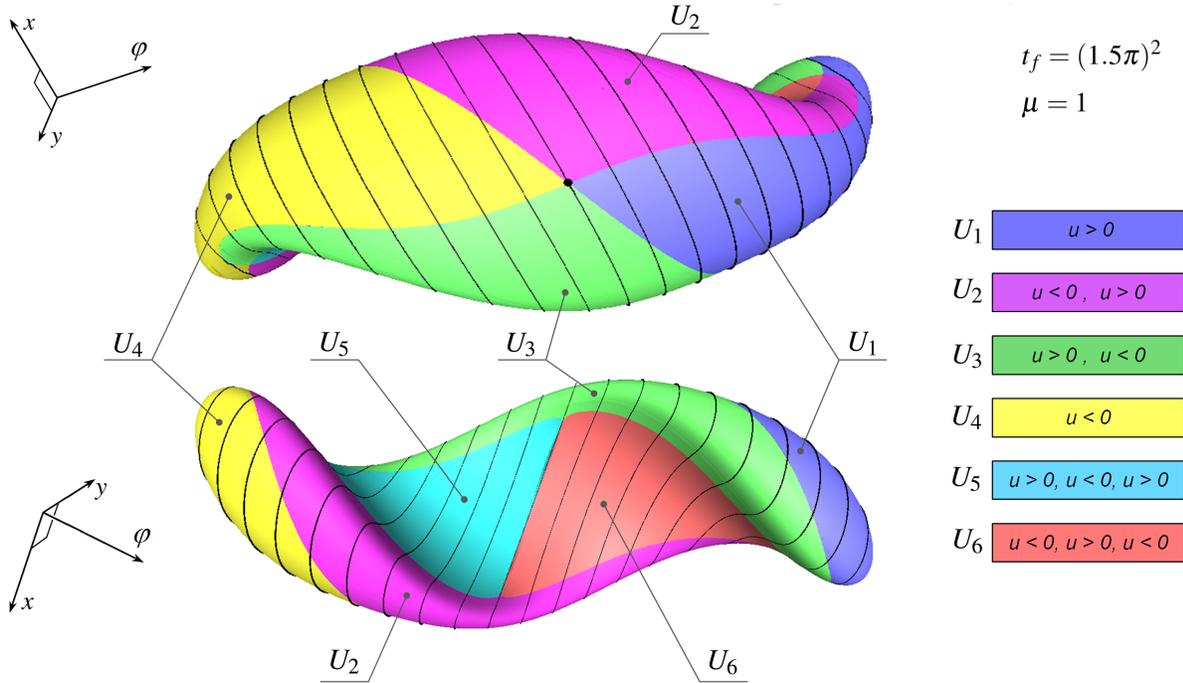


Рис. 2. Трёхмерное множество достижимости для  $t_f = (1.5\pi)^2$ ,  $\mu = 1$  в двух ракурсах

Мы воспользуемся результатами этого раздела для анализа управлений, ведущих на границу двумерного множества  $\mathcal{G}(t_f, \mu)$ .

#### 4. СТРУКТУРА УПРАВЛЕНИЙ, ВЕДУЩИХ НА ГРАНИЦУ МНОЖЕСТВА $\mathcal{G}(t_f, \mu)$

Поскольку двумерное множество  $\mathcal{G}(t_f, \mu)$  представляет собой проекцию трёхмерного множества  $G(t_f, \mu)$  на плоскость  $x, y$ , то любое движение системы (2.1), ведущее на границу множества  $\mathcal{G}(t_f, \mu)$ , приводит на границу множества  $G(t_f, \mu)$ , то есть удовлетворяет Теореме 3.3. При рассмотрении границы множества  $\mathcal{G}(t_f, \mu)$  будем использовать краевое условие  $\Psi_3(t_f) = 0$ , установленное в работе [14]. Условие  $\Psi_3(t_f) = 0$  означает, что  $u(t_f) = 0$ . Таким образом, движение приходит в момент  $t_f$  на прямую переключения.

**4.1. Число моментов смены знака управления.** Наличие краевого условия  $u(t_f) = 0$  исключает при построении границы множества  $\mathcal{G}(t_f, \mu)$  программные управления, относящиеся к типам  $U_1$  и  $U_4$ . Рассмотрим программное управление  $u(\cdot)$ , относящееся к типу  $U_6$  или  $U_5$ . По определению, соответствующее движение пересекает ПП в два момента  $t_1$  и  $t_2$ , где  $t_0 < t_1 < t_2 < t_f$ . При этом в силу Леммы 3.2 выполнено неравенство  $(t_2 - t_1) \geq (t_1 - t_0) + (t_f - t_2)$ . Если предположить, что  $u(t_f) = 0$ , то с учётом Утверждения 3.1б имеем  $(t_f - t_2) = (t_2 - t_1)$ . Поскольку  $(t_1 - t_0) > 0$ , получаем противоречие. Таким образом, программные управления типа  $U_6$  и  $U_5$  не ведут на границу множества  $\mathcal{G}(t_f, \mu)$ .

В итоге при исследовании границы множества  $\mathcal{G}(t_f, \mu)$  (за исключением точки, соответствующей особому управлению  $u(t) \equiv 0$ ) надо использовать только управления типа  $U_3$  и  $U_2$ , удовлетворяющие краевому условию  $u(t_f) = 0$ .

Справедливо следующее утверждение.

**Теорема 4.1.** *Особое управление  $u(t) \equiv 0$  ведёт на границу множества  $\mathcal{G}(t_f, \mu)$ . Все другие точки границы множества достижимости  $\mathcal{G}(t_f, \mu)$  формируются при помощи непрерывных управлений, удовлетворяющих ПМП, условию  $u(t_f) = 0$  и имеющих не более одного момента смены знака на  $(t_0, t_f)$ . Других вариантов программных управлений, ведущих на границу, нет.*

Отметим, что для машины Дубинса при геометрическом ограничении  $|u(t)| \leq \mu$  на управление, справедливо аналогичное утверждение (см. [4, стр. 211, Теорема 3]). А именно, любое экстремальное управление, ведущее на границу двумерного множества достижимости на плоскости  $x, y$ , является кусочно-постоянным управлением с не более чем одним моментом переключения.

**4.2. Отбрасывание лишних экстремальных движений.** Ниже сформулируем и докажем три уточняющие леммы. Они дают простые критерии отбрасывания движений, которые удовлетворяют условиям Теоремы 4.1, но ведут во внутренность множества  $\mathcal{G}(t_f, \mu)$ .

Лемма 4.2 говорит о том, что траектории, идущие на  $\partial\mathcal{G}(t_f, \mu)$ , не имеют самопересечений. В силу Леммы 4.4 на движениях, ведущих на  $\partial\mathcal{G}(t_f, \mu)$  при  $\varphi(t_f) \neq 0$ , выполнено неравенство  $y(t_f) \cdot \varphi(t_f) \geq 0$ . Аналогичное свойство было справедливо и для случая геометрического ограничения на управление (см. [4, стр. 211–212]). Лемма 4.7 позволяет в условиях Теоремы 4.1 ограничиться значениями  $\varphi(t_f) \in (-2\pi, 2\pi)$ .

Доказательства лемм очень простые, но опираются на рассмотрение геометрии различных вариантов экстремальных движений. Поэтому доказательства сопровождаются большим количеством рисунков.

При доказательстве Лемм 4.2 и 4.4 используем стандартный приём построения вспомогательного движения системы (2.1), которое выходит из той же начальной фазовой точки  $(x(t_0), y(t_0), \varphi(t_0))^T$ , что и исходное движение, и приходит в момент  $t_f$  в ту же конечную геометрическую точку  $(x(t_f), y(t_f))^T$  (но не обязательно с тем же значением  $\varphi(t_f)$  угловой переменной). При этом вспомогательное управление строится так, что, в отличие от исходного, оно не удовлетворяет ПМП. Стало быть, конечная геометрическая точка  $(x(t_f), y(t_f))^T$  не лежит на  $\partial\mathcal{G}(t_f, \mu)$ .

При рассмотрении Лемм 4.2 и 4.7 мы используем термин “лемниската Эйлера”. Это – замкнутая кривая (бантик, знак бесконечности), которая является одной из эластик Эйлера и описана в его книге [5, стр. 480–481]. У лемнискаты Эйлера угол при узловой точке равен примерно  $81^\circ$ . Тем самым лемниската Эйлера отличается от широко известной лемнискаты Бернулли, для которой такой угол равен  $90^\circ$ . Именно лемниската Эйлера используется при анализе множества достижимости машины Дубинса.

**Лемма 4.2.** Пусть управление  $u(\cdot)$  удовлетворяет условиям Теоремы 4.1, но соответствующая траектория  $(x(\cdot), y(\cdot))^T$  имеет самопересечение, то есть существуют такие моменты  $t_* < t^*$  на  $(t_0, t_f)$ , что  $(x(t_*), y(t_*))^T = (x(t^*), y(t^*))^T$ . Тогда  $(x(t_f), y(t_f))^T \in \text{int}\mathcal{G}(t_f, \mu)$ .

*Доказательство.* 1) Предположим, что управление  $u(\cdot)$  на интервале  $(t_0, t_f)$  не изменяет знак. В силу самопересечения на порождаемой траектории есть петля (рис. 3). Проведём через точку  $(x(t_f), y(t_f))^T$  касательную к этой петле. Затем зеркально отразим дугу исходной траектории между точкой касания  $\hat{S} = (x(\hat{t}), y(\hat{t}))^T$  и конечной точкой  $S_2 = (x(t_f), y(t_f))^T$  относительно построенной касательной. Определим вспомогательное управление  $\tilde{u}(\cdot)$  так, чтобы до момента  $\hat{t}$  оно совпадало с исходным, а на  $[\hat{t}, t_f]$  давало бы зеркально отражённую траекторию. Последнее означает, что  $\tilde{u}(t) = -u(t)$  при  $t \in [\hat{t}, t_f]$ . Вспомогательное управление  $\tilde{u}(\cdot)$  не удовлетворяет ПМП, поскольку в момент  $\hat{t}$  оно является разрывным: управление  $\tilde{u}(\cdot)$  скачком изменяет своё значение с  $\tilde{u}(\hat{t}-0) = u(\hat{t}-0) = u(\hat{t})$  на  $\tilde{u}(\hat{t}+0) = -u(\hat{t}+0) = -u(\hat{t})$ .

2) Пусть управление  $u(\cdot)$  изменяет знак в некоторый момент  $t_1 \in (t_0, t_f)$ . Если самопересечение есть, то точек самопересечения одна или две. В обоих случаях есть точка самопересечения, для которой моменты  $t_*, t^*$  расположены на интервале  $(t_1, t_f)$  (рис. 4). Проводим через точку  $S_2 = (x(t_f), y(t_f))^T$  касательную к такой петле. Затем строим вспомогательное движение. Его зеркально отражённая часть показана на рис. 4 пунктиром. Управление, реализующее вспомогательное движение, является разрывным в момент прохода точки  $\hat{S}$ . Следовательно, оно не удовлетворяет ПМП.  $\square$

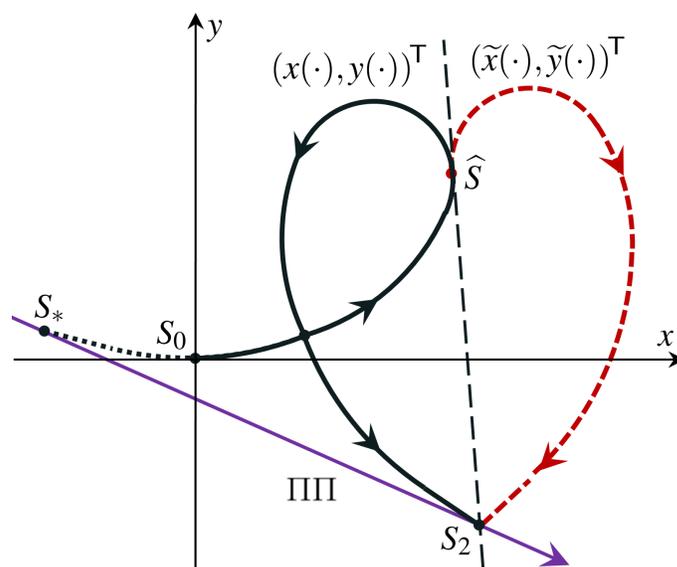


Рис. 3. Пояснение к п. 1) доказательства Леммы 4.2. Управление  $u(\cdot)$  не изменяет знак на интервале  $(t_0, t_f)$

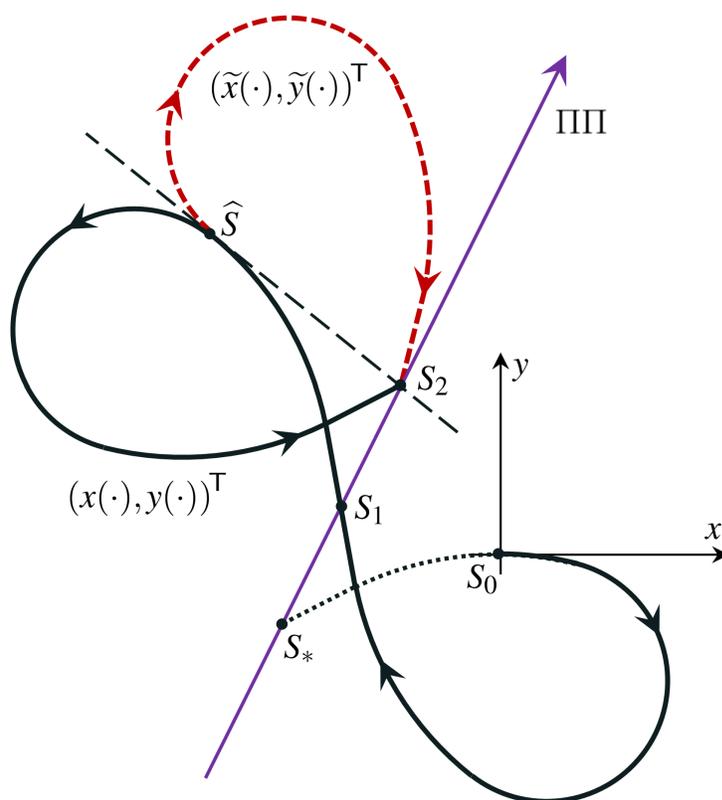


Рис. 4. Пояснение к п. 2) доказательства Леммы 4.2. Управление  $u(\cdot)$  изменяет знак на прямой переключения

**Замечание 4.3.** Траектории, показанные на рис. 5 и 6, формально не удовлетворяют условиям Леммы 4.2. А именно, здесь не выполнено определение самопересечения. Но сделанное в Лемме 4.2 доказательство фактически охватывает и эти случаи.

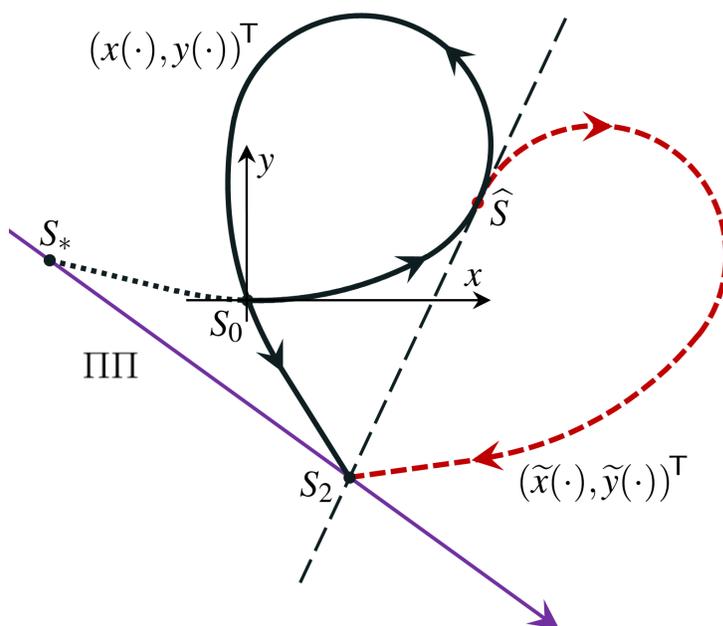


Рис. 5. Пояснение к Замечанию 4.3. Петля на траектории начинается в начальной точке  $S_0$

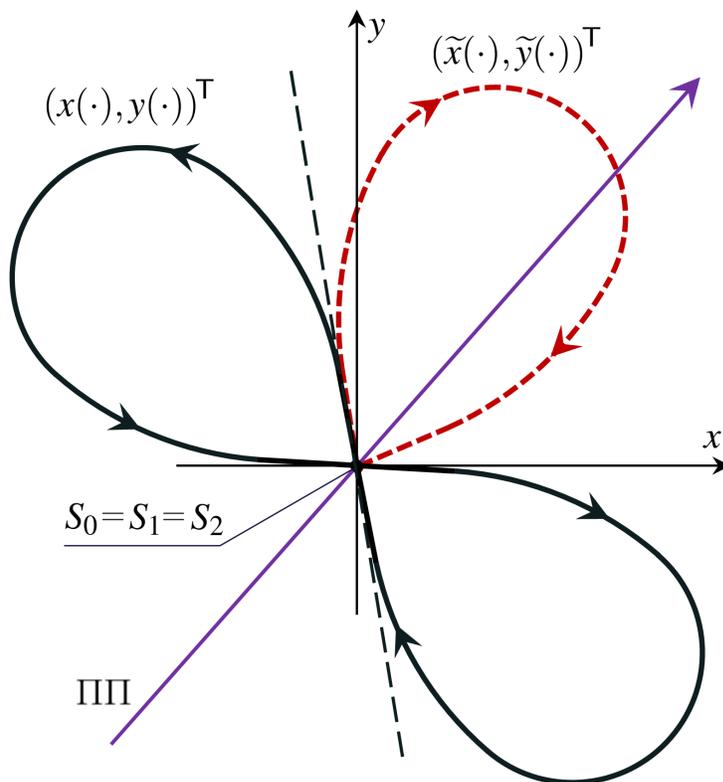


Рис. 6. Пояснение к Замечанию 4.3. Движение идёт по лемнискате Эйлера. Точки  $S_0$ ,  $S_1$  и  $S_2$  совпадают

**Лемма 4.4.** Пусть  $u(\cdot)$  – некоторое программное управление, удовлетворяющее условиям Теоремы 4.1. Предположим, что для соответствующего движения реализуются неравенства  $\varphi(t_f) > 0$ ,  $y(t_f) < 0$  или же  $\varphi(t_f) < 0$ ,  $y(t_f) > 0$ . Тогда  $(x(t_f), y(t_f))^T \in \text{int}\mathcal{G}(t_f, \mu)$ .

*Доказательство.* Рассмотрим для определённости вариант  $\varphi(t_f) > 0$ ,  $y(t_f) < 0$ .

1) Пусть управление  $u(\cdot)$  таково, что возникающая траектория имеет самопересечение. Тогда в силу Леммы 4.2 получаем  $(x(t_f), y(t_f))^T \in \text{int}\mathcal{G}(t_f, \mu)$ .

2) Предположим теперь, что самопересечений нет.

2а) Рассмотрим случай, когда управление  $u(\cdot)$  на промежутке  $(t_0, t_f)$  не изменяет знак, то есть  $u(t) > 0$ ,  $t \in (t_0, t_f)$ . При этом  $u(t_f) = 0$ ,  $y(t_f) < 0$ . Проведём через точку  $S_2 = (x(t_f), y(t_f))^T$  касательную к начальному участку траектории, расположенному выше оси  $x$ . Такая касательная существует и единственна. Обозначим символом  $\widehat{S}$  точку касания и символом  $\widehat{t}$  момент прохождения этой точки. Участок исходной траектории на  $[\widehat{t}, t_f]$  зеркально отразим относительно касательной (красный пунктир на рис. 7). Рассмотрим вспомогательное движение  $(\tilde{x}(\cdot), \tilde{y}(\cdot), \tilde{\varphi}(\cdot))^T$ , которое совпадает с исходным на  $[0, \widehat{t}]$  и далее на  $(\widehat{t}, t_f]$  идёт в плоскости  $x, y$  по отражённой траектории (со сменой знака управления относительно исходного). По построению выполнено равенство  $(x(t_f), y(t_f))^T = (\tilde{x}(t_f), \tilde{y}(t_f))^T$ . Поскольку в точке касания  $\widehat{S}$  имеем  $u(\widehat{t}) > 0$ , то на вспомогательном движении получим  $\tilde{u}(\widehat{t} + 0) = -u(\widehat{t}) < 0$ . Стало быть, на вспомогательном движении управление в момент  $\widehat{t}$  является разрывным. Поэтому оно не удовлетворяет ПМП. Следовательно,  $(x(t_f), y(t_f))^T = (\tilde{x}(t_f), \tilde{y}(t_f))^T \in \text{int}\mathcal{G}(t_f, \mu)$ .

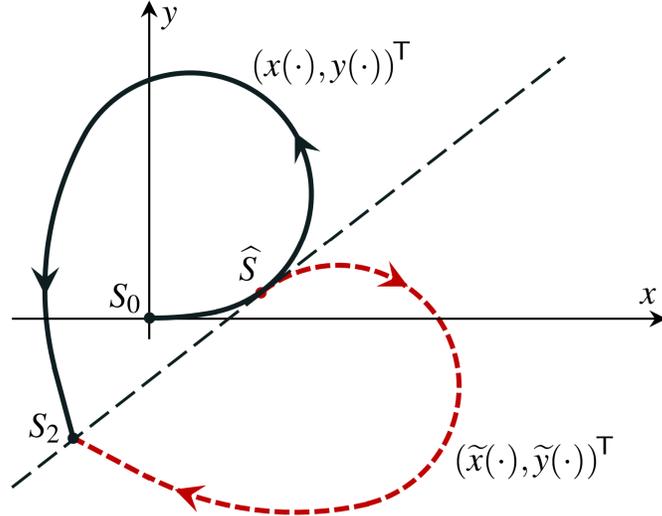


Рис. 7. Пояснение к п. 2а) доказательства Леммы 4.4

2б) Предположим, что управление  $u(\cdot)$  изменяет знак в некоторый момент  $t_1 \in (t_0, t_f)$ . Пусть, кроме того,  $\varphi(t_f) > 0$ . Тогда  $u(t) < 0$  на  $[t_0, t_1]$  и  $u(t) > 0$  на  $(t_1, t_f)$ . Поскольку самопересечений нет, то точка  $S_1$  пересечения ПП в момент  $t_1$  расположена на ПП (с учётом её направления) не дальше точки  $S_2$  попадания на ПП в момент  $t_f$  (рис. 8, 9, 10).

Рассмотрим два характерных варианта:  $S_2 \neq S_1$  и  $S_2 = S_1$ . В каждом из них движение начинается в точке  $S_0$ , попадает на ПП в момент  $t_1$  (точка  $S_1$ ) и заканчивается на ПП в момент  $t_f$  (точка  $S_2$ ). Продлим экстремальную траекторию первого участка в обратном времени от точки  $S_0$  до попадания на ПП в точке  $S_*$  (отмечена зелёной точечной линией). Кривая от точки  $S_*$  до точки  $S_1$  является центрально симметричной второму участку от  $S_1$  до  $S_2$  исходной кривой. Исследуем эти два варианта по отдельности.

2б1) Считаем, что  $S_2 \neq S_1$  (рис. 8). Проведем касательную из точки  $S_2$  к дуге, начинающейся в точке  $S_*$  и заканчивающейся в точке  $S_1$ . Пусть  $\widehat{S}$  — точка касания.

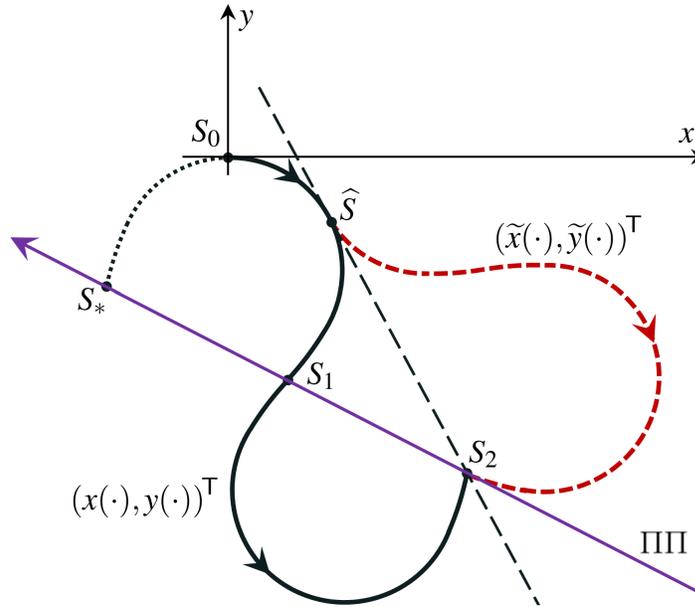


Рис. 8. Пояснение к пункту 2б1) доказательства Леммы 4.4. Начальная точка  $S_0$  находится на дуге  $[S_*, \widehat{S}]$

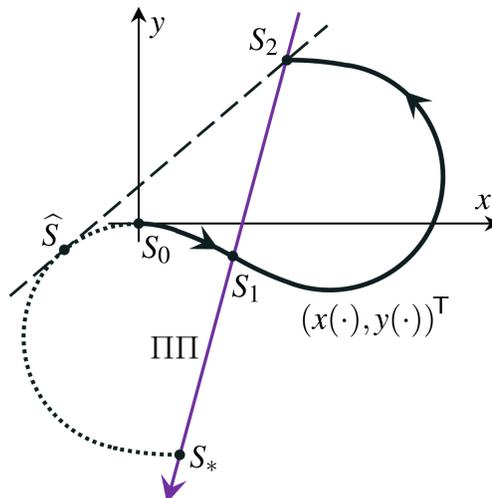


Рис. 9. Пояснение к пункту 2б1) доказательства Леммы 4.4. Начальная точка  $S_0$  находится на дуге  $[\widehat{S}, S_1]$

Если точка  $S_0$  лежит на дуге  $(S_*, \widehat{S})$ , то строим, используя отражение относительно касательной, вспомогательное движение  $(\tilde{x}(\cdot), \tilde{y}(\cdot))^T$ . Оно отличается от исходного после момента  $\widehat{t}$  и приходит в момент  $t_f$  в ту же точку  $S_2$ . Управление на вспомогательном движении не удовлетворяет ПМП. Стало быть,  $S_2 = (x(t_f), y(t_f))^T \in \text{int } \mathcal{G}(t_f, \mu)$ .

Пусть теперь  $S_0 \in [\widehat{S}, S_1)$  (рис. 9). Рассмотрим ось  $x$ , проведённую через точку  $S_0$  по касательной к кривой  $[\widehat{S}, S_1)$  в направлении движения. Точка  $S_2$  в таком случае лежит либо выше оси  $x$  (если  $S_0 \in (\widehat{S}, S_1)$ ), либо на этой оси (если  $S_0 = \widehat{S}$ ). Приходим к противоречию с условием леммы.

262) Предположим, что  $S_2 = S_1$  (рис. 10). В этом случае движение идёт по лемнискате Эйлера  $S_*S_1S_2$ . Проведём через точку  $S_1$  касательную к траектории по направлению движения в момент  $t_1$ . Используем эту касательную для построения (способом отражения) вспомогательного движения, совпадающего с исходным до момента  $t_1$  и отличающегося от него на промежутке  $(t_1, t_f]$ . На рис. 10 траектория вспомогательного движения на промежутке  $(t_1, t_f]$  показана красной пунктирной линией.

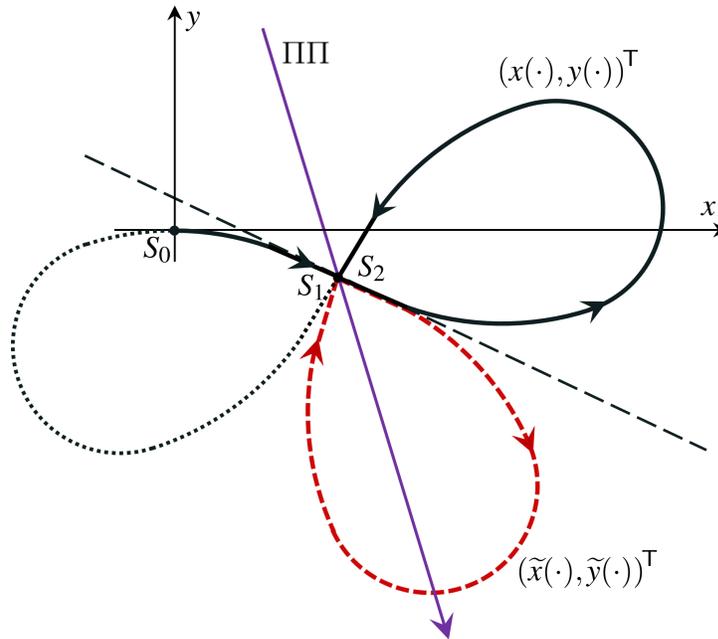


Рис. 10. Пояснение к пункту 262) доказательства Леммы 4.4. Точки  $S_1$  и  $S_2$  совпадают

Полученное вспомогательное движение в момент  $t_f$  приходит в ту же точку  $S_2$  на плоскости  $x, y$ , что и исходное. Но при этом соответствующее управление  $\tilde{u}(\cdot)$  не изменяет знак на интервале  $(t_0, t_f)$ , хотя обращается в нуль в момент  $t_1$ . Стало быть, оно не удовлетворяет ПМП, и, как следствие, приводит в  $\text{int } \mathcal{G}(t_f, \mu)$ .  $\square$

Из доказательства Леммы 4.4 дополнительно вытекают следующие факты.

**Замечание 4.5.** Формулировка Леммы 4.4 не учитывает случай, когда  $\varphi(t_f) = 0$  и рассматриваемое движение отличается от тождественно равного нулю. Для такого случая возможны лишь два симметричных друг другу варианта. В первом из них  $u(t) > 0$  на  $(t_0, t_1)$  и  $u(t) < 0$  на  $(t_1, t_f)$ . Во втором, наоборот,  $u(t) < 0$  на  $(t_0, t_1)$  и  $u(t) > 0$

на  $(t_1, t_f)$ . При этом начальная точка  $S_0$ , точка  $S_1$  смены знака управления и конечная точка  $S_2$  траектории расположены на ПП.

Если  $S_0 \neq S_1$  (и, стало быть,  $S_1 \neq S_2$ ), то такой случай аналогичен рассмотренному в доказательстве Леммы 4.4 случаю пункта 2б1), когда  $S_0 \in (\widehat{S}, S_1)$ . Поэтому  $S_2 \in \text{int } \mathcal{G}(t_f, \mu)$ . В случае  $S_0 = S_1 = S_2$  траектория представляет собой лемнискату Эйлера. Здесь по существу можно повторить рассуждения, которые были сделаны в пункте 2б2). Из них следует, что экстремальное движение в виде лемнискаты Эйлера ведёт в  $\text{int } \mathcal{G}(t_f, \mu)$ .

Таким образом, когда  $\varphi(t_f) = 0$ , только особое движение с управлением  $u(t) \equiv 0$  даёт точку на границе множества  $\mathcal{G}(t_f, \mu)$ .

**Замечание 4.6.** Если на движении, ведущем на границу множества  $\mathcal{G}(t_f, \mu)$  есть момент смены знака, то начальный участок такого движения до смены знака не может по углу превышать  $\pi$ . Действительно, в противном случае начальная точка  $S_0$  принадлежит дуге  $[S_*, \widehat{S})$  и, как отмечено в доказательстве Леммы 4.4, последняя точка  $S_2$  лежит в  $\text{int } \mathcal{G}(t_f, \mu)$ .

**Лемма 4.7.** Если для некоторого экстремального движения  $(x(\cdot), y(\cdot), \varphi(\cdot))^\top$  выполнено неравенство  $|\varphi(t_f)| \geq 2\pi$ , то  $(x(t_f), y(t_f))^\top \in \text{int } \mathcal{G}(t_f, \mu)$ .

*Доказательство.* Максимальное значение  $\varphi = \varphi_{\max}$ , при котором  $G_\varphi(t_f, \mu) \neq \emptyset$ , определяется формулой  $\varphi_{\max} = \sqrt{t_f \cdot \mu}$ . Будем считать, что  $\varphi_{\max} \geq 2\pi$ .

Рассмотрим случай  $\varphi(t_f) \in [2\pi, \varphi_{\max}]$ . Предположим от противного, что некоторое допустимое управление  $u(\cdot)$ , реализующее  $\varphi(t_f)$ , ведёт на границу множества  $\mathcal{G}(t_f, \mu)$ . Тогда  $u(t_f) = 0$ , и в силу Утверждения 3.1в на каждом интервале постоянства управления приращение угла по абсолютной величине меньше  $2\pi$ . Поэтому накопленный на всём промежутке  $[t_0, t_f]$  угол  $\varphi(t_f)$  также меньше  $2\pi$  по абсолютной величине. Получили противоречие.

В силу симметрии  $\varphi$ -сечений  $G_\varphi(t_f, \mu)$  при положительных и отрицательных значениях  $\varphi$  (свойство 3 в разд. 3.1), доказываемое утверждение справедливо и для  $\varphi(t_f) \leq -2\pi$ .  $\square$

## 5. АНАЛИЗ УПРАВЛЕНИЙ, ВЕДУЩИХ НА ГРАНИЦУ МНОЖЕСТВА $\mathcal{G}(t_f, \mu)$

Зафиксировав  $t_f$  и  $\mu$ , в качестве параметра при описании границы множества  $\mathcal{G}(t_f, \mu)$  берём значение  $\varphi(t_f) \in [-\varphi_{\max}, \varphi_{\max}]$ . Подчеркнём, что величина  $\varphi_{\max}$  зависит от  $t_f$  и  $\mu$ .

1) Рассмотрим случай  $\varphi(t_f) \in [0, \varphi_{\max})$ . В силу Теоремы 4.1 граница множества  $\mathcal{G}(t_f, \mu)$  может быть порождена, помимо особого управления  $u(t) \equiv 0$ , только управлениями типа  $U_3$  и  $U_2$  с краевым условием  $u(t_f) = 0$ .

Управления типа  $U_3$  разделим на три случая:

- управление  $u(t)$  положительно на  $(t_0, t_f)$ ;
- управление  $u(t)$  меняет знак с + на - один раз на  $(t_0, t_f)$  и  $u(t_0) > 0$ ;
- управление  $u(t)$  меняет знак с + на - один раз на  $(t_0, t_f)$  и  $u(t_0) = 0$ .

Совокупность управлений, относящихся к первому случаю, обозначим через  $U^{(+)}$ . Для второго случая имеем  $u(t_0) > 0$  и  $u(t_f) = 0$ . Поэтому, опираясь на симметрию траектории относительно точки пересечения ПП (разд. 3.1), получаем  $\varphi(t_f) < 0$ .

Поскольку это противоречит предположению  $\varphi(t_f) \in [0, \varphi_{\max})$ , то второй случай невозможен. В третьем случае имеем  $\varphi(t_f) = 0$  в силу Утверждения 3.1б. Опираясь на замечание 4.5, устанавливаем, что такое управление не ведёт на границу множества достижимости  $\mathcal{G}(t_f, \mu)$ . Поэтому третий случай также отбрасываем.

Для управлений типа  $U_2$  выделим аналогичные три случая:

- управление  $u(t)$  отрицательно на  $(t_0, t_f)$ ;
- управление  $u(t)$  меняет знак с  $-$  на  $+$  один раз на  $(t_0, t_f)$  и  $u(t_0) < 0$ ;
- управление  $u(t)$  меняет знак с  $-$  на  $+$  один раз на  $(t_0, t_f)$  и  $u(t_0) = 0$ .

Первый случай не подходит из-за того, что  $\varphi(t_f) \geq 0$ . Совокупность управлений, относящихся ко второму случаю, обозначим через  $U^{(-,+)}$ . Третий случай отбрасываем (так же, как и для управлений типа  $U_3$ ).

Таким образом, далее будем рассматривать лишь управления  $U^{(+)}$  (относящиеся к типу  $U_3$ ) и управления  $U^{(-,+)}$  (относящиеся к типу  $U_2$ ). Только эти управления могут вести на границу множества  $\mathcal{G}(t_f, \mu)$  при  $\varphi(t_f) \geq 0$ .

2) При построении движений в силу управлений  $U^{(+)}$  воспользуемся соотношениями (7.6), (7.7) из работы [13], которые были получены для управлений типа  $U_3$ . В этих соотношениях с учётом краевого условия  $u(t_f) = 0$  для управлений  $U^{(+)}$  следует положить  $\varphi_3 = 0$ . Тогда в каждой формуле остаётся по одному интегралу:

$$t_f = \frac{1}{\sqrt{2\rho}} \int_0^{\varphi(t_f)} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \beta' - \cos(\varphi + \beta')}}, \quad (5.1)$$

$$\mu = \sqrt{2\rho} \int_0^{\varphi(t_f)} \sqrt{\cos \beta' - \cos(\varphi + \beta')} d\varphi. \quad (5.2)$$

Здесь  $\beta'$  — угол, отсчитываемый против часовой стрелки от направления вектора скорости системы (2.1) в момент  $t_f$  до направления ПП. Величина  $\rho$  — константа, используемая в соотношении (3.5).

2а) Поясним формулу (5.1). Аналогично поясняется формула (5.2).

Рассмотрим движение в силу положительного управления  $u(\cdot)$  на  $[t_0, t_f]$ . Оно заканчивается в момент  $t_f$  на ПП. Угол, набираемый на  $[t_0, t_f]$ , равен  $\varphi(t_f)$ . Опираясь на (3.10) и используя перед корнем знак “+”, получаем

$$t_f = \int_0^{\varphi(t_f)} \frac{d\varphi}{\sqrt{c_* - 2\rho \cos(\varphi - \beta)}}.$$

При вычислении интеграла сделаем замену  $\varphi' = \varphi(t_f) - \varphi$ . Тогда  $d\varphi' = -d\varphi$ . Значению  $\varphi = 0$  соответствует  $\varphi' = \varphi(t_f)$ , а  $\varphi = \varphi(t_f)$  заменяется на  $\varphi' = 0$ . Вводя обозначение  $\beta' = \beta - \varphi(t_f)$ , получим

$$t_f = \int_{\varphi(t_f)}^0 \frac{-d\varphi'}{\sqrt{c_* - 2\rho \cos(-\varphi' - \beta')}} = \int_0^{\varphi(t_f)} \frac{d\varphi'}{\sqrt{c_* - 2\rho \cos(\varphi' + \beta')}}.$$

Значение  $c_*$  подсчитывается по формуле (3.9), то есть  $c_* = 2\rho \cos \beta'$ . Таким образом, полученный интеграл имеет вид (5.1). При этом смысл угла  $\beta'$  именно тот, что указан в описании формулы (5.1). Символ  $\varphi'$ , как и  $\varphi$  в (5.1), обозначает переменную интегрирования.

2б) По аналогии с [13], записывая произведение  $t_f \cdot \mu$ , исключаем  $\rho$  и получаем соотношение

$$t_f \cdot \mu = \int_0^{\varphi(t_f)} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \beta' - \cos(\varphi + \beta')}} \cdot \int_0^{\varphi(t_f)} \sqrt{\cos \beta' - \cos(\varphi + \beta')} d\varphi, \quad (5.3)$$

связывающее параметры  $\varphi(t_f)$  и  $\beta'$ . Численно исследуя такое уравнение при фиксированном  $\varphi(t_f)$  в интервале от 0 до некоторого  $\varphi^{(1)}(t_f)$ , получаем единственное решение (значение  $\beta'$ , зависящее от  $\varphi(t_f)$ ). Для  $\varphi(t_f)$  в диапазоне от  $\varphi^{(1)}(t_f)$  до некоторого  $\varphi^{(2)}(t_f)$  имеем два решения (два значения  $\beta'$ , зависящих от  $\varphi(t_f)$ ). Если  $\varphi(t_f) \in (\varphi^{(2)}(t_f), \varphi_{\max}]$ , то решений нет.

Для каждой найденной пары  $\varphi(t_f)$  и  $\beta'$  вычисляем  $\rho$  (например, из (5.2)).

Выразим угол  $\beta$  наклона вектора скорости системы (2.1) в момент  $t_0 = 0$  относительно направления ПП через его наклон в момент  $t_f$ . Имеем  $\beta = \beta' + \varphi(t_f)$ . При таком  $\beta$  интегрируем уравнение (3.5) от момента  $t_f$  до момента  $t_0 = 0$ . В качестве краевых условий в момент  $t_f$  возьмём значения  $\varphi = \varphi(t_f)$  и  $\dot{\varphi}(t_f) = 0$ . Получаем управление  $u(t) = \dot{\varphi}(t)$  на промежутке  $[t_0, t_f]$ .

Используем найденное управление в системе (2.1) с начальным условием  $(x(t_0), y(t_0), \varphi(t_0))^T = (0, 0, 0)^T$ . Находим движение  $(x(\cdot), y(\cdot))^T$  и, в частности, его последнее положение  $(x(t_f), y(t_f))^T$ .

Прогоняя  $\varphi(t_f)$  от 0 до  $\varphi^{(2)}(t_f)$ , получаем совокупность конечных точек движений в силу всех возможных управлений  $U^{(+)}$ . Такая совокупность образует кривую, которую обозначим  $F^{(+)}$ .

3) Рассмотрим движение  $(x(\cdot), y(\cdot), \varphi(\cdot))^T$ , порождаемое управлением  $u(\cdot) \in U^{(-,+)}$ . Такое управление относится к типу  $U_2$ . Соответствующее реверсивное управление  $u^\#(t) = u(t_f - t)$  в силу свойства симметрии 2 из разд. 3.1 ведёт в фазовое состояние  $(x^\#(t_f), y^\#(t_f), \varphi(t_f))^T$ , для которого точки  $(x, y)^T$  и  $(x^\#, y^\#)^T$  зеркально симметричны друг другу относительно оси  $X$ . Поэтому вместо исследования движения в силу управления  $u(\cdot)$  можем взять движение в силу реверсивного управления  $u^\#(\cdot)$ .

Управление  $u^\#(\cdot)$  относится к типу  $U_3$ . Для  $u^\#(\cdot)$  получаем краевое условие в начальный момент времени:  $u^\#(t_0) = 0$ . При построении движения в силу управления  $u^\#(\cdot)$  воспользуемся формулами (7.6), (7.7) из работы [13].

Имеем

$$t_f = \frac{1}{\sqrt{2\rho}} \left( \int_0^{\varphi_3} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \beta' - \cos(\varphi + \beta')}} + \int_0^{\varphi_3 + \varphi(t_f)} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \beta' - \cos(\varphi + \beta')}} \right), \quad (5.4)$$

$$\mu = \sqrt{2\rho} \left( \int_0^{\varphi_3} \sqrt{\cos \beta' - \cos(\varphi + \beta')} d\varphi + \int_0^{\varphi_3 + \varphi(t_f)} \sqrt{\cos \beta' - \cos(\varphi + \beta')} d\varphi \right). \quad (5.5)$$

Здесь  $\beta'$  — угол, отсчитываемый против часовой стрелки от направления вектора скорости системы (2.1) в момент  $t_1$  смены знака управления до направления ПП. Символ  $\rho$  обозначает константу, используемую в соотношении (3.5). Символ  $\varphi_3$  есть

взятый по абсолютной величине угол, набираемый на  $[t_1, t_f]$ . Тогда угол, набираемый на  $[t_0, t_1]$ , равен  $\varphi_3 + \varphi(t_f)$ . Величины  $\varphi_3$ ,  $\varphi(t_f)$  и  $\beta'$  связаны (см. рис. 11) равенством

$$2\beta' + \varphi_3 + \varphi(t_f) = 2\pi. \quad (5.6)$$

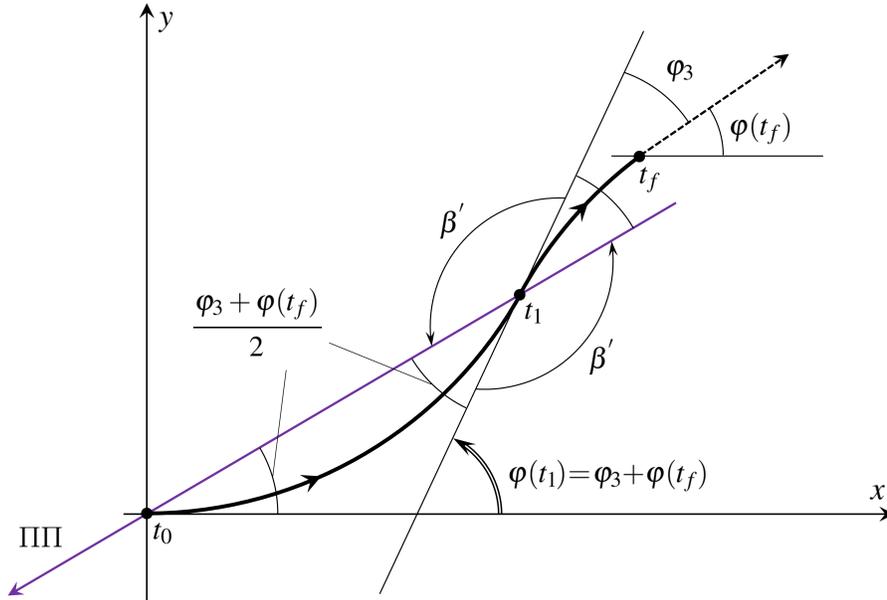


Рис. 11. Пояснение углов в формуле (5.6)

За) Поясним формулу (5.4). Аналогичное пояснение годится и для (5.5).

Опираясь на (3.9) и используя перед корнем в формуле (3.7) знак “+”, когда рассматриваем первый промежуток, и знак “-”, когда учитываем второй, получаем

$$t_f = (t_1 - t_0) + (t_f - t_1) = \int_0^{\varphi_3 + \varphi(t_f)} \frac{d\varphi}{\sqrt{c_* - 2\rho \cos(\varphi - \beta)}} + \int_{\varphi_3 + \varphi(t_f)}^{\varphi(t_f)} \frac{d\varphi}{-\sqrt{c_* - 2\rho \cos(\varphi - \beta)}}.$$

В обоих интегралах делаем замену  $\varphi' = (\varphi_3 + \varphi(t_f)) - \varphi$ . Тогда  $d\varphi' = -d\varphi$ . Значению  $\varphi = 0$  соответствует  $\varphi' = \varphi_3 + \varphi(t_f)$ , значение  $\varphi = \varphi_3 + \varphi(t_f)$  заменяется на  $\varphi' = 0$ , а  $\varphi = \varphi(t_f)$  на  $\varphi' = \varphi_3$ . Вводя обозначение  $\beta' = \beta - (\varphi_3 + \varphi(t_f))$ , получим

$$\begin{aligned} t_f &= \int_{\varphi_3 + \varphi(t_f)}^0 \frac{-d\varphi'}{\sqrt{c_* - 2\rho \cos(-\varphi' - \beta')}} + \int_0^{\varphi_3} \frac{-d\varphi'}{-\sqrt{c_* - 2\rho \cos(-\varphi' - \beta')}} \\ &= \int_0^{\varphi_3 + \varphi(t_f)} \frac{d\varphi'}{\sqrt{c_* - 2\rho \cos(\varphi' + \beta')}} + \int_0^{\varphi_3} \frac{d\varphi'}{\sqrt{c_* - 2\rho \cos(\varphi' + \beta')}}. \end{aligned}$$

Последнее выражение справа совпадает с (5.4). Смысл угла  $\beta'$  тот же, что указан в описании формулы (5.4). Символ  $\varphi'$  трактуем как переменную интегрирования.

Зб) Выразим  $\varphi_3$  через  $\varphi(t_f)$ ,  $\beta'$  из (5.6) и полученное выражение подставим в (5.4), (5.5). Записывая произведение  $t_f \cdot \mu$ , исключаем  $\rho$  и получаем соотношение, связывающее параметры  $\varphi(t_f)$  и  $\beta'$ . Численно решая такое уравнение при фиксированном  $\varphi(t_f) \in [0, \varphi^{(1)}(t_f))$ , получаем единственное решение (значение  $\beta'$ , зависящее от  $\varphi(t_f)$ ). Если  $\varphi(t_f) \geq \varphi^{(1)}(t_f)$ , то решений нет.

Для найденной пары  $(\varphi(t_f), \beta')$  вычисляем  $\rho$  (например, из (5.5)).

Поскольку  $u^\#(t) = 0$  в начальный момент времени  $t_0 = 0$ , а также в момент  $t_1$  (в который управление изменяет знак с “+” на “-”), то можем выразить угол  $\beta$  наклона вектора скорости относительно ПП в момент  $t_0$  через угол  $\beta'$ , относящийся к моменту  $t_1$ . Получаем  $\beta = 2\pi - \beta'$ . Интегрируем при этом  $\beta$  уравнение (3.5) от момента  $t_0 = 0$  до  $t_f$  в прямом времени с начальными условиями  $\varphi(t_0) = 0$  и  $\dot{\varphi}(t_0) = 0$ . Получаем управление  $u^\#(t) = \dot{\varphi}(t)$  на промежутке  $[t_0, t_f]$ .

Искомое управление  $u(\cdot) \in U^{(-,+)}$  находим по формуле  $u(t) = u^\#(t_f - t)$ .

Интегрируя систему (2.1) с начальным условием  $(x(t_0), y(t_0), \varphi(t_0))^T = (0, 0, 0)^T$ , находим движение  $x(\cdot), y(\cdot)$  и, в частности, его последнее положение  $(x(t_f), y(t_f))^T$ .

Прогоняя  $\varphi(t_f)$  от 0 до  $\varphi^{(1)}(t_f)$ , получаем совокупность конечных точек движений в силу всех возможных управлений  $U^{(-,+)}$ . Такая совокупность образует кривую, которую обозначим  $F^{(-,+)}$ .

4) Рассмотрим случай  $\varphi(t_f) \in (-\varphi_{\max}, 0)$ . Воспользуемся построениями для случая  $\varphi(t_f) > 0$ . Там использовались управления  $U^{(+)}$  и  $U^{(-,+)}$ . Теперь возьмём управления  $U^{(-)}$  и  $U^{(+,-)}$ , отличающиеся только сменой знака. В результате получим кривые  $F^{(-)}$  и  $F^{(+,-)}$ , которые симметричны кривым  $F^{(+)}$  и  $F^{(-,+)}$  относительно оси  $x$ .

## 6. ПРИМЕРЫ ЧИСЛЕННОГО ПОСТРОЕНИЯ МНОЖЕСТВ $\mathcal{G}(t_f, \mu)$ . СРАВНЕНИЕ СО СЛУЧАЕМ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОГРАНИЧЕНИЙ

При численных построениях полагаем  $\mu = 1$ .

Из описанного в разд. 4, 5 следует, что верхняя часть (выше оси  $x$ ) границы множества  $\mathcal{G}(t_f, \mu)$  образуется при помощи кривых  $F^{(+)}$  и  $F^{(-,+)}$ . Нижняя часть границы симметрична верхней относительно оси  $x$  (свойство 5 в разд. 3.1).

1) Начнём с кривых  $F^{(+)}$ ,  $F^{(-,+)}$ . На рис. 12–14 представлен результат их численного построения для  $t_f = 20$ . Кривая  $F^{(+)}$  состоит из двух участков, отмеченных светло-зелёным цветом (длинный участок) и тёмно-зелёным цветом (короткий участок). Построение кривой  $F^{(+)}$  осуществляется на основе численного решения уравнения (5.3) из пункта 2б) разд. 5. Светло-зелёный участок соответствует случаю одного решения, а тёмно-зелёный участок – случаю двух решений. Кривая  $F^{(-,+)}$  отмечена красным цветом. Описание её построения изложено в пункте 3) разд. 5. Дополнительно изображены  $\varphi$ -сечения  $G_\varphi(t_f, \mu)$  при  $\varphi = 0.8$  (рис. 12),  $\varphi = 2.9$  (рис. 13) и  $\varphi = 4.027$  (рис. 14).

Видно, что каждое из показанных на рис. 12, 13  $\varphi$ -сечений одной своей граничной точкой “зацепляет” кривую  $F^{(+)}$ , а другой точкой соприкасается с кривой  $F^{(-,+)}$ . Представленное на рис. 14  $\varphi$ -сечение  $G_\varphi(t_f, \mu)$  своей границей соприкасается с кривой  $F^{(+)}$  в двух точках. Здесь граница  $\varphi$ -сечения между точками соприкосновения почти совпадает с кривой  $F^{(+)}$ .

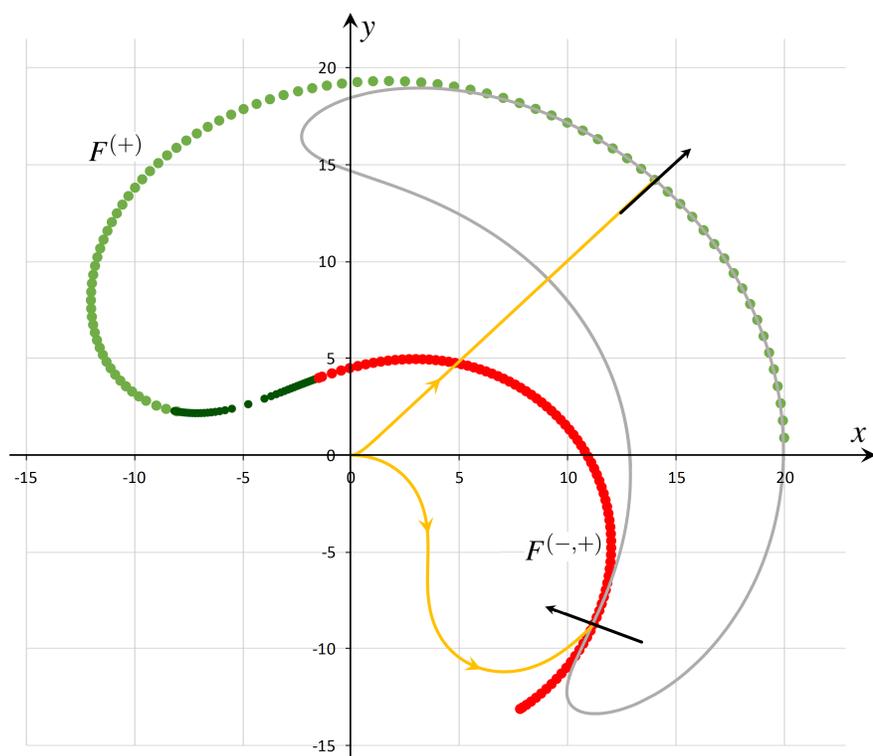


РИС. 12. Кривые  $F^{(+)}$ ,  $F^{(-,+)}$  при  $t_f = 20, \mu = 1$ ;  $\varphi$ -сечение  $G_\varphi(20, 1)$  для  $\varphi = 0.8$

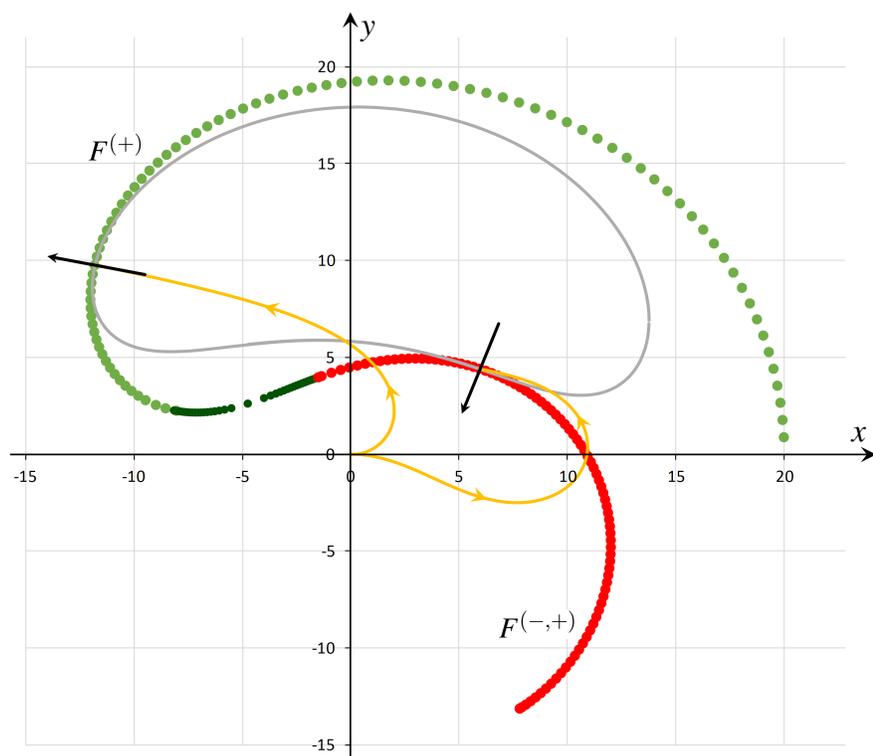


РИС. 13. Кривые  $F^{(+)}$ ,  $F^{(-,+)}$  при  $t_f = 20, \mu = 1$ ;  $\varphi$ -сечение  $G_\varphi(20, 1)$  для  $\varphi = 2.9$

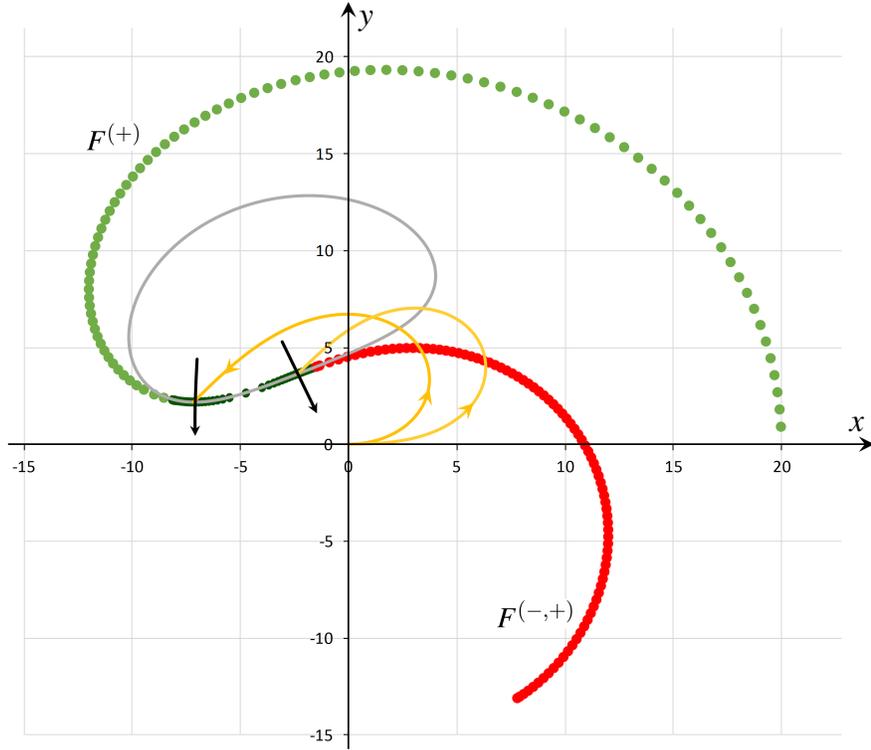


Рис. 14. Кривые  $F^{(+)}$ ,  $F^{(-,+)}$  при  $t_f = 20, \mu = 1$ ;  $\varphi$ -сечение  $G_\varphi(20, 1)$  для  $\varphi = 4.027$

Для нахождения  $\varphi$ -сечений использовался алгоритм из работы [13]. Теоретически любое  $\varphi$ -сечение  $G_\varphi(t_f, \mu)$  (в нашем случае  $\mu = 1, t_f = 20$ ) вложено в множество  $\mathcal{G}(t_f, \mu)$ . Это вложение контролируется для проверки правильности построений.

На рис. 12–14 жёлтым цветом показаны движения, ведущие в точки контакта  $\varphi$ -сечений с кривыми  $F^{(+)}$  и  $F^{(-,+)}$ . Каждое движение заканчивается на своей ПП (ПП изображены чёрным цветом). Направления ПП отмечены стрелкой. Движение на рис. 12, ведущее в точку соприкосновения границы  $\varphi$ -сечения с кривой  $F^{(+)}$ , практически идёт по прямой переключения (начиная с очень малого  $t > 0$ ). Теоретически оно лежит слева от ПП, не пересекая её.

Для построения границы множества  $\mathcal{G}(t_f, \mu)$  берём только те части кривых  $F^{(+)}$  и  $F^{(+,-)}$ , что находятся выше оси  $x$  или на этой оси. Это вытекает из Леммы 4.4.

Рис. 15 дополнительно поясняет построение кривых  $F^{(+)}$  и  $F^{(+,-)}$ . На нём показан численно просчитанный график  $\beta' \rightarrow \varphi(t_f)$ , связывающий значения  $\varphi(t_f)$  и  $\beta'$ , удовлетворяющие произведению  $t_f \cdot \mu$  для  $t_f = 20, \mu = 1$ . До значения  $\varphi(t_f) = \varphi^{(1)}(t_f) \approx 3.846$  левый корень уравнения относительно  $\beta'$ , определяемого этим графиком, используется для построения светло-зелёного участка кривой  $F^{(+)}$ , а правый корень служит для построения кривой  $F^{(-,+)}$ . В диапазоне  $(\varphi^{(1)}(t_f), \varphi^{(2)}(t_f)) \approx (3.846, 4.058]$  оба корня определяют точки, включаемые в тёмно-зелёный участок кривой  $F^{(+)}$ . При  $\varphi(t_f) \in (\varphi^{(2)}(t_f), \varphi_{\max}(t_f)] \approx (4.058, 4.472]$  решений нет. Это означает, что любое  $\varphi$ -сечение  $G_\varphi(t_f, \mu)$  при  $\varphi(t_f) \in (\varphi^{(2)}(t_f), \varphi_{\max}(t_f)]$  находится во внутренности множества  $\mathcal{G}(t_f, \mu)$ .

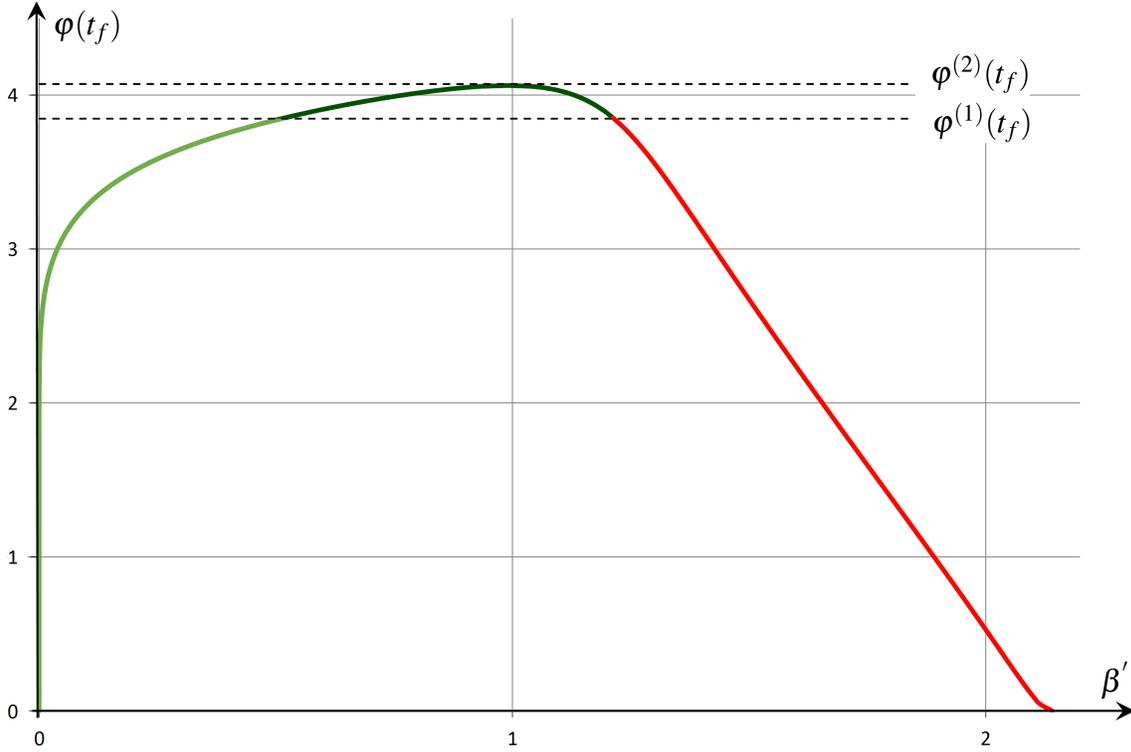


Рис. 15. График зависимости  $\varphi(t_f)$  от  $\beta'$  при  $t_f = 20$ ,  $\mu = 1$ ;  
 $\varphi^{(1)}(t_f) \approx 3.846$ ,  $\varphi^{(2)}(t_f) \approx 4.058$

2) Увеличивая при фиксированном  $\mu$  значение  $t_f$  от  $t_f = 0$ , находим первое значение  $t_f^*$ , когда кривая  $F^{(+)}$  опускается на ось  $x$  слева от  $x = 0$ . При  $t_f \in (0, t_f^*)$  множество  $\mathcal{G}(t_f, \mu)$  является односвязным. Пусть  $t_f^{**} > t_f^*$  — ближайшее к  $t_f^*$  справа значение  $t_f$ , при котором кривая  $F^{(-,+)}$  имеет только одну точку на оси  $x$ , а все остальные точки лежат ниже оси  $x$ . Для  $t_f \in [t_f^*, t_f^{**})$  множество  $\mathcal{G}(t_f, \mu)$  не является односвязным: есть “дырка”, ему не принадлежащая. Дырка вырождается в точку при  $t_f = t_f^{**}$ .

При  $t_f \geq t_f^{**}$  множество  $\mathcal{G}(t_f, \mu)$  вновь становится односвязным. Его граница полностью определяется начальной частью кривой  $F^{(+)}$  (до её первого пересечения оси  $x$ ) и соответствующей ей начальной частью кривой  $F^{(-)}$ .

Такой факт не является очевидным. Поясним его, используя свойство симметрии 4 из разд. 3.1. Обозначим взятое нами  $\mu$  через  $\bar{\mu}$ . Поскольку форма границы множества  $\mathcal{G}(t_f, \mu)$  определяется только произведением  $t_f \cdot \mu$ , то вместо увеличения  $t_f$  будем увеличивать  $\mu$ , начиная с  $\bar{\mu}$ . В этом случае полагаем  $t_f = t_f^{**}$  зафиксированным. Понятно, что  $\mathcal{G}(t_f^{**}, \bar{\mu}) \subset \mathcal{G}(t_f^{**}, \mu)$  при  $\mu \geq \bar{\mu}$ . Опираясь на это, устанавливаем, что граница множества  $\mathcal{G}(t_f^{**}, \mu)$  при  $\mu \geq \bar{\mu}$  определяется только кривой  $F^{(+)}$  до точки её первого пересечения оси  $x$  и соответствующим симметричным относительно оси  $x$  участком кривой  $F^{(-)}$ .

3) На рис. 16 показана последовательность множеств  $\mathcal{G}(t_f, \mu)$  для  $\mu = 1$  и шести значений  $t_f = (0.5\pi)^2, (\pi)^2, (1.5166\pi)^2, (1.6843\pi)^2, (1.8166\pi)^2, (2\pi)^2$ . Каждое множество изображено в своём масштабе. Значение  $t_f = (1.5166\pi)^2$  соответствует ситуации, когда кривая  $F^{(+)}$  касается оси  $x$  сверху (соответственно, кривая  $F^{(-)}$  даёт касание снизу). При  $t_f = (1.6843\pi)^2$  сочленение кривых  $F^{(+)}$  и  $F^{(-,+)}$  (соответственно, кривых  $F^{(-)}$  и  $F^{(+,-)}$ ) происходит в начале координат. Для  $t_f = (1.8166\pi)^2$  граница “дырки” (не принадлежащей  $\mathcal{G}(t_f, \mu)$ ) вырождается в точку. При дальнейшем увеличении  $t_f$  множество  $\mathcal{G}(t_f, \mu)$  является односвязным. Его граница полностью определяется частями кривых  $F^{(+)}$  и  $F^{(-)}$ .

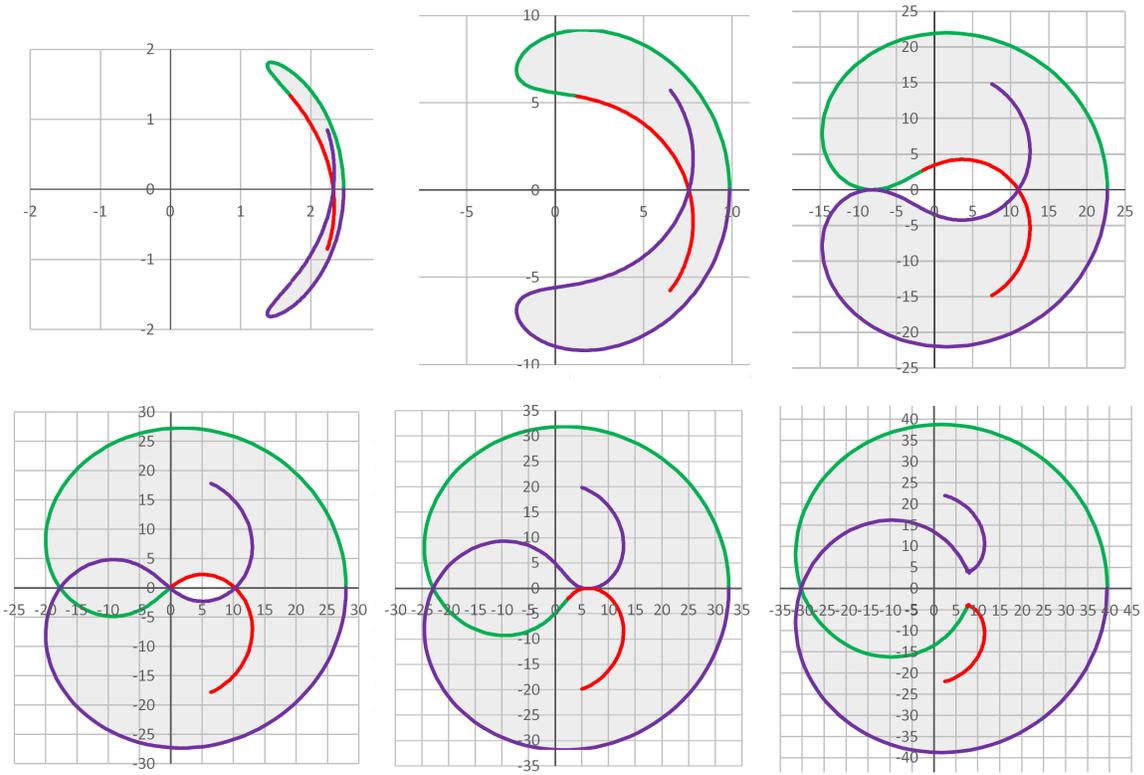


Рис. 16. Примеры множеств достижимости  $\mathcal{G}(t_f, \mu)$  при интегральном ограничении на управление

Линии, показанные на рис. 16, составлены из кривых  $F^{(+)}$ ,  $F^{(-,+)}$ ,  $F^{(-)}$ ,  $F^{(+,-)}$ . Их точки удовлетворяют необходимым условиям ПМП для движений, ведущих на  $\partial\mathcal{G}(t_f, \mu)$  (Теорема 4.1). Далее с использованием Лемм 4.2, 4.4, 4.7 для получения границы производится отбрасывание некоторых частей этих кривых. Итоговое множество  $\mathcal{G}(t_f, \mu)$  выделено серой заливкой.

4) На рис. 17 изображены множества  $\mathcal{G}(t_f, \mu)$  при геометрическом ограничении  $|u(t)| \leq 1$  для шести значений  $t_f = 0.8\pi, 1.3\pi, 1.814\pi, 2\pi, 2.178\pi, 2.4\pi$ , которые подобраны так, чтобы была видна структурная аналогия со случаем интегрального ограничения. Принципиальное отличие в случае геометрического ограничения состоит в следующем: если значение  $t_f$  меньше момента исчезновения дырки, то любое

$\varphi$ -сечение  $G_\varphi(t_f, \mu)$ ,  $\varphi \in (-\varphi_{\max}, \varphi_{\max}) = (-t_f, t_f)$  зацепляется двумя точками с границей множества  $\mathcal{G}(t_f, \mu)$ . При этом одна точка находится на верхней (или нижней) кривой внешней границы. Эта кривая является эвольвентой. Другая точка находится на верхней (или нижней) кривой внутренней границы, которая является кардиоидой. Таким образом, при геометрическом ограничении на внешней кривой отсутствует участок, состоящий из парных точек, каждая из которых зацепляется с одним и тем же (соответствующим данной паре)  $\varphi$ -сечением  $G_\varphi(t_f, \mu)$ .

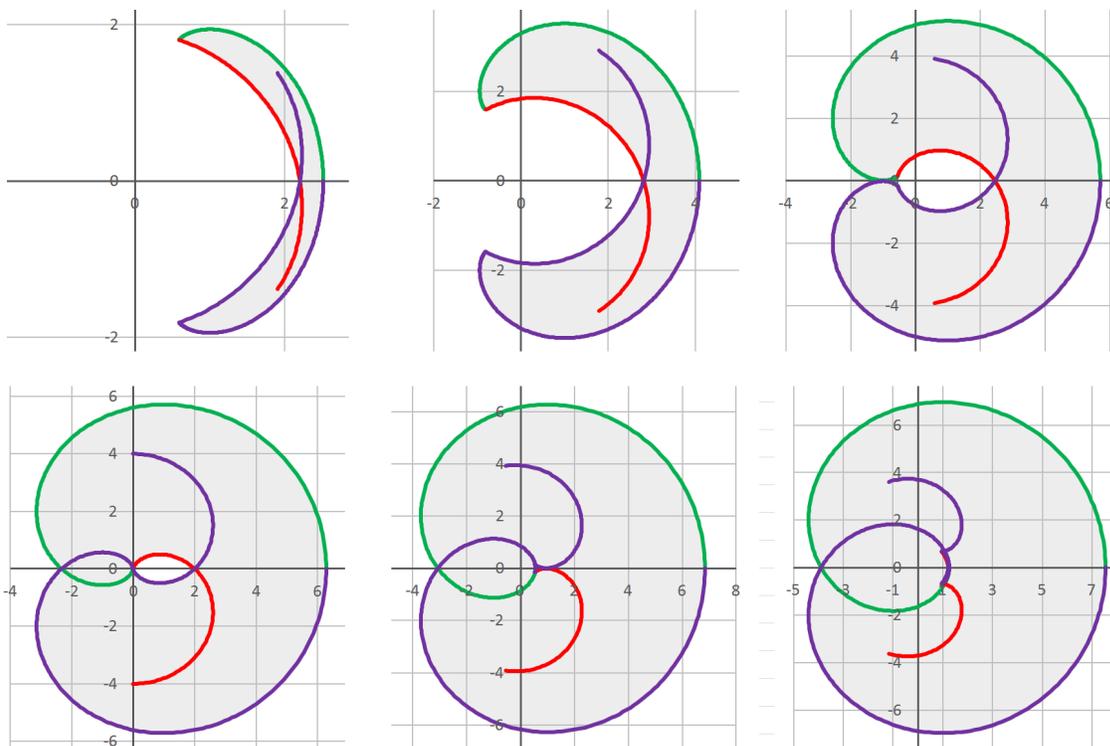


Рис. 17. Примеры множеств достижимости  $\mathcal{G}(t_f, \mu)$  при геометрическом ограничении на управление

Точки кривых, показанных на рис. 17, удовлетворяют необходимым условиям ПМП для движений, ведущих на  $\partial\mathcal{G}(t_f, \mu)$  при геометрическом ограничении на управление. После отбрасывания некоторых частей этих кривых (с использованием дополнительных утверждений из [4], уточняющих необходимые условия) получаем множество  $\mathcal{G}(t_f, \mu)$ , выделенное серой заливкой.

## 7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Работа посвящена теоретическому и численному изучению двумерного множества достижимости “в момент” машины Дубинса на плоскости геометрических координат  $x, y$  при квадратичном интегральном ограничении на скалярное управление. Исследование опирается на факты, полученные ранее для трёхмерного множества достижимости в координатах  $x, y, \varphi$ , где  $\varphi$  — угол наклона вектора скорости.

Структура двумерного множества достижимости хорошо известна в случае геометрического ограничения на управление. В статье приведён анализ схожести и отличия структур множества достижимости при интегральном ограничении на управление от множества достижимости при геометрическом ограничении.

Работа может быть полезна при решении различных оптимальных задач для машины Дубинса при интегральном ограничении на управление, в частности, при решении задач быстродействия.

Дальнейшее продвижение в исследовании двумерного множества достижимости может быть связано с аналитическим описанием его границы с использованием эллиптических функций.

## Благодарности

Авторы благодарят Рецензента за полезные замечания.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Shalumov, V., Merkulov, G., Shima, T., “Delayed Decision Guidance in an Integrated Midcourse-Terminal Engagement for Conventional Interceptors,” in “2024 32nd Mediterranean Conference on Control and Automation (MED),” 2024, pp. 752–757, doi:10.1109/MED61351.2024.10566176.
- [2] Buzikov, M., “Computing the Minimum-Time Interception of a Moving Target,” *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 202, 2024, pp. 975–995, doi:10.1007/s10957-024-02487-2.
- [3] Бердышев, Ю. И., “Синтез оптимального управления для одной системы 3-го порядка,” *Вопросы анализа нелинейных систем автоматического управления*, Свердловск: Институт математики и механики УНЦ АН СССР, 1973, с. 91–101.
- [4] Cockayne, E. J. Hall, G. W. C., “Plane Motion of a Particle Subject to Curvature Constraints,” *SIAM Journal on Control and Optimization*, Vol. 13, No. 1, 1975, pp. 197–220.
- [5] Эйлер, Л., *Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума, либо минимума или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле*, Гостехиздат, М.; Л.:, 1934.
- [6] Levien, R., “The elastica: a mathematical history,” *Electrical Engineering and Computer Sciences University of California at Berkeley, Technical Report No. UCB/EECS-2008-103*, 2008.
- [7] Ардентов, А. А. Сачков, Ю. Л., “Решение задачи Эйлера об эластике,” *Автомат. и телемех.*, № 4, 2009, с. 78–88.
- [8] Ардентов, А. А., “Кратные решения в задаче Эйлера об эластике,” *Автомат. и телемех.*, № 7, 2018, с. 22–40.
- [9] Miura, T., “Polar tangential angles and free elasticae,” *Mathematics in Engineering*, Vol. 3, 2021, pp. 1–12, doi:10.3934/mine.2021034.
- [10] Merkulov, G., Turetsky, V., Shima, T., “Non-Linear-Quadratic Optimal Control Problem for a Unicycle: Maximin Solution,” in “2024 UKACC 14th International Conference on Control (CONTROL),” , 2024, pp. 287–292, doi:10.1109/CONTROL60310.2024.10532056.
- [11] Гусев, М. И. Зыков, И. В., “Об экстремальных свойствах граничных точек множеств достижимости управляемых систем при интегральных ограничениях,” *Труды Института математики и механики УрО РАН*, Том. 23, № 1, 2017, с. 103–115, doi:10.21538/0134-4889-2017-23-1-103-115.
- [12] Patsko, V. S., Trubnikov, G. I., Fedotov, A. A., “Reachable Set of the Dubins Car with an Integral Constraint on Control,” *Doklady Mathematics, Suppl. 1*, Vol. 108, 2023, pp. S34–S41, doi:10.1134/S106456242360080X.
- [13] Patsko, V. S., Trubnikov, G. I., Fedotov, A. A., “Numerical study of a three-dimensional reachable set for a Dubins car under an integral control constraint,” *Commun. Optim. Theory*, 2025 (2025), 24, pp. 1–33, doi:10.23952/cot.2026.5.

- [14] Зыков, И. В., “О задаче достижимости для нелинейной управляемой системы с интегральными ограничениями,” *CEUR Workshop Proceedings*, Том. 1894, 2017, с. 88–97.
- [15] Зеликин, М. И., “Теория и приложения задачи об эйлеровых эластичах,” *УМН*, Том. 67, вып. 2, 2012, с. 93–108, doi:10.4213/gm9473.